PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 51 Fasc. 1 – 1994

LOCALISATION DES CLIQUES ET THEORIE DES MODELES

François Aribaud et Marie Paule Malliavin

Presented by G. Renault

Resume. Soit R un quotient d'une algèbre envelopante d'une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique nulle. Nous donnons une condition suffisante en théorie des ultrafiltres pour que les cliques de R soient localisables. Nous montrons en utilisant la théorie des modèles que toute clique de $k \otimes_k R$ est localisable où K est une extension transcendante pure dénombrable de K.

En [3], A. Braun et R.B. Warfield démontrent la proposition suivante:

Proposition A. *Soient R un anneau satisfaisant la condition de second niveau et S une extension finie centralisante de R.*

1) *Si P et Q sont des idéaux premiers de R, $P \neq Q$ et $P \rightsquigarrow Q$, il existe une suite finie d'idéaux premiers de S, soit $L_1, ..., L_t$ telle que $L_1 \cap R = P$, $L_t \cap R = Q$ et $L_i \rightsquigarrow L_{i+1}$, pour $i = 1, ..., t-1$.*

2) *Si P et Q sont deux idéaux premiers de S vérifiant $P \rightsquigarrow Q$ alors ou bien $P \cap R = Q \cap R$ ou bien $P \cap R \rightsquigarrow Q \cap R$.* ∎

Ce résultat de A. Braun et R.B. Warfield a été considérablement généralisé par E.S. Letzter [9] mais la généralisation concerne toujours des extensions *finies*. Nous utilisons une idée de la démonstration du résultat de A. Braun et R.B. Warfield dans un cas très particulier d'extensions centralisantes infinies pour obtenir un théorème de "Lying-over" des cliques. Nous pouvons alors donner, en utilisant la théorie des ultrafiltres et sous une hypothèse convenable, une preuve du fait, démontré par K. Brown pour un corps algébriquement clos non dénombrable puis par R.B. Warfield et A.V. Jategaonkar pour un corps non dénombrable et ensuite par Goodearl en toute généralité, que les cliques d'une algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps caractéristique nulle sont classiquement localisables.

Received: October 13, 1991.

Nous obtenons aussi des conditions suivant lesquelles toute clique d'un quotient d'une algèbre enveloppante d'une algèbre de la résoluble est classiquement localisable, résultat qui ne semble pas devoir se déduire directement de [6].

Par contre nous ne sommes pas parvenue à décider si l'hypothèse faite sur les ultrafiltres était ou non toujours vérifiée. Si cette hypothèse était vérifiée, cela redonnerait une preuve nouvelle du résultat de [6].

1 – Liens, cliques et conditions de second niveau

Soit R un anneau noetherien (à droite et à gauche) et P et Q deux idéaux premiers de R. On dit qu'il existe *un lien de P vers Q et on note* $P \rightsquigarrow Q$, s'il existe un idéal A de R tel que $PQ \subseteq A \subsetneq P \cap Q$ tel que $P \cap Q/A$ est sans torsion comme R/P-module à gauche et comme R/Q-module à droite; un module M sur un anneau premier $\overline{R}$ est dit *sans torsion* si aucun élément régulier de $\overline{R}$ n'est diviseur de zéro dans M. Si R est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps de caractéristique 0 algébriquement clos, la définition précédente se simplifie pour donner: $P \rightsquigarrow Q$ si et seulement si $P \cap Q/PQ$ admet P comme annulateur à gauche et Q comme annulateur à droite. On notera $\ell - \mathrm{Ann}(M)$ (resp. $r - \mathrm{Ann}(M)$), l'annulateur à gauche (resp. à droite) d'un R-module à gauche (resp. à droite) M.

Le graphe des liens de R est le graphe *orienté* dont les sommets sont les idéaux premiers de R et il existe une arête orientée de P vers Q si et seulement si $P \rightsquigarrow Q$. La composante connexe du graphe des liens qui contient P s'appelle *la clique* de P et est notée $C\ell(P)$.

Si P et Q sont deux idéaux premiers d'un anneau noetherien R tels que $P \rightsquigarrow Q$, si S est une partie multiplicative de R qui vérifie la condition de Ore à droite et si $S \subseteq \mathcal{C}(Q)$ (où $\mathcal{C}(Q)$ désigne l'ensemble des éléments de R réguliers module Q) alors $S \subseteq \mathcal{C}(P)$ ([6], 5.4.4 et 5.4.5). Symétriquement si la partie multiplicative S vérifie la condition de Ore à gauche et si $S \subseteq \mathcal{C}(P)$ alors $S \subseteq \mathcal{C}(Q)$.

Une partie Ω de $\mathrm{Spec}(R)$ est une "clique à droite" si lorsque $P \rightsquigarrow Q$ et $Q \in \Omega$ alors $P \in \Omega$. Evidemment, il y a la notion de clique à gauche.

Une clique Ω est dite *classique* si les quatre conditions suivantes sont vérifiées:

1) $\mathcal{C}(\Omega) := \bigcap\{\mathcal{C}(P) :\ P \in \Omega\}$ est un ensemble de Ore à droite et à gauche, où $\mathcal{C}(P)$ désigne l'ensemble des éléments de R réguliers modulo P. On note alors R_Ω l'anneau des fractions de R à dénominateurs dans $\mathcal{C}(\Omega)$, c'est-à-dire $R_\Omega = \mathcal{C}(\Omega)^{-1}R$.

2) Pour tout $Q \in \Omega$, R_Ω/QR_Ω est isomorphe à l'anneau total de fractions de l'anneau premier R/Q.

3) Les QR_Ω, où $Q \in \Omega$, sont exactement les idéaux primitifs de R_Ω.

4) L'enveloppe R_Ω-injective de chaque R_Ω-module simple est l'union de la suite des socles, où la suite des socles d'un module M notée $\{Soc_n M : n \geq 0\}$, est définie, par récurrence, en posant $Soc_0 M = (0)$ et en posant $Soc_{n+1} M$ égal à l'image inverse dans M du socle de $M/Soc_n M$ pour tout $n \geq 0$.

Il y a des notions partielles de "classique à droite" et "classique à gauche" [6].

Le théorème suivant est démontré par R.B. Warfield ([13], Lemme 6).

Théorème 1.B. *Soient R un anneau noetherien et X un sous-ensemble de* Spec(R) *vérifiant la propriété de régularité générique. On suppose que R contient un ensemble F d'éléments centraux inversibles tels que la différence de deux éléments distincts de F est inversible et tel que le cardinal de X soit strictement inférieur à celui de F. Alors X satisfait la condition d'intersection (voir la définition en 1.C ii)).* ∎

Il y a [7] des conditions plus maniables que la définition précédente pour démontrer qu'une clique est classique.

Théorème 1.C. *Soit R un anneau noetherien qui satisfait la condition de second niveau. Soit Ω une clique de R. Alors Ω est classique (donc $\mathcal{C}(\Omega)$ est* Ore*) si et seulement si Ω satisfait aux deux conditions suivantes:*

i) *Deux éléments de Ω ne sont pas comparables pour l'inclusion (c'est la condition d'incomparabilité);*

ii) *Ω satisfait la condition d'intersection, à savoir: si un idéal à droite J (resp. à gauche) de R a une intersection non vide avec $\mathcal{C}(P)$, pour chaque $P \in \Omega$, alors J a une intersection non vide avec $\mathcal{C}(\Omega)$; ce qui, dans le cas où tous les idéaux premiers sont complètement premiers, revient à dire que si $J \subseteq \bigcup_{P \in \Omega} P$ (J idéal à droite ou à gauche) il existe $Q_0 \in \Omega$ tel que $J \subseteq Q_0$.* ∎

Pour la définition de condition de second niveau (resp. de second niveau forte) nous renvoyons à [7]. Il nous suffira de savoir que l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps satisfait la condition de second niveau forte.

Si R est un anneau noetherien (à droite, à gauche) qui vérifie la condition de second niveau et I un idéal bilatère de R, alors R/I vérifie la condition de second niveau, car, d'après 7.1.3 de [7], cette condition de second niveau se lit sur les quotients premiers de R.

Enfin nous remarquons (cf. [11]):

Théorème 1.D. *Dans un anneau noetherien à droite et à gauche, toute clique est un ensemble dénombrable.* ∎

2 – Une remarque sur les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie résolubles

Dans toute la suite, $\mathcal{G}$ désignera une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique nulle et $U(\mathcal{G})$ son algèbre enveloppante. On notera $\otimes$ pour $\otimes_k$.

Dans son ouvrage, [7] A.V. Jategaonkar énonce les deux théorèmes suivants numérotés A.3.7 et A.3.6 respectivement.

Théorème 2.1. *Si $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur $\mathbb{C}$, alors chaque clique de $U(\mathcal{G})$ est soit triviale soit infinie.* ∎

Il s'agit d'un théorème de K. Brown [4].

Théorème 2.2. *Si $\mathcal{G}$ est une algèbre résoluble sur un corps algébriquement clos, alors $\mathcal{G}$ est non nilpotente si et seulement si $U(\mathcal{G})$ contient une clique infinie.* ∎

Et il ajoute: "on ne sait pas si A.3.6 et A.3.7 restent valides lorsque le corps de base est non algébriquement clos".

