PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 51 Fasc. 1 – 1994

TRANSFERT DE LA NOTION DE C-ANNEAUX AUX PRODUITS FIBRES

Othman Echi

Je dédie ce travail à ma fiancée Salwa Bouallĕgue

Abstract. Let T be a domain and M a maximal ideal of T. Let $\varphi\colon T \to K$ be the canonical surjection where $K = T/M$. We consider the ring $R = \varphi^{-1}(D)$, where D is a subring of K with quotient field k. It is proved here that if T and D are C-rings [8] and K is algebraic over k, then R is also a C-ring. Other results concerning C-rings are also given.

Résumé. Soient T un anneau intègre, M un idéal maximal de T. Soit D un sous anneau de $K = T/M$, de corps des fractions k. On considère l'anneau $R = \varphi^{-1}(D)$, où φ est la surjection canonique de T dans K. On montre ici que si T et D sont des C-anneaux [8] et si K est algébrique sur k alors R est un C-anneau. D'autres résultats concernant les C-anneaux sont aussi donnés.

0 – Introduction

Tous les anneaux considérés dans ce travail sont commutatifs unitaires intègres et de dimension de Krull finie.

Au premier paragraphe on donne des résultats complétants notre travail [8]; rappelons que suivant [8], on dit que A est un *C_n-anneau* si pour tout couple d'idéaux premiers consécutifs $P \subset Q$ de l'anneau des polynômes en n indéterminées $A[n]$ sur A on a alors $\mathrm{ht}(Q/p[n]) = \mathrm{ht}(P/p[n]) + 1$ où $p = P \cap A$. On dit que A est un *C-anneau*, si c'est un C_n-anneau, pour tout entier naturel n. On dit que A est *E_n-anneau*, si pour toute chaîne saturée d'idéaux premiers $P_0 \subset P_1 \subset P_2$ de $A[n]$ telle que $P_0 \cap A = P_1 \cap A$, alors $\mathrm{ht}(P_2/P_0) = 2$, si A est un E_n-anneau pour tout entier naturel n; on dit que A est un *E-anneau*. Rappelons aussi qu'on

Received: June 14, 1991; *Revised*: November 15, 1991.

dit que A est un anneau de *Jaffard*; si $\dim(A[n]) = \dim(A) + n$, pour tout entier naturel n, que A est *localement de Jaffard* (resp. *résiduellement de Jaffard*) si, pour tout idéal premier p de A, le localisé A_p (resp. le quotient A/p) est de Jaffard et que A est *totalement de Jaffard* si tout localisé de A est résiduellement de Jaffard (de façon équivalente tout quotient est localement de Jaffard).

On donne ici une caractérisation des C-anneaux; on montre que A est un C-anneau si et seulement si il est totalement de Jaffard et pour tout entier n et tout couple d'idéaux premiers consécutifs $P \subset Q$ de $A[n]$, on a la formule:

$$1 - [\operatorname{ht} Q - \operatorname{ht} P] = \operatorname{ht}(q/p) - [\operatorname{ht} q - \operatorname{ht} p] \ . \tag{1}$$

Rappelons qu'un anneau A est dit *caténaire* si, pour tout couple $p \subset q$ d'idéaux premiers de A, toutes les chaînes saturées d'idéaux premiers entre p et q ont même longueur et qu'il est *universellement caténaire* si $A[n]$ est caténaire, pour tout entier n. La formule (1) nous permet de retrouver un résultat de [8]; "A est universellement caténaire si et seulement si A est un C-anneau caténaire" [8, Corollaire (1.5)].

On montre aussi que si $A \to B$ est un extension entière telle que pour tout couple d'idéaux premiers $q_1 \subset q_2$ de B on ait $\operatorname{ht}(q_2/q_1) = \operatorname{ht}(q_2 \cap A/q_1 \cap A)$ et que B soit un C-anneau, alors A est un C-anneau.

Au deuxième paragraphe on étudie le transfert de la notion de C-anneau aux produits fibrés d'anneaux; soit T un anneau, M un idéal maximal de T et D un sous anneau du corps $K = T/M$ et R l'anneau déterminé par le pullback suivant:

$$\begin{array}{ccc} R & \to & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \stackrel{\varphi}{\to} & K \end{array}$$

On dit alors que R est l'anneau de la construction (T, M, D) [6]. On note k le corps des fractions de D, on montre alors ici que si T et D sont des C-anneaux et K est algébrique sur k, alors R est un C-anneau.

