PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 99(113) (2016), 139–154 DOI: 10.2298/PIM1613139R

К ТЕОРИИ ПЛОЩАДЕЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Л. Н. Ромакина

Посвящается 25-летию моей безвременно ушедшей дочери Светланы.

Аннотация. Гиперболическая плоскость $\widehat{H}$ положительной кривизны является проективной моделью плоскости де Ситтера. В статье предложены способы измерения площадей фигур плоскости $\widehat{H}$. Описаны циклические ортогональные системы координат. Одно семейство координатных линий таких систем образовано концентрическими циклами (гиперболическими циклами, эллиптическими циклами или орициклами). Другое семейство координатных линий образовано осями данных циклов. Получены формулы для вычисления площадей фигур плоскости $\widehat{H}$.

A hyperbolic plane $\widehat{H}$ of positive curvature is the projective model of the de Sitter plane. In article the ways of measurement of the figures areas of the plane $\widehat{H}$ are offered. The cyclic orthogonal coordinate systems are described. One family of coordinate curves in such systems form by concentric cycles (by hyperbolic cycles, elliptic cycles or oricycles). Other family of coordinate curves form by the axes of these cycles. The formulas for the calculation of the figures areas of the plane $\widehat{H}$ are received.

1. Введение

1.1. В проективной модели Кэли – Клейна *гиперболическая плоскость* $\widehat{H}$ *положительной кривизны* является внешней относительно овальной линии γ, называемой *абсолютом* плоскости, областью *расширенной гиперболической плоскости* H^2, т. е. проективной плоскости P_2 с фиксированной линией γ. Прямые плоскости $\widehat{H}$ относятся к трем типам: *гиперболические* (*эллиптические*) прямые пересекают линию γ в двух действительных (мнимо сопряженных) точках, *параболические* прямые касаются линии γ. На внутренней относительно γ области плоскости H^2 реализуется полная плоскость Лобачевского. Плоскость $\widehat{H}$ гомеоморфна бескрайнему листу Мёбиуса, имеет общую с плоскостью Лобачевского фундаментальную группу G (группу проективных автоморфизмов овальной линии γ) и является проективной моделью двумерного пространства де Ситтера. В псевдоевклидовом пространстве R^3_1 плоскость $\widehat{H}$ может быть реализована на сфере действительного радиуса ρ со склеенными диаметрально

2010 *Mathematics Subject Classification:* Primary 51F05.
Communicated by Vladimir Dragović.

противоположными точками. Число ρ, где $\rho \in \mathbb{R}_+$, называют *радиусом кривизны*, число $1/\rho^2$—*кривизной* плоскости $\widehat{H}$ [**8**] – [**10**].

В работе [**18**] в ортогональной гиперциклической системе координат $C_{\mathtt{h}}$ плоскости $\widehat{H}$ доказана формула площади прямоугольного трехреберника, с применением которой в статьях [**12**] – [**14**] получены первые формулы для вычисления площадей различных фигур данной плоскости. В тезисах [**15**] кратко описана ортогональная орициклическая система координат $C_{\mathtt{o}}$, с ее помощью в статье [**17**] вычислена площадь правильной орициклической n-трапеции, ячейки в нормальных моноэдральных разбиениях плоскости $\widehat{H}$.

В данной работе, учитывая возрастающий интерес к вычислению объемов, в частности, площадей, фигур в пространствах постоянной кривизны (см., например, [**1**] – [**3**], [**6**], [**20**] – [**25**]), обобщим основные факты теории площадей плоскости $\widehat{H}$, введем новые ортогональные циклические системы координат $HC_{\mathtt{r}}$ и $EC_{\mathtt{r}}$, подробнее опишем систему координат $C_{\mathtt{o}}$. Получим новые формулы для вычисления площадей фигур.

Отметим, что выбор проективной модели Кэли – Клейна плоскости $\widehat{H}$ позволяет использовать для построения теории площадей аналитический метод (метод проективных координат), который по сравнению с синтетическим методом (см., например, [**4, 5, 7**]) значительно облегчает методическую задачу введения понятия площади и вывод формул для вычисления площадей фигур.

Напомним, что на плоскости $\widehat{H}$ существуют циклы четырех типов: гиперциклы, гиперболические и эллиптические циклы, орициклы [**10, 11, 16, 19**]. Доказано, что в каждой точке цикла его ось ортогональна касательной к циклу в данной точке [**10**, теоремы 2.4.4, 2.4.12, 2.4.22]. Отмеченное свойство циклов используем при построении на $\widehat{H}$ ортогональных циклических систем координат, аналогов полярной системы координат плоскости евклидовой.

1.2. Пучок прямых плоскости $\widehat{H}$ назовем *гиперболическим* (*эллиптическим*), если его центр является собственной (несобственной) точкой данной плоскости. Пучок прямых с центром на абсолюте назовем *параболическим*. По типу расположения отностельно абсолюта все углы плоскости $\widehat{H}$ можно отнести к одному из 15 инвариантных относительно группы G типов. Углы шести типов можно измерить с помощью абсолюта, причем углам трех типов можно поставить в соответствие вещественные меры [**9**, глава 4]. В табл. 1 представим типы углов плоскости $\widehat{H}$. Для типа прямой (пучка) используем обозначения: Г (г)—гиперболический, Э (э)—эллиптический, П (п)— параболический.

2. Собственные координаты точек на плоскости $\widehat{H}$

Абсолютная овальная линия γ расширенной гиперболической плоскости H^2 в каждом каноническом репере R^* (R) первого (второго) типа задана уравнением $\varphi_1 = 0$ $(\varphi_2 = 0)$, где φ_1 (φ_2)—метрическая квадратичная форма плоскости H^2 в репере R^* (R) [**9**, глава 4].

Для вещественных проективных координат $(x_1 : x_2 : x_3)$ точки в репере R^* (или R) неравенство $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) > 0$ (или $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) < 0$ соответственно)

Таблица 1. Типы и меры углов плоскости $\widehat{H}$

<table>
<tr><th rowspan="2">№
п/п</th><th rowspan="2">Тип угла</th><th rowspan="2">Мера υ ($\tilde{\upsilon}$)
угла $\widehat{ab}$</th><th rowspan="2">Тип
пучка</th><th colspan="2">Тип
прямой</th></tr>
<tr><th>a</th><th>b</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Валиана</td><td>—</td><td rowspan="2">г</td><td rowspan="2">П</td><td rowspan="2">П</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Полуковалиана</td><td>—</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Гиперболический флаг</td><td>—</td><td rowspan="2">г</td><td rowspan="3">П</td><td rowspan="3">Г</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Гиперболический псевдофлаг</td><td>—</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Параболический флаг</td><td>—</td><td>п</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Эллиптический флаг</td><td>—</td><td rowspan="2">г</td><td rowspan="2">П</td><td rowspan="2">Э</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Эллиптический псевдофлаг</td><td>—</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Полуплоскость</td><td>$\upsilon \in [0;\pi]$</td><td>э</td><td rowspan="5">Г</td><td rowspan="5">Г</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Гиперболический угол</td><td>$\upsilon \in \mathbb{R}_+$</td><td rowspan="2">г</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Гиперболический псевдоугол</td><td>$\tilde{\upsilon} = i\,\pi + \upsilon,\ \upsilon \in \mathbb{R}_+$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Полоса</td><td>—</td><td rowspan="2">п</td></tr>
<tr><td>12</td><td>Псевдополоса</td><td>—</td></tr>
<tr><td>13</td><td>Квазиугол</td><td>$\tilde{\upsilon} = \epsilon\upsilon + i\,\pi/2,\ \upsilon \in \mathbb{R}_+$,
для h-квазиугла $\epsilon = 1$,
для e-квазиугла $\epsilon = -1$,
для прямого —$\epsilon = 0$</td><td>г</td><td>Г</td><td>Э</td></tr>
<tr><td>14</td><td>Эллиптический угол</td><td>$\upsilon \in \mathbb{R}_+$</td><td rowspan="2">г</td><td rowspan="2">Э</td><td rowspan="2">Э</td></tr>
<tr><td>15</td><td>Эллиптический псевдоугол</td><td>$\tilde{\upsilon} = i\,\pi - \upsilon,\ \upsilon \in \mathbb{R}_+$</td></tr>
</table>

определяет собственную область гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны, т.е. внешнюю отностельно линии γ область плоскости H^2 (см. [**9**, формулы (4.2), (4.7)]).