Nous nous proposons, si ce n'est déjà fait, de combler cette lacune en utilisant la proposition A:

Proposition 2.3. *Pour toute algèbre de Lie résoluble $\mathcal{G}$ de dimension finie sur un corps k de caractéristique zéro, les cliques de $U(\mathcal{G})$ sont soit triviales soit infinies.*

Preuve: Soient $\{P_1, ..., P_n\}$ une clique finie de $U(\mathcal{G})$ et k_1 une extension de degré fini de k telle que $k_1 \otimes \mathcal{G} =: \mathcal{G}_1$ soit complètement résoluble. La proposition est vraie pour $\mathcal{G}_1$ par la même démarche que celle utilisée par K.A. Brown [4]. Supposons que $n \geq 2$. D'après la proposition de A. Braun et R.B. Warfield, il existe une suite finie d'idéaux premiers de $U(\mathcal{G})$, $Q_1 = Q'_1, Q'_2, ..., Q'_t = Q_2$ telle que $Q_1 \cap U(\mathcal{G}) = P_1$, $Q_2 \cap U(\mathcal{G}) = P_2$ et $Q'_i \rightsquigarrow Q'_{i+1}$, $i = 1, ..., t-1$. Comme $P_1 \neq P_2$, on a $Q_1 \neq Q_2$ et la clique de $\operatorname{Spec} U(\mathcal{G}_1)$ passant par Q_1 est infinie. Considérons la réunion Y des cliques de $\operatorname{Spec} U(\mathcal{G}_1)$ passant par chaque $Q \in \operatorname{Spec} U(\mathcal{G}_1)$ qui est au-dessus d'un des P_i, $1 \leq i \leq n$. L'ensemble Y est infini, donc il existe $Q \in Y$ qui n'est au-dessus d'aucun des P_i, $i = 1, ..., n$, et qui est tel que $Q \rightsquigarrow Q_{i_0}$ avec $Q_{i_0} \cap U(\mathcal{G}) = P_{i_0}$. Mais par la Proposition A, on a $U(\mathcal{G}) \cap Q \rightsquigarrow P_{i_0}$ donc $U(\mathcal{G}) \cap Q = P_{j_0}$, ce qui contredit le choix de Q. ∎

Proposition. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique nulle. Alors $\mathcal{G}$ est non nilpotente si et seulement si $U(\mathcal{G})$ possède une clique non triviale.*

Preuve: Il est bien connu [7] que si $\mathcal{G}$ est nilpotente, les cliques de $U(\mathcal{G})$ sont triviales.

Supposons que toutes les cliques de $U(\mathcal{G})$ sont triviales et que $\mathcal{G}$ soit non nilpotente et on arrivera à une contradiction. Si $\mathcal{G}$ n'est pas nilpotente, $\widetilde{\mathcal{G}} = \widetilde{k} \otimes \mathcal{G}$ ne l'est pas non plus, où $\widetilde{k}$ est une clôture algébrique de k. Donc, [1], $\widetilde{\mathcal{G}}$ possède un quotient isomorphe à l'algèbre de Lie résoluble de dimension 2 sur $\widetilde{k}$. En considérant un drapeau d'idéaux de $\widetilde{\mathcal{G}}$ adapté à ce quotient, on voit que l'on peut trouver une extension k_1 de degré fini de k tel que $k_1 \otimes \mathcal{G} = \mathcal{G}_1$ est complètement résoluble non nilpotente. Soit Z une clique infinie de $U(\mathcal{G}_1)$. Elle existe, car $\mathcal{G}_1$ possède un quotient isomorphe à l'algèbre de Lie résoluble de dimension 2 sur k_1.

D'après la Proposition A, $Z \cap U(g) := \{Q \cap U(\mathcal{G}),\ Q \in Z\}$ est contenu dans une clique de $\operatorname{Spec} U(\mathcal{G})$. Donc $Z \cap U(\mathcal{G}) = \{P\}$ pour un seul idéal premier P de $U(\mathcal{G})$. Mais au-dessus de P il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers, donc Z est fini, ce qui est la contradiction cherchée. ∎

3 – Cas des quotients d'algèbres enveloppantes d'algèbre de Lie résolubles

Lemme 3.1. *Soient $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique nulle, k_1 une extension quelconque de k, $\mathcal{G}_1 := k_1 \otimes_k \mathcal{G}$. Si P et Q sont deux idéaux premiers de $U(\mathcal{G}_1)$ tels que $P \rightsquigarrow Q$ alors, en posant $P' = U(\mathcal{G}) \cap P$ et $Q' = U(\mathcal{G}) \cap Q$, on a $GK - \dim \frac{U(\mathcal{G})}{P'} = GK - \dim \frac{U(\mathcal{G})}{Q'}$.*

Preuve: D'après l'hypothèse $P \rightsquigarrow Q$ il existe un idéal A de $U(\mathcal{G}_1)$ tel que $PQ \subseteq A \subsetneq P \cap Q$ et $\frac{P\cap Q}{A}$ est sans torsion comme $\frac{U(\mathcal{G}_1)}{P} - \frac{U(\mathcal{G}_1)}{Q}$-bimodule. Alors $\frac{P\cap Q}{A}$ est aussi un $\frac{U(\mathcal{G})}{P'} - \frac{U(\mathcal{G})}{Q'}$-bimodule sans torsion; en effet si par exemple il existait $\overline{x} \in \frac{U(\mathcal{G})}{P'}$ et $\overline{a} \in \frac{P\cap Q}{A}$ avec $\overline{x} \cdot \overline{a} = 0$, alors $\overline{a} \in \frac{U(\mathcal{G}_1)}{P}$ et $\overline{a} = 0$. En conséquence tout sous $\frac{U(\mathcal{G})}{P'} - \frac{U(\mathcal{G})}{Q'}$-bimodule M non nul de $\frac{P\cap Q}{A}$ qui est de type fini à droite et à gauche. Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe un sous-$U(\mathcal{G})^2$-module à gauche non nul de type fini de $\frac{P\cap Q}{A}$. Notons comme dans [5] des $U(\mathcal{G})^2$-modules à gauche qui sont $\mathcal{G}$-finis, c'est-à-dire localement finis pour l'action adjointe de $\mathcal{G}$, et par $\mathcal{H}^f$ la sous catégorie de $\mathcal{H}$ formée des $U(\mathcal{G})^2$-modules de type fini.

Il est clair que $k_1 \otimes U(\mathcal{G})$ appartient à $\mathcal{H}$: en effet si $s \in k_1 \otimes U(\mathcal{G})$, $x = \lambda_1 \otimes y_1 + ... + \lambda_n \otimes y_n$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_n$, $n \in k_1$, et $y_1, ..., y_n \in U(\mathcal{G})$ et on a $\mathrm{ad}(\mathcal{G})(x) \subseteq \lambda_1 \otimes (\mathrm{ad}(\mathcal{G}))(y_n) + ... + \lambda_n \otimes (\mathrm{ad}(\mathcal{G}))(y_n)$ qui est un k-espace vectoriel de dimension finie. Puisque $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^f$ sont fermés par les sous-quotients (cf. [5]) $\frac{P\cap Q}{A}$ est aussi dans $\mathcal{H}$. Considérons un sous $U(\mathcal{G})^2$-module à gauche non nul de type fini M de $\frac{P\cap Q}{A}$, alors M appartient à $\mathcal{H}^f$, mais d'après la Proposition 4.3 de [5], M est un $U(\mathcal{G})$-bimodule de type fini à droite et à gauche. D'après [8] on sait qu'alors la GK-dimension à droite de M est égale à sa GK-dimension à gauche. Soit $x_1, ..., x_n$ un système de générateurs du $U(\mathcal{G})$-module à droite M. On a $\ell-\mathrm{Ann}(x_1U(\mathcal{G})+...+x_nU(\mathcal{G})) = \ell-\mathrm{Ann}(M) = \bigcap_{i=1}^n \ell-\mathrm{Ann}(x_iU(\mathcal{G})) = P'$ car le $\frac{U(\mathcal{G})}{P}$ module à gauche M est sans torsion et que P' est complètement premier. Il en résulte qu'il existe i, $i = 1, ..., n$, tel que $\ell - \mathrm{Ann}(x_iU(\mathcal{G})) \subseteq P'$. Comme $P' \subseteq \ell - \mathrm{Ann}(M)$ on a $P' = \ell - \mathrm{Ann}(x_iU(\mathcal{G})) = \ell - \mathrm{Ann}(x_i)$. Par suite le sous-$U(\mathcal{G})$-module à gauche de M engendré par x_i est isomorphe à $U(\mathcal{G})/P'$. Donc $GK - \dim \frac{U(\mathcal{G})}{P'} = GK - \dim(U(\mathcal{G})\, x_i) \leq GK - \dim$ à gauche de $M \leq GK - \dim \frac{U(\mathcal{G})}{P'}$, car M est un $U(\mathcal{G})/P'$-module à gauche. On montre de même que $GK - \dim$ à droite $(M) = GK - \dim U(\mathcal{G})/Q'$. D'où le résultat. ∎

Corollaire 3.2. *Soient R est un quotient de $U(\mathcal{G})$, k_1 une extension quelconque de k, $R_1 = k_1 \otimes R$. Si P et Q sont deux idéaux premiers de R_1, tels que $P \rightsquigarrow Q$ alors, en posant $P' = R \cap P$ et $Q' = R \cap Q$, on a $GK - \dim \frac{R}{P'} = GK - \dim \frac{R}{Q'}$.*

Preuve: Ceci résulte de 3.1 et du fait que l'image d'une clique de R par l'application naturelle $\mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(U(\mathcal{G}))$ est un sous-graphe d'une clique de $\mathrm{Spec}\, U(\mathcal{G})$. On peut aussi démontrer directement 3.2 comme on l'a fait en 3.1. ∎

Proposition 3.3. *Soient $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique nulle, k_1 une extension de k et $\mathcal{G}_1 = k_1 \otimes \mathcal{G}$. Soit R un quotient de $U(\mathcal{G})$ et $S = k_1 \otimes R$. On suppose l'hypothèse (H) suivante vérifiée: pour tout idéal premier P de R, $k_1 \otimes P$ est un idéal premier de S. Soit P' un idéal premier de R et Q un idéal premier de S tels que $k_1 \otimes P' \neq Q$ et $k_1 \otimes P' \rightsquigarrow Q$ alors $P' \rightsquigarrow R \cap Q$ et $P' \neq R \cap Q$.*

