PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 52 Fasc. 3 – 1995

LES ALGÈBRES $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ ET LE CALCUL SYMBOLIQUE DE SEBASTIÃO E SILVA

Fernando Manuel Sequeira

À la mémoire du Professor J.C. Guerreiro

Abstract: On décrit et on déduit quelques propriétés des algèbres $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ des fonctions holomorphes à croissance lente sur un filtre $\mathcal{F}$, introduites par J. Sebastião e Silva. En particulier on analyse les propriétés des applications linéaires continues des espaces vectoriels topologiques sous-jacents aux $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ et des quotients $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ de ces espaces par les sous-espaces des polynômes, dans un espace localement convexe, séparé et semi-complet. On présente encore des exemples d'application de ces résultats et du calcul symbolique de Sebastião e Silva à la déduction de quelques propriétés des opérateurs dérivation, translation et convolution (par une ultradistribution à support compact) dans queslques espaces de distributions et d'ultradistributions.

Des applications de ces résultats seront encore utilisés dans un second travail (à publier) dénommé "Les espaces $\mathcal{H}(\Omega)$ et le calcul symbolique de Sebastião e Silva".

1 – Introduction

Sebastião e Silva a introduit [1] le concept "d'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ des fonctions holomorphes à croissance lente sur un filtre régularisable $\mathcal{F}$" et en utilisant ses propriétes, il a établi son calcul symbolique d'opérateurs à spectre vide ou non borné. Dans l'application de ce calcul à la résolution de quelques équations de la Physique (équations de Boltzman, de Laplace, des ondes, de la diffusion, etc.) on peut constater qu'il permet non seulement de les résoudre avec aisance et rapidité mais encore d'obtenir des preuves de l'existence et de l'unicité des solutions. En outre, il peut encore être utilisé dans la formalisation des problèmes.

Dans ce travail nous avons recours à ce calcul symbolique en utilisant quelques uns de ses résultats exposés d'une forme sommaire au premier chapitre.

Received: August 1, 1993; *Revised*: December 4, 1993.

Au deuxième chapitre nous étudions les propriétés des algèbres $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ quand $\mathcal{F}$ est un filtre qui vérifie les propriétés II.1.1.1, II.1.1.2 et II.1.1.3. Alors $\mathcal{U}(\mathcal{F})$, munie de sa structure vectorielle topologique, devient un espace de Silva d'un type particulier que nous caractérisons et dénommons "parfait"; le produit usuel est encore une opération continue pour sa topologie.

Nous identifions l'espace des indicatrices des applications linéaires continues d'un espace $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ dans un espace localement convexe, séparé et semi-complet **E**, et nous le munissons d'une topologie qui le rend isomorphe de l'espace des applications linéaires continues lorsque celui-ci est muni de la topologie de la convergeance uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ (Proposition II.2.2.1).

Nous étudions également les propriétés du produit de deux espaces $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ et du quotient d'un espace $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ par son sous-espace $\mathcal{P}$ des polynômes. En particulier le quotient $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$, dans les conditions considérées, est encore un "espace de Silva parfait", ce qui entraîne que l'espace **U** des ultradistributions tempérées au sens de Sebastião e Silva l'est aussi.

En ce qui concerne les applications linéaires du quotient $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ dans un espace localement convexe, séparé et semi-complet **E**, nous avons démontré en particulier les propriétés II.4.2.1, II.4.2.3 et II.4.2.4. Les duals des espaces $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ sont aussi identifiés, en vérifiant qu'ils sont des espaces parfaits au sens de Guelfand (et donc séparables) si nous les supposons munis de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ et de $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$, respectivement (II.6.1.6 et II.6.2). Finalement nous présentons quelques exemples d'indicatrices, importantes par leurs applications dans ce qui suit.

Au chapitre III nous présentons quelques exemples d'application du calcul symbolique. En particulier, nous développons le calcul symbolique: de l'opérateur dérivation dans l'espace Λ_0^+ des distributions dans $\mathbb{R}$, nulles à gauche de zéro et du type exponentiel à droite (III.1.1) et dans **U** des ultradistributions tempérées dans $\mathbb{R}$ (III.1.2); de l'opérateur translation dans **U**.

Des applications de ces résultats serons encore utilisées dans un second travail denommé "Les espaces $\mathcal{H}(\Omega)$ et le calcul symbolique de Sebastião e Silva" (à publier).

I – Sur le calcul symbolique de Sebastião e Silva

1. En développant son calcul symbolique d'opérateurs à spectre vide ou non borné [1], Sebastião e Silva a établi deux résultats particulièrement importants:

1.1. Le premier concerne les applications linéaires continues de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ des fonctions holomorphes à croissance lente sur un filtre régularisable $\mathcal{F}$, dans un espace localement convexe, semi-complet et séparé $\mathbf{E}$. Il a établi une correspondance biunivoque entre ces applications et les fonctions $u(\widehat{\lambda})$ à valeurs dans $\mathbf{E}$, holomorphes dans $\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty$ et à décroissance presque rapide sur tout $\mathbb{C} - \mathbf{F}_k$, $k \in \mathbb{N}$ ($\{\mathbf{F}_k\}$ est une base régulière de $\mathcal{F}$ et $\mathbf{F}_\infty = \bigcap_k \mathbf{F}_k$).

1.2. Le deuxième montre des conditions telles que, étant données une algèbre $\mathbf{A}$ localement convexe, semi-complète, séparée, munie d'élément unité et à produit séparément continu, et une algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ du type référé ci-dessus, elles permettent d'attribuer une signification au symbole $\widehat{\phi}(a)$ où $\widehat{\phi} \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$ et $a \in \mathbf{A}$. C'est-à-dire, étant donnée $a \in \mathbf{A}$, le deuxième résultat montre des conditions telles que pour tout $\widehat{\phi} \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$, elles permettent de définir $\widehat{\phi}(a)$ en vérifiant les propriétés:

1.2.1. $\widehat{\phi}(a) \in \mathbf{A}$ quel que soit $\widehat{\phi} \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$;

1.2.2. Si $\widehat{\phi} \equiv \alpha$ constante $\in \mathbb{C}$, $\widehat{\phi}(a) = \alpha$ (où α représente maintenant le produit de ce complexe par l'élément unité de l'algèbre $\mathbf{A}$); si $\widehat{\phi} \equiv \widehat{z}$, $\widehat{\phi}(a) = a$;

1.2.3. Si $\widehat{\phi} = \widehat{\phi}_1 + \widehat{\phi}_2$, on a $\widehat{\phi}(a) = \widehat{\phi}_1(a) + \widehat{\phi}_2(a)$;

1.2.4. Si $\widehat{\phi} = \widehat{\phi}_1 \cdot \widehat{\phi}_2$, alors $\widehat{\phi}(a) = \widehat{\phi}_1(a) \circ \widehat{\phi}_2(a)$ où $\cdot$ et $\circ$ désignent les produits dans $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ et dans $\mathbf{A}$;

1.2.5. Si $\widehat{\phi} = \lim \widehat{\phi}_n$, alors $\widehat{\phi}(a) = \lim \widehat{\phi}_n(a)$.

2. Pour obtenir ces résultats Sebastião e Silva a agi de la façon suivante:

2.1. Il a considéré un filtre régularisable $\mathcal{F}$ dans le plan complexe et une base régulière $\{\mathbf{F}_k\}$ de $\mathcal{F}$;

2.2. Il a désigné par $\mathcal{U}(\mathbf{F}_k)$ (quel que soit $k \in \mathbb{N}$) l'espace vectoriel complexe des fonctions complexes ϕ, définies et continues sur $\mathbf{F}_k$, holomorphes à l'intérieur de cet ensemble et telles que $|\phi(z)| < M\,|z^k|$ sur $\mathbf{F}_k$ (M étant une constante positive dépendante de ϕ); il a introduit dans cet espace la norme $\|\cdot\|$ définie par

2.2.1.
$$\|\phi\| = \sup_{z \in \mathbf{F}_k} \left| \frac{\phi(z)}{(z-\alpha)^k} \right|, \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{U}(\mathbf{F}_k)$$

(α étant un complexe pris arbitrairement dans $\mathbb{C} - \mathbf{F}_1$) $\mathcal{U}(\mathbf{F}_k)$ devenant un espace de Banach;

2.3. Il a identifié chaque $\phi \in \mathcal{U}(\mathbf{F}_k)$ à la fonction qui est la restriction de ϕ à $\mathbf{F}_{k+1}$, en écrivant $\mathcal{U}(\mathbf{F}_k) \subseteq \mathcal{U}(\mathbf{F}_{k+1})$, et il a démontré que l'inclusion est compacte;

2.4. Il a défini $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ comme la limite inductive pour les inclusions des espaces $\mathcal{U}(\mathbf{F}_k)$; ses éléments il les a appelés *fonctions holomorphes à croissance lente sur* $\mathcal{F}$ et il a identifié chaque $\widehat{\phi}$ avec une classe de fonctions ϕ appartenent aux espaces $\mathcal{U}(\mathbf{F}_k)$;

2.5. Il a muni $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ du produit usuel, qui devient continu par rapport à la topologie de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$;

2.6. Étant donnée une algèbre $\mathbf{A}$, localement convexe, séparée, munie d'élément unité, il a appelé ensemble spectral d'un élément $a \in \mathbf{A}$, tout ensemble $\mathbf{S} \subset \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes: $a - \lambda$ est inversible quel que soit $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{S}$; la fonction $\frac{1}{a-\lambda} = (a - \lambda)^{-1}$ de λ à valeurs dans $\mathbf{A}$ est bornée dans $\mathbb{C} - \mathbf{S}$. Il a alors démontré que cette fonction est à décroissance presque rapide sur $\mathbb{C} - \mathbf{S}$ et holomorphe à l'intérieur de cet ensemble;

2.7. Il a prouvé que tout élément $\widehat{\phi} \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$, ayant un représentant $\phi \in \mathcal{U}(\mathbf{F}_k)$, $k \in \mathbb{N}$, peut être représenté en fonction de l'élément $\widehat{z} \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$ par une intégrale prise au sens de la topologie de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ sous la forme

2.7.1.
$$\phi = \frac{(\widehat{z} - \alpha)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\phi(\lambda)}{(\lambda - \alpha)^{k+1}} \frac{d\lambda}{\widehat{z} - \lambda} \ ,$$

où α est un complexe quelconque appartenant à $\mathbb{C} - \mathbf{F}_k$ et où l'on suppose que Γ_k est la frontière de $\mathbf{F}_k$ orientée de façon à laisser à droite les points de $\mathbf{F}_k$;

2.8. *Il a démontré que, $\mathbf{E}$ étant un espace localement convexe, séparé et semi-complet, il existe une correspondance biunivoque entre les applications linéaires continues F de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ dans $\mathbf{E}$ et:*

2.8.1. *Les systèmes $(u, \mu_1, \mu_2, ...)$ constitués par une fonction $u(\lambda)$ à valeurs dans $\mathbf{E}$, holomorphe dans $\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty$, et par une suite $(\mu_1, \mu_2, ...)$ donnée par $\mu_n = F(-(\widehat{z} - \alpha)_{n-1})$, $n = 1, 2, ...$ (α étant un complexe arbitraire appartenant à $\mathbb{C} - \mathbf{F}_1$) si les ensembles $\mathbb{C} - \mathbf{F}_k$ sont bornés;*