On s'intérèsse aussi à la construction $D^{(S,r)}$ introduite par M. Fontana et S. Kabbaj dans [10]; soient D un anneau, S une partie multiplicative de D, $\{X_1, ..., X_r\}$ un ensemble fini d'indeterminées sur D_S, on pose $D^{(S,r)} = D + (X_1, ..., X_r)D_S[X_1, ..., X_r]$. On montre alors ici que $D^{(S,r)}$ est un C-anneau (resp. un E-anneau) si et seulement si D est un C-anneau (resp. un E-anneau).

Rappelons que suivant [12], [13], un anneau A est dit *S-fort* si pour tout couple d'idéaux premiers $P \subset Q$ consécutifs dans A, les idéaux $P[X] \subset Q[X]$ sont consécutifs dans $A[X]$ et qu'il est *S-fort universel* si, pour tout entier naturel n, l'anneau de polynômes $A[n]$ est S-fort.

1 – C-anneaux et extension entière

On commence par la caratérisation suivante:

Proposition 1.1. *Soit A un anneau, les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *A est un C-anneau;*

ii) *A est totalement de Jaffard et pour tout entier n et tout couple d'idéaux premiers consécutifs $P \subset Q$ de $A[n]$ on a:*

$$1 - [\operatorname{ht} Q - \operatorname{ht} P] = \operatorname{ht}(q/p) - [\operatorname{ht} q - \operatorname{ht} p] \ , \tag{1}$$

où $p = P \cap A$ et $q = Q \cap A$.

Démonstration: On considère un couple $P \subset Q$ d'idéaux premiers consécutifs de $A[n]$, posant $p = P \cap A$ et $q = Q \cap A$, on a:

$$\operatorname{ht}(Q/p[n]) = \operatorname{ht}(P/p[n]) + 1 \ . \tag{2}$$

Comme, par ailleurs, A est S-fort universel [8], donc totalement de Jaffard [7], on a d'après [8, Proposition (3.1)]

$$\operatorname{ht}(Q/p[n]) = \operatorname{ht} Q + \operatorname{ht}(q/p) - \operatorname{ht} q \qquad \text{et} \qquad \operatorname{ht}(P/p[n]) = \operatorname{ht} P - \operatorname{ht} p \ . \tag{3}$$

En combinant (2) et (3) on a la formule (1).

Réciproquement soient $P \subset Q$ deux idéaux premiers consécutifs de $A[n]$, on pose $p = P \cap A$ et $q = Q \cap A$. Comme A est totalement de Jaffard on a les formules (3) et la formule (1) donne en effet $\operatorname{ht}(Q/p[n]) = \operatorname{ht}(P/p[n]) + 1$. Ce qui montre que A est un C-anneau. ∎

Corollaire 1.2 [8]. *Soient A un anneau, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) *A est un C-anneau caténaire;*

ii) *A est universellement caténaire.*

Démonstration: Soient $P \subset Q$ deux idéaux premiers consécutifs de $A[n]$, compte-tenu de la formule (1) de la Proposition 1.1 on a:

$$1 - [\operatorname{ht} Q - \operatorname{ht} P] = \operatorname{ht}(q/p) - [\operatorname{ht} q - \operatorname{ht} p] \ .$$

Et comme A est caténaire le deuxième membre de cette égalité est nul, ce qui donne $\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht} P + 1$.

Ainsi A est universellement caténaire.

La réciproque est évidente. ∎

Soient $A \to B$ une extension entière d'anneaux. On peut se demander sous quelle conditions sur l'extension $A \to B$ a-t-on A un C-anneau?

On done ici une réponse partielle à cette question.

Proposition 1.3. *Soit $A \to B$ une extension entière telle que pour tout couple d'idéaux premiers $q_1 \subset q_2$ de B on ait:*

$$\mathrm{ht}(q_2/q_1) = \mathrm{ht}\Big((q_2 \cap A)/(q_1 \cap A)\Big) \ .$$

Si B est un C-anneau alors il en est de même de A.