Preuve: La démarche suivie est celle utilisée dans la preuve de la Proposition A. Par fidèle platitude on a $(k_1 \otimes P') \cap R = P'$ et on sait par 3.2 que $GK - \dim \frac{R}{P'} = GK - \dim \frac{R}{Q'}$ où $Q' = Q \cap R$. On choisit $A \subsetneq (k_1 \otimes P') \cap Q$ et $(k_1 \otimes P')Q \subseteq A$ comme dans le Lemme 3.1. Alors $R/A \cap R \hookrightarrow S/A$ et S/A est une extension centralisante non nécessairement finie de $R/A \cap R$. On pose $\overline{R} = R/A \cap R$, $\overline{S} = S/A$. On note $\overline{P}'$ et $\overline{Q}'$ les images de P' et Q' dans $\overline{R}$ et par $\overline{Q}$ l'image de Q dans $\overline{S}$. Dans $\overline{R}$, on a $\overline{P}'\overline{Q}' = 0$ puisque $P'Q' \subseteq (k_1 \otimes P')Q \subseteq A$. Donc $\overline{P}'$ et $\overline{Q}'$ sont les seuls idéaux premiers minimaux de $\overline{R}$. Nous allons montrer que $\{\overline{P}', \overline{Q}'\}$ est une clique de $\mathrm{Spec}(\overline{R})$. En effet remarquons d'abord que si $\overline{T}$ est un idéal premier de $\overline{R}$, distinct de $\overline{P}'$ et $\overline{Q}'$, alors $GK - \dim \overline{R}/\overline{T}$ est strictement inférieure à $GK - \dim \overline{R}/\overline{P}' = GK - \dim \overline{R}/\overline{Q}'$, car $\overline{T}$ contient strictement $\overline{P}'$ ou $\overline{Q}'$. Si l'on avait par exemple $\overline{T} \rightsquigarrow \overline{P}'$ dans $\mathrm{Spec}(\overline{R})$ on aurait $T \rightsquigarrow P'$ dans $\mathrm{Spec}(R)$ en considérant un $\frac{\overline{R}}{\overline{T}} - \frac{\overline{R}}{\overline{P}'}$-bimodule sans torsion de la forme $\frac{\overline{T} \cap \overline{P}'}{\overline{B}} = \frac{T \cap P'}{B}$ et de type fini de chaque côté; en utilisant [7] on aurait comme dans la démonstration du Lemme 3.1, $GK - \dim \frac{\overline{R}}{\overline{T}} = GK - \dim \frac{\overline{R}}{\overline{P}'}$ ce qui n'est pas. Montrons que l'on a nécessairement $\overline{P}' \rightsquigarrow \overline{Q}'$ dans $\mathrm{Spec}(\overline{R})$. Sinon, d'après ce qui précède, l'ensemble $\{\overline{Q}'\}$ serait une clique à gauche de $\overline{R}$. Comme $\overline{R}$ vérifie la condition de second niveau et qu'évidemment l'ensemble $\{\overline{Q}'\}$ satisfait la propriété d'incomparabilité et d'intersection, $\{\overline{Q}'\}$ est classique à droite dans $\overline{R}$; en particulier $\mathcal{C} := \mathcal{C}(\overline{Q}')$ est un ensemble de Ore à droite dans $\overline{R}$. Comme $\overline{S}$ est une extension centralisante de $\overline{R}$, $\mathcal{C}$ est alors Ore à droite dans $\overline{S}$. Puisque $\mathcal{C}$ est contenu dans $\mathcal{C}(\overline{Q})$ (car il est contenu dans $\mathcal{C}(\overline{Q}')$ et que $\overline{Q}' = \overline{Q} \cap \overline{R}$) et puisque $\overline{k_1 \otimes P'} \rightsquigarrow \overline{Q}$ dans $\overline{S}$ (car $k_1 \otimes P' \rightsquigarrow Q$ dans S et que l'on passe au quotient par $A \supseteq PQ$) on a $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(\overline{k_1 \otimes P'})$. Mais alors $\mathcal{C} \subset \overline{R} \cap \mathcal{C}(\overline{k_1 \otimes P'}) = \mathcal{C}(\overline{P})$ ce qui contredit le fait que $\{\overline{Q}'\}$ est classique à droite: en effet $\overline{R}_{\mathcal{C}}$ contiendrait $\overline{P}'\overline{R}_{\mathcal{C}}$ comme idéal à droite propre puisque $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(\overline{P}')$ et ceci contredit le fait que le seul idéal à droite maximal de $\overline{R}_{\mathcal{C}}$ est $\overline{Q}'\overline{R}_{\mathcal{C}}$. On aurait $\overline{P}'\overline{R}_{\mathcal{C}} \subset \overline{Q}'\overline{R}_{\mathcal{C}}$. Pour tout $x \in \overline{P}'$ il existerait $s \in \mathcal{C}$, $xs \in \overline{Q}'$, d'où $x \in \overline{Q}'$ et $\overline{P}' \subseteq \overline{Q}'$, donc $\overline{P}' = \overline{Q}'$, ce qui n'est pas. ∎

L'hypothèse (H) décrite dans la Proposition 3.3 est satisfaite si k_1 est une extension transcendante pure de k ou si k_1 est une ultra-puissance de k, d'après 3.4.

Soient Λ un ensemble d'indices, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur Λ. Si R est un anneau on notera $R^{\mathcal{U}}$ l'ultra puissance correspondante, i.e. le quotient du produit direct $\prod_{i \in \Lambda} R_i$, où $R_i = R$, par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $(x_i)_{i \in \Lambda} \equiv (y_i)_{i \in \Lambda} (\mathrm{mod}\, \mathcal{R})$ si et seulement si l'ensemble $\{i \in \Lambda, x_i = y_i\}$ appartient à $\mathcal{U}$. Pour les définitions et les propriétés que nous utiliserons on renvoie à [2] et [10].

Lemme 3.4. *Soit R une k-algèbre noetherienne (à droite et à gauche) telle que $k_1 \otimes R$ soit encore noetherienne pour toute extension k_1 de k. Alors pour tout idéal premier P de R, $k^{\mathcal{U}} \otimes P$ est un idéal premier de $k^{\mathcal{U}} \otimes R$.*

Preuve: La démonstration consiste, comme dans le Corollaire 2.2 de [10] à remarquer que les applications naturelles $R/P \to k^{\mathcal{U}} \otimes R/P \to (\mathrm{Fr}(R/P))^{\mathcal{U}}$ sont injectives, où $\mathrm{Fr}(R/P)$ est l'anneau (simple) des fractions totales de R/P. D'autre part l'ensemble des éléments réguliers de R/P est contenu dans l'ensemble τ des éléments réguliers de $k^{\mathcal{U}} \otimes R/P$ et chaque élément de τ est non diviseur de zéro dans $\mathrm{Fr}(R/P)^{\mathcal{U}}$. Il en résulte que $\mathrm{Fr}(R/P) \hookrightarrow \tau^{-1}(k^{\mathcal{U}} \otimes R/P) \subset \mathrm{Fr}(R/P)^{\mathcal{U}}$. Comme, [10], $\mathrm{Fr}(R/P)^{\mathcal{U}}$ est un anneau simple et que tout élément du centre de $\tau^{-1}(k^{\mathcal{U}} \otimes R/P)$ commute à tout élément de $\mathrm{Fr}(R/P)$ donc appartient au centre de $[\mathrm{Fr}(R/P)]^{\mathcal{U}}$, on en déduit que le centre de $\tau^{-1}(k^{\mathcal{U}} \otimes R/P)$ est sans diviseur de zéro. Donc $\tau^{-1}(k^{\mathcal{U}} \otimes R/P)$ est un anneau simple et par suite $k^{\mathcal{U}} \otimes P$ est premier. ∎

Lemme 3.5. *Soit R une k-algèbre $\mathbb{N}$-filtrée par des sous-espaces vectoriels de dimension finie sur k, la filtration étant exhaustive. Soit J un idéal (à droite, à gauche ou bilatère) de R. Alors $k^{\mathcal{U}} \otimes J$ est contenu dans l'idéal (à droite, à gauche, ou bilatère) $J^{\mathcal{U}}$ de $R^{\mathcal{U}}$ et l'on a $J^{\mathcal{U}} \cap (k^{\mathcal{U}} \otimes R) = k^{\mathcal{U}} \otimes J$.*

Preuve: La démonstration est la même que celle du Lemme 2.4 de [10]. ∎

Proposition 3.6. *Soient $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique 0, R un quotient de $U(\mathcal{G})$, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur un ensemble d'indices Λ. Si Ω est une clique de R, alors $Y = \{k^{\mathcal{U}} \otimes P,\ P \in \Omega\}$ est une clique de $K^{\mathcal{U}} \otimes R = S$ au-dessus de Ω.*