Проективные координаты точки плоскости H^2 определены с точностью до общего ненулевого множителя и не обеспечивают однозначного вычисления длин дуг линий и площадей фигур. Проведем инвариантную относительно преобразований группы G нормировку координат точек на H^2.

Пусть (x_p)—вещественные проективные координаты точки M плоскости H^2 в проективном репере R^* (или R), $p = 1, 2, 3$. *Собственными* координатами точки M на плоскости $\widehat{H}$ в репере R^* (R) назовем определенную с точностью до знака упорядоченную тройку чисел

$$\bar{x}_p = \pm\,\rho x_p \big/ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2} \qquad \Big(\bar{x}_p = \pm\,\rho x_p \big/ \sqrt{x_3^2 - x_1 x_2}\,\Big). \tag{2.1}$$

Введенная нормировка устанавливает взаимно однозначное соответствие между собственными точками плоскости $\widehat{H}$ и определенными с точностью до знака упорядоченными тройками действительных чисел. Координаты точек абсолюта в нормировке (2.1) бесконечно велики, а каждой несобственной для $\widehat{H}$ точке соответствует тройка мнимых чисел. Для собственных координат $(\bar{x}_p)$ собственной точки плоскости $\widehat{H}$ в репере R^* (R) выполняется равенство

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 = \rho^2 \qquad \left(\bar{x}_3^2 - \bar{x}_1\bar{x}_2 = \rho^2\right). \tag{2.2}$$

3. Линейные элементы плоскости $\widehat{H}$

Рассмотрим на плоскости $\widehat{H}$ конечную гладкую линию ξ, заданную гладкими функциями

$$\bar{x}_p = \bar{x}_p(t), \quad p = 1, 2, 3, \quad t \in I, \quad I \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

касательная в каждой точке которой принадлежит одному непараболическому типу. Линию ξ назовем *гиперболической* (*эллиптической*), если каждая касательная к ней является гиперболической (эллиптической) прямой.

В параметрических уравнениях (3.1) $(\bar{x}_p)$—собственные координаты (2.1) текущей точки M линии ξ в каноническом репере R^* (R), удовлетворяющие соответствующему равенству из (2.2).

Дифференцируя равенство (2.2), в каноническом репере R^* (R) получим:

$$\bar{x}_1 \frac{d\bar{x}_1}{dt} + \bar{x}_2 \frac{d\bar{x}_2}{dt} - \bar{x}_3 \frac{d\bar{x}_3}{dt} = 0 \qquad \Bigl(\bar{x}_1 \frac{d\bar{x}_2}{dt} + \bar{x}_2 \frac{d\bar{x}_1}{dt} - 2\bar{x}_3 \frac{d\bar{x}_3}{dt} = 0\Bigr). \tag{3.2}$$

Каждое из равенств (3.2) на основании условий (4.53), (4.54) из [**9**] означает, что точка dM с координатами $\bigl(\frac{d\bar{x}_1}{dt} : \frac{d\bar{x}_2}{dt} : \frac{d\bar{x}_3}{dt}\bigr)$, принадлежащая касательной к линии ξ в точке M, ортогональна M и лежит на поляре этой точки относительно абсолюта. Координаты $\bigl(\frac{d\bar{x}_1}{dt} : \frac{d\bar{x}_2}{dt} : \frac{d\bar{x}_3}{dt}\bigr)$ не являются собственными в смысле (2.1), но определены однозначно собственными координатами (3.1) точки M.

По условию касательная MdM к линии ξ—непараболическая прямая, она является гиперболической (эллиптической) тогда и только тогда, когда точка dM является несобственной (собственной) для плоскости $\widehat{H}$, значит, тогда и только тогда, когда для координат $\bigl(\frac{d\bar{x}_1}{dt} : \frac{d\bar{x}_2}{dt} : \frac{d\bar{x}_3}{dt}\bigr)$ точки dM в репере R^* выполняется неравенство

$$\Bigl(\frac{d\bar{x}_1}{dt}\Bigr)^2 + \Bigl(\frac{d\bar{x}_2}{dt}\Bigr)^2 - \Bigl(\frac{d\bar{x}_3}{dt}\Bigr)^2 < 0 \quad \biggl(\Bigl(\frac{d\bar{x}_1}{dt}\Bigr)^2 + \Bigl(\frac{d\bar{x}_2}{dt}\Bigr)^2 - \Bigl(\frac{d\bar{x}_3}{dt}\Bigr)^2 > 0\biggr),$$

а в репере R—неравенство

$$\Bigl(\frac{d\bar{x}_3}{dt}\Bigr)^2 - \frac{d\bar{x}_1}{dt}\frac{d\bar{x}_2}{dt} < 0 \quad \biggl(\Bigl(\frac{d\bar{x}_3}{dt}\Bigr)^2 - \frac{d\bar{x}_1}{dt}\frac{d\bar{x}_2}{dt} > 0\biggr).$$

Линейный гиперболический (*эллиптический*) *элемент* $dl_{\mathtt{h}}$ $(dl_{\mathtt{e}})$ плоскости $\widehat{H}$ определим в репере R^* равенством

$$\begin{gathered} dl_{\mathtt{h}} = \sqrt{-\varphi_1(dM)}\,dt = \sqrt{-(d\bar{x}_1)^2 - (d\bar{x}_2)^2 + (d\bar{x}_3)^2} \\ \Bigl(dl_{\mathtt{e}} = \sqrt{\varphi_1(dM)}\,dt = \sqrt{(d\bar{x}_1)^2 + (d\bar{x}_2)^2 - (d\bar{x}_3)^2}\,\Bigr), \end{gathered} \tag{3.3}$$

а в репере R—равенством

$$\begin{gathered} dl_{\mathtt{h}} = \sqrt{\varphi_2(dM)}\,dt = \sqrt{d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 - (d\bar{x}_3)^2} \\ \Bigl(dl_{\mathtt{e}} = \sqrt{-\varphi_2(dM)}\,dt = \sqrt{(d\bar{x}_3)^2 - d\bar{x}_1 d\bar{x}_2}\,\Bigr). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Пусть точки A, B на линии ξ имеют параметры соответственно t_1, t_2, где $[t_1, t_2] \subset I$. *Длиной дуги* AB гиперболической (эллиптической) линии ξ назовем число $l_{\mathtt{h}}(AB)$ ($l_{\mathtt{e}}(AB)$), заданное в репере R^* выражением

$$(3.5)\qquad l_{\mathtt{h}}(AB)=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{-\varphi_1(dM)}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{-\Big(\frac{d\bar{x}_1}{dt}\Big)^2-\Big(\frac{d\bar{x}_2}{dt}\Big)^2+\Big(\frac{d\bar{x}_3}{dt}\Big)^2}\,dt$$

$$\bigg(l_{\mathtt{e}}(AB)=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\varphi_1(dM)}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\Big(\frac{d\bar{x}_1}{dt}\Big)^2+\Big(\frac{d\bar{x}_2}{dt}\Big)^2-\Big(\frac{d\bar{x}_3}{dt}\Big)^2}\,dt\bigg),$$