2.8.2. *Les fonctions $u(\widehat{\lambda})$ à valeurs dans $\mathbf{E}$, définies et holomorphes dans $\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty$ et à décroissance presque rapide sur tout $\mathbb{C} - \mathbf{F}_k$, $k = 1, 2, ...$, ci ces ensembles ne sont pas bornés.*

Dans les deux cas, la correspondance est donnée par les deux formules *réciproques*

2.8.3. $$u(\lambda) = F\left(\frac{1}{\widehat{z}-\lambda}\right), \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty$$

et

2.8.4. $$F(\widehat{\phi}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \phi(\lambda)\, u_{k+1}(\lambda)\, d\lambda\,, \quad \forall\, \widehat{\phi} \in \mathcal{U}(\mathcal{F})\ ,$$

où k est un nombre naturel tel que $\widehat{\phi}$ admet un représentant $\phi \in \mathcal{U}(\mathbf{F}_k)$, Γ_k est la frontière de $\mathbf{F}_k$ orientée de façon à laisser à droite les points de $\mathbf{F}_k$ et

2.8.5. $$u_{k+1}(\lambda) = u(\lambda) - \sum_{j=0}^{k+1} \frac{\mu_j}{(\lambda-\alpha)^j}\,, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty\ .$$

Il a appelé chacune de ces fonctions $u(\widehat{\lambda})$ *l'indicatrice de l'application F correspondante*;

2.9. *Il a démontré que, étant donné un élément $a \in \mathbf{A}$, dont le filtre spectral est plus fin que $\mathcal{F}$, il existe un et un seul homomorphisme continu H_a de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ dans $\mathbf{A}$ tel que $H_a(\widehat{z}) = a$ et $H_a(1) = 1$. Cet homomorphisme est donné par*

2.9.1. $$H_a(\widehat{\phi}) = (a-\alpha)^{k+1} \circ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \frac{\phi(\lambda)}{(\lambda-\alpha)^{k+1}}\, \frac{d\lambda}{a-\lambda}\,, \quad \forall\, \widehat{\phi} \in \mathcal{U}(\mathcal{F})\ ,$$

où k est un nombre naturel tel que $\widehat{\phi}$ admet un représentant $\phi \in \mathcal{U}(\mathbf{F}_k)$, α est un complexe arbitraire appartenant à $\mathbb{C} - \mathbf{F}_1$ et Γ_k est la frontière de $\mathbf{F}_k$ orintée de façon à laisser à droite les points de $\mathbf{F}_k$.

II – Quelques propriétés des espaces $\mathcal{U}(\mathcal{F})$

1. Par la suite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous désignons par $\mathcal{U}^*(\mathbf{F}_k)$ les sous-espace de $\mathcal{U}(\mathbf{F}_k)$ constitué par les éléments ϕ de cet espace tels que $z \cdot \phi(z)$ soit borné sur $\mathbf{F}_k$, et nous posons $\mathcal{U}^*(\mathcal{F}) = \bigcup_k \mathcal{U}^*(\mathbf{F}_k)$, en identifiant (comme dans I.2.3) chaque ϕ à ses restrictions aux différents $\mathbf{F}_k$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous désignons encore par $\mathbf{D}_k$ l'image de $\mathbf{F}_k$ donnée par l'inversion $z \to \frac{1}{z-\alpha}$ (α étant un complexe pris arbitrairement dans $\mathbb{C} - \mathbf{F}_1$) du plan complexe, et par Γ_k^* l'union de $\{0\}$ et de l'image de Γ_k donnée par la même inversion.

1.1. Celà posé nous analysons quelques conséquences des propositions énoncées au chapitre précédent, en supposant que le filtre $\mathcal{F}$ régularisable admet une base régulière $\{\mathbf{F}_k\}$ qui vérifie les propriétés suivantes:

1.1.1. *Tout ensemble $\mathbb{C} - \mathbf{F}_k$ est non borné;*

1.1.2. *Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, toute composante connexe de $\mathbb{C} - \mathbf{F}_k$ contient une composante connexe de $\mathbb{C} - \mathbf{F}_1$;*

1.1.3. *Tout Γ_k^*, $k = 1, 2, ...$, est un cycle tel que l'indice de Γ_k^* par rapport à z est égal à -1 si $z \in \mathbf{D}_{k+1}$ et égal à zéro si $z \in \mathbb{C} - \overline{\mathbf{D}_k}$.*

À ce sujet on peut énoncer les propositions:

1.1.4 Proposition. *Si $\psi(\widehat{\lambda})$ est une fonction complexe continue sur $\overline{\mathbf{D}_k}$ ($k \in \mathbb{N}$), holomorphe à l'intérieur de $\mathbf{D}_k$ et telle que $\psi(\widehat{\lambda})/\widehat{\lambda}$ est bornée sur $\mathbf{D}_k$ alors il existe une famille dénombrable $\{\pi_n(\widehat{\lambda})\}$ de fonctions rationnelles qui vérifie les propriétés suivantes:*

a) *Les fonctions sont nulles à l'origine et leurs pôles appartiennent à $\mathbb{C} - \mathbf{D}_1$;*

b) *La suite $(\widehat{\lambda} \cdot \pi_n(\widehat{\lambda}))$ converge uniformément sur $\mathbf{D}_{k+1}$ vers $\widehat{\lambda} \cdot \psi(\widehat{\lambda})$.*

Démonstration: Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $\rho > 0$, nous désignons par $\Gamma_{k,\rho}^*$ la partie de Γ_k^* qui n'est pas contenue dans le cercle $\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| < \rho\}$.

Alors, $\psi(\widehat{\lambda})$ étant une fonction dans les conditions énoncées dans la proposition, pour tout $\lambda \in \mathbf{D}_{k+1}$ on peut écrire

$$\psi(\lambda) = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k,\rho}^*} \frac{\psi(\xi)}{\lambda - \xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k^*} \frac{\psi(\xi)}{\lambda - \xi}\, d\xi \ .$$

Nous désinons maintenant par $\psi_n(\widehat{\lambda})$, $n \in \mathbb{N}$, la fonction donnée dans un ouvert contenant $\mathbf{D}_{k+1}$, par

$$\psi_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k,\frac{1}{n}}^*} \frac{\psi(\xi)}{\lambda - \xi}\, d\xi \ .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a donc

$$\psi(\lambda) - \psi_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k^*} \frac{\psi(\xi)}{\lambda - \xi}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k,\frac{1}{n}}^*} \frac{\psi(\xi)}{\lambda - \xi}\, d\xi \ ,$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\Big|\lambda \cdot [\psi(\lambda) - \psi_n(\lambda)]\Big| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{ML_n}{d_k}, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbf{D}_{k+1} \ ,$$

où: d_k est la distance entre les frontières de $\mathbf{F}_k$ et de $\mathbf{F}_{k+1}$; M est un réel positif tel que $|\frac{\psi(\lambda)}{\lambda}| < M$, $\forall\, \lambda \in \mathbf{D}_k$; L_n est la longueur de la partie de Γ_k^* contenue dans le cercle $\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| < \frac{1}{n}\}$. C'est-à-dire $(\widehat{\lambda} \cdot \psi_n(\widehat{\lambda}))$ converge uniformément sur $\mathbf{D}_{k+1}$ vers $\widehat{\lambda} \cdot \psi(\widehat{\lambda})$.

Celà posé, pour $n = 1, 2, ...$, nous désignons par $\gamma_n(\widehat{\lambda})$ une fonction rationnelle dont les pôles appartiennent à $\mathbb{C} - \mathbf{D}_1$ et telle que $|\gamma_n(\lambda) - \psi_n(\lambda)| < \frac{1}{n}$. Cette fonction existe (théorème de Runge) [2, p. 255], puisque toute composante connexe de $\mathbb{C} - \mathbf{D}_k$ contient une composante connexe de $\mathbb{C} - \mathbf{D}_1$; et on a évidemment que $(\widehat{\lambda} \cdot \gamma_n(\widehat{\lambda}))$ converge uniformément sur $\mathbf{D}_{k+1}$ vers $\widehat{\lambda} \cdot \psi(\widehat{\lambda})$.

En outre, en considérant que $\psi_n(0) \to \psi(0) = 0$, on a aussi $\gamma_n(0) \to 0$. Les fonctions $\pi_n(\widehat{\lambda}) = \gamma_n(\widehat{\lambda}) - \gamma_n(0)$ vérifient donc les propriétés suivantes: elles sont rationnelles; elles sont nulles à l'origine; leurs pôles appartiennent à $\mathbb{C} - \mathbf{D}_1$; la suite $(\widehat{\lambda} \cdot \pi_n(\widehat{\lambda}))$ converge uniformément sur $\mathbf{D}_{k+1}$ vers $\widehat{\lambda} \cdot \psi(\widehat{\lambda})$. C'est-à-dire la famille $\{\pi_n(\widehat{\lambda})\}$ satisait les propriétés énoncés dans la proposition. ∎

1.1.5 Proposition. *Si $\mathcal{F}$ admet une base régulière $\{\mathcal{F}_k\}$ qui vérifie les propriétés 1.1.1, 1.1.2 et 1.1.3, alors $\mathcal{U}^*(\mathbf{F}_1)$ est dense dans $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ pour la topologie de cet espace.*

Démonstration: Étant donné un élément $\phi(\widehat{z}) \in \mathcal{U}^*(\mathbf{F}_k)$, $k \in \mathbb{N}$, son image $\psi(\widehat{\lambda}) = \phi(\alpha + \frac{1}{\lambda})$, donnée par l'inversion $\lambda = \frac{1}{z-\alpha}$ du plan complexe, est continue sur $\mathbf{D}_k$, holomorphe à son intérieur et telle que $\frac{\psi(\lambda)}{\lambda}$ est bornée sur $\mathbf{D}_k$. Il existe donc une fammile dénombrable $\{\pi_n(\widehat{\lambda})\}$ de fonctions rationnelles qui vérifie les proprétés a) et b) de la proposition antérieure. C'est-à-dire, la suite $(\frac{1}{z-\alpha}\, \pi_n(\frac{1}{z-\alpha}))$ converge uniformément sur $\mathbf{F}_{k+1}$ vers $\frac{1}{z-\alpha}\, \phi(\widehat{z})$; la suite $(\pi_n(\frac{1}{z-\alpha}))$ dans $\mathcal{U}(\mathbf{F}_1)$ converge donc vers $\phi(\widehat{z})$ d'accord avec la topologie de $\mathcal{U}(\mathbf{F}_k)$. Mais ça veut donc dire que $\mathcal{U}(\mathbf{F}_1)$ est dense dans $\mathcal{U}^*(\mathcal{F})$ pour la topologie de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$.

En outre, $\mathcal{U}^*(\mathcal{F})$ est dense dans $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ pour la topologie de cet espace, puisque les ensembles $\mathbb{C} - \mathbf{F}_k$, $k = 1, 2, ...$, sont non bornés [1, p. 242]. ∎

Il en résulte donc que $\mathcal{U}(\mathcal{F})$, dans les conditions ci-dessus, est la limite inductive canonique d'une suite régulière $\{\mathcal{U}(\mathbf{F}_k)\}$ d'espaces de banach, denses dans $\mathcal{U}(\mathcal{F})$. Un espace de ce type, nous le désignons *espace de Silva parfait*.