Démonstration: Comme B est un C-anneau, alors il est S-fort universel [8], par ailleurs l'extension $A \to B$ est entière, donc A est S-fort universel [12], donc totalement de Jaffard [7]. Considérons $P \subset Q$ deux idéaux premiers consécutifs de $A[n]$, d'après les propriétés du lying-over et du going-up, il existe $P' \subset Q'$, idéaux premiers consécutifs de $B[n]$ tels que:

$$P' \cap (A[n]) = P \quad \text{ et } \quad Q' \cap (A[n]) = Q \ .$$

Donc on a [Proposition 1.1]:

$$(4) \qquad 1 - [\mathrm{ht}\, Q' - \mathrm{ht}\, P'] = \mathrm{ht}(q'/p') - [\mathrm{ht}\, q' - \mathrm{ht}\, p'] \ ,$$

où $p' = P' \cap B$ et $q' = Q' \cap B$.

En posant $p = P \cap A$ et $q = Q \cap A$, on a par hypothèse:

$$(5) \qquad \mathrm{ht}(q'/p') = \mathrm{ht}(q/p) \ , \quad \mathrm{ht}\, q' = \mathrm{ht}\, q \quad \text{ et } \quad \mathrm{ht}\, p' = \mathrm{ht}\, p \ .$$

D'autre part, d'après [5, Lemme 3.4] le couple (A, B) vérifie la formule de la dimension, comme par ailleurs B est S-fort universel, alors $(A[n], B[n])$ vérifie la formule de la dimension [5, Lemme 3.6] et on a alors les formules

$$(6) \qquad \mathrm{ht}\, Q' = \mathrm{ht}\, Q \ \text{ et } \ \mathrm{ht}\, P' = \mathrm{ht}\, P \qquad \text{[5, Lemme (3.4)].}$$

Substituant les termes de (4) par leurs valeurs dans (5) et (6) on a la formule:

$$(1) \qquad 1 - [\mathrm{ht}\, Q - \mathrm{ht}\, P] = \mathrm{ht}(q/p) - [\mathrm{ht}\, q - \mathrm{ht}\, p] \ .$$

Ce qui prouve que A est un C-anneau [Proposition 1.1]. ∎

2 – Produits fibres

Dans ce paragraphe, on considère T un anneau, M un idéal maximal de T et D un sous anneau du corps $K = T/M$ et R l'anneau déterminé par le produit fibré suivant:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, hook] & D \arrow[d, hook] \\ T \arrow[r, "\varphi"] & K \end{tikzcd}$$

Les anneaux T et R partagent donc l'idéal M on dit que R est l'anneau de la construction (T, M, D) [6]. On note k le corps des fractions de D. Rappelons tout d'abord le résultat suivant

Proposition 2.0 [1, Lemme 2.1]**.**

a) *$R/M \cong D$.*

b) $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(D) \coprod_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(T)$.

c) *Si T est local, alors M est un idéal premier divisé de R, et tout idéal premier de R est comparable à M. Si en plus $k = K$ alors $R_M = T$.*

d) *Pour tout idéal premier p de R tel que $M \not\subset p$, il existe un unique idéal premier q de T tel que $q \cap R = p$ et on a $T_q = R_p$.*

e) *Pour tout idéal premier p de R tel que $M \subseteq p$, il existe un unique idéal q de D tel que $p = \varphi^{-1}(q)$. De plus R_p est un produit fibré donné par le diagramme commutatif suivant.*

$$\begin{tikzcd} R_p \arrow[r] \arrow[d, hook] & D_q \arrow[d, hook] \\ T_M \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

f) *Test une extension entière de R si et seulement si $D = k$ et K est algébrique sur k.*

Théorème 2.1. *Si T et D sont des C-anneaux et K est algébrique sur k, alors R est un C-anneau.*

Pour démontrer ce résultat on a besoin de deux propositions et un lemme

Lemme 2.2. *Soient T un anneau local d'idéal maximal M, D un sous anneau de T/M et R l'anneau de la construction (T, M, D). Soit Q un idéal premier de $R[n]$ contenant $M[n]$. Si $(0) \subset Q_1 \subset Q_2 \subset ... \subset Q_k = Q$ est une chaîne non raffinable d'idéaux premiers de $R[n]$ et Q_{i0} le plus petit idéal de la chaîne contenant $M[n]$, alors $Q_{i0} \cap R = M$.*

