PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 52 Fasc. 2 – 1995

DEGRE TOPOLOGIQUE ET EXISTENCE D'UNE INFINITE DE SOLUTIONS D'UN PROBLEME AUX LIMITES POUR UNE EQUATION SINGULIERE

M. Henrard

1 – Introduction et hypothèses

On considère l'équation

$$u''(t) + \frac{n}{t}\,u'(t) + g(u(t)) = p(t, u(t), u'(t)) \tag{1}$$

et les conditions aux limites

$$u'(0) = 0\,, \qquad \alpha\,u(1) + \beta\,u'(1) = 0\ . \tag{2}$$

Le but de cet article est de prouver l'existence d'une infinité de solutions à ce problème dans le cas où g est superlinéaire. On étudie ce problème entre autres pour son rapport avec l'existence de solutions radialement symétriques du problème de Dirichlet

$$\begin{aligned} &\Delta u(x) + g(u(x)) = \bar p(x) \quad && x \in \Omega \\ &u(x) = 0 && x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{3}$$

où Ω est la boule de rayon 1 centrée à l'origine dans $\mathbb{R}^N$. En effet, si $\bar p(x) = p(|x|)$, l'existence d'une telle solution est équivalente à l'existence d'une solution de (1)–(2) avec $N = n+1$, $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

La plupart des résultats obtenus à propos du problème (3) l'ont été par des méthodes variationnelles. L'existence d'une infinité de solutions a été prouvée par Bahri et Berestycki [BB] dans le cas où $g(u) = |u|^{p-1}\,u$ avec p suffisamment petit et Ω est un ouvert régulier. Struwe [Str_1] a obtenu le même genre de résultats pour des systèmes elliptiques plus généraux. Ces résultats ont ensuite été étendus par Bahri et Lions [BL], Rabinowitz [Rab] et Struwe [Str_3] [Str_2].

Received: March 6, 1993.

Dans la suite, Castro et Kurepa [CK_2] [CK_1], en se ramenant à l'étude de l'équation différentielle ordinaire (1), ont étudié ce problème par des méthodes d'analyse du plan de phase. Ils ont ainsi obtenu de meilleures hypothèses sur la croissance de g.

Pour étudier ce problème, on utilise des méthodes de degré. Cela permet, contrairement aux méthodes variationnelles, d'introduire une perturbation qui dépend également de u'. Et, par opposition aux méthodes d'analyse du plan de phase, l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy associé à (1) n'est plus nécessaire. Les hypothèses (H1) à (H4) que l'on emploie pour prouver la solvabilité du problème sont très contraignantes pour g. Mais elles sont tempérées par la "liberté" que l'on laisse à p. Par exemple, on demande que g soit localement lipschitzienne, mais si g est continue, on peut l'approcher par une fonction localement lipschitzienne et inclure la différence dans p. De même on demande que g soit croissante, mais la dépendance en x de p peut être plus que linéaire (par exemple pour $g(x) = x^3$, on peut prendre $p(x) = x^2$).

On note G la primitive de g telle que $G(0) = 0$ (i.e. $G(x) = \int_0^x g(s)ds$). Les hypothèses que l'on impose à g et p pour obtenir une infinité de solutions sont les suivantes.

(H1) $n > 0$

(H2) g est une fonction localement lipschitzienne, croissante, telle que $|g(x) - g(y)| \geq |x - y|$ et il existe k et $m > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\max\{x^2, |x|^{2+\frac{1}{k}}\} \leq x\, g(x) \leq \max\{|x|^{m+1}, x^2\}$.

(H3) p est une fonction continue telle que

$$|p(t,x,y)| \leq a + h(x) + c|y|$$

avec $0 \leq h(x) \leq \min\{b\sqrt{G(x)}, \mu|g(x)|\}$ où $1 - \mu > 0$.

(H4) il existe $\kappa \in]0,1[$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$\lim_{d \to +\infty} G(\kappa d)\left(\frac{d}{g(\gamma d) + \sqrt{G(d)}}\right)^{n+\epsilon} = +\infty$$

avec $\gamma = e^{\max\{1+2c, b^2/2\}+2a}$.

Si g est telle que $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x^\alpha} = l \neq 0$, alors la condition (H4) s'écrit $\alpha < \frac{n+1}{n-1}$. C'est le résultat obtenu dans [CK_2, theorem B] pour le cas où il n'y a restriction sur la croissance de g que d'un côté.