а в репере R—выражением

$$(3.6)\qquad l_{\mathtt{h}}(AB)=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\varphi_2(dM)}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\frac{d\bar{x}_1}{dt}\frac{d\bar{x}_2}{dt}-\Big(\frac{d\bar{x}_3}{dt}\Big)^2}\,dt$$

$$\bigg(l_{\mathtt{e}}(AB)=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{-\varphi_2(dM)}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\Big(\frac{d\bar{x}_3}{dt}\Big)^2-\frac{d\bar{x}_1}{dt}\frac{d\bar{x}_2}{dt}}\,dt\bigg).$$

В случае, когда линия ξ принадлежит гиперболической (эллиптической) прямой, длина $l_{\mathtt{h}}(AB)$ ($l_{\mathtt{e}}(AB)$)) ее дуги AB, вычисленная по соответствующей формуле из (3.5), (3.6), равна длине отрезка AB.

4. Элемент площади плоскости $\widehat{H}$

Пусть точка M с собственными координатами $(\bar{x}_p)$ в репере R^* (R) принадлежит некоторой области Q плоскости $\widehat{H}$, будем допускать и тот случай, когда область Q совпадает со всей плоскостью $\widehat{H}$. Зададим на области Q криволинейную систему координат C гладкими функциями

$$(4.1)\qquad \bar{x}_p=\bar{x}_p(u,v),\quad p=1,2,3,\quad (u,v)\in\overline{Q}\subset\mathbb{R}^2.$$

Условимся, что все координатные линии семейства u (v), т.е. все линии, заданные уравнениями (4.1) при фиксированном значении v (u), являются на области Q линиями одного типа, гиперболическими или эллиптическими.

Криволинейную систему координат C на области Q назовем *ортогональной*, если в каждой точке области Q координатная линия семейства u ортогональна координатной линии семейства v.

В силу равенств (2.2) точки

$$(4.2)\qquad M_u=\frac{\partial M}{\partial u}=\Big(\frac{\partial\bar{x}_1}{\partial u}:\frac{\partial\bar{x}_2}{\partial u}:\frac{\partial\bar{x}_3}{\partial u}\Big),\quad M_v=\frac{\partial M}{\partial v}=\Big(\frac{\partial\bar{x}_1}{\partial v}:\frac{\partial\bar{x}_2}{\partial v}:\frac{\partial\bar{x}_3}{\partial v}\Big),$$

принадлежащие касательным к координатым линиям соответственно u и v в точке M, ортогональны точке M. Следовательно, прямая M_uM_v является полярой точки M относительно абсолюта. Координаты из (4.2) точек M_u, M_v собственными в смысле (2.1) не являются, но определены собственными координатами (4.1) точки M.

Значения форм $\varphi_j,\overline{\varphi}_j$, $j=1,2$, от координат (4.2) точек M_u, M_v обозначим следующим образом:

$$(4.3)\qquad \gamma_{uu}=\varphi_j\Big(\frac{\partial\bar{x}_1}{\partial u},\frac{\partial\bar{x}_2}{\partial u},\frac{\partial\bar{x}_3}{\partial u}\Big),\quad \gamma_{vv}=\varphi_j\Big(\frac{\partial\bar{x}_1}{\partial v},\frac{\partial\bar{x}_2}{\partial v},\frac{\partial\bar{x}_3}{\partial v}\Big),$$

$$\gamma_{uv}=\overline{\varphi}_j\bigg(\Big(\frac{\partial\bar{x}_1}{\partial u},\frac{\partial\bar{x}_2}{\partial u},\frac{\partial\bar{x}_3}{\partial u}\Big),\Big(\frac{\partial\bar{x}_1}{\partial v},\frac{\partial\bar{x}_2}{\partial v},\frac{\partial\bar{x}_3}{\partial v}\Big)\bigg).$$

Индекс $j = 1$ ($j = 2$) в обозначениях (4.3) соответствует реперу R^* (R).

Криволинейная система координат C на области Q является ортогональной тогда и только тогда, когда в каждой точке M области Q ортогональны прямые MM_u и MM_v, т.е. тогда и только тогда, когда в каждой точке M области Q выполняется равенство $\gamma_{uv} = 0$.

В репере R^*, R справедливо соответственно равенство

$$\gamma_{uv}^2 - \gamma_{uu}\gamma_{vv} = \varphi_1(a_1, a_2, a_2), \qquad \gamma_{uv}^2 - \gamma_{uu}\gamma_{vv} = -\varphi_2(b_1, b_2, b_2), \tag{4.4}$$

где

$$a_1 = \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_3}{\partial v} - \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial v}, \qquad b_1 = \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_3}{\partial v} - \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial v},$$
$$a_2 = \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial v} - \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_3}{\partial v}, \qquad b_2 = \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial v} - \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_3}{\partial v},$$
$$a_3 = \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial v} - \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial v}, \qquad b_3 = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial v} - \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial v}\Big).$$

Заметим, что на основании равенств (4.53), (4.54) из **[9]** точка N, заданная в репере R^*, R координатами соответственно $(a_1 : a_2 : a_3)$, $(b_1 : b_2 : b_3)$, ортогональна и точке M_u, и точке M_v. Следовательно, N является полюсом прямой M_uM_v относительно абсолюта. В силу единственности полюса точка N совпадает с точкой M. Поэтому характеристики координат $(\bar{x}_p)$ и (a_p) в репере R^* (или координат $(\bar{x}_p)$ и (b_p) в репере R) являются числами одного знака. Для координат $(\bar{x}_p)$ собственной точки плоскости $\widehat{H}$ в репере R^* (R) выполняется неравенство $\varphi_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) > 0$ (или неравенство $\varphi_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) < 0$ соответственно). Таким образом, согласно выражению (4.4) в репере R^* (R) справедливо неравенство $\gamma_{uv}^2 - \gamma_{uu}\gamma_{vv} > 0$.

Число

$$dS = \sqrt{\gamma_{uv}^2 - \gamma_{uu}\gamma_{vv}}\; du\, dv \tag{4.5}$$

назовем *элементом площади* плоскости $\widehat{H}$. Выясним геометрический смысл числа dS. Рассмотрим все возможные случаи для заданной системы координат.

1. Пусть все координатные линии системы C являются гиперболическими (эллиптическими). В этом случае гиперболическими (эллиптическими) являются касательные к координатным линиям прямые MM_u, MM_v, а точки M_u и M_v являются несобственными (собственными) на плоскости $\widehat{H}$.