1.2. Au sujet de ces espaces, c'est-à-dire des espaces de Silva parfaits, on peut énoncer les propositions:

1.2.1 Proposition. *Si $\mathbf{E}$ est la limite projective d'une suite $(\mathbf{E}_n)$ d'espaces de Banach pour une famille $\{F_{mn} : \mathbf{E}_m \to \mathbf{E}_n;\, m > n\}$ d'injections compactes, alors son dual fort $\mathbf{E}'$ est un espace de Silva parfait.*

Démonstration: Si $\mathbf{E}$ est la limite projective d'une suite $(\mathbf{E}_n)$ d'espaces de Banach pour une famille $\{F_{mn}\colon \mathbf{E}_m \to \mathbf{E}_n;\, m > n\}$ d'injections compactes, alors son dual fort est la limite inductive de la suite $(\mathbf{E}'_n)$ des duals des espaces $\mathbf{E}_n$ pour les applications compactes ${}^{\mathrm{t}}F_{mn}\colon \mathbf{E}'_n \to \mathbf{E}'_m$ transposées des antérieures.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, désignons maintenant par F_n la projection de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}_n$. Étant donnée l'injectivité des applications F_{mn}, ces projections sont aussi injectives. Sans perte de géneralité, nous pouvons supposer que chacun des $\mathbf{E}_n$ coincide avec l'adhérence dans $\mathbf{E}_n$ de $\operatorname{Im} F_n$, ce qui va entraîner que les applications transposées ${}^{\mathrm{t}}F_n$, $n \in \mathbb{N}$, et ${}^{\mathrm{t}}F_{mn}$, $m, n \in \mathbb{N}$, sont injectives [5, p. 188].

Alors, si nous identifions chacun des $\mathbf{E}'_n$ avec son image donnée par ${}^{\mathrm{t}}F_n$, on peut conclure que $\mathbf{E}'$ est la limite inductive canonique de la suite $(\mathbf{E}'_n)$ pour les inclusions. Et pour démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}'_n$ est dense dans $\mathbf{E}'$, il suffit de remarquer que:

a) Les duals de $\mathbf{E}'_n$ et de $\mathbf{E}'$, munis de la topologie faible, sont isomorphes respectivement de $\mathbf{E}_n$ et de $\mathbf{E}$ [5, p. 361].

b) En identifiant $\mathbf{E}_n$ et $\mathbf{E}$ avec les duals référés ci-dessus, on peut écrire ${}^{\mathrm{tt}}F_n = F_n$.

Il en découle donc que, ${}^{\mathrm{tt}}F_n$ étant injective, $\operatorname{Im} {}^{\mathrm{t}}F_n$ est dense dans $\mathbf{E}'$ [5, p. 188]. ∎

1.2.2 Proposition. *Si $\mathbf{E}$ est la limite projective d'une suite $(\mathbf{E}_n)$ d'espaces de Banach pour une famille $\{F_{mn} : \mathbf{E}_m \to \mathbf{E}_n;\, m > n\}$ d'injections compactes, alors il y a une suite de normes concordantes qui définit la topologie de $\mathbf{E}$, celui-ci étant un espace parfait au sens de Guelfand.*

Démonstration: Nous pouvons supposer sans perte de géneralité que chacun des $\mathbf{E}_n$ coincide avec l'adhérence de l'image de la projection $F_n\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}_n$.

Alors, en ayant recours aux normes $\|\cdot\|_n$ définies dans chacun des $\mathbf{E}_n$, on peut définir la suite des normes dans $\mathbf{E}$ données par

$$\|u\|_n^* = \|F_n(u)\|_n\,, \qquad \forall\, u \in \mathbf{E}, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ .$$

Cette suite définit évidemment la topologie de $\mathbf{E}$.

Pour démontrer qu'elles sont concordantes, considérons une suite (u_k) dans $\mathbf{E}$, de Cauchy pour les normes $\|\cdot\|_n^*$ et $\|\cdot\|_m^*$, avec $m > n$.

On vérifie alors que: si $(u_k) \to 0$ d'accord avec la norme $\|\cdot\|_m^*$ elle converge aussi vers zéro d'accord avec la norme $\|\cdot\|_n^*$; si elle converge vers zéro d'accord avec $\|\cdot\|_n^*$, sa limite dans $\mathbf{E}_m$ appartient au noyau de F_{mn}, ce qui entraîne que cette limite est zéro. Les normes $\|\cdot\|_m^*$ et $\|\cdot\|_n^*$ sont donc concordantes.

À sont tour il découle, de la compacité des applications F_{mn}, $m, n \in \mathbb{N}$, que $\mathbf{E}$ est un espace M^* [6, p. 191], ses parties bornées étant donc relativement compactes. C'est-à-dire que $\mathbf{E}$ est un espace parfait au sens de Guelfand [3, p. 54]. ∎

2. Nous analysons maintenant quelques propriétés des applications linéaires continues d'un espace $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ dans un espace localement convexe, séparé et semi-complet $\mathbf{E}$. Par la suite, nous désignons par $\mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F}), \mathbf{E}]$, l'espace vectoriel de ces applications, que nous supposons muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$. En outre, nous désignons par $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty, \mathbf{E})$ l'espace vectoriel complexe de leurs indicatrices.

2.1. Pour définir une topologie sur $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty, \mathbf{E})$, nous considérons un complexe $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbf{F}_1$, et une base $\mathcal{B}$ des semi-normes continues pour la topologie de $\mathbf{E}$. Étant donc donnée une indicatrice $u(\widehat{\lambda})$, nous pouvons déterminer ses coefficients assymptotiques $\mu_1, \mu_2, \ldots$, ainsi que ses restes $u_1, u_2, \ldots$ d'ordre $1, 2, \ldots$ respectivement, par rapport à α [1, p. 235]. Pour chacun des $k \in \mathbb{N}$, on vérifie

2.1.1. $$u(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{u_k(\xi)}{\xi - \lambda}\, d\xi\,, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{F}_k\ ,$$

et encore

2.1.2. $$\mathbf{u}(\lambda) = \frac{\mu_\mathbf{1}}{\lambda - \alpha} + \frac{\mu_\mathbf{2}}{(\lambda - \alpha)^\mathbf{2}} + \ldots + \frac{\mu_\mathbf{k}}{(\lambda - \alpha)^\mathbf{k}} + \mathbf{u_k}(\lambda)\ , \qquad \forall\, \lambda \in [(\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty) - \{\alpha\}]\ .$$

Celá posé, pour tout $p \in \mathcal{B}$, nous représentons par p_k, $k = 1, 2, \ldots$, les semi-normes données dans $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty, \mathbf{E})$ par les égalités

2.1.3. $$p_k(u) = \sup_{\lambda \in \overline{\mathbb{C} - \mathbf{F}_k}} p\Big[(\lambda - \alpha)^{k+1}\, u_k(\lambda)\Big]\ .$$

On peut vérifier que la famille de ces semi-normes définit sur $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty, \mathbf{E})$ une topologie localement convexe séparée. Nous la désignons par τ. Si l'on fait

2.1.4. $$\mathbf{U}_k^p = \Big\{u \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty, \mathbf{E}) \colon\ p_k(u) \leq 1\Big\}\ ,$$

les ensembles $\gamma\, \mathbf{U}_k^p$, avec $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$, $p \in \mathcal{B}$ et $k \in \mathbb{N}$, constituent un système fondamental de voisinages de zéro pour la topologie τ.

2.2. Nous avons dit que l'égalité I.2.8.3 définit une correspondance biunivoque entre les applications linéaires continues et leurs indicatrices. Elle définit encore un isomorphisme vectoriel entre les espaces $\mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F}),\mathbf{E}]$ et $\mathcal{H}(\mathbb{C}-\mathbf{F}_\infty,\mathbf{E})$; dans ce qui va suivre, nous le désignons par J. À son sujet on peut énoncer la proposition:

2.2.1 Proposition. *L'isomorphisme $J:\ \mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F}),\mathbf{E}]\to\mathcal{H}(\mathbb{C}-\mathbf{F}_\infty,\mathbf{E})$ est bicontinu si l'on suppose que ces espaces sont munis respectivement de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ et de la topologie τ.*

Démonstration: Considérons un voisinage $\gamma\mathbf{U}_k^p$ ($\gamma\in\mathbb{C}-\{0\}$, $p\in\mathcal{B}$ et $k\in\mathbb{N}$) de zéro dans $\mathcal{H}(\mathbb{C}-\mathbf{F}_\infty,\mathbf{E})$. Alors, étant donnés l'ensemble $\mathbf{B}=\{(\lambda-\alpha)\cdot\frac{(\widehat{z}-\alpha)^k}{\widehat{z}-\lambda}:\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}-\mathbf{F}_k}\}$ qui est borné dans $\mathcal{U}(\mathcal{F})$, et le voisinage $\boldsymbol{U}=\{v\in\mathbf{E}:\ p(v)\le|\gamma|\}$ de zéro dans $\mathbf{E}$, l'ensemble $\mathbf{V}=\{F\in\mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F}),\mathbf{E}]:\ F(\mathbf{B})\subset\boldsymbol{U}\}$ est aussi un voisinage de zéro dans $\mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F}),\mathbf{E}]$.

Supposons maintenant que $F\in\mathbf{V}$. Ça veut dire que:

$$F(\mathbf{B})=\Big\{(\lambda-\alpha)^{k+1}\,u_k(\lambda):\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}-\mathbf{F}_k}\Big\}$$

(où u_k est le reste assymptotique par rapport à α, d'ordre k, de $u=J(F)$) est contenu dans $\boldsymbol{U}$; et donc que

$$p\Big[(\lambda-\alpha)^{k+1}\,u_k(\lambda)\Big]\le|\gamma|\,,\qquad\forall\,\lambda\in\overline{\mathbb{C}-\mathbf{F}_k}\ .$$

C'est-à-dire $p_k(u)\le|\gamma|$ et $u\in\gamma\,\mathbf{U}_k^p$. Pour tout voisinage $\gamma\,\mathbf{U}_k^p$ de zéro dans $\mathcal{H}(\mathbb{C}-\mathbf{F}_\infty,\mathbf{E})$ il existe donc un voisinage $\mathbf{V}$ de zéro dans $\mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F}),\mathbf{E}]$ tel que $J(\mathbf{V})\subset\gamma\,\mathbf{U}_k^p$. J est continu.

Réciproquement, considérons le voisinage de zéro dans $\mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F}),\mathbf{E}]$ donné par $\mathbf{V}=\{F\in\mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F}),\mathbf{E}]:\ F(\mathbf{B})\subset\mathbf{V}\}$ où $\mathbf{B}$ est une partie bornée de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ et $\mathbf{V}=\{v\in\mathbf{E}:\ p(v)\le|\gamma|\}$, $p\in\mathcal{B}$ et $\gamma\in\mathbb{C}-\{0\}$. $\mathbf{B}$ étant borné dans $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ il est contenu dans un $\mathcal{U}(\mathbf{F}_k)$ et borné pour sa norme. Supposons que $|\frac{\phi(\lambda)}{(\lambda-\alpha)^k}|\le M$ (réel positif) $\forall\,\phi\in\mathbf{B}$ et $\forall\,\lambda\in\mathbf{F}_k$.