2 – Degré de coïncidence

On montre que le problème

$$u''(t) + \frac{n}{t}\,u'(t) = f(t, u(t), u'(t)) \tag{4}$$
$$u'(0) = 0\,, \qquad \alpha\,u(1) + \beta\,u'(1) = 0\ ,$$

où $f\colon\ I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue peut s'écrire sous la forme d'une équation de coïncidence. Pour la construction du degré de coïncidence et les définitions s'y rapportant, on peut se référer à [Maw].

Pour $k \geq 1$, on note $C^k_{||} = \{u \in C^k(I, \mathbb{R}) :\ u'(0) = 0\}$. Posons $X = C^1_{||}$, $D(\mathcal{L}) = C^2_{||}$ et $Z = C(I, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. On définit alors $\mathcal{L}\colon\ D(\mathcal{L}) \subset X \to Z$; $u \to \mathcal{L}u$, par

$$\mathcal{L}u(t) = \Big(u''(t) + \frac{n}{t}\,u'(t), 0\Big)$$

et $\mathcal{N}\colon\ X \to Z$; $u \mapsto \mathcal{N}(u)$ par

$$\mathcal{N}(u)(t) = \Big(N(u)(t), \alpha u(1) + \beta u'(1)\Big)$$

où N est l'opérateur de Nemitskii associé à f. Avec ces notations, le problème (4)–(2) peut s'écrire de manière équivalente comme

$$\mathcal{L}u = \mathcal{N}(u)\ .$$

Alors $\operatorname{Ker}\mathcal{L} = \{u \in C^2_{||}\colon\ \forall\, t \in I\colon\ u(t) = u(0)\}$, $\operatorname{Im}\mathcal{L} = C(I, \mathbb{R}) \times \{0\}$ et $\mathcal{L}$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Pour la suite, on identifie la constante $c \in \mathbb{R}$ et la fonction constante sur I, $x\colon\ I \to \mathbb{R}$; $t \mapsto c$. A ces espaces on associe les projections $Q\colon\ Z \to Z$; $(u, c) \mapsto (0, c)$ telle que $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im}\mathcal{L}$ et $P\colon\ X \to X$; $u \mapsto u(0)$ qui est telle que $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker}\mathcal{L}$.

On peut alors écrire l'inverse à droite de $\mathcal{L}$, associé à P et Q, $K_{PQ}\colon\ Z \to \operatorname{Ker} P \cap D(\mathcal{L})$; $(g, c) \mapsto K_{PQ}(g, c)$ avec

$$K_{PQ}(g, c)(t) = \int_0^t h(t, s)\, g(s)\, ds$$

où $h(t, s) = \frac{s^n t^{-n+1} - s}{1-n}$.

On montre alors que $\mathcal{N}$ est $\mathcal{L}$-complètement continue. C'est-à-dire que

- $Q\mathcal{N}\colon\ X \to Z$ est continue et envoie les bornés sur des bornés et
- $K_{PQ}\mathcal{N}\colon\ X \to X$ est complètement continue.

Pour ce deuxième point, on montre que $(I - Q)\,\mathcal{N}$ envoie les bornés sur des bornés et que K_P est complètement continue. La première partie est immédiate.

Pour la deuxième, on montre que, pour $B \subset C(I, \mathbb{R})$ borné, les ensembles $\{K_P g\colon g \in B\}$, $\{(K_P g)'\colon g \in B\}$ et $\{(K_P g)''\colon g \in B\}$ sont bornés en norme uniforme. Par le théorème d'Arzeli-Ascola, $K_P B$ est alors compact. Et en effet,

$$\begin{aligned}
|K_P g|_\infty &= \Big|\int_0^t h(t,s)\, g(s)\, ds\Big|_\infty \\
&\le |g|_\infty \Big|\frac{t^{-n+1}}{1-n}\int_0^t s^n\, ds - \frac{1}{1-n}\int_0^t s\, ds\Big| \\
&\le |g|_\infty \Big|\frac{t^{-n+1}}{1-n}\,\frac{t^{n+1}}{1+n} - \frac{1}{1-n}\,\frac{t^2}{2}\Big| \\
&\le |g|_\infty \Big|\frac{1}{2(1+n)}\Big| ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(K_P g)'|_\infty = \Big|\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} h(t,s)\, g(s)\, ds\Big| &\le |g|_\infty \Big|t^{-n}\int_0^t s^n\, ds\Big| \\
&\le |g|_\infty \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|(K_P g)''|_\infty &\le \Big|g(t) + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} h(t,s)\, g(s)\, ds\Big| \\
&\le |g|_\infty \Big|1 - n\, t^{-n-1}\int_0^t s^n\, ds\Big| \\
&\le |g|_\infty \Big|1 - \frac{n}{n+1}\Big| = |g|_\infty \frac{1}{n+1} .
\end{aligned}$$