Démonstration: La chaîne $(0) \subset Q_1 \subset ... \subset Q_{i0}$ se relève dans $T[n]$ [6, Proposition 4], soit Q'_{i0} un idéal premier de $T[n]$ relevant Q_{i0}, comme T est local on a $Q'_{i0} \cap T \subset M$, donc $Q_{i0} \cap R \subset M$ et par suite $Q_{i0} \cap R = M$. ∎

Proposition 2.3. *On suppose que T est local et $K = k$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes:*

i) *R est un C-anneau (resp. un E-anneau);*

ii) *T et D sont des C-anneaux (resp. des E-anneaux).*

Démonstration: Comme $D \cong R/M$, $T = R_M$ [Proposition 2.0] et les notions de C-anneaux et E-anneaux passent aux quotients et aux localisés [8], donc i) entraine ii). Reste à montrer que ii)⇒i).

$*$) *On suppose que T et D sont des C-anneaux*

Soient $P \subset Q$ deux idéaux premiers consécutifs de $R[n]$, on pose $p = P \cap R$ et $q = Q \cap R$. Il faut montrer que $\mathrm{ht}(Q/p[n]) = \mathrm{ht}(P/p[n]) + 1$.

Les idéaux premiers de R se comparent à M[1], on envisage donc deux cas:

1) $p \subset M$, alors dans ce cas $q \subseteq M$ [Lemme 2.2], comme $R_M = T$ est un C-anneau alors en relevant $P \subset Q$ en deux idéaux premiers consécutifs de $T[n]$, on a facilement $\mathrm{ht}(Q/p[n]) = \mathrm{ht}(P/p[n]) + 1$.

2) $M \subseteq p$, alors A/p est un quotient de D, donc il est un C-anneau et on a donc $\mathrm{ht}(Q/p[n]) = \mathrm{ht}(P/p[n]) + 1$.

$*$) *Supposons maintenant que T et D sont des E-anneaux*

Soit $P \subset L \subset Q$ une chaîne saturée d'idéaux premiers de $R[n]$ telle que $P \cap R = L \cap R$, posons $p = P \cap R$ et $q = Q \cap R$, il faut établir que $\mathrm{ht}(Q/P) = 2$.

On envisage toujours deux cas:

1) $p \subset M$, comme $L \cap R = P \cap R = p$, alors $q \subseteq M$ [Lemme 2.2] et comme d'autre part $R_M = T$ est un E-anneau, on a $\mathrm{ht}(Q/P) = 2$.

2) $M \subseteq p$, dans ce cas R/p est un quotient de D, donc il est un E-anneau, comme par ailleurs $(P/p[n]) \cap (R/p) = (L/p[n]) \cap (R/p) = (0)$ on a

$$\mathrm{ht}\Big((Q/p[n])/(P/p[n])\Big) = 2 = \mathrm{ht}(Q/P)\ . \blacksquare$$

Proposition 2.4. *On suppose que T est local et D est un corps. Si T est un C-anneau et K est algébrique sur D, alors R est un C-anneau.*

Démonstration: Dans ces conditions on a T entier sur R [Proposition 2.0], comme d'autre part $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(T)$ [3], on a $\mathrm{ht}(q/p) = \mathrm{ht}(q \cap R/p \cap R)$, pour tout couple d'idéaux premiers $p \subset q$ de T, alors R est un C-anneau [Proposition 1.3]. ∎

Démonstration du Théorème 2.1:

$*$) *Cas où T est local:*

Notons R_1 l'anneau de la construction (T, M, k), il est donc un C-anneau [Proposition 1.6], or R est l'anneau de la construction (R_1, M, D), autrement dit on a les produits fibrés suivantes:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & D \arrow[d, hook] \\ R_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & k \arrow[d, hook] \\ T \arrow[r, two heads] & K \end{tikzcd}$$

et l'on voit donc que R est un C-anneau [Proposition 1.5].