Alors, pour tout $u\in\mathcal{H}(\mathbb{C}-\mathbf{F}_\infty,\mathbf{E})$ et pour tout $\phi\in\mathbf{B}$, on vérifie

$$p\bigg(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\phi(\lambda)\,u_{k+1}(\lambda)\,d\lambda\bigg)\le\frac{1}{2\pi}\,M\,p^{k+1}(u)\,|\Gamma_k^*|\ ,$$

où $|\Gamma_k^*|$ désigne la longueur de Γ_k^*. Il en résulte donc que si $p^{k+1}(u)\le\frac{2\pi}{M\,|\Gamma_k^*|}$ on a $p[F(\widehat{\phi})]\le|\gamma|$. C'est-à-dire que si β est un complexe tel que $|\beta|<\frac{2\pi}{M\,|\Gamma_k^*|}$, on a $J^{-1}(\beta\,\mathbf{U}_k^p)\subset\mathbf{V}$. J^{-1} est donc continu. ∎

2.3. Étant donnée une partie $\mathbf{B}\subset\mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F}),\mathbf{E}]$, pour tout $k\in\mathbb{N}$, considérons maintenant l'ensemble $\{(\widehat{\lambda}-\alpha)^{k+1}\,u_k(\widehat{\lambda}):\ u(\widehat{\lambda})\in J(\mathbf{B})\}$ où pour tout $u(\widehat{\lambda})\in J(\mathbf{B})$,

$u_k(\widehat{\lambda})$ désigne son reste d'ordre k relatif à α. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est un ensemble de fonctions à valeurs dans $\mathbf{E}$ et définies dans $\mathbb{C} - \mathbf{F}_k$. À son sujet et comme conséquence de la Proposition 2.2.1 on peut énoncer:

2.3.1 Proposition. *Une partie* $\mathbf{B} \subset \mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F}), \mathbf{E}]$ *est bornée dans cet espace, si et seulement si, pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $\{(\widehat{\lambda} - \alpha)^{k+1} u_k(\widehat{\lambda}) : u(\widehat{\lambda}) \in J(\mathbf{B})\}$ *est un ensemble de fonctions uniformément bornées sur* $\overline{\mathbb{C} - \mathbf{F}_k}$, *pour la topologie de* $\mathbf{E}$.

3. Considérons maintenant deux filtres $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ régularisables admettant des bases régulières, respectivement $\{\mathbf{H}_k\}$ et $\{\mathbf{G}_k\}$, qui vérifient les propriétés 1.1.1, 1.1.2 et 1.1.3; désignons encore par $\mathcal{F}$ le filtre engendré sur $\mathbb{C}$ par les réunions $\mathbf{H}_k \cup \mathbf{G}_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

3.1. Celà posé, considérons l'application $I \colon \mathcal{U}(\mathcal{F}) \to \mathcal{U}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}(\mathcal{G})$ donnée par

3.1.1. $$I(\widehat{\phi}) = (\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2)\,, \quad \forall\, \widehat{\phi} \in \mathcal{U}(\mathcal{F})\ ,$$

où si $\widehat{\phi}$ admet un représentant $\phi \in \mathcal{U}(\mathbf{H}_k \cup \mathbf{G}_k)$, $\widehat{\phi}_1 \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ et $\widehat{\phi}_2 \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$ sont les éléments qui admettent comme représentants les restrictions de ϕ à $\mathbf{H}_k$ et à $\mathbf{G}_k$ respectivement. Si les intersections $\mathbf{H}_k \cap \mathbf{G}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, sont vides, il en résulte donc que I est un isomorphisme.

Dans ces conditions, $\frac{1}{\widehat{z} - \lambda}$, $\lambda \in \mathbb{C} - (\mathbf{H}_\infty \cup \mathbf{G}_\infty)$, étant un élément de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$, son image donnée par I est $(\frac{1}{\widehat{z}_1 - \lambda}, \frac{1}{\widehat{z}_2 - \lambda})$ où $\frac{1}{\widehat{z}_1 - \lambda} \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ et $\frac{1}{\widehat{z}_2 - \lambda} \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$. On peut écrire

3.1.2. $$I\Big(\frac{1}{\widehat{z} - \lambda}\Big) = \Big(\frac{1}{\widehat{z}_1 - \lambda}, 0\Big) + \Big(0, \frac{1}{\widehat{z}_2 - \lambda}\Big)\ .$$

En outre, si $\lambda \in \mathbb{C} - (\mathbf{H}_k \cup \mathbf{G}_k)$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on a

3.1.3. $$\frac{1}{\widehat{z} - \lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{1}{\widehat{z} - \xi} \frac{1}{\xi - \lambda}\, d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_k} \frac{1}{\widehat{z} - \xi} \frac{1}{\xi - \lambda}\, d\xi\ ,$$

où Γ_k et Γ'_k sont les frontières orientées de $\mathbf{H}_k$ et de $\mathbf{G}_k$ respectivement; les deux integrales sont indépendantes de k pour tout k vérifiant la condition ci-dessus, et peuvent être calculées respectivement pour tout $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{H}_\infty$ et tout $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{G}_\infty$; elles définissent des fonctions de λ à valeurs dans $\mathcal{U}(\mathcal{F})$, que nous désignons respectivement par $v_{\mathcal{H}}(\widehat{\lambda})$ et $v_{\mathcal{G}}(\widehat{\lambda})$:

3.1.4. $$v_{\mathcal{H}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{1}{\widehat{z} - \xi} \frac{1}{\xi - \lambda}\, d\xi\,, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{H}_\infty\ ,$$

et

3.1.5. $$v_{\mathcal{G}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_k} \frac{1}{\widehat{z}-\xi}\,\frac{1}{\xi-\lambda}\,d\xi\,, \qquad \forall\,\lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{G}_\infty\,,$$

où $k \in \mathbb{N}$ est tel que $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{H}_k$ (pour $v_{\mathcal{H}}(\lambda)$) et $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{G}_k$ (pour $v_{\mathcal{G}}(\lambda)$).

Il est aisé de voir que

3.1.6. $$I(v_{\mathcal{H}}(\lambda)) = \left(\frac{1}{\widehat{z}_1 - \lambda}, 0\right), \qquad \forall\,\lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{H}_\infty\,,$$

et que

3.1.7. $$I(v_{\mathcal{G}}(\lambda)) = \left(0, \frac{1}{\widehat{z}_2 - \lambda}\right), \qquad \forall\,\lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{G}_\infty\,,$$

et en conséquence la proposition:

3.1.8 Proposition. *Les fonctions $v_{\mathcal{H}}$ et $v_{\mathcal{G}}$ données respectivement par 3.1.4 et 3.1.5 sont holomorphes dans leurs domaines de définition; en outre elles sont à décroissance presque rapide sur les ensembles $\mathbb{C} - \mathbf{H}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, la première, et, sur les ensembles $\mathbb{C} - \mathbf{G}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, la seconde.*

4. Nous considérons maintenant l'espace $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ des fonctions holomorphes à croissance lente sur le filtre $\mathcal{F}$ et son sous-espace $\mathcal{P}$ formé par les polynômes. Pour en effectuer le quotient et assurer qu'il est séparé, il faut introduire quelques conditions relatives au filtre $\mathcal{F}$. Nous supposons encore qu'il admet une base régulière $\{\mathbf{F}_k\}$ qui vérifie les propriétés 1.1.1, 1.1.2 et 1.1.3, mais nous exigeons aussi que les ensembles $\mathbf{F}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, soient non bornés.

4.1. Dans ces conditions, le sous-espace $\mathcal{P}$ est fermé dans $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ et le quotient $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ est un espace localement convexe, séparé et complet, et on constate encore que *toute partie bornée de $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ est l'image, donnée par l'application canonique $\mathcal{U}(\mathcal{F}) \to \mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$, d'une partie bornée de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$.*

Par la suite nous représentons cette application canonique par K.

4.2. Dans les conditions rapportées au numéro antérieur on peut maintenant établir des résultats importants relatifs aux applications linéaires continues de $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ dans un espace $\mathbf{E}$, localement convexe, séparé et semi-complet.

4.2.1 Proposition. *Il existe une correspondance biunivoque $\widetilde{F} \leftrightarrow F$ entre les applications linéaires continues $\widetilde{F}$ de $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ dans $\mathbf{E}$ et les applications linéaires continues de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ dans $\mathbf{E}$ qui sont nulles sur $\mathcal{P}$. Cette correspondance est définie par l'égalité*

4.2.2. $$F = \widetilde{F} \circ K\ .$$

Démonstration: Il est trivial que, $\widetilde{F}$ étant une application de $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ dans $\mathbf{E}$, l'application F, donnée par 4.2.2, est une application linéaire continue de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ dans $\mathbf{E}$.

Réciproquement, si F est une application linéaire continue de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ dans $\mathbf{E}$, nulle sur $\mathcal{P}$, quels que soient les réprésentants $\widehat{\phi}$ et $\widehat{\psi}$ d'un même élément de $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$, on a $F(\widehat{\phi}) = F(\widehat{\psi})$. On peut donc définir $\widetilde{F}$ par l'égalité $\widetilde{F}(\widehat{\phi} + \mathcal{P}) = F(\widehat{\phi})$, $\forall\, \widehat{\phi} \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$; cette application est évidemment linéaire et continue et c'est la seule qui vérifie 4.2.2. ∎

4.2.3 Corollaire. *Il existe une correspondance biunivoque $\widetilde{F} \leftrightarrow u$ entre les applications linéaires continues $\widetilde{F}$ de $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ dans $\mathbf{E}$, et les éléments $u \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty, \mathbf{E})$ qui sont à décroissance rapide sur les ensembles $\mathbb{C} - \mathbf{F}_k$, $k = 1, 2, \ldots$.*

Ce résultat va nous permettre d'appeler encore chacune de ces fonctions $u(\widehat{\lambda})$ l'indicatrice de l'application correspondante $\widetilde{F}$ de $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ dans $\mathbf{E}$.