On peut donc calculer le degré de coïncidence associé à ces opérateurs et pour tout ouvert borné sur lequel ce degré est défini,

$$D_{\mathcal{L}}(\mathcal{L} - \mathcal{N}, \Omega) = \deg_{LS}(I - \mathcal{M}, \Omega)$$

avec $\mathcal{M} = P + Q\mathcal{N} + K_{PQ}\mathcal{N}$, c'est à dire

$$\mathcal{M}\, x(t) = x(0) + \alpha\, x(1) + \beta\, x'(1) + \int_0^t h(t,s)\, N(x)(s)\, ds \ .$$

On établit alors un théorème de dualité qui permet de calculer le degré associé à cette équation à partir du degré d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour laquelle le calcul du degré est beaucoup plus simple.

Supposons que f soit telle que le problème de Cauchy (1) avec les conditions initiales $u'(0) = 0$ et $u(0) = z$ admette une unique solution définie sur $[0,1]$ pour tout z, que l'on note $w(.,z)$. On définit encore $U\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ z \mapsto \alpha\, w(1,z) + \beta\, w'(1,z) + z$.

On dit que $\Omega \subset C^1_{\|}$ et $G \subset \mathbb{R}$ ont un noyau commun par rapport à (1)–(2) s'il n'y a pas de point fixe de $\mathcal{M}$ sur $\partial\Omega$ et de U sur ∂G et si pour toute solution x de (1)–(2), $x \in \Omega$ si et seulement si $x(0) \in G$ ([KZ, page 171]). Pour tout $\Omega \in C^1_{\|}$ tel que $\mathcal{M}$ n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$, cet ensemble et $G = \{u(0)\colon\ u \in \Omega\}$ ont un noyau commun. On a le théorème de dualité suivant.

Théorème 1. *Si Ω et G sont des ouverts bornés ayant un noyau commun par rapport à (1)–(2), si U est définie sur $\mathbb{R}$, alors*

$$\deg_{LS}(I - \mathcal{M}, \Omega; C^1_{\|}) = \deg_B(I - U, G; \mathbb{R}) \ .$$

Preuve: On sait que $C^1_{\|} = \mathbb{R} \oplus C^1_{\#}$ où $C^1_{\#} = \{u \in C^1\colon\ u'(0) = u(0) = 0\}$ et $\mathbb{R} \simeq \{u \in C^1\colon\ \forall\, t \in I\colon\ u(t) = u(0)\}$.

Alors $x = \mathcal{M}x$ est équivalent à

$$\begin{aligned} u &= P\mathcal{M}(u + v) \\ v &= (I - P)\,\mathcal{M}(u + v) \end{aligned}$$

où $u = P\,x \in \mathbb{R}$ et $v = (I - P)\,x \in C^1_{\#}$. La deuxième équation est

$$v(t) = \int_0^t h(t,s)\,N(u + v)(s)\,ds \ .$$

Pour $u \in \mathbb{R}$ fixé, l'unique solution de cette équation est $v(t) = w(t,u) - u = R(u)(t)$.

Donc

$$\begin{aligned} u &= P\,\mathcal{M}(u + Ru) \\ &= u + \alpha\, w(1,u) + \beta\, w'(1,u) \ . \end{aligned}$$

Par le théorème [KZ, theorem 27.3],

$$\deg_{LS}(I - \mathcal{M}, \Omega; C^1_{\|}) = \deg_B(I - U, G; \mathbb{R})\,\kappa(RG) \ .$$

Comme dans [KZ, theorem 29.4], on prouve assez facilement que $\kappa(RG) = 1$. ∎

On utilisera également, pour "continuer" les solutions que l'on trouve par cette méthode, le théorème de continuation suivant, qui est équivalent au théorème [CMZ, corollary 1].

Soient X et Z deux espaces vectoriels normés réels, $L:\ D(L) \subset X \to Z$ un opérateur de Fredholm d'indice zéro et $N:\ X \times I \to Z$ un opérateur L-complètement continu. On note

$$\Sigma^* = \Big\{(x,\lambda) \in X \times I\colon\ Lx = N(x,\lambda)\Big\} \ .$$

Théorème 2. *Soit* $\phi\colon X \times I \to \mathbb{R}^+$ *une application continue,* Ω *un ouvert de* $X \times I$ *tel que* $\Sigma^* \cap \partial\Omega$ *est borné et* $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante non bornée. On note* $I_k =]c_k, c_{k+1}[$*. Supposons que*