$*$) *Passage du local au global:*

Soit p un idéal premier de R:

- Si $p \not\supseteq M$, alors il existe un idéal premier q de T tel que $R_p = T_q$ [7] et par suite R_p est un C-anneau.
- Si $p \supseteq M$, alors il existe un idéal premier q de D tel que R_p est l'anneau de la construction (T_M, M_M, D_q) et donc d'après le cas local R_p est un C-anneau. On vient de montrer que R_p est un C-anneau, pour tout idéal premier p de R, donc R est un C-anneau [8]. ∎

Corollaire 2.5 [2]**.** *Si T et D sont universellement caténaire et K est algébrique sur k, alors R est universellement caténaire.*

Démonstration: Il est facile de voir que R est caténaire, d'autre part R est un C-anneau [Théorème 1.4], il en résulte que R est universellement caténaire [Corollaire 1.2]. ∎

Soient maintenant R est K-algèbre, quotient par un idéal premier d'un anneau de polynôme $K[n]$ ou de séries formelles $K[[n]]$, I un idéal propre non nul de R et $S = D + I$, où D est un sous anneau de K de corps des fractions k. Rappelons tout d'abord un résultat de A. Ayache [4].

Lemme 2.6 [4]**.** *Avec les notations si dessus, si on pose $T = K + I$, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *I est de hauteur maximale dans R.*

ii) *R/I est une K-algèbre fini.*

iii) *R est entier sur T.*

En outre lors que ces assertions sont vérifiées, T est alors universellement caténaire.

On peut alors donner le résultat suivant:

Proposition 2.7. *Si I un idéal propre non nul de R et de hauteur maximale dans R, D un sous anneau de K de corps des fractions k et $S = D + I$.*

Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

i) *S est un C-anneau.*

ii) *D est un C-anneau et K est algébrique sur k.*

Démonstration: L'anneau $T = K + I$ est universellement caténaire [Lemme 2.6], l'équivalence découle donc immédiatement du Théorème 2.1 et du fait que tout anneau universellement caténaire est un C-anneau [8]. ∎

On clôt ce paragraphe par un résultat sur la construction $D^{(S,r)}$ introduite par M. Fontana et S. Kabbaj dans [10].

Théorème 2.8. *Soient D un anneau, S une partie multiplicative de D, $\{X_1, ..., X_r\}$ un ensemble fini d'indéterminées sur D_S, on note $D^{(S,r)} = D + (X_1, ..., X_r)D_S[X_1, ..., X_r]$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *$D^{(S,r)}$ est un C-anneau (resp. un E-anneau).*

ii) *D est un C-anneau (resp. un E-anneau).*

Démonstration: Notons tout d'abord que la démonstration est analogue à celle de [10, Proposition 2.3].

Puisque les notions de C-anneau et E-anneau passent aux quotients [8] et que $D \cong D^{(S,r)}/(X_1, ..., X_r)\, D_S[X_1, ..., X_r]$ [10], on a l'implication i)⇒ii).

Prouvons que ii)⇒i).

1) *Supposons que D est un C-anneau.*

Soient $P \subset Q$ deux idéaux premiers consécutifs de $D^{(S,r)}[n]$, il faut montrer que

$$\mathrm{ht}\Big(Q/(P \cap D^{(S,r)})[n]\Big) = \mathrm{ht}\Big(P/(P \cap D^{(S,r)})[n]\Big) + 1\ . \tag{7}$$

Premier cas: $P \cap S \neq \emptyset$. Dans ce cas on a $P = p_1 + (r)\, D_S[n + r]$ et $Q = q_1 + (r)\, D_S[n + r]$ où $p_1 = P \cap (D[n])$, $q_1 = Q \cap (D[n])$ et $(r)\, D_S[n + r] = (X_1, ..., X_r)\, D_S[X_1, ..., X_r, X_{r+1}, ..., X_{n+r}]$. Les idéaux $p_1 \subset q_1$ sont consécutifs et

D est un C-anneau, donc on a:

$$\mathrm{ht}(q_1/p[n]) = \mathrm{ht}(p_1/p[n]) + 1, \qquad \text{où} \ \ p = p_1 \cap D \ ,$$

or $(P \cap D^{(S,r)}) \cap S \neq \emptyset$, donc $P \cap D^{(S,r)} = p + (r)\, D_S[r]$ [10] avec $(r)\, D_S[r] = (X_1, ..., X_r)\, D_S[X_1, ..., X_r]$, si bien que l'on ait

$$\mathrm{ht}\Big(Q/(P\cap D^{(S,r)})[n]\Big) = \mathrm{ht}(q_1/p[n]) = \mathrm{ht}(p_1/p[n])+1 = \mathrm{ht}\Big(P/(P\cap D^{(S,r)})[n]\Big)+1\ ,$$

comme désiré.