En désignant encore par $\mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F}), \mathbf{E}]$ et par $\mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}, \mathbf{E}]$ les espaces des applications linéaires continues, respectivament de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ et de $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ dans $\mathbf{E}$, et en supposant que ces espaces sont munis de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées, on peut énoncer:

4.2.4 Proposition. *La correspondance donnée par 4.2.2 définit un isomorphisme entre $\mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}, \mathbf{E}]$ et le sous-espace de $\mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F}), \mathbf{E}]$ formé par les applications qui sont nulles sur $\mathcal{P}$; cet isomorphisme est bicontinu si nous supposons que ce sous-espace est muni de la topologie induite.*

Démonstration: Pour démontrer cette proposition, il suffit de constater que l'application canonique $K \colon \mathcal{U}(\mathcal{F}) \to \mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ étant continue, est aussi borné, et que $\widetilde{\mathbf{B}}$ étant une partie bornée de $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$, il existe une partie bornée $\mathbf{B}$ de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ telle que $K(\mathbf{B}) = \widetilde{\mathbf{B}}$. Alors si $\mathbf{U}$ est un voisinage de zéro dans $\mathbf{E}$, et si $\widetilde{\mathbf{B}}$ et $\mathbf{B}$ sont des parties bornées respectivement de $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ et de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ telles que $\widetilde{\mathbf{B}} = K(\mathbf{B})$, l'image donnée par 4.2.2 de $\{\widetilde{F} \in \mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}, \mathbf{E}] : \widetilde{F}(\widetilde{\mathbf{B}}) \subset \mathbf{U}\}$ est exactement $\{F \in \mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F}), \mathbf{E}] \colon F(\mathcal{P}) = \{0\};\, F(\mathbf{B}) \subset \mathbf{U}\}$. C'est-à-dire que les images données par 4.2.2 des voisinages de zéro dans $\mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}, \mathbf{E}]$ sont les intersections des voisinages de zéro dans $\mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F}), \mathbf{E}]$ avec le sous-espace de $\mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F}), \mathbf{E}]$ formé par les applications qui sont nulles sur $\mathcal{P}$. ∎

Et encore, en conséquence de 2.3.1:

4.2.5 Proposition. *Une partie* $\widetilde{\mathbf{B}} \subset \mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}, \mathbf{E}]$ *est bornée pour la topologie de cet espace, si et seulement si, pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $\{(\widehat{\lambda} - \alpha)^{k+1} u(\widehat{\lambda}) : u(\widehat{\lambda}) \in J(\widetilde{\mathbf{B}})\}$ *est un ensemble de fonctions uniformément bornées sur* $\overline{\mathbb{C} - \mathbf{F}_k}$, *pour la topologie de* $\mathbf{E}$.

5. Supposons maintenant que soient satisfaites les conditions énoncées au numéro 3, c'est-à-dire que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont des filtres régularisables sur $\mathbb{C}$ qui admettent des bases régulières $\{\mathbf{H}_k\}$ et $\{\mathbf{G}_k\}$, lesquelles vérifient les propriétés 1.1.1, 1.1.2 et 1.1.3, et encore que les intersections $\mathbf{H}_k \cap \mathbf{G}_k$, $k = 1, 2, ...$, sont vides. Désignons aussi pa $\mathcal{F}$ le filtre engendré sur $\mathbb{C}$ par les ensembles $\mathbf{F}_k = \mathbf{H}_k \cup \mathbf{G}_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Dans ces conditions, nous savons qu'on peut définir l'isomorphisme $I : \mathcal{U}(\mathcal{F}) \to \mathcal{U}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}(\mathcal{G})$ donnée par 3.1.1 et les fonctions $v_{\mathcal{H}}(\widehat{\lambda})$ et $v_{\mathcal{G}}(\widehat{\lambda})$ données respectivement par 3.1.4 et 3.1.5 (qui vérifient 3.1.6 et 3.1.7).

5.1. Alors, $\mathbf{E}$ étant un espace localement convexe, séparé et semi-complet, considérons une application linéaire continue F de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ dans $\mathbf{E}$, et son indicatrice $u(\widehat{\lambda})$ donnée par

5.1.1. $$u(\lambda) = F\left(\frac{1}{\widehat{z} - \lambda}\right), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty .$$

Nous savons que

5.1.2. $$\frac{1}{\widehat{z} - \lambda} = v_{\mathcal{H}}(\lambda) + v_{\mathcal{G}}(\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty ,$$

ce qui va nous permettre d'écrire

5.1.3. $$u(\lambda) = u_{\mathcal{H}}(\lambda) + u_{\mathcal{G}}(\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty ,$$

où

5.1.4. $$u_{\mathcal{H}}(\lambda) = F[v_{\mathcal{H}}(\lambda)], \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{H}_\infty ,$$

et

5.1.5. $$u_{\mathcal{G}}(\lambda) = F[v_{\mathcal{G}}(\lambda)], \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{G}_\infty .$$

Dans ce qui suit nous appelons ces fonctions $u_{\mathcal{H}}$ et $u_{\mathcal{G}}$ *composantes de* u *suivant respectivement* $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{G}$. *Elles sont évidemment à décroissance presque rapide sur les ensembles* $\mathbb{C} - \mathbf{H}_k$ (la première) et $\mathbb{C} - \mathbf{G}_k$ (la deuxième), $k \in \mathbb{N}$. Et il en va de même lorsque le noyau de F contient $\mathcal{P}$ et son indicatrice $u(\widehat{\lambda})$ est donc à décroissance rapide sur les ensembles $\mathbb{C} - \mathbf{F}_k$, $k \in \mathbb{N}$. Ceci est une conséquence de 3.1.4 et 3.1.5.

6. Pour étudier les duals des espaces $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$, nous supposons une fois encore que $\mathcal{F}$ est un filtre régularisable qui admet une base régulière $\{\mathbf{F}_k\}$ vérifiant les propriétés 1.1.1, 1.1.2 et 1.1.3, et que les ensembles $\mathbf{F}_k$ ne sont pas bornés. Dans ces conditions les espaces $\mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F}),\mathbf{E}]$ (où $\mathbf{E}$ est un espace localement convexe, séparé et semi-complet) et $\mathcal{H}(\mathbb{C}-\mathbf{F}_\infty,\mathbf{E})$ sont isomorphes, l'isomorphisme $J\colon \mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F}),\mathbf{E}] \to \mathcal{H}(\mathbb{C}-\mathbf{F}_\infty,\mathbf{E})$ (Proposition 2.2.1) étant bicontinu si nous supposons que ces espaces sont munis respectivement de la topologie de la convergence uniorme sur les parties bornées de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ et de la topologie τ. En outre, $\mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P},\mathbf{E}]$ est isomorphe au sous-espace de $\mathcal{H}(\mathbb{C}-\mathbf{F}_\infty,\mathbf{E})$ formé par les fonctions $u(\widehat{\lambda}) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}-\mathbf{F}_\infty,\mathbf{E})$ qui sont à décroissance rapide sur les ensembles $\mathbb{C}-\mathbf{F}_k$, $k=1,2,...$, cet isomorphisme étant bicontinu, si nous supposons que le premier espace est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ et le deuxième, de la topologie induite. Lorsque $\mathbf{E}$ est complet, ces espaces sont aussi complets, puisque $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ sont bornologiques.

6.1. Supposons maintenant que $\mathbf{E}$ coincide avec le plan complexe. Alors $\mathcal{H}(\mathbb{C}-\mathbf{F}_\infty,\mathbb{C})$, muni de la topologie τ, est isomorphe au dual de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ muni de la topologie forte. C'est un espace M^*, donc un espace métrisable, réflexif, de Montel [1]. Sa topologie τ peut être définie par une famille dénombrable $\{p_k\}$ de normes (2.1.3) données par

6.1.1. $$p_k(u) = \sup_{\lambda\in\overline{\mathbb{C}-\mathbf{F}_k}} \left|(\lambda-\alpha)^{k+1}\, u_k(\lambda)\right|$$

où, pour tout $u \in \mathcal{H}(\mathbb{C}-\mathbf{F}_\infty,\mathbb{C})$ et tout $k\in\mathbb{N}$, $u_k(\widehat{\lambda})$ désigne son reste d'ordre k relatif à α.

En considérant la famille $\{q_k\}$ des normes q_k données sur le même espace par les égalités

6.1.2. $$q_k(u) = \max\Big\{p_1(u), p_2(u), ..., p_k(u)\Big\}\,, \qquad \forall\, u \in \mathcal{H}(\mathbb{C}-F_\infty,\mathbb{C})\ ,$$

on peut vérifier qu'elle définit la même topologie sur $\mathcal{H}(\mathbb{C}-\mathbf{F}_\infty,\mathbb{C})$.

À ce sujet on peut énoncer les propriétés suivantes:

6.1.3 Proposition. *Étant données une norme p_k, $k\in\mathbb{N}$, et une suite (u^n) dans $\mathcal{H}(\mathbb{C}-\mathbf{F}_\infty,\mathbb{C})$, si $\lim_{n\to\infty} p_k(u^n)=0$ et si (u^n) est fondamentale pour la norme p_{k+1}, alors on a aussi $\lim_{n\to\infty} p_{k+1}(u^n)=0$.*

Démonstration: Si $p_k(u^n)$ converge vers zéro, en désignant par u_k^n le reste d'ordre k relatif à α de la fonction u^n (pour chaque n), la suite $((\widehat{\lambda}-\alpha)^{k+1}\, u_k^n(\widehat{\lambda}))$

converge vers zéro, uniformément sur $\overline{\mathbb{C} - \mathbf{F}_k}$. En outre, si (u^n) est fondamentale pour la norme p_{k+1}, la suite $((\widehat{\lambda} - \alpha)^{k+2}\, u_k^n(\widehat{\lambda}))$ converge vers une fonction $v(\widehat{\lambda})$, uniformément sur $\overline{\mathbb{C} - \mathbf{F}_{k+1}}$. Cette fonction est évidemment continue et bornée sur cet ensemble et holomorphe dans son intérieur.

Mais considérant que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_k^n(\widehat{\lambda}) = u_{k+1}^n(\widehat{\lambda}) + \frac{\mu_{k+1}^n}{(\widehat{\lambda} - \alpha)^{k+1}} \ ,$$

où μ_{k+1}^n désigne le coefficient assymptotique d'ordre $k+1$ par rapport à α de u, on a encore

$$(\widehat{\lambda} - \alpha)^{k+2}\, u_k^n(\widehat{\lambda}) = (\widehat{\lambda} - \alpha)^{k+2}\, u_{k+1}^n(\widehat{\lambda}) + (\widehat{\lambda} - \alpha)\, \mu_{k+1}^n \ .$$

Alors, lorsque $n \to \infty$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{F}_k$, on a bien

$$v(\lambda) + \lim_{n \to \infty} (\lambda - \alpha)\, \mu_{k+1}^n = 0 \ ,$$

ce qui entraîne $\lim_{n\to\infty} \mu_{k+1}^n = 0$, et par conséquent $v(\lambda) = 0$, $\forall\, \lambda \in \overline{\mathbb{C} - \mathbf{F}_k}$. C'est-à-dire $p_{k+1}(u^n) \to 0$. ∎

6.1.4 Proposition. *Les normes q_k, $k = 1, 2, ...$, données sur $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty, \mathbb{C})$ par 6.1.2, sont concordantes [3, p. 13].*

Démonstration: Supposons que (u^n) est une suite dans $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty, \mathbb{C})$ fondamentale pour les normes q_k et q_j, et que $q_k(u^n)$ converge vers zéro.