- $(\exists\, \tilde{R} > 0)$ $(\forall\, (u,\lambda) \in \Sigma^* \cap \Omega\colon \|u\| > \tilde{R})$ $(\forall\, k \in \mathbb{N})\colon \phi(u,\lambda) \neq c_k$,
- $\phi^{-1}(I_k) \cap \Sigma^* \cap \Omega$ *est borné pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

Alors il existe $n^* \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$c_{n^*} > \sup\Big\{\phi(u,\lambda)\colon\ ((u,\lambda) \in \Sigma^* \cap \overline{\Omega})\colon\ \|u\| \leq \tilde{R} \text{ ou } (u,\lambda) \in \partial\Omega\Big\} \ .$$

Pour $n \geq n^*$*, on note* $\mathcal{O}^n = \phi^{-1}(I_n)$*. Alors* $D_L(L - N(.,\lambda), (\mathcal{O}^n)_\lambda)$ *existe. Si de plus, pour* $n \geq n^*$,

$$D_L\Big(L - N(.,0), (\mathcal{O}^n)_0\Big) \neq 0$$

alors, l'équation

$$Lu = N(u,1)$$

admet une solution u_n *avec* $u_n \in \overline{\mathcal{O}^n_1}$.

3 – Lemmes préliminaires

On étudie le problème (1)–(2) par l'homotopie suivante

$$u''(t) + \frac{n}{t}\,u'(t) + g(u(t)) = \lambda\, p(t, u(t), u'(t)) \ . \tag{5}$$

Comme montré au début, ce problème peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{L}u = \mathcal{N}(u,\lambda) \ .$$

On note Σ^* l'ensemble des solutions de ce problème, i.e.

$$\Sigma^* = \Big\{(u,\lambda) \in C^1_{\|} \times I\colon\ \mathcal{L}u = \mathcal{N}(u,\lambda)\Big\} \ .$$

Pour faciliter la discussion dans la suite, on prend $\alpha \geq 0$.

On définit $\delta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto \min\{1, \frac{1}{x^2+y^2}\}$ et

$$\begin{aligned}\phi\colon & C^1_{\|} \times I \to \mathbb{R}_+\\ (u,\lambda) \mapsto & \frac{1}{\pi}\bigg|\int_0^1 \bigg[u'^2(t) + u(t)\Big(g(u(t)) + \frac{n}{t}\,u'(t)\\ & \qquad - \lambda\, p(t,u(t),u'(t))\Big)\bigg]\delta(u(t),u'(t))\,dt\bigg| \ .\end{aligned}$$

On note encore ψ l'angle entre l'axe X et la droite d'équation $\alpha x + \beta y = 0$, compté dans le sens direct et tel que $\psi \in [0, \pi[$.

Pour $\kappa \in]0,1[$ et $(u,\lambda) \in \Sigma^*$, on note $t_1 = t_1(u,\kappa)$ le nombre tel que $|u(t)| > \kappa\,|u(0)|$ pour tout $t \in [0, t_1[$ et $u(t_1) = \kappa\, u(0)$.

L'énergie associée à un point sera

$$H(x,y) = G(x) + \frac{y^2}{2}$$

et l'énergie d'une solution de (5) telle que $u'(0) = 0$ sera notée

$$E(t,u) = H(u(t), u'(t)) \ .$$

On montre d'abord que pour $u(0)$ assez grand,

$$E(t,u) \le \gamma\, E(0,u) \tag{6}$$

pour une certaine constante γ. En effet

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t,u) &= \lambda\, u'(t)\, p(t,u(t),u'(t)) - \frac{n}{t}\, u'^2(t) \\
&\le \lambda\, |u'(t)|\, |p(t,u(t),u'(t))| \\
&\le |u'(t)| \left(a + b\sqrt{G(u(t))} + c\,|u'(t)|\right) \\
&\le 2a\sqrt{E(t,u)} + E(t,u)\max\{1+2c, b^2/2\} \\
&\le \left(\max\{1+2c, b^2/2\} + 2a\right) E(t,u)
\end{aligned} \tag{7}$$

si $E(t,u) \ge 1$. On pose $w(t) = \ln E(t,u)$. Donc si $E(t,u) \ge 1$,

$$\begin{aligned}
w(t) &= w(0) + \int_0^t w'(s)\, ds \\
&\le w(0) + \max\{1+2c, b^2/2\} + 2a \ .
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $|u(0)| \ge 1$,

$$E(t,u) \le e^{2a + \max\{1+2c, b^2/2\}}\, E(0,u) = \gamma\, E(0,u) \ .$$

Pour $u(0) = d > 0$ assez grand,

$$t_1 \ge \tilde{c}(\kappa, n, a, b, c) \left(\frac{d}{g(\gamma\, d) + \sqrt{G(d)}} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