Preuve: Il est clair que $(k^{\mathcal{U}} \otimes P) \cap R = P$ pour tout $P \in \mathrm{Spec}(R)$ par fidèle platitude. D'après 3.3, il suffit de vérifier que $Y = \{k^{\mathcal{U}} \otimes P,\ P \in \Omega\}$ est contenu dans une clique de $\mathrm{Spec}(S)$. Il suffit de vérifier que si $P \rightsquigarrow Q$ dans $\mathrm{Spec}(R)$ alors $k^{\mathcal{U}} \otimes P \rightsquigarrow k^{\mathcal{U}} \otimes Q$ dans $\mathrm{Spec}(S)$. Si A est un idéal bilatère de R, $PQ \subseteq A \subsetneq P \cap Q$, réalisant le lien $P \rightsquigarrow Q$ on a $(k^{\mathcal{U}} \otimes P)(k^{\mathcal{U}} \otimes Q) \subseteq k^{\mathcal{U}} \otimes A \subsetneq k^{\mathcal{U}} \otimes (P \cap Q)$. Il suffit de vérifier que $\frac{k^{\mathcal{U}} \otimes (P \cap Q)}{k^{\mathcal{U}} \otimes A}$ est un $k^{\mathcal{U}} \otimes \frac{R}{P}$-module à gauche sans torsion et un $k^{\mathcal{U}} \otimes \frac{R}{Q}$-module à droite sans torsion. Soit M un $\overline{R} = R/P$-module à gauche sans diviseur de zéro. Comme P est complètement premier, cela signifie qu'aucun élément de $\mathcal{C}(P) = \{a \in R,\ a \notin P\}$ n'est diviseur de zéro dans M. Il en résulte facilement qu'aucun élément de $\mathcal{C}(P)^{\mathcal{U}}$ n'est diviseur de zéro dans $M^{\mathcal{U}}$; en effet si $\widetilde{(a_i)} \in \mathcal{C}(P^{\mathcal{U}})$, $\widetilde{(x_i)} \in M^{\mathcal{U}}$ et si $\widetilde{(a_i)}\widetilde{(x_i)} = 0$ alors $\{i \in \Lambda,\ a_i x_i = 0\} \in \mathcal{U}$, i.e. $\{i \in \Lambda,\ x_i = 0\} \in \mathcal{U}$; donc $\widetilde{(x_i)} = 0$ il en résulte que $M^{\mathcal{U}}$ est un $R^{\mathcal{U}}/P^{\mathcal{U}}$-module sans diviseur de zéros, car de $\mathcal{C}(P) = R \backslash P$ résulte facilement que $\mathcal{C}(P)^{\mathcal{U}} = R^{\mathcal{U}} \backslash P^{\mathcal{U}}$ et que d'autre part $P^{\mathcal{U}}$ est complètement premier car $R^{\mathcal{U}}/P^{\mathcal{U}} = (R/P)^{\mathcal{U}}$ est un sous anneau de $\mathrm{Fr}(R/P)^{\mathcal{U}}$ qui est un corps ([12], Prop. 14). Il résulte de tout ceci que $\frac{(P \cap Q)^{\mathcal{U}} \cap (k^{\mathcal{U}} \otimes \overline{R})}{A^{\mathcal{U}} \cap (k^{\mathcal{U}} \otimes \overline{R})} \subset \frac{(P \cap Q)^{\mathcal{U}}}{A^{\mathcal{U}}}$ est sans diviseur de zéro sur $\frac{k^{\mathcal{U}} \otimes R}{k^{\mathcal{U}} \otimes P} \subset \frac{R^{\mathcal{U}}}{P^{\mathcal{U}}}$. Donc, d'après 3.5, $\frac{k^{\mathcal{U}} \otimes (P \cap Q)}{k^{\mathcal{U}} \otimes A}$ est sans diviseur de zéros sur $\frac{k^{\mathcal{U}} \otimes R}{k^{\mathcal{U}} \otimes P}$.

La Proposition 3.6 est trivialement vraie si on remplace $k^{\mathcal{U}}$ par une extension transcendante pure arbitraire de k. ∎

Définition 3.7. Soient R un quotient d'une algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique nulle et Ω une clique de R. On dira qu'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ défini sur un ensemble d'indices Λ *est adapté* à Ω si la condition suivante est vérifiée: si J est un idéal (à gauche) de R contenu dans $\bigcup_{P\in\Omega} P$, alors $J^{\mathcal{U}} \subset \bigcup_{P\in\Omega} P^{\mathcal{U}}$.

Proposition 3.8. *Soient R un quotient d'une algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique* 0 *et Ω une clique de R. S'il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ adapté à Ω tel que $k^{\mathcal{U}}$ est non dénombrable, alors Ω est localisable.*

Preuve: Posons $k^{\mathcal{U}} \otimes \Omega = \{k^{\mathcal{U}} \otimes P,\ P \in \Omega\}$. Alors $k^{\mathcal{U}} \otimes \Omega$ est une clique de $k^{\mathcal{U}} \otimes R$ d'après 3.4 et 3.6. Il n'existe par suite pas de relation d'inclusion parmi les $k^{\mathcal{U}} \otimes P$ donc il n'en n'existe pas non plus parmi les P (ce qui se déduit aussi de [7], p. 141). Il suffit, d'après le Théorème 1.C de vérifier que Ω satisfait la condition d'intersection. Soit J un idéal (à gauche par exemple) de R tel que $J \subseteq \bigcup_{P\in\Omega} P$. Par hypothèse et pour un ultrafiltre convenable on a $J^{\mathcal{U}} \subseteq \bigcup_{P\in\Omega} P^{\mathcal{U}}$ et $k^{\mathcal{U}}$ est non dénombrable. En prenant les intersections avec $k^{\mathcal{U}} \otimes R$ on a d'après 3.5, $k^{\mathcal{U}} \otimes J \subseteq \bigcup_{P\in\Omega} k^{\mathcal{U}} \otimes P$. En appliquant le Théorème 1.B au corps non dénombrable $F = k^{\mathcal{U}}$, on voit qu'il existe i_0 tel que $k^{\mathcal{U}} \otimes J \subseteq k^{\mathcal{U}} \otimes P_{i_0}$ d'où $J \subseteq P_{i_0}$. ∎

Exemples et Remarques 3.9.

3.9.1. D'après [6] tout ultrafiltre est adaptée à toute clique Ω d'une algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble, car, si J est un idéal à gauche de $U(\mathcal{G})$ et si $J \subset \bigcup_{P\in\Omega} P$, il existe [6] $Q \in \Omega$ tel que $J \subset Q$. D'où $J^{\mathcal{U}} \subset Q^{\mathcal{U}}$ et $J^{\mathcal{U}} \subset \bigcup_{P\in\Omega} P^{\mathcal{U}}$. Toujours d'après [6] et en appliquant ([7], p. 141), on voit que le résultat précédent reste vrai si R est le quotient de $U(\mathcal{G})$ par un idéal engendré par une famille centralisante.

3.9.2. Si R est le quotient d'une algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle et si Ω est une clique finie de R, tout ultrafiltre est adapté à Ω car le corps de base étant de caractéristique nulle on a, en appliquant le théorème d'évitement des idéaux premiers, si $J \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, alors $P \subset P_{i_0}$ et on conclut comme en 3.9.1.

3.9.3. Le résultat suivant n'étonnera pas les spécialistes.

Soient D un ensemble dénombrable, Λ un ensemble infini, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur Λ. On suppose qu'il existe une suite (D_n) de sous-ensembles de D telle que $(\bigcup D_n)^{\mathcal{U}} = \bigcup D_n^{\mathcal{U}}$ et $(\bigcup_{n\in J} D_n) \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ pour tout sous-ensemble fini J de $\mathbb{N}$. Alors l'injection canonique $j\colon D \to D^{\mathcal{U}}$ est une bijection.

Preuve:

1) *On peut supposer que tous les D_n sont non vides*: il suffit d'éliminer les D_n vides et de renuméroter la suite obtenue (en notant que la condition $(\bigcup_{n\in J} D_n) \neq$

$\bigcup D_n$ entraîne qu'il y a une infinité de D_n non vides).

2) *On peut supposer que quel que soit n on a $D_{n+1} \not\subset \bigcup_{p\leq n} D_n$.* La condition $(\bigcup_{n\in J} D_n) \neq \bigcup D_n$ montre que l'on définit une application $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante en posant $j(0) = 0$ et $j(n+1) =$ le plus petit entier p tel que $D_p \not\subset \bigcup_{q\leq j(n)} D_q$. On a alors $\bigcup_{p\leq n} D_{j(p)} = \bigcup_{q\leq j(n)} D_q$, d'où $\bigcup_p D_{j(p)} = \bigcup_n D_n$ d'où également $\bigcup_{p\leq n} D^{\mathcal{U}}_{j(p)} = (\bigcup_{p\leq n} D_{j(p)})^{\mathcal{U}} = (\bigcup_{p\leq n} D_p)^{\mathcal{U}} = \bigcup_{p\leq n} D^{\mathcal{U}}_p$ et $\bigcup_p D^{\mathcal{U}}_{j(p)} = \bigcup_p D^{\mathcal{U}}_p$. On a ainsi $(\bigcup_p D_{j(p)})^{\mathcal{U}} = \bigcup_p D^{\mathcal{U}}_{j(p)}$.

Il suffit alors de remplacer la famille initiale par celle des $D_{j(n)}$.

2 bis) Il existe une suite (d_n) telle que $d_0 \in D_0$ et $d_{n+1} \in D_{n+1} \backslash (\bigcup_{p\leq n} D_p)$.

3) *Soit $\Lambda = \bigcup \Lambda_p$ une partition dénombrable de Λ. Alors un et un seul des Λ_p est dans l'ultrafiltre $\mathcal{U}$.*

L'unicité est immédiate puisque $\Lambda_p \cap \Lambda_q = \emptyset$ si $p \neq q$. Par élimination des Λ_p vides, on obtient soit une partition finie — et le résultat est alors bien connu — soit une partition que l'on peut renuméroter sous la forme d'une suite. Nous nous placerons dans ce deuxième cas.

On définit une application f de Λ dans D (et en fait dans $\bigcup D_n$) par $f(0) = d_0$ et $f(i) = d_p$ si $i \in \Lambda_p$. Comme $(\bigcup D_n)^{\mathcal{U}} = \bigcup D^{\mathcal{U}}_n$, il existe un p tels que la classe de f appartienne à $D^{\mathcal{U}}_p$; autrement dit on peut trouver une application $g\colon \Lambda \to D_p$ telle que $\{i \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$. Or $\{i \mid f(i) = g(i)\} \subset \{i \mid f(i) \in D_p\} \subset \Lambda_0 \cup ... \cup \Lambda_p$ (noter que $d_j \notin D_p$ quel que soit $j > p$). Ce qui entraîne que l'un des Λ_j, $0 \leq j \leq p$, est dans $\mathcal{U}$.

4) *Fin de la démonstration:* Soit $f : \Lambda \to D$. Posons, pour tout $d \in D$, $\Lambda_d = \{i \mid f(i) = d\}$. Alors la famille des Λ_d est une partition dénombrable de l'ensemble Λ: on a donc $\Lambda_d \in \mathcal{U}$ pour un d et un seul. Comme $f(i) = d$ pour les i d'un ensemble de $\mathcal{U}$, la classe de f dans $D^{\mathcal{U}}$ est égale à l'image de d par l'application canonique, c'est-à-dire que cette dernière est surjective. ∎

Il résulte de 3.9.3 que si Ω est une clique de R, k-algèbre noetherienne, et si $(\bigcup_{P\in\Omega} P)^{\mathcal{U}} = \bigcup_{P\in\Omega} P^{\mathcal{U}}$, où $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur un ensemble Λ, alors $k^{\mathcal{U}}$ est isomorphe à k, donc est dénombrable si k est dénombrable. Donc une condition du type $(\bigcup_{P\in\Omega} P)^{\mathcal{U}} = \bigcup_{P\in\Omega} P^{\mathcal{U}}$ n'est en rien utile pour le problème que l'on a en vu.