Si $k > j$, il est trivial que $q_j(u^n) \to 0$. Si $k < j$, (u^n) étant fondamentale pour la norme q_j, elles est aussi fondamentale pour les normes $p_{k+1}, p_{k+2}, ..., p_j$. Et étant donné que $q_k(u^n) \to 0$, de la proposition antérieure il s'ensuit que $p_l(u^n) \to 0$, $\forall\, l \leq k$. C'est-à-dire, $q_j(u^n) \to 0$. ∎

6.1.5 Corollaire. *$\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty, \mathbb{C})$ muni de la topologie τ est un espace dénombrablement normé complet [3, p. 16].*

Et $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty, \mathbb{C})$, muni de τ, étant isomorphe au dual de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$, est aussi un espace de Montel. Ses parties bornées sont relativement compactes. C'est-à-dire

6.1.6 Proposition. *$\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty, \mathbb{C})$ muni de la topologie τ est un espace parfait au sens de Guelfand. C'est donc un espace séparable [3, ps. 54 et 59].*

Pour confirmer ces assertions on peut aussi démontrer que:

6.1.7 Proposition. *Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, si une partie de $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty, \mathbb{C})$ est bornée pour la norme q_{k+1}, elle est relativement compacte pour la norme q_k [3, p. 55].*

6.2. Dans les conditions considérées, $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ étant un espace de Silva, son dual fort est un espace M^*, et par conséquent un espace de Montel. Ses parties bornées sont relativement compactes. En outre, ce dual étant isomorphe au sous-espace de $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty, \mathbb{C})$ des fonctions à décroissance rapide sur les ensembles $\mathbb{C} - \mathbf{F}_k$, $k \in \mathbb{N}$ (muni de la topologie induite il est complet) sa topologie peut être défini par une famille de normes concordantes, c'est-à-dire que ce dual est un espace dénombrable normé complet et donc un espace parfait au sens de Guelfand [3]. Pour confirmer ces résultats, on peut encore remarquer que ce dual fort, étant isomorphe au sous-espace référé ci-dessus de $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty, \mathbb{C})$ (qui est un espace parfait), est aussi un espace parfait.

6.3. On sait que la multiplication dans $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ par un élément $\phi \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$ est une application linéaire continue de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ dans $\mathcal{U}(\mathcal{F})$. À cette application correspond l'indicatrice $\frac{\widehat{\phi}}{\widehat{z}-\lambda}$, c'est-à-dire, la fonction $u_{\widehat{\phi}}(\widehat{\lambda})$, définie dans $\mathbb{C} - \mathbf{F}_\infty$ (et à valeurs dans $\mathcal{U}(\mathcal{F})$) par

6.3.1.
$$u_{\widehat{\phi}}(\lambda) = \frac{\widehat{\phi}}{\widehat{z} - \lambda} \; .$$

Alors, de 2.3.1 il découle

6.3.2 Proposition. *Si $\mathbf{B} \subset \mathcal{U}(\mathcal{F})$ est une partie bornée, l'ensemble $\mathbf{A} \subset \mathcal{L}[\mathcal{U}(\mathcal{F})]$, qui est formé par les applications F de la forme $F(\widehat{\psi}) = \widehat{\phi} \cdot \widehat{\psi}$, $\forall\, \widehat{\psi} \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$, où $\widehat{\phi} \in \mathbf{B}$, l'est aussi (pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$).*

Démonstration: Il suffit de constater que le reste d'ordre k ($k \in \mathbb{N}$), relatif à un point $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbf{F}_1$, d'une indicatrice

$$u_{\widehat{\phi}}(\lambda) = \frac{\widehat{\phi}}{\widehat{z} - \lambda}$$

est

$$u_{\widehat{\phi}_k}(\lambda) = \frac{(\widehat{z} - \alpha)^k \, \widehat{\phi}}{(\lambda - \alpha)^k \, (\widehat{z} - \lambda)} \; . \blacksquare$$

7. Nous présentons maintenant quelques exemples d'indicatrices.

7.1. **A** étant une algèbre localement convexe complète, séparée, munie d'élément unité et à produit séparément continu, supposons que $\mathcal{G}$ est un filtre régularisable sur le plan complexe qui admet une base $\{\mathbf{G}_k\}$ régulière vérifiant les propriétés 1.1.1, 1.1.2 et 1.1.3. Alors, pour tout élément $a \in \mathbf{A}$ dont le filtre spectral est plus fin que $\mathcal{G}$, la fonction $\frac{1}{a-\lambda}$ de λ à valeurs dans **A**, est holomorphe dans $\mathbb{C} - \mathbf{G}_\infty$, et à décroissance presque rapide sur tout $\mathbb{C} - \mathbf{G}_k$. Elle est l'indicatrice d'une application linéaire continue de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ dans **A**.

α étant un complexe pris arbitrairement dans $\mathbb{C} - \mathbf{G}_1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire [1 p. 236]

7.1.1.
$$\frac{1}{a-\lambda} = -\frac{1}{\lambda-\alpha} - \frac{a-\alpha}{(\lambda-\alpha)^2} - \dots - \frac{(a-\alpha)^{n-1}}{(\lambda-\alpha)^n} + \frac{(a-\alpha)^n}{(\lambda-\alpha)^n} \circ \frac{1}{a-\lambda} ,$$

c'est-à-dire que ses coefficients assymptotiques par rapport à α sont -1, $-(a-\alpha)$, ..., $-(a-\alpha)^{n-1}$ et le reste d'ordre n relatif à α est donné par

7.1.2.
$$\frac{(a-\lambda)^n}{(\lambda-\alpha)^n} \circ \frac{1}{a-\lambda} .$$

Et à tout $\widehat{\phi} \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$ qui admet un représentant $\phi \in \mathcal{U}(\mathbf{G}_k)$, $k \in \mathbb{N}$, cette application fait correspondre

7.1.3.
$$\widehat{\phi}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{(a-\alpha)^{k+1}\, \phi(\lambda)}{(\lambda-\alpha)^{k+1}} \circ \frac{1}{a-\lambda}\, d\lambda .$$

7.2. La fonction de λ qui, à tout $\lambda \in \mathbb{C}$, fait correspondre la distribution $e^{\lambda t}H(t)$, vérifie les propriétés suivantes:

7.2.1. C'est une fonction à valeurs dans l'espace vectoriel topologique Λ_0^+ des distributions nulles à gauche de zéro et du type exponentiel à droite, et à décroissance presque rapide sur tout $\mathbb{C} - \mathbf{F}_k$, où $\mathbf{F}_k = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

7.2.2.
$$e^{\lambda t}\, H(t) = D^n \left[\frac{e^{\lambda t} H(t)}{\lambda^n} \right] - \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta^{(j-1)}(t)}{\lambda^j} , \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} ,$$

cette fnction étant donc l'indicatrice (I.2.8) d'une application linéaire continue d'un espace $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ (où $\mathcal{F}$ est le filtre engendré par les semi-plans $\mathbf{F}_k$ referés ci-dessus) dans Λ_0^+ [7]. L'application inverse est la transformation de Laplace $\mathbb{L}$, qui définit un isomorphisme bicontinu entre Λ_0^+ et $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ si ces espaces sont munis des topologies usuelles.

7.2.3. C'est une fonction dans le semi-plan $\operatorname{Re}\lambda < 0$, à valeurs dans l'espace des distributions nulles à gauche de zéro et à décroissance exponentielle à droite [4, p. 68], qui est holomorphe dans le plan référé ci-dessus et à décroissance presque rapide sur tout $\mathbb{C} - \mathbf{F}_k$, où $\mathbf{F}_k = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq -\frac{1}{k}\}$, $k \in \mathbb{N}$. Elle est donc l'indicatrice (I.2.8.3) d'une application linéaire continue de l'espace $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ (où $\mathcal{F}$ est le filtre engendré par ces derniers semi-plans $\mathbf{F}_k$) dans l'espace des distributions à décroissance exponentielle.

7.3. L'exponentielle $\frac{1}{i}\, e^{-i\lambda t}$ est une fonction définie dans $\mathbb{C}$ et à valeurs dans l'espace Λ des distributions du type exponentiel, qui est holomorphe dans son domaine et à décroissance rapide sur les ensembles $\mathbb{C} - \mathbf{F}_k$, $\mathbf{F}_k = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \geq k\}$, $k = 1, 2, \ldots$. C'est-à-dire qu'elle est l'indicatrice d'une application linéaire continue de l'espace $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ (où $\mathcal{F}$ est le filtre engendré sur $\mathbb{C}$ par les ensembles $\mathbf{F}_k$) dans Λ, cette application étant nulle sur $\mathcal{P}$. Par conséquent (4.2.3) l'exponentielle est l'indicatrice d'une application linéaire continue de $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ dans le même Λ.

En considérant que $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ est isomorphe au produit $\mathcal{U}(\mathcal{F}^+) \times \mathcal{U}(\mathcal{F}^-)$ où $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ sont les filtres engendrés par les semi-plans respectivement $\mathbf{F}_k^+ = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}\lambda \geq k\}$ et $\mathbf{F}_k^- = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}\lambda \leq -k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, de 5.1.4 et 5.1.5, il s'ensuit que les composantes de $\frac{1}{i}\, e^{-i\lambda t}$ sont les fonctions u^+ et u^- données par

7.3.1. $$u^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k^+} \frac{e^{-i\xi t}}{i(\xi - \lambda)}\, d\xi = \frac{1}{i}\, e^{-i\lambda t}\, H(t), \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{F}_k^+ ,$$

et

7.3.2. $$u^-(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k^-} \frac{e^{-i\xi t}}{i(\xi - \lambda)}\, d\xi = \frac{1}{i}\, e^{-i\lambda t}(1 - H(t)), \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{F}_k^- ,$$

où Γ_k^+ et Γ_k^- sont les frontières orientées respectivement de $\mathbf{F}_k^+$ et de $\mathbf{F}_k^-$, et $k \in \mathbb{N}$ est tel que $\lambda \in \mathbb{C} - (\mathbf{F}_k^+ \cup \mathbf{F}_k^-)$. Ces fonctions sont à décroissance presque rapide sur les ensembles $\mathbb{C} - \mathbf{F}_k^+$ et $\mathbb{C} - \mathbf{F}_k^-$ respectivement, quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

7.4. En supposant encore que $\mathcal{F}$ est le filtre sur $\mathbb{C}$ défini au numéro antérieur, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ on peut définir la translation T_α sur $\mathcal{U}(\mathcal{F})$. À tout $\widehat{\phi} \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$ elle fait correspondre l'élément de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ qui est représenté par $\phi(\widehat{z} - \alpha)$ si $\phi(\widehat{z})$ est un représentant de $\widehat{\phi}$.