En effet, comme $(r^n u'(r))' = r^n(-g(u(r)) + \lambda\, p(r, u(r), u'(r)))$,

$$\begin{aligned}
u'(t) &= t^{-n} \int_0^t r^n \Big(\lambda\, p(r, u(r) u'(r)) - g(u(r))\Big)\, dr \\
&\geq t^{-n} \int_0^t r^n \Big(-\lambda \Big(a + h(u(r)) + c\, |u'(r)|\Big) - g(u(r))\Big)\, dr \\
&\geq t^{-n} \int_0^t r^n \Big(-\Big(a + b\sqrt{\gamma\, G(d)} + c\sqrt{2\gamma\, G(d)}\Big) - g(\gamma\, d)\Big)\, dr \\
&\geq -\frac{t}{n+1} \Big(a + \sqrt{\gamma}\,(b + \sqrt{2}c)\sqrt{G(d)} - g(\gamma d)\Big)\ .
\end{aligned}$$

En intégrant sur $[0, t_1]$, on a

$$\kappa\, d = u(t_1) \geq u(0) - \frac{t_1^2}{2(n+1)} \Big(a + \sqrt{\gamma}\,(b + \sqrt{2}c)\sqrt{G(d)} + g(\gamma d)\Big)\ .$$

Donc, si d est suffisamment grand,

$$\begin{aligned}
t_1 &\geq \Big((1-\kappa)\, 2(n+1)\Big)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{a + \sqrt{\gamma}\,(b + \sqrt{2}c)\sqrt{G(d)} + g(\gamma d)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \tilde{c}(\kappa, n, a, b, c) \left(\frac{d}{\sqrt{G(d)} + g(\gamma d)}\right)^{\frac{1}{2}}\ .
\end{aligned}$$

Le lemme suivant permet de minorer l'energie.

Lemme 1. *Il existe une fonction* $j\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *telle que* $\lim_{d\to+\infty} j(d) = +\infty$ *et* $\tilde{d} > 0$ *tels que pour tout* $(u, \lambda) \in \Sigma^*$ *avec* $u(0) > \tilde{d}$,

$$j(u(0)) \leq \min_{t\in I} E(t, u)\ .$$

Preuve: Soit $(u, \lambda) \in \Sigma^*$. Posons $u(0) = d > 0$. Prenons pour t_0 le plus petit des nombres tels que $E(t_0, u) = \min_{t\in I} E(t, u)$. On prend $\tilde{d}$ tel que $E(t, u) \geq 1$ si $u(0) \geq \tilde{d}$.

Si $t_0 \leq t_1$, $G(\kappa d) \leq G(u(t_0)) \leq E(t_0, u)$.

Si $t_0 > t_1$, comme $E(t, u) \geq 1$, de la même façon que dans (7),

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dt} E(t, d)\right| &= \left|-\frac{n}{t}\, u'^2(t) + \lambda\, u'(t)\, p(t, u(t), u'(t))\right| \\
&\leq \frac{2n}{t}\, \frac{u'^2(t)}{2} + \ln\gamma E(t, d) \\
&\leq \left(\frac{2n}{t} + \ln\gamma\right) E(t, d)\ .
\end{aligned}$$

En posant $w(t) = \ln E(t,d)$, on a

$$\begin{aligned} w(t_1) &= w(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} w'(s)\,ds \\ &\le w(t_0) + \Big|\int_{t_0}^{t_1} |w'(s)|\,ds\Big| \\ &\le w(t_0) + \Big|\int_{t_0}^{t_1} \Big(\frac{2n}{s} + \ln\gamma\Big)\,ds\Big| \;. \end{aligned}$$

Donc, en utilisant l'inégalité (8),

$$\begin{aligned} \ln(G(\kappa d)) = w(t_1) &\le w(t_0) + \ln\gamma + 2n\,(\ln t_0 - \ln t_1) \\ &\le w(t_0) + \ln\gamma - 2n\ln\tilde c + n\ln\bigg(\frac{g(\gamma d) + \sqrt{G(d)}}{d}\bigg) \;. \end{aligned}$$

En prenant l'exponentielle, on obtient

$$G(\kappa d)\bigg(\frac{d}{g(\gamma d) + \sqrt{G(d)}}\bigg)^n \le E(t_0,u)\,\gamma\,\tilde c^{-2n} = E(t_0,u)\,\delta \;.$$

En posant

$$j(d) = \frac{G(\kappa d)}{\delta}\,\bigg(\frac{d}{g(\gamma d) + \sqrt{G(d)}}\bigg)^n \,,$$

on a démontré le lemme. ∎

Le lemme suivant permet d'estimer la rapidité de la révolution des solutions.