En liaison avec la remarque 3.9.3 on a les remarques 3.9.4 et 3.9.5 suivantes. Rappelons d'abord qu'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur un ensemble Λ est *σ-complet* si pour toute suite dénombrable F_n, $n \in \mathbb{N}$, d'éléments de $\mathcal{U}$ l'intersection des F_n appartient à $\mathcal{U}$. Par passage aux complémentaires il revient au même de dire que si $\{K_n\}$ est une suite de sous-ensembles de Λ dont la réunion est dans $\mathcal{U}$, l'un au moins des K_n est dans $\mathcal{U}$.

3.9.4. *Soient Λ un ensemble, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre σ-complet sur Λ, A un ensemble quelconque, $\{Z_n\}$ une suite de sous-ensembles de A. Dans l'ultrapuissance $A^{\mathcal{U}}$ et avec l'identification habituelle de l'ultrapuissance d'un sous-ensemble à une partie de l'ultrapuissance, on a $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n)^{\mathcal{U}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n^{\mathcal{U}}$.*

En effet, de l'inclusion $Z_n \subset \bigcup Z_m$, résulte évidemment que $\bigcup Z_n^{\mathcal{U}} \subseteq (\bigcup Z_m)^{\mathcal{U}}$. Soit $\widetilde{(z_i)}_{i\in\Lambda}$ un élément de $(\bigcup Z_n)^{\mathcal{U}}$. L'ensemble $E = \{i \mid z_i \in \bigcup Z_n\}$ est un ensemble de $\mathcal{U}$. Mais $E = \bigcup E_n$, si l'on pose $E_n = \{i,\, z_i \in Z_n\}$. Comme $\mathcal{U}$ est un σ-complet, on a $E_n \in \mathcal{U}$ pour un n au moins; ce qui revient à dire que $\widetilde{(z_i)}_{i\in\Lambda}$ est dans $Z_n^{\mathcal{U}}$.

3.9.5. On a une réciproque de 3.9.4. *Soient Λ un ensemble, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur Λ, A un ensemble infini. On suppose que, pour toute suite $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de A, on a, dans l'ultrapuissance $A^{\mathcal{U}}$, $\bigcup Z_n^{\mathcal{U}} = (\bigcup Z_n)^{\mathcal{U}}$. Alors $\mathcal{U}$ est σ-complet.*

En effet soit (a_n) une suite d'éléments deux-à-deux distincts de A. Posons $Z_n = \{a_n\}$, l'ensemble à un élément a_n. On considère d'autre part une suite (E_n) de sous-ensembles de Λ dont la réunion E est dans $\mathcal{U}$ et on pose $z_i = a_n$ si $i \in E_n$, la classe de (z_i) dans $A^{\mathcal{U}}$ est un élément de $(\bigcup Z_n)^{\mathcal{U}}$; par suite, il existe un entier m tel que la classe de (z_i) soit dans $Z_m^{\mathcal{U}}$. Ce qui revient à dire que $\{i \mid z_i \in Z_m\} = \{i,\, z_i = a_n\}$ est dans $\mathcal{U}$ ou encore que E_m est dans $\mathcal{U}$.

3.9.6. Comme en 3.9.3, le résultat suivant montre que les ultrafiltres σ-complets n'ont pas d'intérêt pour le problème qui nous intéresse.

Soit D un ensemble dénombrable et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre σ-complet sur l'ensemble Λ. Alors l'injection canonique $j\colon D \hookrightarrow D^{\mathcal{U}}$ est surjective.

Preuve: Soit f une application de Λ dans D. L'ensemble Λ est réunion de la famille dénombrable d'ensembles

$$\Lambda_d = \Big\{x \mid f(x) = d\Big\}\ .$$

Par suite on a $\Lambda_d \in \mathcal{U}$ pour un d convenable. Comme $\Lambda_d \in \mathcal{U}$ l'image de f dans $D^{\mathcal{U}}$ est égale à l'image de l'application constante $x \mapsto d$. En particulier toute ultrapuissance sur un ultrafiltre complet du corps des rationnels $\mathbb{Q}$ est réduite à $\mathbb{Q}$.

Ce qui est en apparence plus surprenant, c'est le fait, que cette "trivialité" de l'ultrapuissance de $\mathbb{Q}$ s'étend à $\mathbb{R}$. Considérons un ultrafiltre complet $\mathcal{U}$ sur un ensemble Λ.

a) Soit f une application de Λ dans $\mathbb{R}$. Il existe un entier N et un ensemble E de $\mathcal{U}$ tel que $f(i) \in [-N, N]$ pour tout $i \in E$. Posons $E_N = \{i \mid f(i) \in [-N, N]\}$. L'ensemble Λ est réunion des E_N et l'un des E_N est donc dans $\mathcal{U}$.

b) Soit f une application de Λ dans $\mathbb{R}$. Alors f est constante sur un ensemble de $\mathcal{U}$. En effet d'après a) f est bornée sur un ensemble de $\mathcal{U}$. Par suite f est convergente suivant l'ultrafiltre $\mathcal{U}$; soit c sa limite. Pour tout entier n l'ensemble $K_n = \{i \in \Lambda,\ |c - f(i)| < \frac{1}{n}\}$ est dans $\mathcal{U}$. L'intersection de ces K_n est également dans $\mathcal{U}$ et f prend la valeur c sur cette intersection. ∎

3.9.7. Remarquons enfin le fait suivante. *Soit R une k algèbre comme en 3.8. Soient $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'idéaux premiers de R, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$, I un idéal (à gauche) de R contenu dans la réunion des P_n tel que $I \not\subseteq P_n$ pour tout n. Alors $I^{\mathcal{U}} \not\subseteq \bigcup_n (P_n)^{\mathcal{U}}$.*

En effet, comme la caractéristique du corps de base est nulle, I n'est contenu dans aucune réunion finie des P_n. On choisit $a_1 \in I$, $a_1 \notin P_1$, $a_2 \in I$, $a_2 \notin P_1 \cup P_2$, ..., $a_m \in I$, $a_m \notin \bigcup_{n\le m} P_n$. Alors $\widetilde{(a_i)} \in I^{\mathcal{U}}$ et $\widetilde{(a_i)} \notin \bigcup (P_n^{\mathcal{U}})$, car sinon il existerait un entier n tel que $\widetilde{(a_i)} \in P_n^{\mathcal{U}}$ et on aurait $\{i,\ a_i \in P_n\} \in \mathcal{U}$; $\mathcal{U}$ contiendrait un ensemble fini, ce qui contredit le fait que $\mathcal{U}$ est non principal.

Il résulte des Remarques 3.9, que l'on trouvera un ultrafiltre $\mathcal{U}$ adapté à Ω convenable si l'on veut construire un ensemble Λ assez grand d'une part, d'autre part si l'on peut décrire la condition des liens en utilisant des énoncés ne faisant intervenir que des quantificateurs du premier ordre et enfin si l'on peut trouver un tel $\mathcal{U}$ de sorte que $k^{\mathcal{U}}$ soit non dénombrable.

4 – Un cas de localisabilité

Soient k un corps dénombrable de caractéristique nulle, $K = k(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le corps des fractions rationnelles en une infinité dénombrable de variables. On se propose de démontrer dans ce paragraphe le théorème suivant:

Théorème 4.1. *Soient R une K-algèbre quotient de l'algèbre enveloppante d'une K-algèbre de Lie résoluble de dimension finie $\mathcal{G}$, Ω une clique d'idéaux de R. Si I est un idéal à gauche tel que $I \subset \bigcup\{J \mid J \in \Omega\}$ alors $I \subset J$ pour un $J \in \Omega$. Donc les cliques de R sont classiques.* ∎

Si maintenant A est quotient de l'algèbre enveloppante d'une k-algèbre de Lie résoluble $\mathcal{G}$, en formant le produit tensoriel $A \otimes K$ et en notant que K est "limite inductive" des $K_n = k(X_0, ..., X_n)$, on voit que la localisation en une clique X est ramenée à la question suivante:

Si $\mathcal{G} \subset \bigcup\{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \in X\}$, a-t-on pour tout n, $\mathcal{G} \otimes K_n \subset \bigcup\{\mathcal{L} \otimes K_n \mid \mathcal{L} \in X\}$?

La démonstration du Théorème 4.1 est assez laborieuse. Elle utilise une procédure de réduction au cas non dénombrable, mais de nature très différente de celle des ultraproduits: brièvement il s'agit de noter qu'il existe des ensembles plus dénombrables que d'autres, par introduction d'un modèle dénombrable standard de la Théorie des Ensembles.

Les modèles de théorie des ensembles interviennent déjà en Algèbre dans la Théorie des Catégories à travers les Univers. Avec ces derniers on limite la cardinalité des ensembles engagés pour pouvoir faire référence à "l'ensemble de tous les ensembles"; et la définition des Univers peut se faire aisément en langage usuel. Notre objectif est différent puisqu'il s'agit de faire croître la cardinalité de certains ensembles en rejetant les bijections qui les rendent dénombrables. Il devient alors nécessaire d'utiliser la théorie formelle. Nous renvoyons à P.J. Cohen [1] pour les quelques résultats de théorie des modèles de ZFC que nous utiliserons.