T_α est évidemment une application linéaire continue de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ dans $\mathcal{U}(\mathcal{F})$, et la composition $K \circ T_\alpha$ sera donc une application linéaire continue de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ dans

$\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$. Son indicatrice est la fonction de λ à valeurs dans $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ donnée par

7.4.1. $$K\left(\frac{1}{\widehat{z}-\alpha-\lambda}\right) .$$

K étant linéaire il en résulte encore que cette fonction est l'indicatrice d'une application qui est nulle sur $\mathcal{P}$. C'est-à-dire (4.3.3), elle est l'indicatrice d'une application linéaire continue de $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$ dans $\mathcal{U}(\mathcal{F})/\mathcal{P}$, et par conséquent l'indicatrice d'un opérateur linéaire continu dans l'espace $\mathbf{U}$ des ultradistributions tempérées au sens de Sebastião e Silva [4, p. 71]. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, cet opérateur, qu'on appelle translation dans $\mathbf{U}$, sera représenté par $\widetilde{T}_\alpha$. Par définition on vérifie donc

7.4.2. $$\widetilde{T}_\alpha \circ K = K \circ T_\alpha , \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C} .$$

L'ensemble de ces opérateurs $\widetilde{T}_\alpha$, muni du produit usuel de composition, est évidemment un groupe, dont l'identité est $\widetilde{T}_0$. L'indicatrice du produit $\widetilde{T}_\alpha \circ \widetilde{T}_\beta$ est la fonction de λ donnée par

$$(\widetilde{T}_\alpha \circ \widetilde{T}_\beta \circ K)\left(\frac{1}{\widehat{z}-\lambda}\right) = (K \circ T_\alpha \circ T_\beta)\left(\frac{1}{\widehat{z}-\lambda}\right) =$$
$$= (K \circ T_{\alpha+\beta})\left(\frac{1}{\widehat{z}-\lambda}\right) = (\widetilde{T}_{\alpha+\beta} \circ K)\left(\frac{1}{\widehat{z}-\lambda}\right)$$

c'est-à-dire, $\widetilde{T}_\alpha \circ \widetilde{T}_\beta = \widetilde{T}_{\alpha+\beta}$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Considérons maintenant un opérateur linéaire continu $\widetilde{F}$ dans $\mathbf{U}$, et supposons qu'il commute avec toute la translation $\widetilde{T}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors, si F est l'application de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ dans $\mathbf{U}$ donnée par $F = \widetilde{F} \circ K$ (4.3.2), l'indicatrice de $\widetilde{F}$ sera la fonction $u(\widehat{\lambda})$ donnée dans $\mathbb{C}$ par

7.4.3. $$u(\lambda) = F\left(\frac{1}{\widehat{z}-\lambda}\right) ,$$

et ses composantes suivant $\mathcal{U}(\mathcal{F}^+)$ et $\mathcal{U}(\mathcal{F}^-)$ seront respectivement les fonctions u^+ et u^- (5.1.4 et 5.1.5) données par $u^+(\lambda) = F(v^+(\lambda))$ et $u^-(\lambda) = F(v^-(\lambda))$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$, où

7.4.4. $$v^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k^+} \frac{1}{\widehat{z}-\xi}\,\frac{1}{\xi-\lambda}\, d\xi$$

et

7.4.5. $$v^-(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k^-} \frac{1}{\widehat{z}-\xi}\,\frac{1}{\xi-\lambda}\, d\xi$$

($k \in \mathbb{N}$ est tel que $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{F}_k^+$ pour la première intégrale et $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{F}_k^-$ pour la deuxième).

Il est aisé de voir que $v^+(\lambda) = T_\lambda v^+(0)$ et $v^-(\lambda) = T_\lambda v^-(0)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$, et puisque

$$F \circ T_\lambda = \widetilde{F} \circ K \circ T_\lambda = \widetilde{F} \circ \widetilde{T}_\lambda \circ K = \widetilde{T}_\lambda \circ \widetilde{F} \circ K = \widetilde{T}_\lambda \circ F\,, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\,,$$

il en résulte que, pour tout λ on a

7.4.6. $$u(\lambda) = F\left(\frac{1}{\widehat{z} - \lambda}\right) = (F \circ T_\lambda)\left(\frac{1}{\widehat{z}}\right) = (\widetilde{T}_\lambda \circ F)\left(\frac{1}{\widehat{z}}\right) = \widetilde{T}_\lambda(u(0))\ ,$$

et de la même façon

7.4.7. $$u^+(\lambda) = \widetilde{T}_\lambda(u^+(0)) \quad \text{et} \quad u^-(\lambda) = \widetilde{T}_\lambda(u^-(0))\ .$$

On démontre encore [4, p. 80] que les indicatrices de ces applications sont celles qui vérifient les propriétés suivantes:

7.4.8. $u(0) = K(\widehat{\phi})$ *où* $\widehat{\phi} \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$ *admet un représentant* ϕ *qui est une fonction à décroissance presque rapide dans, au moins, un des ensembles* $\mathbf{F}_k$;

7.4.9. $u(\lambda) = \widetilde{T}_\lambda(u(0))$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

L'ensemble de ces indicatrices constitue un sous-espace de $\mathcal{H}(\mathbb{C},\mathcal{U}(\mathcal{F}))$, qui est fermé pour la topologie τ (2.1), c'est-à-dire complet pour la topologie induite. L'ensemble des opérateurs linéaires et continus dans $\mathbf{U}$ correspondants forment donc un sous-espace de $\mathbb{L}[\mathbf{U}]$ qui est complet pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathbf{U}$.

7.5. Nous savons que la transformation de Fourier, qui est un automorphisme dans l'espace des distributions tempérées, se prolonge (univoquement) en une application linéaire continue de Λ sur $\mathbf{U}$ [4, p. 70]. Cette application, que nous désignons par $\mathbb{F}$, fait correspondre à $f \in \Lambda$ l'ultradistribution obtenue de la façon suivante: on décompose f en une diférence $f = f^+ - f^-$ de deux distributions appartenant encore à Λ, mais nulles respectivement à gauche (f^+) et à droite (f^-) de zéro; alors, l'image de Fourier de f est l'ultradistribution $K(\widehat{\phi})$ où $\widehat{\phi} \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$ est donnée par

7.5.1. $$\phi(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f^+(t)\, e^{itz}\, dt & \text{si } \operatorname{Im} z > 0, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f^-(t)\, e^{itz}\, dt & \text{si } \operatorname{Im} z < 0\ , \end{cases}$$

ces intégrales convergeant sur le complementaire d'une bande $|\operatorname{Im} z| \leq k$ $(k \in \mathbb{N})$ qui dépend de la distribution f. L'inverse de $\mathbb{F}$ est l'application de $\mathbf{U}$ dans Λ définie dans 7.3, dont l'indicatrice est $\frac{e^{-it\lambda}}{i}$.

En particulier, si f est un multiplicateur dans Λ, c'est-à-dire, si f est une fonction infiniment différentiable et pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il y a un $k_j \in \mathbb{N}$ tel que

7.5.2. $$\lim_{t\to\infty} e^{-k_j|t|} f(t) = 0 \ ,$$

on sait que son image donnée par $\mathbb{F}$ est une ultradistribution à décroissance rapide [4, p. 81]. À la multiplication par f dans Λ, la transformation de Fourier fait correspondre la convolution par $\frac{1}{2\pi}\mathbb{F}(f)$ dans $\mathbf{U}$.

Étant donné un multiplicateur f dans Λ, son image donnée par $\mathbb{F}$ est la distribution $\mathbb{F}(f) = K(\widehat{\phi})$ où $\widehat{\phi} \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$ peut être donnée par le représentant

7.5.3. $$\phi(z) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{(iz)^n} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t)\, H(t)\, e^{itz}\, dt & \text{pour } \operatorname{Im} z \geq m, \\ \dfrac{(-1)^n}{(iz)^n} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t)\, [H(t)-1]\, e^{itz}\, dt & \text{pour } \operatorname{Im} z \leq -m \ , \end{cases}$$

où n est un nombre naturel pris arbitrairement et m est un nombre naturel quelconque majorant les réels $k_0, k_1, k_2, ..., k_n$ donnés par 7.5.2.

À la convolution par $\frac{1}{2\pi}\mathbb{F}(f)$ dans $\mathbf{U}$, correspond donc l'indicatrice $u(\widehat{\lambda})$ donnée par

7.5.4. $$u(\lambda) = -i\,\widetilde{T}_\lambda[K(\widehat{\phi})] = -i\,K[T_\lambda(\widehat{\phi})]\,, \qquad \forall\,\lambda \in \mathbb{C} \ ,$$

où $T_\lambda(\widehat{\phi})$, à cause de 7.5.3, est évidemment à décroissance rapide dans les bandes horizontales $|\operatorname{Im}\lambda| < k$, $k \in \mathbb{N}$.

Des égalités 7.5.3 et de la Proposition 4.2.5 il découle donc

7.5.5 Proposition. $\mathbf{A}$ *étant un ensemble de multiplicateurs dans* Λ, *si pour tout* $j \in \mathbb{N}_0$ *il y a deux nombres reels* k_j *et* $M_j > 0$ *tels que*

7.5.6. $$|f^{(j)}(t)| < M_j\, e^{k_j|t|}\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \ \ \textit{et} \ \ \forall\, f \in \mathbf{A} \ ,$$

alors l'ensemble $\mathbf{B}$ *des opérateurs* $\widetilde{T}$ *dans* $\mathbf{U}$ *de la forme* $\widetilde{T}(K\,\widehat{\theta}) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{F}(f) * K\,\widehat{\theta}$, $\forall\, K\widehat{\theta} \in \mathbf{U}$, *avec* $f \in \mathbf{A}$, *est borné dans* $\mathbb{L}[\mathbf{U}]$.

III – Quelques résultats du calcul symbolique

Nous avons dit (II.7.1) que $\mathbf{A}$, étant une algèbre localement convexe, complète, séparée, munie d'élément unité et à produit séparément continu, et $\mathcal{G}$, un filtre régularisable dans le plan complexe, admettant une base régulière $\{\mathbf{G}_k\}$ qui vérifie les propriétés II.1.1.1, II.1.1.2 et II.1.1.3, pour tout élément $a \in \mathbf{A}$, dont le filtre spectral est plus fin que $\mathcal{G}$, la fonction $\frac{1}{a-\widehat{\lambda}}$ est l'indicatrice d'une application linéaire continue de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ dans $\mathbf{A}$. C'est-à-dire que $\frac{1}{a-\widehat{\lambda}}$ est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} - \mathbf{G}_\infty$, à valeurs dans $\mathbf{A}$ et à décroissance presque rapide sur tout $\mathbb{C} - \mathbf{G}_k$.

En outre, on peut aussi démontrer qu'au produit usuel dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ (continu pour la topologie de cet espace) [1, p. 243] cette application fait correspondre le produit dans $\mathbf{A}$. Dans ce qui va suivre, pour tout $\widehat{\phi} \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$, nous désignons par $\widehat{\phi}(a)$ son image dans $\mathbf{A}$. Elle est donnée par II.7.1.3.

Voyons ensuite quelques exemples de l'application de ces résultats.

1. Nous considérons d'abord l'opérateur dérivation D dans l'espace Λ_0^+ des distributions (dans $\mathbb{R}$) nulles à gauche du zéro et du type exponentiel à droite.

1.1. Nous savons que la transformation de Laplace $\mathbb{L}$ définit un isomorphisme bicontinu entre Λ_0^+ et un espace $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ ($\mathcal{G}$ est maintenant le filtre engendré sur $\mathbb{C}$ par les demi-plans $\mathbf{G}_k = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}\lambda \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$). Au produit de convolution dans Λ_0^+ cette transformation fait correspondre le produit usuel dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, et à la dérivation D dans Λ_0^+ elle fait correspondre la multiplication par $\widehat{z}$ dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$.