Гиперболический (эллиптический) угол $\overline{\alpha}$ между прямыми MM_u, MM_v назовем *углом между координатными линиями* u, v. Отрезок M_uM_v плоскости Лобачевского (плоскости $\widehat{H}$) является основанием угла $\overline{\alpha}$. По теореме 4.7.1 из **[9]** мера α, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, угла $\overline{\alpha}$ равна отношению длины отрезка M_uM_v к радиусу кривизны ρ плоскости $\widehat{H}$. По формулам (4.55), (4.56) из **[9]** в реперах R^*, R получаем:

$$\operatorname{ch}\alpha = \pm\frac{\gamma_{uv}}{\sqrt{\gamma_{uu}\gamma_{vv}}}, \qquad \operatorname{sh}\alpha = \frac{\sqrt{\gamma_{uv}^2 - \gamma_{uu}\gamma_{vv}}}{\sqrt{\gamma_{uu}\gamma_{vv}}}.$$

Следовательно, $dS = \operatorname{sh}\alpha\sqrt{\gamma_{uu}\gamma_{vv}}\, du\, dv$. Поэтому в случае гиперболических (эллиптических) координатных линий системы C в координатах (4.2) точек

M_u, M_v репера R^* справедливо выражение

$$dS = \operatorname{sh}\alpha\sqrt{-\varphi_1(M_u)}\,du\,\sqrt{-\varphi_1(M_v)}\,dv \tag{4.6}$$
$$\bigl(dS = \operatorname{sh}\alpha\sqrt{\varphi_1(M_u)}\,du\,\sqrt{\varphi_1(M_v)}\,dv\bigr),$$

аналогичное выражение в репере R имеет вид

$$dS = \operatorname{sh}\alpha\sqrt{\varphi_2(M_u)}\,du\,\sqrt{\varphi_2(M_v)}\,dv \tag{4.7}$$
$$\bigl(dS = \operatorname{sh}\alpha\sqrt{-\varphi_2(M_u)}\,du\,\sqrt{-\varphi_2(M_v)}\,dv\bigr).$$

Согласно выражениям (3.3), (3.4), (4.6), (4.7) в случае гиперболических (эллиптических) координатных линий справедливо утверждение: *элемент площади dS равен произведению длин дуг координатных линий, исходящих из точки плоскости и соответствующих бесконечно малым приращениям параметров u, v в данной точке, и гиперболического синуса величины угла между координатными линиями в данной точке.*

Отметим, что система координат, линии u и v в которой одного типа, не является ортогональной.

2. Предположим, что любые две координатные линии системы C, взятые из различных семейств u и v, принадлежат различным типам. Пусть для определенности линии u (v) являются гиперболическими (эллиптическими). В этом случае прямая MM_u (MM_v) является гиперболической (эллиптической), а точка M_u (M_v)—несобственной (собственной) на плоскости $\widehat{H}$.

Прямые MM_u, MM_v образуют два смежных квазиугла $\overline{\alpha}_1$, $\overline{\alpha}_2$, назовем их *углами между координатными линиями* u, v. Если система C ортогональная, то квазиуглы $\overline{\alpha}_1$, $\overline{\alpha}_2$ конгруэнтны, их меры равны $i\pi/2$. В этом случае $\gamma_{uv} = 0$ и элемент площади $dS = \sqrt{-\gamma_{uu}\gamma_{vv}}\,du\,dv$ в координатах (4.2) точек M_u, M_v в репере R^* (R) можно представить в виде

$$dS = \sqrt{-\varphi_1(M_u)}\,du\,\sqrt{\varphi_1(M_v)}\,dv \quad \bigl(dS = \sqrt{\varphi_2(M_u)}\,du\,\sqrt{-\varphi_2(M_v)}\,dv\bigr).$$

Поэтому на основании выражений (3.3), (3.4) справедливо утверждение: *в ортогональной криволинейной системе координат элемент площади dS равен произведению длин сторон криволинейного координатного прямоугольника, исходящих из точки плоскости и соответствующих бесконечно малым приращениям параметров u, v в данной точке.*

Если система C не является ортогональной, то меры α_1, α_2 квазиуглов $\overline{\alpha}_1$, $\overline{\alpha}_2$ отличаются знаком вещественной части и по теореме 4.7.1 из [**9**] однозначно определены длинами квазиотрезков между точками M_u, M_v. Пусть

$$\alpha_1 = \alpha + i\frac{\pi}{2}, \quad \alpha_2 = -\alpha + i\frac{\pi}{2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда в принятых обозначениях по формулам (4.55), (4.56) из [**9**] находим:

$$\operatorname{ch}\alpha_1 = -\operatorname{ch}\alpha_2 = \pm\frac{\gamma_{uv}}{\sqrt{\gamma_{uu}\gamma_{vv}}}, \quad \operatorname{sh}\alpha_1 = \operatorname{sh}\alpha_2 = i\operatorname{ch}\alpha = \frac{\sqrt{\gamma_{uv}^2 - \gamma_{uu}\gamma_{vv}}}{\sqrt{\gamma_{uu}\gamma_{vv}}}.$$

Следовательно, $dS = \operatorname{ch}\alpha\sqrt{-\gamma_{uu}\gamma_{vv}}\,du\,dv$.

В случае гиперболических (эллиптических) координатных линий u (v) в координатах (4.2) точек M_u, M_v репера R^* получаем выражение

$$dS = \operatorname{ch}\alpha\sqrt{-\varphi_1(M_u)}\,du\,\sqrt{\varphi_1(M_v)}\,dv, \tag{4.8}$$

а в координатах репера R—выражение

$$dS = \operatorname{ch}\alpha\sqrt{\varphi_2(M_u)}\,du\,\sqrt{-\varphi_2(M_v)}\,dv. \tag{4.9}$$

Согласно выражениям (3.3), (3.4), (4.8), (4.9) в случае гиперболических (эллиптических) координатных линий u (v) справедливо утверждение: *элемент площади dS равен произведению длин дуг координатных линий, исходящих из точки плоскости и соответствующих бесконечно малым приращениям параметров u, v в данной точке, и гиперболического косинуса вещественной части меры квазиугла между координатными линиями в данной точке.*

Пусть η—кусочно-гладкая двусторонняя линия плоскости $\widehat{H}$, F—гомеоморфная диску[1] фигура, ограниченная линией η, $F \subset \widehat{H}$, D—область изменения параметров u, v, соответствующая фигуре F. *Площадь* S фигуры F согласно выражению (4.5) определим равенством

$$S = \iint_D \sqrt{\gamma_{uv}^2 - \gamma_{uu}\gamma_{vv}}\,du\,dv. \tag{4.10}$$

5. Ортогональные циклические системы координат

5.1. Построение H-циклической системы координат. Пусть Ov—гиперболическая прямая плоскости $\widehat{H}$, а точка U—пересечение прямой Ov и поляры точки O относительно абсолюта (рис. 1). Выделим некоторые полуковалиану α точки O и принадлежащий ей гиперболический флаг β с вершиной в точке O и гиперболической стороной OU. На рисунке 1 полуковалиана α выделена серой заливкой. Пусть M—некоторая точка полуковалианы α. Полюс прямой Ov (MO) относительно абсолюта обозначим V (M_0), а ортогональную проекцию точки M на прямую UV—M_1. Согласно построению $M_1 = OM \cap UV$.