En particulier nous fixerons un MODELE STANDARD TRANSITIF ET DENOMBRABLE $\mathbb{U}$ de ZFC (axiomes de Zermelo–Fraenkel + Axiome de Choix), cf. [1], Chapitre III, §6. Il convient alors de distinguer de façon rigoureuse les notions et constructions relatives à $\mathbb{U}$ des notions et constructions analogues de l'Univers Total. Nous emploierons le préfixe "$\mathbb{U}$" pour faire référence à "ce qui se passe à l'intérieur de $\mathbb{U}$": ainsi un $\mathbb{U}$-ensemble est un élément de $\mathbb{U}$, le $\mathbb{U}$-ensemble des parties de $\mathbb{P}_{\mathbb{U}}(X)$ du $\mathbb{U}$-ensemble X est le $\mathbb{U}$-ensemble des $\mathbb{U}$-sous-ensembles de X, etc..

4.2. Dire que $\mathbb{U}$ est *transitif* c'est dire que $x \in y \in \mathbb{U}$ entraîne $x \in \mathbb{U}$. Un élément $x \in \mathbb{U}$ a donc les mêmes éléments, qu'on le considère comme ensemble de $\mathbb{U}$ ou ensemble de l'Univers total.

Soient $x, y \in \mathbb{U}$. On peut former dans $\mathbb{U}$ le $\mathbb{U}$-ensemble à deux éléments $\{x, y\}_{\mathbb{U}}$. D'après ce qui précède x et y sont les seuls éléments de $\{x, y\}_{\mathbb{U}}$, autrement dit $\{x, y\}_{\mathbb{U}}$ est aussi l'ensemble à deux éléments $\{x, y\}$.

Les couples étant définis "à la Wiener–Kuratowski" par $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, on voit que pour $x, y \in \mathbb{U}$ il n'y a pas à distinguer entre le $\mathbb{U}$-couple $(x, y)_{\mathbb{U}}$ formé dans $\mathbb{U}$ et le couple (x, y) formé dans l'Univers Total. Par suite:

- Si $r \in \mathbb{U}$ r est une $\mathbb{U}$-relation dans $\mathbb{U}$ (c'est-à-dire que les $\mathbb{U}$-éléments de r sont des $\mathbb{U}$-couples) si et seulement si r est une relation;
- Le produit cartésien de deux ensembles x et y de $\mathbb{U}$ peut être formé indifféremment dans $\mathbb{U}$ ou dans l'Univers total;
- Si $f \in \mathbb{U}$ est une fonction et si $x \in \mathbb{U}$, il n'y a pas lieu de distinguer entre l'image de x par f au sens de $\mathbb{U}$ et l'image usuelle de x par f.

Il sera commode de dire *qu'une application* $f\colon X \to Y$, $X, Y \in \mathbb{U}$, *est définie sur* $\mathbb{U}$ *si* $f \in \mathbb{U}$. Définition applicable en particulier aux lois de composition et par delà aux structures algèbriques.

Si E est un $\mathbb{U}$-ensemble, si γ est une loi de composition sur E définie sur $\mathbb{U}$ et si a_1, a_2 sont deux éléments de E, le produit $a_1a_2 = \gamma(a_1, a_2)$ est le même qu'on le définisse dans $\mathbb{U}$ ou dans l'univers total. Par récurrence, si $a_1, a_2, ..., a_n$ est une suite finie d'éléments de E, le produit $a_1a_2 \cdots a_n$ est le même qu'on le calcule dans $\mathbb{U}$ ou dans l'Univers Total.

Remarque. L'argument utilisé pour montrer que l'ensemble à deux éléments $\{x, y\}$ formé à partir de deux $\mathbb{U}$-ensembles est aussi un $\mathbb{U}$-ensemble sera utilisé de façon répétée dans la suite:

Pour montrer qu'un ensemble construit dans l'Univers Total à partir d'ensembles de $\mathbb{U}$ est dans $\mathbb{U}$ on le compare à l'ensemble de $\mathbb{U}$ construit de la même façon à l'intérieur de $\mathbb{U}$.

Par exemple, on a:

Exemples.

Soient E un $\mathbb{U}$-ensemble, S une $\mathbb{U}$-relation. La relation d'équivalence R engendrée par S est une $\mathbb{U}$-relation.

Preuve: Si S est une $\mathbb{U}$-relation, il en est de même de $T = \Delta \cup S \cup S^{-1}$, où Δ est la diagonale. De plus S et T engendrent la même relation d'équivalence; autrement dit on peut supposer que S est réflexive et symétrique.

Soit $R_{\mathbb{U}}$ la $\mathbb{U}$-relation d'équivalence $\mathbb{U}$-engendrée par S; comme $R_{\mathbb{U}}$ est une relation d'équivalece qui contient S, on a $R \subset R_{\mathbb{U}}$. Soit $(x, y) \in R_{\mathbb{U}}$; dans $\mathbb{U}$ on peut trouver $z_0, z_1, ..., z_n$ tels que $x = z_0$, $y = z_n$ et $z_i \in z_{i+1}$ pour tout i compris entre 0 et $n-1$. Mais c'est encore valable dans l'Univers total, d'où xRy. Et $R_{\mathbb{U}} \subset R$. Ce qui montre que $R = R_{\mathbb{U}}$ et par suite $R \in \mathbb{U}$. ∎

Si E est un $\mathbb{U}$-ensemble et si $\mathcal{R}$ est une $\mathbb{U}$-relation d'équivalence sur E, chaque classe d'équivalence est un $\mathbb{U}$-ensemble et $E/\mathcal{R} \in \mathbb{U}$.

Preuve: Soit Γ une $\mathbb{U}$-classe d'équivalence: si $a \in \Gamma$, on a $x\mathcal{R}a$ pour tout $x \in \Gamma$. Ce qui montre que $\Gamma \subset$ "classe de a". L'inclusion inverse se montre de la même façon. On peut former dans $\mathbb{U}$ le quotient $(E/\mathcal{R})_{\mathbb{U}}$; d'après ce qui précède toute $\mathbb{U}$-classe est une classe d'équivalence, d'où l'inclusion $(E/\mathcal{R})_{\mathbb{U}} \subset (E/\mathcal{R})$. Si C est une classe d'équivalence et si $a \in C$, C est la $\mathbb{U}$-classe de a. D'où $(E/\mathcal{R}) \subset (E/\mathcal{R})_{\mathbb{U}}$. ∎

4.3. *Soit F un sous-ensemble fini d'un ensemble $E \in \mathbb{U}$. Alors $F \in \mathbb{U}$.*

Preuve: On procède par récurrence sur le nombre d'éléments de F, l'assertion étant immédiate pour l'ensemble vide. Soit $F = G \cup \langle a \rangle$, $a \notin G$. Par l'hypothèse de récurrence $G \in \mathbb{U}$. Par transitivité de $a \in F \in \mathbb{U}$ on tire $a \in \mathbb{U}$ puis

$\langle a\rangle \in \mathbb{U}$. Par la remarque b) ci-dessus $(G, \langle a\rangle) \in \mathbb{U}$. Et F n'est autre que l'union (dans l'Univers total ou dans $\mathbb{U}$) de cet ensemble à deux éléments. Il suffit donc d'appliquer l'axiome de l'union à $\mathbb{U}$. ∎

Soit A un ensemble pointé dont on notera 0 l'élément distingué. Une application $f\colon X \to A$ sera dite *nulle presque partout si* $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ est fini. *Si* X *et* A *sont des* $\mathbb{U}$*-ensembles,* $f \in \mathbb{U}$.

Preuve: Soient $Z = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$, $G =$"restriction de f à Z" et $h =$"restriction de f à $X \backslash Z$". Les ensembles Z et G sont finis; d'après le Lemme 4.2 les ensembles Z et G sont dans $\mathbb{U}$. D'autre part le complémentaire de Z dans X est aussi dans $\mathbb{U}$ ainsi que $(X \backslash Z) \times \langle 0\rangle = H$. Il suffit de remarquer que f est réunion de G et de H. ∎

Sous les mêmes hypothèses, l'ensemble des applications de X *dans* A *nulles presque partout est un* $\mathbb{U}$*-ensemble.*

Preuve: Soient $\mathbb{N}_{\mathbb{U}}(X, A) \in \mathbb{U}$ le $\mathbb{U}$-ensemble des $\mathbb{U}$-applications nulles presque partout de X dans A, $\mathbb{N}(X, A)$ l'ensemble analogue DEFINI DANS L'UNIVERS TOTAL. On a évidemment $\mathbb{N}_{\mathbb{U}}(X, A) \subset \mathbb{N}(X, A)$. L'inclusion inverse résulte du lemme précédent. ∎

Prenons pour ensemble A *un corps* $k \in \mathbb{U}$ *dont la structure est définie dans* $\mathbb{U}$*, l'élément distingué étant* 0. Alors $\mathbb{N}(X, k)$ n'est rien d'autre que le k-espace vectoriel $k^{\langle X\rangle}$ des combinaisons linéaires formelles des éléments de X à coefficients dans k. Lorsque k est un $\mathbb{U}$-corps, l'identification de $\mathbb{N}(X, A)$ et de $\mathbb{N}_{\mathbb{U}}(X, A)$ montre que $k^{\langle X\rangle}$ *est un* k*-espace vectoriel élément de* $\mathbb{U}$ *à structure définie dans* $\mathbb{U}$.

Soient maintenant E *un* $\mathbb{U}$*-espace vectoriel,* B *une* $\mathbb{U}$*-base de* E*. Alors,* B *est une base de* E.

Preuve: On a dans $\mathbb{U}$ un isomorphisme $i\colon k^{\langle B\rangle} \to E$. Cet $\mathbb{U}$-isomorphisme est aussi un isomorphisme. ∎

Soient E *et* F *deux* $\mathbb{U}$*-espaces vectoriels de dimension finie.* Toute $\mathbb{U}$-base étant une base, E et F sont de dimension finie. *Et l'espace vectoriel* $\mathcal{L}(E, F)$ *des applications linéaires de* E *dans* F *est un* $\mathbb{U}$*-espace vectoriel.*

Preuve: Fixons une base (e_i) de E et une base (f_j) de F. Soit u une application linéaire de E dans F; comme ensemble fini la matrice M de u dans les bases (e_*) et (f_*) est un $\mathbb{U}$-ensemble qui définit une $\mathbb{U}$-application linéaire v de E dans F. Mais v est une application linéaire de E dans F dans l'Univers total; et elle coïncide avec u sur la base (e_*), d'où $u = v \in \mathbb{U}$.