Deuxième cas: $Q \cap S = \emptyset$. Dans ce cas la chaîne $P \subset Q$ se relève dans $(D^{(S,r)}[n])_S = (D^{(S,r)})_S[n] = (D_S[r])[n]$ (voir [10]), en $S^{-1}P \subset S^{-1}Q$. Comme D est un C-anneau, il en est de même de $(D^{(S,r)})_S$ (car la notion de C-anneau est universelle et passe au localisé), donc on a la formule (7).

Troisième cas: $Q \cap S \neq \emptyset$ et $P \cap S = \emptyset$. On pose $I = P + (r)\, D_S[n+r]$, on a $(S^{-1}I) \cap (D^{(S,r)}[n]) = I$ (i.e. I est S-saturé), donc il existe un idéal premier P' de $D^{(S,r)}[n]$ tel que $I \subset P' \subset Q$ et $P' \cap S = \emptyset$ [2, Lemme 2.1] et comme $Q \cap S \neq \emptyset$ et, P et Q sont consécutifs on a $P' = P$, d'où $(r)\, D_S[n+r] \subset P$ et par analogie au premier cas on a la formule (7). On conclut donc que $D^{(S,r)}$ est un C-anneau.

2) *On suppose que D est un E-anneau.*

Soit $P \subset L \subset Q$ une chaîne saturée d'idéaux premiers de $D^{(S,r)}[n]$ telle que $P \cap D^{(S,r)} = L \cap D^{(S,r)}$, il faut établir que $\mathrm{ht}(Q/P) = 2$. On envisage encore trois cas:

Premier cas: $Q \cap S = \emptyset$. Dans ce cas $S^{-1}P \subset S^{-1}L \subset S^{-1}Q$ est une chaîne saturée d'idéaux premiers de l'anneau $S^{-1}(D^{(S,r)}[n]) = D_S[n+r]$, comme par ailleurs la notion de E-anneau est universelle et passe au localisé, alors $D_S[r]$ est un E-anneau d'autre part on a l'égalité

$$(S^{-1}P) \cap (D^{(S,r)})_S = (S^{-1}L) \cap (D^{(S,r)})_S \ ,$$

on tire donc que $\mathrm{ht}(S^{-1}Q/S^{-1}P) = 2$, soit $\mathrm{ht}(Q/P) = 2$.

Deuxième cas: $Q \cap S \neq \emptyset$ et $L \cap S = \emptyset$. On a par analogie au troisième cas de 1) $(r)D_S[n+r] \subset L$, or $L \cap D^{(S,r)} = P \cap D^{(S,r)}$, donc $(r)D_S[n+r] \subset P$, mais $D[n]D^{(S,r)}[n]/(r)D_S[n+r]$ est un E-anneau, ce qui permet d'avoir $\mathrm{ht}(Q/P) = 2$.

Troisième cas: $L \cap S \neq \emptyset$. Dans ce cas on a $(r)D_S[n+r] \subset L$, donc $(r)D_S[n+r] \subset P$ (puisque $P \cap D^{(S,r)} = L \cap D^{(S,r)}$) et un raisonnement analogue à celui du deuxième cas permet d'écrire $\mathrm{ht}(Q/P) = 2$, si bien que $D^{(S,r)}$ est un E-anneau. ∎

Rappelons que suivant [8], on dit qu'un anneau A *vérifie la condition de chaîne (CE)*, si pour tout entier n et pour toute chaîne maximale $P = P_0 \subset P_1 \subset ... \subset$