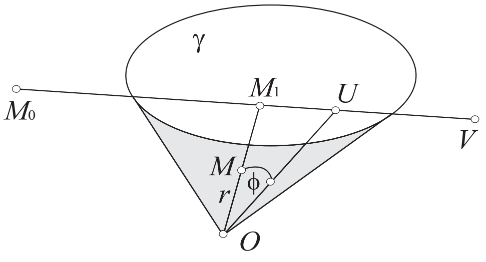

Рис. 1. Построение H-циклической системы координат

[1] *Диском* на плоскости $\widehat{H}$ назовем фигуру, гомеоморфную замыканию выпуклого эллипса [**10, 11**].

Каждой точке M полуковалианы α поставим в соответствие пару чисел (r, ϕ) следующим образом. Гиперболическое расстояние $|MO|$ между точками M, O обозначим ρr:

$$r = |MO|/\rho, \quad r \in \mathbb{R}_+. \tag{5.1}$$

Если точка M принадлежит (не принадлежит) гиперболическому флагу β, то меру гиперболического угла между прямыми OU, OM обозначим ϕ $(-\phi)$. Тогда по свойству мер отрезков и углов плоскости $\widehat{H}$ (см. теорему 4.7.1 из [**9**]) получаем:

$$\phi = |UM_1|/\rho \quad \bigl(\phi = -|UM_1|/\rho\bigr), \quad \phi \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

где $|UM_1|$—модуль длины отрезка UM_1 плоскости Лобачевского.

Совокупность объектов (точка O, прямая Ov, гиперболический флаг β) назовем *H-циклической системой координат плоскости $\widehat{H}$* и обозначим $HC_{\mathbf{r}}$.

Точку O назовем *началом*, прямую Ov—*осью* системы координат $HC_{\mathbf{r}}$. Пару чисел (r, ϕ) назовем *H-циклическими координатами точки* M, число r (ϕ)—*гиперболическим радиусом* (*гиперболическим углом*) точки M.

5.2. Построение E-циклической системы координат. Пусть Ou—эллиптическая прямая плоскости $\widehat{H}$, а точка V—пересечение прямой Ou и поляры точки O относительно абсолюта (рис. 2). Полюс прямой Ou относительно абсолюта обозначим U. Выделим некоторую полуплоскость α между прямыми OU, UV и эллиптический флаг β с эллиптической стороной OV. Каждой точке M валианы точки O поставим в соответствие пару чисел (r, ϕ) следующим образом. Ортогональную проекцию точки M на прямую UV обозначим M_1. По построению $M_1 = OM \cap UV$.

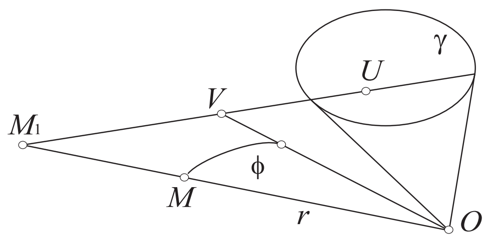

Рис. 2. Построение E-циклической системы координат

Если точка M принадлежит (не принадлежит) полуплоскости α, то эллиптическое расстояние $|MO|$ между точками M, O обозначим ρr $(-\rho r)$:

$$r = |MO|/\rho \quad \bigl(r = -|MO|/\rho\bigr), \quad -\pi/2 \leqslant r \leqslant \pi/2. \tag{5.3}$$

Если точка M принадлежит (не принадлежит) эллиптическому флагу β, то меру эллиптического угла между прямыми OV, OM обозначим ϕ $(-\phi)$. Тогда по свойству мер отрезков и углов плоскости $\widehat{H}$ [**9**, теорема 4.7.1] получаем:

$$\phi = |VM_1|/\rho \quad \bigl(\phi = -|VM_1|/\rho\bigr), \quad \phi \in \mathbb{R}, \tag{5.4}$$

где $|VM_1|$—длина гиперболического отрезка VM_1 плоскости $\widehat{H}$.

Совокупность объектов (точка O, прямая Ou, эллиптический флаг β) назовем *E-циклической системой координат* плоскости $\widehat{H}$ и обозначим $EC_{\mathfrak{r}}$. Точку O назовем *началом*, а прямую OV—*осью* системы координат $EC_{\mathfrak{r}}$. Пару чисел (r, ϕ) назовем *E-циклическими координатами* точки M, число r (ϕ)— *эллиптическим радиусом* (*эллиптическим углом*) точки M.

5.3. Связь циклических и собственных координат точки.

5.3.1. *Присоединенный репер.* Пусть задана циклическая система координат $HC_{\mathfrak{r}}$ или $EC_{\mathfrak{r}}$. В каждом случае согласно построению трехвершинник OUV является автополярным относительно абсолюта. Каждый канонический репер R^* первого типа, в котором первая вершина совпадает с точкой O, вторая—с точкой V, а третья—с точкой U, назовем *присоединенным* к заданной циклической системе координат. В присоединенном репере R^* точки O, U, V имеют координаты: $O(1:0:0)$, $\quad V(0:1:0)$, $\quad U(0:0:1)$.

Точку M в репере R^* зададим проективными координатами $(x_1 : x_2 : x_3)$ и собственными координатами $(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3)$ (2.1), а в каждой циклической системе координат—парой чисел (r, ϕ). Проекция M_1 точки M на прямую UV имеет в репере R^* проективные координаты $(0 : x_2 : x_3)$.

5.3.2. *Связь H-циклических и собственных координат точки.* Пусть точка M принадлежит полуковалиане точки O. По второй формуле (4.32) из **[9]**, применяя обозначения (5.1), (5.2), находим:

$$\operatorname{ch} r = |x_1| / \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2}, \qquad \operatorname{ch} \phi = |x_3| / \sqrt{x_3^2 - x_2^2}. \tag{5.5}$$

Применяя первые формулы из (2.1), первое равенство из (2.2) и выражения (5.5), получаем:

$$\bar{x}_1 = \rho \operatorname{ch} r, \quad \bar{x}_2 = \rho \operatorname{sh} r \operatorname{sh} \phi, \quad \bar{x}_3 = \rho \operatorname{sh} r \operatorname{ch} \phi, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \phi \in \mathbb{R}. \tag{5.6}$$

Параметризацию полуковалианы точки O плоскости $\widehat{H}$, заданную формулами (5.6), назовем *$(HC_{\mathfrak{r}})$-циклической.*

5.3.3. *Связь E-циклических и собственных координат точки.* Пусть точка M принадлежит валиане точки O. По формулам (4.32) из **[9]**, применяя обозначения (5.3), (5.4), находим:

$$\cos r = |x_1| / \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2}, \qquad \operatorname{ch} \phi = |x_2| / \sqrt{x_2^2 - x_3^2}. \tag{5.7}$$

Применяя первые формулы из (2.1), первое равенство из (2.2) и выражения (5.7), получаем:

$$\begin{gathered} \bar{x}_1 = \rho \cos r, \quad \bar{x}_2 = \rho \sin r \operatorname{ch} \phi, \quad \bar{x}_3 = \rho \sin r \operatorname{sh} \phi, \\ -\pi/2 \leqslant r \leqslant \pi/2, \quad \phi \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Параметризацию валианы точки O плоскости $\widehat{H}$, заданную формулами (5.8), назовем *$(EC_{\mathfrak{r}})$-циклической.*

5.4. Координатные линии в системах координат $HC_{\mathtt{r}}$ и $EC_{\mathtt{r}}$. Пусть задана система координат $HC_{\mathtt{r}}$. Множество всех точек полуковалианы α точки O, гиперболическое расстояние от которых до точки O равно постоянному числу ρr_0, согласно выражениям координат (5.6) принадлежит гиперболическому циклу радиуса ρr_0, заданному в репере R^* уравнением $x_1^2 \operatorname{th}^2 r_0 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, $r_0 \in \mathbb{R}_+$.