Lemme 2. $(\forall\, N>0)$ $(\exists\, R_1>0)$ $(\forall\,(u,\lambda)\in\Sigma^*:\ u(0)\ge R_1):\ \phi(u,\lambda)\ge N.$

Preuve: Par superlinéarité de g, pour tout $K\ge 1$,

$$\begin{aligned} &x\Big(g(x) - \lambda\,p(t,x,y) + \frac{n}{t}\,y\Big) + y^2 \ge \\ &\qquad \ge x\,g(x) - \lambda\Big(a\,|x| + |x|\,|\mu g(x)| + c\,x\,y\Big) + \frac{n}{t}\,x\,y + y^2 \\ &\qquad \ge (1-\mu)\,x\,g(x) - a|x| - \frac{c}{2}\Big(c\,x^2 + \frac{y^2}{c}\Big) + \frac{n}{t}\,x\,y + y^2 \\ &\qquad \ge \Big((1-\mu)\,K - \frac{c^2}{2}\Big)x^2 + \frac{y^2}{2} - c_K - a|(x,y)| - \frac{n}{t}\,|xy| \end{aligned}$$

Comme $x\,g(x)\ge |x|^{2+\frac{1}{k}}$ pour $x\ge 0$, on peut prendre $c_K = K^{2k+1}$. On note $K' = 2(1-\mu)\,K - c^2$ et $\Theta(x,y) = \frac{x^2 + \frac{1}{K'}y^2}{x^2+y^2}$.

Soit $(u, \lambda) \in \Sigma^*$. On pose $u(0) = d$. Pour $d \geq \tilde{d}$, $j(d) \leq \min_{t\in I} E(t, u)$. On désigne par G^{-1} la réciproque de G restreinte à $\mathbb{R}^+$ et par $\widetilde{G}^{-1}$ la réciproque de G restreinte à $\mathbb{R}^-$. Comme g est telle que $g(x) - g(y) \geq x - y$ pour $x \geq y$, pour tout $a, b \geq 0$, $G^{-1}(a + b/2) \leq G^{-1}(a) + \sqrt{b}$ et $\widetilde{G}^{-1}(a + b/2) \geq \widetilde{G}^{-1}(a) - \sqrt{b}$.

Alors,

$$\begin{aligned}\min_{t\in I} |(u(t), u'(t))| &= |(u(\bar{t}), u'(\bar{t}))| \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|u(\bar{t})| + |u'(\bar{t})|\Big) \ .\end{aligned}$$

Si $u(\bar{t}) \geq 0$,

$$\begin{aligned}\min_{t\in I} |(u(t), u'(t))| &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\, G^{-1}\Big(G(u(\bar{t})) + {u'}^2(\bar{t})/2\Big) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\, G^{-1}(j(d)) \ .\end{aligned}$$

Si $u(\bar{t}) \leq 0$,

$$\begin{aligned}\min_{t\in I} |(u(t), u'(t))| &\geq -\frac{1}{\sqrt{2}}\, \widetilde{G}^{-1}\Big(G(u(\bar{t})) + {u'}^2(\bar{t})/2\Big) \\ &\geq -\frac{1}{\sqrt{2}}\, \widetilde{G}^{-1}(j(d)) \ .\end{aligned}$$

En reprenant l'inégalité du début et en notant que $\frac{|xy|}{x^2 + \frac{y^2}{K'}} \leq \frac{K'\sqrt{K'+2}}{2K'+2}$, on obtient

$$\begin{aligned}-\theta'(t) \geq \frac{K'}{2}\, \Theta(u(t), u'(t)) &- \frac{c_K}{|(u(t), u'(t))|^2} - \frac{a}{|(u(t), u'(t))|} \\ &- \frac{n}{t}\, \frac{|u(t)\, u'(t)|}{|(u(t), u'(t))|^2} \ .\end{aligned}$$

Alors, pour tout $t \in I$, comme $\frac{\sqrt{K'}\sqrt{K'+2}}{2K'+2} < 1$,

$$\frac{-\theta'(t)}{\Theta(\cos\theta(t), \sin\theta(t))} \geq \frac{K'}{2} - \frac{K'\, K^{2k+1}}{|(u(t), u'(t))|^2} - \frac{aK'}{|(u(t), u'(t))|} - \frac{n}{t}\sqrt{K'}$$

et en intégrant sur I, si $u(\bar{t}) \geq 0$,

$$\begin{aligned}-\sqrt{K'} \sum_{i=1}^{l-1}\Big(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\theta(t_i)}{\sqrt{K'}} - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\theta(t_{i+1})}{\sqrt{K'}}\Big) &\geq \int_I \frac{-\theta'(t)}{\Theta(\cos\theta(t), \sin\theta(t))}\, dt \geq \\ \geq K'(1 - t_1) - \frac{K^{2k+1}}{(G^{-1}(j(d)))^2}\,(1 - t_1) &- \frac{aK'}{G^{-1}(j(d))} + n \ln t_1 \sqrt{K'}\end{aligned}$$

où les t_i $(i = 2 \cdots l-1)$ sont tels que $\theta(t_i) = \frac{\pi}{2} \mod \pi$ et $t_l = 1$.