$P_k = Q$ d'idéaux premiers de $A[n]$ entre P et Q, il existe une chaîne maximale de $p = P \cap A$ à $q = Q \cap A$ passant par tous les $p_i = P_i \cap A$. On dit aussi que A vérifie *fortement la formule de la dimension*, si pour tout idéal premier p de A l'anneau quotient A/p vérifie la formule de la dimension. Rappelons encore qu'on a la caractérisation suivante [8, Théorème 3.10]. Il y'a équivalence entre les assertions suivantes.

i) A vérifie fortement la formule de la dimension.

ii) A est un C-anneau et vérifie la condition de chaîne (CE).

iii) A est un E-anneau et vérifie la condition de chaîne (CE).

Corollaire 2.9. *Pour que $D^{(S,r)}$ vérifie fortement la formule de la dimension, il faut et il suffit que D vérifie fortement la formule de la dimension et $D^{(S,r)}$ vérifie la condition de chaîne (CE).*

Démonstration: La condition nécessaire découle du fait que $D \cong D^{(S,r)}/(r)D_S[r]$ et du résultat [8, Théorème 3.10]. Réciproquement, comme D vérifie fortement la formule de la dimension, alors D est un C-anneau [8, Théorème 3.10], donc $D^{(S,r)}$ est un C-anneau [Théorème 2.8], comme par ailleurs $D^{(S,r)}$ vérifie la condition de chaîne (CE), alors $D^{(S,r)}$ vérifie fortement la formule de la dimension [8, Théorème 3.10]. ∎

Remarques 2.10.

1) Soit T un anneau local d'idéal maximal M et k un sous corps de $K = T/M$, on note R l'anneau de la construction (T, M, k). De façon similaire à la question [2, Remarks 2.5] on se demande; si R est un C-anneau et K est algébrique sur k alors a-t-on T un C-anneau?

2) Remarquons aussi que si T est un E-anneau et K est algébrique sur k on ne sait pas si R est un E-anneau!!

BIBLIOGRAPHIE

[**1**] Anderson, D.F., Boubier, A., Dobbs, D.E., Fontana, M. and Kabbaj, S. – On Jaffard domains, *Expo. Math.*, 5 (1988), 145–175.

[**2**] Anderson, D.F., Dobbs, D.E., Kabbaj, S. and Mulay, S.B. – Universally catenarian domains of $D + M$ type, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 104(2) (1988), 378–384.

[**3**] Anderson, D.F. and Dobbs, D.E. – Pairs of rings with the same prime ideals, *Canad. J. Math.*, vol. XXXII, No. 2 (1980), 362–384.

[**4**] Ayache, A. – Sous un anneau de la forme $D + I$ d'une K-algèbre intègre, *Portugaliae Mathematica* (à paraître).

[5] Ayache, A., Cahen, P.J. – Anneaux vérifiant absolument l'inégalité ou la formule de la dimension, *Bollettino U.M.I. Algebra e Geometria* (à paraître).

[6] Cahen, P.J. – Couple d'anneaux partageant un idéal, *Archiv der Math.*, 51 (1988), 505–514.

[7] Cahen, P.J. – Construction (B.I.D.) et anneau localement ou résiduellement de Jaffard, *Archiv der Math.*, 54 (1991), 125–141.

[8] Echi, O. – C-anneaux, E-anneaux et formule de la dimension, *Portugaliae Mathematica* (à paraître).

[9] Fontana, M. – Topologically defined classes of commutative rings, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 123 (1980), 331–355.

[10] Fontana, M. and Kabbaj, S. – On the Krull and valuative dimension of $D + XD_S[X]$ domains, *J. Pure Appl. Algebra*, 63 (1990), 231–245.

[11] Kabbaj, S. – Sur les S-domaines forts de Kaplansky, *Journal of Algebra*, vol. 137, No. 2 (1991), 400–415.

[12] Kaplansky, I. – *Commutative rings*, The University of Chicago Press, 1974.

[13] Malik, S. and Mott, J.L. – Strong S-domains, *J. Pure Appl. Algebra*, 28 (1983), 249–264.

[14] Nagata, M. – *Local rings*, Interscience, New-York, 1962.

Othman Echi,
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Sfax,
Route de Soukra, 3038 Sfax – TUNISIE