Следовательно, координатными линиями ϕ в системе $HC_{\mathtt{r}}$ являются ветви гиперболических циклов, принадлежащие полуковалиане с заданной параметризацией (5.6). Координатные линии r в системе $HC_{\mathtt{r}}$—гиперболические прямые пучка с центром в точке O, являющиеся осями циклов, содержащих координатные линии ϕ.

Пусть задана система координат $EC_{\mathtt{r}}$. Множество всех точек валианы точки O, эллиптическое расстояние от которых до точки O равно постоянному числу ρr_0, согласно выражениям координат (5.8) принадлежит эллиптическому циклу радиуса ρr_0, заданному в репере R^* уравнением $x_1^2 \operatorname{tg}^2 r_0 - x_2^2 + x_3^2 = 0$, $0 < r_0 < \pi/2$.

Следовательно, координатными линиями ϕ в системе $EC_{\mathtt{r}}$ являются дуги эллиптических циклов. Координатные линии r в системе $EC_{\mathtt{r}}$—эллиптические прямые пучка с центром в точке O—оси циклов, содержащих координатные линии ϕ.

5.5. Элемент площади в циклических системах координат. Собственную точку M плоскости $\widehat{H}$ в репере R^* зададим собственными координатами из (2.1). Точки $M_r = \frac{\partial M}{\partial r}$, $M_\phi = \frac{\partial M}{\partial \phi}$, принадлежащие касательным в точке M к координатным линиям r, ϕ циклической системы координат, имеют в репере R^* в ($HC_{\mathtt{r}}$)-циклической параметризации координаты:

$$M_r\big(\rho \operatorname{sh} r; \rho \operatorname{ch} r \operatorname{sh} \phi; \rho \operatorname{ch} r \operatorname{ch} \phi\big), \quad M_\phi\big(0; \rho \operatorname{sh} r \operatorname{ch} \phi; \rho \operatorname{sh} r \operatorname{sh} \phi\big),$$

а в ($EC_{\mathtt{r}}$)-циклической параметризации—координаты:

$$M_r\big(-\rho \sin r; \rho \cos r \operatorname{ch} \phi; \rho \cos r \operatorname{sh} \phi\big), \quad M_\phi\big(0; \rho \sin r \operatorname{sh} \phi; \rho \sin r \operatorname{ch} \phi\big).$$

Найдем значения квадратичной и билинейной метрических форм в репере R^* от координат точек M_r и M_ϕ. В ($HC_{\mathtt{r}}$)-циклической параметризации получаем:

$$\gamma_{rr} = -\rho^2, \quad \gamma_{r\phi} = 0, \quad \gamma_{\phi\phi} = \rho^2 \operatorname{sh}^2 r,$$
$$(dl_{\mathtt{h}})^2 = \rho^2 dr^2 - \rho^2 \operatorname{sh}^2 r \, d\phi^2 \qquad \big((dl_{\mathtt{e}})^2 = -\rho^2 dr^2 + \rho^2 \operatorname{sh}^2 r \, d\phi^2\big).$$

В ($EC_{\mathtt{r}}$)-циклической параметризации получаем:

$$\gamma_{rr} = \rho^2, \quad \gamma_{r\phi} = 0, \quad \gamma_{\phi\phi} = -\rho^2 \sin^2 r,$$
$$(dl_{\mathtt{h}})^2 = -\rho^2 dr^2 + \rho^2 \sin^2 r \, d\phi^2 \qquad \big((dl_{\mathtt{e}})^2 = \rho^2 dr^2 - \rho^2 \sin^2 r \, d\phi^2\big).$$

Следовательно, площадь S гомеоморфной диску фигуры с областью D изменения параметров r, ϕ в $(HC_{\mathtt{r}})$-циклической и в $(EC_{\mathtt{r}})$-циклической параметризации определена соответственно формулой

$$S = \rho^2 \iint_D \operatorname{sh} r \, dr \, d\phi, \qquad S = \rho^2 \iint_D \sin r \, dr \, d\phi. \tag{5.9}$$

В качестве примера, применяя формулы (5.9), найдем площадь сектора гиперболического (эллиптического) цикла радиуса r с центральным углом α:

$$S_s = \rho^2 \alpha \Big(\operatorname{ch} \frac{r}{\rho} - 1 \Big) \qquad \Big(S_s = \rho^2 \alpha \Big(1 - \cos \frac{r}{\rho} \Big) \Big).$$

6. Ортогональная орициклическая система координат

6.1. Построение. На плоскости $\widehat{H}$ с выделенным обходом ξ абсолютной линии γ выберем некоторый орицикл ω_0 с базой k и любую его ось l (рис. 3). Пусть A_1—центр орицикла ω_0, т.е. $A_1 = k \cap \gamma$, а A_2—отличная от A_1 точка пересечения прямой l с абсолютом. Собственную на $\widehat{H}$ точку пересечения прямой l с орициклом ω_0 обозначим O. Проведем касательные k_1, k_2 к абсолюту из точки O и обозначим E ту из точек касания прямых k_1, k_2 с абсолютом, которая принадлежит дуге A_1A_2 линии γ при заданном обходе ξ.

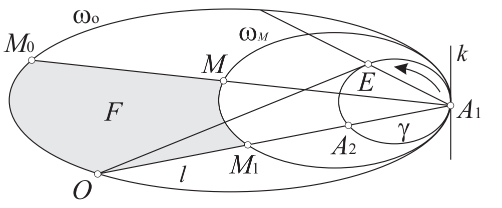

Рис. 3. Ортогональная орициклическая система координат

Каждой не принадлежащей прямой k точке M плоскости $\widehat{H}$ поставим в соответствие пару чисел (u, v) следующим образом. Пусть ω_M—орицикл с базой k, содержащий точку M, и M_1—точка пересечения орицикла ω_M с прямой l. Обозначим:

$$u = ((A_1M)(A_1E)lk), \tag{6.1}$$

$$v = \delta |OM_1| / \rho, \tag{6.2}$$

где $\delta = 1$ ($\delta = -1$), если точка M_1 не принадлежит (принадлежит) лучу OA_1.

Совокупность элементов $C_{\circ} = \{\omega_0, l, E\}$ назовем *ортогональной орициклической системой координат* плоскости $\widehat{H}$. Орицикл ω_0 назовем *нулевым орициклом*, прямую l—*осью*, точку E—*единичной точкой* системы $C_{\circ}$. Собственную для плоскости $\widehat{H}$ точку O пересечения оси l с нулевым орициклом ω_0 назовем *началом* системы координат $C_{\circ}$.

Пару чисел $(u; v)$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$, назовем *ортогональными орициклическими координатами* точки M в системе $C_{\circ}$.

6.2. Связь орициклических и собственных координат точки. Присоединим к орициклической системе координат $C_\circ$ плоскости $\widehat{H}$ канонический репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ второго типа так, чтобы его вершина A_3 была полюсом прямой A_1A_2 относительно абсолюта. Репер R является правым, т.е. представляет положительную ориентацию семейства U^3, соответствующую заданному обходу ξ линии γ.