On suppose que $t_1 < \frac{1}{2}$. Si ce n'est pas le cas, il suffit d'intégrer de $\frac{1}{2}$ à 1 et le problème est simplifié. Si $u(\bar{t}) < 0$, on a la même inégalité avec $G^{-1}(j(d))$ remplacé par $-\widetilde{G}^{-1}(j(d))$.

On note Σ cette somme. En choisissant $K' = (G^{-1}(j(d)))^{\frac{2}{2k+1}}$ (ou $(-\widetilde{G}^{-1}(j(d)))^{\frac{2}{2k+1}}$) et par l'estimation sur t_1, on obtient

$$-\Sigma \geq \frac{1}{2}\,(G^{-1}(j(d)))^{\frac{1}{2k+1}} - c' + c' \ln\left(\frac{d}{g(\gamma d) + \sqrt{G(d)}}\right)$$

où c' désigne une constante quelconque.

Comme $|g(x)| \leq \max\{|x|^m, |x|\}$, on a $G^{-1}(y) \geq y^{\frac{1}{m+1}} - 1 - \widetilde{G}^{-1}(y) \geq y^{\frac{1}{m+1}} - 1$, et donc

$$-\Sigma \geq c'(j(d))^{\frac{1}{(2k+1)(m+1)}} - c' + c' \ln\left(\frac{d}{g(\gamma d) + \sqrt{G(d)}}\right) .$$

Si on prend $R_1 > \tilde{d}$ assez grand,par définition de $j(d)$ et (H4), $-\Sigma \geq \frac{\pi}{2} N + 2\pi$ et $j(d) > 2$ pour $d > R_1$. Mais comme Σ est négatif et $|\theta(0) - \theta(t_1)| < \frac{\pi}{2}$, $-\Sigma \leq \frac{\pi}{2}\,\phi(u,\lambda) + 2\pi$. Donc,

$$\phi(u,\lambda) \geq -\frac{2}{\pi}\Sigma - 4 \geq N \ . \ \blacksquare$$

Le lemme suivant permet d'estimer $\phi(u,\lambda)$ lorsque $u(0)$ est grand.

Lemme 3. $(\exists\, R > 0)$ $(\forall\,(u,\lambda) \in \Sigma^*\colon\ u(0) \geq R)\colon\ \phi(u,\lambda) \in \mathbb{N} + \dfrac{\psi}{\pi}$.

Preuve: Il suffit de prendre R suffisamment grand pour que $R > \tilde{d}$, $j(d) > 2$ pour $d > R$ et $\theta(0) - \theta(1) > 0$. Car alors $\pi\,\phi(u,\lambda) = \theta(0) - \theta(1)$ et comme u vérifie les conditions aux bords, $\theta(0) - \theta(1) = k\,\pi + \psi$ pour $k \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

4 – Théorème d'existence

On montre que les hypothèses du théorème de continuation sont satisfaites. Pour cela, on prend $c_k = k + \frac{\psi}{\pi} + \frac{1}{2}$ et $\Omega = \{u \in C^1_{\|}\colon\ u(0) > 0\} \times I$. Alors, pour $(u,\lambda) \in \Sigma^* \cap \Omega$ avec $\|u\| > \sqrt{2\gamma\, G(R)}$, $E(t,u) \geq \gamma\, G(R)$ et par (6), $G(u(0)) = E(0,u) \geq G(R)$. Alors $u(0) > R$, donc $\phi(u,\lambda) \in \mathbb{N} + \frac{\psi}{\pi}$. Ce qui montre que la première hypothèse est bien vérifiée avec $\tilde{R} = \sqrt{2\gamma\, G(R)}$.

Si $(x,\lambda) \in \phi^{-1}(I_k) \cap \Sigma^* \cap \Omega$, alors $\phi(x,\lambda) < k + \psi + \frac{3}{2}$, donc $x(0) < R_1(k + \psi + \frac{3}{2})$. Mais comme $\frac{1}{2}\,\|x\|^2 \leq E(t,x) \leq \gamma\, E(0,x) \leq \gamma\, G(R_1)$, $\|x\|$ est bornée.