Toute $\mathbb{U}$-application linéaire étant une application linéaire, si $\mathcal{L}_{\mathbb{U}}$ désigne l'ensemble des $\mathbb{U}$-applications linéaires, on a l'inclusion $\mathcal{L}_{\mathbb{U}}(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$. Mais on a vu dans l'alinéa précédent que toute application linéaire est une $\mathbb{U}$-application linéaire, ce qui établit l'inclusion inverse. Et $\mathcal{L}_{\mathbb{U}}(E,F)$ est un $\mathbb{U}$-espace vectoriel. ∎

On peut appliquer le même raisonnement aux applications bilinéaires $E \times F \to G$ entre $\mathbb{U}$-espace vectoriels.

4.4. *Soit k un corps dénombrable. Il existe un modèle standard transitif dénombrable contenant un corps isomorphe à k.*

Preuve: Soit $i: k \to \mathbb{N}$ une bijection. Par transfert de structure on peut munir $\mathbb{N}$ d'une structure de corps, définie par deux applications e (addition) et p (produit) — qui ne sont pas nécessairement des $\mathbb{U}$-ensembles. Il existe une bijection $c: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est primitive récursive donc dans $\mathbb{U}$; et si e et p sont connues à travers ec^{-1} et pc^{-1}, sous-ensembles de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, à nouveau identifiables par c^{-1} à des ensembles de $\mathbb{N}$. En introduisant les bijections de $\mathbb{N}$ sur les entiers pairs et sur les entiers impairs, on peut ramener la connaissance des deux sous-ensembles à celle d'un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Autrement dit la structure de corps sur $\mathbb{N}$ obtenue par transfert de celle de k est codée par un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Il n'y a plus qu'à adjoindre à $\mathbb{U}$ ce sous-ensemble, ce qui est l'exemple de base de la méthode de Cohen, cf. [1], Ch. IV, §6. ∎

Nous considérons dans ce qui suit un corps dénombrable k, qui sera supposé être un $\mathbb{U}$-corps.

4.5. *Soient B un $\mathbb{U}$-ensemble, k un $\mathbb{U}$-corps. L'algèbre des polynômes d'ensemble d'indéterminées B à coefficents dans k est une $\mathbb{U}$-algèbre. C'est aussi la $\mathbb{U}$-algèbre des polynômes d'ensembles d'indéterminées B à coefficients dans k.*

Preuve: Soit A (resp. $A_{\mathbb{U}}$) l'algèbre (la $\mathbb{U}$-algèbre) des polynômes à coefficients dans K d'ensemble d'indéterminées B. Comme $A_{\mathbb{U}}$ est une k-algèbre, l'application identique $i: B \to B$ ce prolonge en un homomorphisme i_* d'algèbres de A dans $A_{\mathbb{U}}$. L'espace vectoriel A sur k (resp. le $\mathbb{U}$-espace vectoriel $A_{\mathbb{U}}$ sur k) admet pour base l'ensemble des monômes (resp. des $\mathbb{U}$-monômes), c'est-à--dire l'ensemble des applications presque partout nulles de B dans $\mathbb{N}$ (resp. le $\mathbb{U}$-ensemble, etc.). D'après le paragraphe précédent il n'y a lieu de distinguer monômes et $\mathbb{U}$-monômes. La proposition précédente montre que le k-espace vectoriel $A_{\mathbb{U}}$ admet comme base les monômes; et il suffit de remarquer que i_* conserve les monômes. Ainsi A et $A_{\mathbb{U}}$ sont des k-algèbres isomorphes. ∎

Soient B un $\mathbb{U}$-ensemble, k un $\mathbb{U}$-corps. Le corps $k(X_b)_{b\in B}$ des fractions rationnelles à coefficients dans k et indéterminées dans B est un $\mathbb{U}$-corps.

Preuve: L'anneau des polynômes $k[X_b]_{b\in B}$ est un $\mathbb{U}$-anneau commutatif. Soit K son $\mathbb{U}$-corps des fractions. C'est un corps contenant $k[X_b]_{b\in B}$ et dont tout élément est quotient de deux éléments de $k[X_b]_{b\in B}$. C'est donc un corps de fractions de $k[X_b]_{b\in B}$. ∎

Soient k un $\mathbb{U}$-corps, $\mathcal{G}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie. L'algèbre enveloppante $U(\mathcal{G})$ est aussi la $\mathbb{U}$-algèbre enveloppante de $\mathcal{G}$. Toute idéal I de $U(\mathcal{G})$ est un $\mathbb{U}$-idéal.

Preuve: Méthode habituelle — On introduit $W(\mathcal{G})$, la $\mathbb{U}$-algèbre enveloppante de $\mathcal{G}$. L'application identique $i\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ se prolonge en un homomorphisme $i_*: U(\mathcal{G}) \to W(\mathcal{G})$ par propriété universelle. On utilise ensuite le théorème de Birkhoff–Witt dans l'Univers total et dans $\mathbb{U}$ pour montrer que $U(\mathcal{G})$ et $W(\mathcal{G})$ ont une base "commune", à savoir l'ensemble des monômes en les éléments de $\mathcal{G}$.

Comme $U(\mathcal{G})$ est noethérien, l'idéal I est engendré par un nombre fini d'éléments $a_1, a_2, ..., a_n$. Comme $U(\mathcal{G})$ est une $\mathbb{U}$-algèbre on peut introduire le $\mathbb{U}$-idéal J engendré par les (a_i). Comme J est un idéal contenant les (a_i), on a $I \subset J$. Mais tout élément de J est combinaison linéaires des (a_i) dans $\mathbb{U}$ donc dans l'Univers total (vérification par récurrence sur n). D'où l'inclusion inverse. Et $I = J$ montre que I est un $\mathbb{U}$-idéal. ∎

4.6. Le résultat suivant jouera un rôle essentiel dans la suite:

Soient k un corps dénombrable, K le corps $k(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fractions rationnelles à une infinité de variables sur k. Il existe un $\mathbb{U}$-corps L isomorphe à K dont la $\mathbb{U}$-cardinalité est strictement supérieure au dénombrable.

Preuve: On peut supposer $k \in \mathbb{U}$ par 4.4. Soit I un $\mathbb{U}$-ensemble de $\mathbb{U}$-cardinalité strictement supérieure au dénombrable (par exemple $I =$ "ensemble des réels de $\mathbb{U}$"). On a vu à l'alinéa précédent que $L = k(X_i)_{i\in I}$ est un $\mathbb{U}$-corps; et il est connu que sa $\mathbb{U}$-cardinalité est supérieure ou égale à celle de I. D'autre part, $\mathbb{U}$ étant dénombrable, il en est de même de $I \subset \mathbb{U}$. Et toute bijection de $\mathbb{N}$ sur I se prolongue en un isomorphisme de $k(X_n)$ sur L. ∎

Soient K et L deux corps, $j: K \to L$ un isomorphisme, E un K-espace vectoriel, F un L-espace vectoriel, u une application de E dans F. On rappelle que u est *j-linéaire* si $u(x+y) = u(x) + u(y)$ et $u(\lambda x) = j(\lambda)\, u(x)$. Si u est un ismorphisme, L un $\mathbb{U}$-corps et F un $\mathbb{U}$-espace vectoriel, on dira que u réalise une *$\mathbb{U}$-copie de E*.

Soient k un corps dénombrable (supposé $\mathbb{U}$-corps), K le corps $k(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) *Tout K-espace vectoriel E de dimension finie admet une $\mathbb{U}$-copie avec un corps des scalaires L de $\mathbb{U}$-cardinalité non dénombrable.*

b) *Toute K-algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de dimension finie admet une $\mathbb{U}$-copie $\mathcal{H}$ avec un corps de scalaires L de $\mathbb{U}$-cardinalité non dénombrable. L'isomorphisme qui réalise cette $\mathbb{U}$-copie se prolonge en un isomorphisme de l'algèbre enveloppante $U(\mathcal{G})$ sur la $\mathbb{U}$-algèbre enveloppante $W(\mathcal{H})$ faisant de $W(\mathcal{H})$ une $\mathbb{U}$-copie de $U(\mathcal{G})$.*

c) *Soit A une K-algèbre quotient d'une algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble de dimension finie. Alors A admet une $\mathbb{U}$-copie quotient d'une algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un $\mathbb{U}$-corps de scalaires de $\mathbb{U}$-cardinalité strictement supérieure au dénombrable.*

Preuve:

a) D'après le début du paragraphe on peut trouver un $\mathbb{U}$-corps L de $\mathbb{U}$-cardinalité strictement supérieure au dénombrable et un isomorphisme j de K sur L. Pour tout entier n cet isomorphisme se prolonge en un j isomorphisme $j^{(n)}: K^n \to L^n$ faisant de L^n une $\mathbb{U}$-copie de K^n. Et tout K-espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à un K^n.

b) Soit $u: \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ une $\mathbb{U}$-copie de l'espace vectoriel $\mathcal{G}$ sur un corps L de $\mathbb{U}$-cardinalité strictement supérieure au dénombrable. On fait de $\mathcal{H}$ une $\mathbb{U}$-copie en tant qu'algèbre de Lie en posant

$$[h_1, h_2] = [u^{-1}(h_1), u^{-1}(h_2)] \ .$$

Ce crochet est une application bilinéaire de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. D'après la remarque faite à la fin de 4.3, cette application est une $\mathbb{U}$-application bilinéaire; et $\mathcal{H}$ est ainsi une $\mathbb{U}$-algèbre de Lie.