На плоскости $\widehat{H}$ пучок Ω всех орициклов с центром в точке $A_1(1:0:0)$ в репере R можно задать уравнением

$$qx_2^2 + x_1x_2 - x_3^2 = 0, \quad q \in \mathbb{R}_+. \tag{6.3}$$

Каждый орицикл пучка Ω определен однозначно заданием параметра q. Покажем, что для нулевого орицикла ω_0 системы $C_\circ$ параметр q равен единице.

Действительно, в репере R касательная к абсолюту в единичной точке $E\,(1:1:1)$ задана координатами $(1:1:-2)$ и пересекает прямую $l = A_1A_2$ с координатами $(0:0:1)$ в точке $O(1:-1:0)$. Согласно построению системы $C_\circ$ точка O принадлежит орициклу ω_0, следовательно, для орицикла ω_0 в уравнении (6.3) $q = 1$.

Пусть (u, v)—координаты произвольной точки M плоскости $\widehat{H}$ в системе $C_\circ$, а $(m_1 : m_2 : m_3)$—проективные координаты точки M в присоединенном к $C_\circ$ репере R. Прямые A_1M, A_1E, l, k заданы в репере R координатами:

$$A_1M(0:-m_3:m_2), \quad A_1E(0:1:-1), \quad l(0:0:1), \quad k(0:1:0).$$

Выразим координату u (6.1) точки M через проективные координаты этой точки:

$$u = ((A_1M)(A_1E)lk) = \frac{m_3}{m_2}. \tag{6.4}$$

Орицикл ω_M из пучка Ω (6.3), содержащий точку M, задан уравнением

$$\left(m_3^2 - m_1m_2\right)x_2^2 + m_2^2x_1x_2 - m_2^2x_3^2 = 0$$

и пересекает ось l в точке M_1 с координатами $\left(m_1m_2 - m_3^2 : m_2^2 : 0\right)$. Выразим длину отрезка OM_1 гиперболической прямой l и с учетом обозначения (6.2) получим:

$$\operatorname{ch} v = \frac{m_2^2 + m_3^2 - m_1m_2}{2|m_2|\sqrt{m_3^2 - m_1m_2}}. \tag{6.5}$$

По определению координата v (6.2) точки M принимает положительные (отрицательные) значения тогда и только тогда, когда точка M_1 не принадлежит (принадлежит) лучу OA_1, т.е. тогда и только тогда, когда для четверки точек M_1, A_1, O, A_2 прямой l выполняется неравенство

$$(M_1A_1OA_2) < 0 \qquad \left((M_1A_1OA_2) > 0\right). \tag{6.6}$$

Выразим число $(M_1A_1OA_2)$ в проективных координатах точки M:

$$(M_1A_1OA_2) = \frac{m_3^2 - m_2^2 - m_1m_2}{m_3^2 - m_1m_2}. \tag{6.7}$$

Координаты собственной для плоскости $\widehat{H}$ точки M удовлетворяют неравенству $m_3^2 - m_1 m_2 > 0$, поэтому согласно выражению (6.7) неравенство (6.6) равносильно неравенству

$$m_2^2 - m_3^2 + m_1 m_2 > 0 \qquad \bigl(m_2^2 - m_3^2 + m_1 m_2 < 0\bigr). \tag{6.8}$$

Для положительного (отрицательного) значения v выполняется неравенство $\operatorname{sh} v > 0$ ($\operatorname{sh} v < 0$), поэтому из выражения (6.5) при соответствующем условии (6.8) на координаты $(m_1 : m_2 : m_3)$ точки M получаем:

$$\operatorname{sh} v = \frac{m_2^2 - m_3^2 + m_1 m_2}{2|m_2|\sqrt{m_3^2 - m_1 m_2}}. \tag{6.9}$$

На основании выражений (6.5), (6.9) выполняется равенство

$$e^v = |m_2| \big/ \sqrt{m_3^2 - m_1 m_2}. \tag{6.10}$$

Итак, любые проективные координаты $(m_1 : m_2 : m_3)$ точки M в репере R, в том числе и ее собственные координаты, определенные равенствами из (2.1) и связанные вторым условием из (2.2), удовлетворяют равенствам (6.4), (6.10). В проведенных рассуждениях точка M—произвольная точка плоскости $\widehat{H}$. Значит, для собственных координат $(\bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3)$ каждой точки плоскости $\widehat{H}$ выполняются соотношения:

$$\bar{x}_3^2 - \bar{x}_1\bar{x}_2 = \rho^2, \quad \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_2} = u, \quad |\bar{x}_2| \big/ \sqrt{\bar{x}_3^2 - \bar{x}_1\bar{x}_2} = e^v.$$

Поэтому зависимость собственных координат $(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3)$ точки плоскости $\widehat{H}$ в репере R от ее ортогональных орициклических координат (u, v) в присоединенной к реперу R системе $C_\circ$ можно выразить формулами

$$\bar{x}_1 = \rho\bigl(u^2 e^v - e^{-v}\bigr), \quad \bar{x}_2 = \rho e^v, \quad \bar{x}_3 = \rho u e^v, \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R}. \tag{6.11}$$

Координатными линиями u в системе $C_\circ$ являются концентрические орициклы пучка Ω, а линиями v— оси орициклов пучка Ω, т. е. проходящие через точку A_1 гиперболические прямые. По теореме 2.4.22 из [**10**] орицикл плоскости $\widehat{H}$ имеет в каждой своей точке эллипическую касательную, ортогональную оси орицикла, проведенной в данной точке. Поэтому две координатные линии системы $C_\circ$, проходящие через собственную точку плоскости $\widehat{H}$, ортогональны. Этот же факт следует из равенства $\gamma_{uv} = 0$.

6.3. Формула площади фигуры в орициклических координатах. Собственную точку M плоскости $\widehat{H}$ зададим в репере R координатами (6.11). Тогда точки $M_u\bigl(\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial u}\bigr)$, $M_v\bigl(\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial v}\bigr)$, принадлежащие касательным в точке M к координатным линиям u, v, имеют в репере R координаты:

$$M_u(2\rho u e^v; 0; \rho e^v), \quad M_v(\rho u^2 e^v + \rho e^{-v}; \rho e^v; \rho u e^v). \tag{6.12}$$

В координатах (6.11), (6.12) получаем:

$$\gamma_{uu} = \varphi_2(M_u) = -\rho^2 e^{2v}, \quad \gamma_{uv} = \overline{\varphi}_2(M_u, M_v) = 0, \quad \gamma_{vv} = \varphi_2(M_v) = \rho^2,$$
$$(dl_{\mathtt{h}})^2 = -\rho^2 e^{2v}\, du^2 + \rho^2 dv^2 \qquad \bigl((dl_{\mathtt{e}})^2 = \rho^2 e^{2v}\, du^2 - \rho^2 dv^2\bigr).$$

Элемент площади плоскости $\widehat{H}$ в ортогональных орициклических координатах имеет вид

$$dS = \sqrt{\gamma_{uv}^2 - \gamma_{uu}\gamma_{vv}}\, du\, dv = \rho^2 e^v\, du\, dv.$$

Для площади S гомеоморфной диску фигуры F с соответствующей областью D изменения параметров u, v в параметризации (6.11) справедлива формула

$$S = \rho^2 \iint_D e^v\, du\, dv.$$

7. Заключение

В табл. 2 для каждой введенной в данной работе и в статье [**18**] ортогональной циклической системы координат представим формулы связи собственных и циклических координат точек, линейные элементы и формулу площади гомеоморфной диску фигуры с соответствующей областью D изменения параметров.