Il reste à calculer $D_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}-\mathcal{N}(.,0),(\mathcal{O}^n)_0)$. Comme f est lipschitzienne, le problème de Cauchy pour (5) où $\lambda = 0$ avec les conditions initiales $x'(0) = 0$ et $x(0) = d$ admet une unique solution ([CK$_1$, §1]). Mais, par le théorème de dualité, ce degré vaut $\deg_B(-(\alpha\, w(1,.)+\beta\, w'(1,.)),G^n)$ où $G^n = \{u(0)\colon \phi(u,0)\in\,]c_n,c_{n+1}[\}$.

Pour calculer ce dernier degré, nous utilisons le théorème élémentaire suivant.

Théorème 3. *Soit f et $\chi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues et $a>0$ un réel. Notons $G=\chi^{-1}(]-a,a[)$. Supposons que G soit borné et que pour tout $x\in G$, $\chi(x)\,f(x)\geq 0$ et $f(x)=0$ si et seulement si $\chi(x)=0$. Alors,*

$$\deg_B(f,G)=\deg_B(\chi,G)=\frac{\operatorname{sgn}\chi(\sup G)-\operatorname{sgn}\chi(\inf G)}{2}\ .$$

Par le choix du signe de α, si $\phi(w(.,\zeta),0)\in\,]n+\frac{\psi}{\pi},n+1+\frac{\psi}{\pi}[$,

$$\operatorname{sgn}\Big(\alpha\, w(1,\zeta)+\beta\, w'(1,\zeta)\Big)=(-1)^{n+1}\ .$$

On peut alors appliquer le théorème avec $a=\frac{1}{2}$,

$$f(\zeta)=-\Big(\alpha\, w(1,\zeta)+\beta\, w'(1,\zeta)\Big)$$

et

$$\chi(\zeta)=(-1)^{n+1}\left(\phi(w(.,\zeta),0)-(n+1+\frac{\psi}{\pi})\right)\ .$$

Par conséquent,

$$\deg_B\Big(-(\alpha w(1,.)+\beta w'(1,.),G^n\Big)=(-1)^{n+1}\ .$$

Et la dernière hypothèse est bien satisfaite, ce qui montre qu'il existe une infinité de solutions au problème considéré.

On a donc montré

Théorème 4. *Sous les hypothèses (H1)–(H4), l'équation superlinéaire avec singularité (1) admet une infinité de solutions qui vérifient les conditions aux limites de Sturm-Liouville (2).*

REFERENCES

[BB] Bahri, A. and Beresticki, H. – A perturbation method in critical point theory and applications, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 267 (1981), 1–32.

[BL] BAHRI, A. et LIONS, P.L. – Remarques sur la théorie variationnelle des points critiques et applications, *C.R. Acad. Sci. Paris,* 301 (1985), 145–149.

[CMZ] CAPIETTO, A., MAWHIN, J. et ZANOLIN, F. – *A continuation approach to superlinear two point boundary value problems*, Séminaire du Collège de France, à paraître.

[CK$_1$] CASTRO, A. and KUREPA, A. – *Energy analysis of a nonlinear singular differential equations and applications,* Revista Colombiana de Matemáticas, XXI (1987), 155–166.

[CK$_2$] CASTRO, A. and KUREPA, A. – Infinitely many radially symmetric solution to a superlinear Dirichlet problem in a ball, *Proc. of the A.M.S.,* 101(1), September (1987), 57–64.

[KZ] KRASNOSEL'SKII, M.A. and ZABREIKO, P.P. – *Geometrical methods of nonlinear analysis*, Springer Verlag, Berlin, 1984.

[Maw] MAWHIN, J. – *Topological degree methods in nonlinear boundary value problems*, CBMS 40, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Rab] RABINOWITZ, P.H. – Multiple critical points of perturbed symmetric functionals, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 272 (1982), 753–769.

[Str$_1$] STRUWE, M. – Infinitely many critical points for functionals which are not even and applications to superlinear boundary value problems, *Manuscripta Math.,* 32 (1980), 335–364.

[Str$_2$] STRUWE, M. – Infinitely many solutions of superlinear boundary value problems with rotational symmetry, *Arch. Math.,* 36 (1981), 360–369.

[Str$_3$] STRUWE, M. – Superlinear elliptic boundary value problems with rotational symmetry, *Arch. Math.,* 39 (1982), 233–240.

Marc Henrard,
Université Catholique de Louvain,
Chemin du Cyclotron, 2, B-1348 Louvain-la-Neuve – BELGIQUE