L'isomorphisme u se prolonge en un j-isomorphisme des algèbres enveloppantes $U(\mathcal{G}) \to U(\mathcal{H})$. Comme $\mathcal{H}$ est une $\mathbb{U}$-algèbre, $U(\mathcal{H})$ s'identifie à la $\mathbb{U}$-algèbre enveloppante de $\mathcal{H}$.

c) Si A est quotient de $U(\mathcal{G})$ par l'idéal J, si $u: \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ est une $\mathbb{U}$-copie se prolongeant en une copie $v: U(\mathcal{G}) \to U(\mathcal{H})$, la $\mathbb{U}$-copie de A est $U(\mathcal{H})/v(J)$. On notera que d'après 4.5 tout idéal de $U(\mathcal{H})$ et en particulier $v(J)$, est un $\mathbb{U}$-idéal qui définit dans $U(\mathcal{H})$ une $\mathbb{U}$-relation d'équivalence pour laquelle l'ensemble quotient est un $\mathbb{U}$-ensemble (fin de l'alinéa 4.2). ∎

4.7. *Soient L un $\mathbb{U}$-corps, A une $\mathbb{U}$-algèbre sur L. On suppose A noetherienne (dans l'Univers total, c'est-à-dire que tout idéal, et non pas seulement tout $\mathbb{U}$-idéal, est de type fini). Alors:*

i) *Tout idéal de A est un $\mathbb{U}$-idéal;*

ii) *Un idéal P de A est premier; si et seulement s'il est $\mathbb{U}$-premier; si P est un idéal premier, $a \in A$ est $\mathbb{U}$-régulier modulo P si et seulement s'il est régulier modulo P;*

iii) *La relation de liaison $P \rightsquigarrow Q$ entre idéaux premiers de A est une $\mathbb{U}$-relation;*

iv) *Toute clique est un $\mathbb{U}$-ensemble et est $\mathbb{U}$-dénombrable.*

Preuve: Tout idéal est un $\mathbb{U}$-idéal: reprendre la démonstration de 4.5 sur les idéaux de l'algèbre enveloppante.

Soit P un $\mathbb{U}$-idéal premier (resp. un idéal premier). Si $a, b \notin P$, il existe $c \in A$ tel que $acb \notin P$, ce qui entraîne que P est premier (resp. $\mathbb{U}$-premier).

Si a est $\mathbb{U}$-régulier modulo P et si $b \notin P$ (dans $\mathbb{U}$), on a $ab \notin P$ et $ba \notin P$ dans $\mathbb{U}$. Mais ces relations sont encore valables dans l'Univers total, ce qui montre que a est régulier. Démonstration réciproque analogue.

Soient P et Q deux idéaux premiers, tels que $P \rightsquigarrow Q$ dans l'Univers total: il existe un idéal bilatère I, $PQ \subset I \subset P \cap Q$, $I \neq P \cap Q$, tel que $(P \cap Q)/I$ soit un $(A/P, A/Q)$-bimodule sans torsion, autrement dit si $p \in P \backslash I$, $p \in Q \backslash I$, a régulier modulo P et b régulier modulo Q, on a $apb \notin I$. Les $\mathbb{U}$-ensembles ayant les mêmes éléments dans $\mathbb{U}$ et dans l'Univers total et tout idéal étant un $\mathbb{U}$-idéal, l'énoncé précédent reste valable mot pour mot dans $\mathbb{U}$. C'est dire que $P \rightsquigarrow Q$ dans $\mathbb{U}$. On montre de la même façon que si $P \rightsquigarrow Q$ dans $\mathbb{U}$ il en est de même dans l'Univers total.

Tout idéal étant un $\mathbb{U}$-idéal, $\mathrm{Spec}(A)$ est un $\mathbb{U}$-ensemble (s'identifiant au $\mathbb{U}$-spectre de A). D'après 4.2 la relation d'équivalence engendrée par la $\mathbb{U}$-relation $\rightsquigarrow$ est une $\mathbb{U}$-relation; et les cliques, c'est-à-dire les classes d'équivalence pour cette relation d'équivalence engendrée par $\rightsquigarrow$ sont des $\mathbb{U}$-ensembles.

Ce sont aussi les $\mathbb{U}$-cliques de A; et elles sont donc dénombrables dans $\mathbb{U}$. ∎

4.8. *Fin de la démonstration du Théorème 4.1.*

D'après 4.6 on peut remplacer R par une $\mathbb{U}$-copie sur un corps des scalaires dont la $\mathbb{U}$-cardinalité est strictement supérieure au dénombrable. On remplacera R par cette $\mathbb{U}$-copie. On peut alors opérer dans $\mathbb{U}$: si Ω est une clique de R, c'est aussi une $\mathbb{U}$-clique et, par transitivité de $\mathbb{U}$, l'ensemble $Z = \bigcup(J \mid J \in \Omega)$ est le même qu'on le définisse dans l'Univers total ou dans $\mathbb{U}$. Si $I \subset Z$ le Théorème 1.B, APPLIQUE DANS L'UNIVERS $\mathbb{U}$ compte tenu du fait que I est un $\mathbb{U}$-ensemble — car de type fini — et que pour $\mathbb{U}$ le corps des scalaires à une cardinalité strictement supérieure au dénombrable, montre que $I \subset J$ pour un $J \in \Omega$. ∎

4.9 Remarque. La démonstration précédente repose sur un principe de descente: au lieu de descendre comme en Géométrie Algébrique de la catégorie des B-modules à celle des A-modules, pour une "extension convenable" d'anneaux $A \to B$, on descend de l'Univers total à l'Univers dénombrable $\mathbb{U}$. On retrouve alors un phénomène bien banal de la descente: elle "casse" certains isomorphismes; et c'est ce qui est utilisé ici, en cassant l'isomorphisme $k(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \to k(X_i)_{i\in I}$ où $I \in \mathbb{U}$ est dénombrable sans être $\mathbb{U}$-dénombrable.

On peut noter que l'argument ne s'applique ni à une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ ni à $k(X)$ (et par récurrence immédiate à un corps $k(X_1, ..., X_n)$):

Soit K une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ ou un corps de fractions rationelles à une indéterminée sur un $\mathbb{U}$-corps $\mathbb{U}$-dénombrable. Alors tout $\mathbb{U}$-corps isomorphe à K est $\mathbb{U}$-dénombrable. Si K est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ fixons un isomorphisme $i\colon K \to L$ de K sur un $\mathbb{U}$-corps L: un tel isomorphisme conserve $\mathbb{Q}$. Tout $x \in K$ satisfait à une équation $P(x) = 0$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$; comme $\mathbb{Q}$ est conservé par i on a $P(i(x)) = 0$. Cette équation peut s'interpréter comme une équation de $\mathbb{U}$; autrement dit $i(x)$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et L est un $\mathbb{U}$-sous--corps d'une $\mathbb{U}$-clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ laquelle est $\mathbb{U}$-dénombrable (on laisse au lecteur le soin de vérifier par l'argument habituel qu'une $\mathbb{U}$-clôture est aussi une clôture).

Si $K = k(x)$ un $\mathbb{U}$-corps k-isomorphe à K est alors $\mathbb{U}$-corps de fractions rationelle à une indéterminée et est donc $\mathbb{U}$-dénombrable.

4.10 Remarque. On pourrait essayer de "localiser" une k-algèbre R quotient d'une algèbre de Lie résoluble de dimension finie $\mathcal{G}$ en une clique Ω en remontant Ω en une clique Ω' de $K \otimes_k R$ où $K = k(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en localisant $K \otimes_k R$ en Ω' et en prenant les invariants de l'algèbre localisée sous l'action du groupe des k-automorphismes de K. Mais il n'est pas clair que la conditon de Ore soit alors satisfaite, ni que l'anneau obtenu soit noethérien et plat sur R.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COHEN, P.J. – *Set theory and the Continuum hypothesis*, W.A. Benjamin Inc., 1966.

[2] BORHO, W., GABRIEL, P. et RENTSCHLER, R. – *Primideale in Einhüllenden auflösbare Lie-Algebren*, Lecture Notes in Mathematics, nº 357, Springer Verlag.

[3] BRAUN, A. et WARFIELD, R.B. – Symmetry and localization in noetherian prime P.I. rings, *J. of Algebra*, 118, 322–335.

[4] BROWN, K.A. – Localization, bimodules and injective modules for enveloping algebras of solvable Lie algebras, *Bull. Sc. Math.*, 107 (1983), 225–251.

[5] BROWN, K.A. et LEVASSEUR, T. – Cohomology of bimodules over enveloping algebras, *Math. Zeit.*, 189 (1985), 393–413.

[6] Goodearl, K.R. – Classical localizability in solvable enveloping algebras and Poincaré–Birkhoff–Witt extensions, *J. of Algebra*, 132 (1990), 243–262.

[7] Jategaonkar, A.V. – *Localization in noetherian rings*, London, Math. Soc. Series, n° 98, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[8] Lenagan, T. – Gelfand–Kirillov dimension and affine P.I.-rings, *Comm. in Algebra*, 10 (1982), 87–92.

[9] Letzter, E.S. – Prime ideals in finite extension of noetherian rings, *J. of Algebra*, 135 (1990), 412–439.

[10] Malliavin, M.P. – *Ultra produits d'algèbres de Lie*, Séminaire d'Algèbre, 1981, 157–166, Lecture Notes in Mathematics, n° 924, Springer Verlag.

[11] Stafford, J.T. – The Goldie rank of a module, in "Noetherian Rings and their applications", *Mathematical Surveys and monographs*, n° 24, American Mathematical Society, Providence, 1987, pp. 1–20.

[12] Taha, F. – *Algèbres simples centrales sur le corps ultra produits de corps p-adiques*, Séminaire d'Algèbre, 1981, 89–128, Lecture Notes in Mathematics, n° 924, Springer Verlag.

[13] Warfield, R.B. – *Non commutative localized rings*, Séminaire d'Algèbre, 1985, Lecture Notes in Mathematics, n° 1220, 178–200, Springer Verlag.

François Aribaud,
UFR Mathématiques, Université Pierre et Marie Curie,
4, Place Jussieu, 75005 Paris – FRANCE

and

Marie Paule Malliavin,
UFR Mathématiques, Université Pierre et Marie Curie,
4, Place Jussieu, 75005 Paris – FRANCE