Таблица 2. Ортогональные циклические системы координат (с. к.)

С. к.	Формулы связи координат	Линейные элементы	Формула площади фигуры
$C_{\mathtt{h}}$	$\bar{x}_1 = \rho\cos u \operatorname{ch} v$, $\bar{x}_2 = \rho\sin u \operatorname{ch} v$, $\bar{x}_3 = \rho \operatorname{sh} v$, $0 \leqslant u < \pi$, $v \in \mathbb{R}$	$(dl_{\mathtt{h}})^2 = -\rho^2 \operatorname{ch}^2 v\, du^2 + \rho^2 dv^2$ $(dl_{\mathtt{e}})^2 = \rho^2 \operatorname{ch}^2 v\, du^2 - \rho^2 dv^2$	$S = \rho^2 \iint_D \operatorname{ch} v\ du\ dv$
$HC_{\mathtt{r}}$	$\bar{x}_1 = \rho \operatorname{ch} r$ $\bar{x}_2 = \rho \operatorname{sh} r \operatorname{sh}\phi$, $\bar{x}_3 = \rho \operatorname{sh} r \operatorname{ch}\phi$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\phi \in \mathbb{R}$	$(dl_{\mathtt{h}})^2 = \rho^2 dr^2 - \rho^2 \operatorname{sh}^2 r\, d\phi^2$ $(dl_{\mathtt{e}})^2 = -\rho^2 dr^2 + \rho^2 \operatorname{sh}^2 r\, d\phi^2$	$S = \rho^2 \iint_D \operatorname{sh} r\, dr\, d\phi$
$EC_{\mathtt{r}}$	$\bar{x}_1 = \rho\cos r$, $\bar{x}_2 = \rho \sin r \operatorname{ch}\phi$, $\bar{x}_3 = \rho\sin r \operatorname{sh}\phi$, $\frac{2r}{\rho} \in [-\pi, \pi]$, $\phi \in \mathbb{R}$	$(dl_{\mathtt{h}})^2 = -\rho^2 dr^2 + \rho^2 \sin^2 r\, d\phi^2$ $(dl_{\mathtt{e}})^2 = \rho^2 dr^2 - \rho^2 \sin^2 r\, d\phi^2$	$S = \rho^2 \iint_D \sin r\, dr\, d\phi$
$C_{\circ}$	$\bar{x}_1 = \rho\left(u^2 e^v - e^{-v}\right)$, $\bar{x}_2 = \rho e^v$, $\bar{x}_3 = \rho u e^v$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$	$(dl_{\mathtt{h}})^2 = -\rho^2 e^{2v}\, du^2 + \rho^2 dv^2$ $(dl_{\mathtt{e}})^2 = \rho^2 e^{2v}\, du^2 - \rho^2 dv^2$	$S = \rho^2 \iint_D e^v\, du\, dv$

Список литературы

1. Н. В. Абросимов, *К решению проблемы Зейделя об объемах гиперболических тетраэдров*, Сиб. электрон. матем. изв. **6** (2009), 211–218.
2. Н. В. Абросимов, Г. А. Байгонакова, *Гиперболический октаэдр с mmm-симметрией*, Сиб. электрон. матем. изв. **10** (2013), 123–140.
3. А. Ю. Веснин, Д. Реповш, *Двусторонние оценки объемов прямоугольных гиперболических многогранников*, Матем. заметки. **89**:1 (2011), 12–18.
4. Н. В. Ефимов, *Высшая геометрия*, Физматлит, Москва, 2004.

5. В. Ф. Каган, *Основания геометрии: в 2 ч. Ч. 1*, ГТТЛ, Москва – Ленинград, 1949.
6. А. А. Колпаков, А. Д. Медных, М. Г. Пашкевич, *Формула объема $\mathbb{Z}_2$-симметричного сферического тетраэдра*, Сиб. матем. журн. **52**:3 (2011), 582–599.
7. Н. И. Лобачевский, *Пангеометрия. Полное собрание сочинений в пяти томах. Т. 3*, ГИТТЛ, Москва, 1951.
8. Б. А. Розенфельд, *Неевклидовы пространства*, Наука, Москва, 1969.
9. Л. Н. Ромакина, *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4 ч. Ч. 1: Тригонометрия*, Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 2013.
10. ______, *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4 ч. Ч. 2: Преобразования и простые разбиения*, Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 2013.
11. ______, *Овальные линии гиперболической плоскости положительной кривизны*, Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. **12**:3 (2012), 37–44.
12. ______, *О площади простого 4-контура гиперболической плоскости положительной кривизны*, Сб. научн. статей междунар. конф.«Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования». Изд-во Алт. ун-та, Барнаул (2014), 346–353.
13. ______, *О площади трехреберника на гиперболической плоскости положительной кривизны*, Матем. тр. 17:2 (2014), 184–206. In English: L. N. Romakina, *On the area of a trihedral on a hyperbolic plane of positive curvature*, Sib. Adv. Math. **25**:2 (2015), 138–153.
14. ______, *О площади эллиптического четырехугольника Саккери на гиперболической плоскости положительной кривизны*, Математика. Механика: сборник научных трудов. Изд-во Сарат. ун-та, Саратов. **15** (2013), 65–69.
15. ______, *Ортогональная орициклическая система координат на гиперболической плоскости положительной кривизны*, Дни геометрии в Новосибирске, 2013: тез. докл. междунар. конф. Новосибирск: Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН (2013), 74, 75.
16. ______, *Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны*, Матем. сб. **203**:9 (2012), 83–116. In English: L. N. Romakina, *Simple partitions of a hyperbolic plane of positive curvature*, Sb. Math. **203**:9 (2012), 1310–1341.
17. ______, *Разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны правильными орициклическими n-трапециями*, Чебышевский сб. **16**:3 (2015), 376–416.
18. ______, *Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны*, Дальневост. матем. журн. **13**:1 (2013), 127–147.
19. ______, *Циклы гиперболической плоскости положительной кривизны*, Геометрия и топология. 12, Зап. научн. сем. ПОМИ **415** (2013), 137–162; English translation: *Cycles on the hyperbolic plane of positive curvature*, J. Math. Sci. **212**:5 (2016), 605–621.
20. И. Х. Сабитов, *Об одном методе вычисления объемов тел*, Сиб. электрон. матем. изв. **10** (2013), 615–626.
21. Д. И. Сабитов, И. Х. Сабитов, *Многочлены объема для некоторых многогранников в пространствах постоянной кривизны*, Модел. и анализ информ. систем. **19**:6 (2012), 161–169.
22. Д. Ю. Соколова, *О площади трапеции на плоскости Лобачевского*, Сиб. электрон. матем. изв. **9** (2012), 256–260.
23. A. D. Mednykh, *Brahmagupta formula for cyclic quadrilaterals in the hyperbolic plane*, Сиб. электрон. матем. изв. **9** (2012), 247–255.
24. Yunhi Cho, *Trigonometry in extended hyperbolic space and extended de Sitter space*, Bull. Korean Math. Soc. **46**:6 (2009), 1099–1133.
25. J. M. Schlenker *Metriques sur les polyedres hyperboliques convexes*, J. Diferential Geom. **2** (1998), 323–405.

Саратовский государственный университет
Саратов
Россия
romakinaln@mail.ru

(Received 04 01 2015)