Celà posé, nous savons que pour tout complexe λ, on a

1.1.1. $$\frac{1}{D-\lambda}\, g(\widehat{t}) = e^{\lambda \widehat{t}}\, H(\widehat{t}) * g(\widehat{t})\,, \qquad \forall\, g(\widehat{t}) \in \Lambda_0^+\ ,$$

et ce résultat nous permet de conclure qu'à l'opérateur $\frac{1}{D-\lambda}$ dans Λ_0^+, la transformation de Laplace fait correspondre la multiplication par $\frac{1}{\widehat{z}-\lambda}$ dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$.

1.2. Alors, étant donné que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{\frac{1}{\widehat{z}-\lambda}\colon\ \lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{G}_k\}$ est borné dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, il découle de la Proposition II.6.3.2 que pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'ensemble d'opérateurs $\{\frac{1}{D-\lambda}\colon\ \lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{G}_k\}$ est borné dans $\mathcal{L}[\Lambda_0^+]$, c'est-à-dire que tout $\mathbf{G}_k$ est un ensemble spectral de D. Pour tout $\widehat{\phi} \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$ on peut écrire

1.2.1. $$\widehat{\phi}(D) = (D-\alpha)^{k+1} \circ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\phi(\lambda)}{(\lambda-\alpha)^{k+1}}\, \frac{d\lambda}{D-\lambda}\ ,$$

où k est un nombre naturel tel que $\widehat{\phi}$ admet un représentant $\phi \in \mathcal{U}(\mathbf{G}_k)$, α est un complexe arbitraire appartenant à $\mathbb{C} - \mathbf{G}_1$ et T_k est la frontière de $\mathbf{G}_k$ orientée de la façon usuelle. À cet opérateur dans Λ_0^+, la transformation de Laplace fait correspondre la multiplication par $\widehat{\phi}$ dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$.

2. Considérons maintenant un opérateur continu T dans $\mathbf{U}$ de la forme

$$T(K\widehat{\theta}) = K\widehat{\phi} * K\widehat{\theta}\,, \quad \forall\, K\widehat{\theta} \in \mathbf{U}\ ,$$

où $K\widehat{\phi}$ est une ultradistribution à support compact. Dans cette formule, $\widehat{\theta}$ et $\widehat{\Phi}$ sont des éléments de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ (où $\mathcal{F}$ est maintenant le filtre engendré par les ensembles $\mathbf{F}_k = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Im}\lambda| \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$) et K désigne l'application canonique de $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ dans $\mathbf{U}$ (II.4.2). Nous appelons associée à T l'ultradistribution $K\widehat{\phi}$. Son image $\mathbb{F}^{-1}(K\widehat{\phi})$ est une fonction $g(\widehat{t})$ à "ultrabande" bornée; à la convolution par $K\widehat{\phi}$ dans $\mathbf{U}$, la transformation $\mathbb{F}^{-1}$ fait correspondre la multiplication par $2\pi g = f$ dans Λ.

Note: On dit qu'une fonction $g(\widehat{t})$ définie dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est à "ultrabande" bornée lorsqu'il y a un prolongement $g(\widehat{z})$ de cette fonction au plan complexe, comme fonction holomorphe, qui vérifie la propriété suivante: il existe un réel positif α tel que $f(\widehat{z})/e^{\alpha|z|}$ est borné sur $\mathbb{C}$. Elle est evidemment un élément de Λ. Les images de Fourier de ces fonctions sont exactement les ultradistributions à support compact, leures "ultrabandes" étant les supports de ces images.

2.1. Supposons par exemple que "l'ultrabande" de f est contenu dans $\mathbf{V}_\rho = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq \rho\}$, $\rho \geq 0$. Alors, pour tout réel $\alpha > \rho$ et tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe un réel positif N_j tel que

2.1.1. $$|f^{(j)}(t)| < N_j\, e^{\alpha|t|}\,, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\ .$$

$\mathbf{S}$ étant donc une partie de $\mathbb{C}$ telle que

2.1.2. $$\inf_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ \lambda\in\mathbb{C}-\mathbf{S}}} |f(t) - \lambda| > 0\ ,$$

pour tout $j \in \mathbb{N}_0$ il y a deux réels positifs k_j et M_j tels que

2.1.3. $$\left(\frac{1}{f(t)-\lambda}\right)^{(j)} < M_j\, e^{k_j|t|}\,, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},\ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{S}\ .$$

Ce que l'on peut démontrer par induction sur j, en recourant à l'identité

2.1.4. $$\left(\frac{1}{f(t)-\lambda}\right)^{(j+1)} = \sum_{k=1}^{j+1} \binom{j+1}{k} \left(\frac{1}{f(t)-\lambda}\right)^{j+1-k} \frac{f^{(k)}(t)}{f(t)-\lambda}\ .$$

Mais alors $\frac{1}{f(t)-\lambda}$, $\forall\,\lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{S}$, est un multiplicateur dans Λ (II.7.5), et l'ensemble des opérateurs dans $\mathbf{U}$ que $\mathbb{F}$ fait correspondre à ces multiplicateurs est borné dans $\mathbb{L}[\mathbf{U}]$ (Proposition II.7.5.5).

Si nous faisons $K\widehat{\phi}_\lambda = \frac{1}{2\pi}\,\mathbb{F}(\frac{1}{f(t)-\lambda})$, $\forall\,\lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{S}$, on a évidemment

2.1.5. $$(K\widehat{\phi} - \lambda\,\delta) \ast K\widehat{\phi}_\lambda = \delta\ ,$$

c'est-à-dire que $\frac{1}{T-\lambda}$ est une fonction de λ bornée sur $\mathbb{C} - \mathbf{S}$, $\mathbf{S}$ étant donc un ensemble spectral de T. Et de la même façon, l'ensemble $K\widehat{\phi}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbf{S}$, étant borné dans $\mathbf{U}$, il en résulte que $\mathbf{S}$ est aussi un ensemble spectral de $K\widehat{\phi}$ (si nous supposons $K\widehat{\phi}$ un élément de l'algèbre de convolution, formée par les ultradistributions à décroissance rapide, munie de la topologie induite par $\mathbf{U}$).

Alors, étant donné un filtre régularisable $\mathcal{G}$ et une base régulière $\{\mathbf{G}_k\}$ du même filtre, telle que

2.1.6. $$\inf_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ \lambda\in\mathbb{C}-\mathbf{G}_k}} |f(t)-\lambda| > 0\,, \qquad \forall\,k \in \mathbb{N}\ ,$$

la fonction $\frac{1}{T-\lambda}$ à valeurs dans $\mathbb{L}[\mathbf{U}]$, est l'indicatrice d'une application linéaire continue de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ dans $\mathbb{L}[\mathbf{U}]$. Pour tout $\widehat{\psi} \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$, on a

2.1.7. $$\widehat{\psi}(T) = \frac{(T-\alpha)^{k+1}}{2\pi i} \circ \int_{\Gamma_k} \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-\alpha)^{k+1}}\,\frac{d\lambda}{T-\lambda}\ ,$$

où ψ est un représentante de $\widehat{\psi}$ dans un certain $\mathcal{U}(\mathbf{G}_k)$ et α, un complexe arbitraire appartenant à $\mathbb{C} - \mathbf{G}_1$. Et de même $K\widehat{\phi}_\lambda$ est l'indicatrice d'une application linéaire continue de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ dans l'algèbre des ultradistributions à décroissance rapide référée ci-dessus. On peut écrire

2.1.8. $$\widehat{\psi}(K\widehat{\phi}) = \frac{(K\widehat{\phi} - \alpha\,\delta)^{k+1}}{2\pi i} \ast \int_{\Gamma_k} \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-\alpha)^{k+1}}\,K\widehat{\phi}_\lambda\,d\lambda\ .$$

Et il est aisé de voir que pour tout $\widehat{\psi} \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$, $\widehat{\psi}(K\widehat{\phi})$ est l'ultradistribution associée à $\widehat{\psi}(T)$, et en outre que le multiplicateur correspondant dans Λ est

2.1.9. $$h(t) = \frac{(f(t)-\alpha)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-\alpha)^{k+1}}\,\frac{d\lambda}{f(t)-\lambda} = \psi(f(t))\ .$$

2.2. L'opérateur dérivation D dans $\mathbf{U}$ en est un exemple. L'ultradistribution associée est δ', en ayant $\mathbb{F}^{-1}(\delta') = \frac{t}{2\pi i}$. Le filtre $\mathcal{G}$ sera alors le filtre engendré par les ensembles $\mathbf{G}_k = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon\,|\operatorname{Re}\lambda| \le \frac{1}{k}\}$, $k \in \mathbb{N}$, considérant que pour tout

$\widehat{\psi} \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$, à l'opérateur $\widehat{\psi}(D)$ dans $\mathbf{U}$ correspond la multiplication dans Λ par $\psi(-it)$.

2.3. La translation T_τ (τ réel) dans $\mathbf{U}$ en est un autre exemple. À cet opérateur correspond l'ultradistribution associée $\delta(t-\tau)$, dont l'image $\mathbb{F}^{-1}(\delta(t-\tau))$ est $\frac{e^{-i\tau t}}{2\pi}$. Le filtre $\mathcal{G}$ sera maintenant le filtre engendré par les ensembles $\mathbf{G}_k = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon 1-\frac{1}{k} \leq |\lambda| \leq |1+\frac{1}{k}|\}$, $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $\widehat{\psi} \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$, le multiplicateur correspondant à $\widehat{\psi}(T_\tau)$ sera donc $\psi(e^{-i\tau t})$.

Un autre résultat est que, étant donné que tout $\widehat{\psi} \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$ est la somme d'une série

2.3.1. $$\widehat{\psi} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \, \widehat{\lambda}^k$$

convergeant dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, on peut écrire

2.3.2. $$\widehat{\psi}(T_\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \, T_\tau^k$$

et de même

2.3.3. $$\widehat{\psi}(\delta(t-\tau)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \, \delta(t-k\tau) \ ,$$

ces séries convergeant respectivement dans $\mathbb{L}[\mathbf{U}]$ et dans $\mathbf{U}$.

REMERCIEMENT – La traduction de ce travail a été revisée et perfectionnée par Jorge R. Leal. Je l'en remercie très vivement.

NOTATIONS

$[\cdot]$ — numéro de référence bibliographique;

$[\cdot, p.\ \cdot]$ — référence bibliographique suivie du numéro de la page;

I.1.1.1 — référence au paragraphe 1.1.1 précédée du numéro du chapitre I en notation romaine;

1.1.1 — référence au paragraphe localisé dans le même chapitre;

$\mathcal{U}(\mathcal{F})$ — I.1.1;

$\mathcal{U}(\mathcal{G})$ — II.7;

$\mathcal{U}(\mathbf{F}_k)$ — I.2.2;

$\mathbb{C}$ — plan complexe;

$\widetilde{\mathbb{C}}$ — plan complexe muni du point infini;

D — opérateur dérivation;

$\delta(\hat{t})$ — distribution de Dirac;

$\mathbb{F}$ — Transformation de Fourier, II.7.5;

$\mathcal{F}$ — I.1.1;

$\{\mathbf{F}_k\}$ — I.1.1;

$\mathbf{F}_\infty$ — I.1.1;

$\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{F}_\infty, \mathbf{E})$ — II.2;

$\mathcal{H}(\mathbb{C}, \mathcal{U}(\mathcal{F}))$ — II.7.4;

$\mathbb{L}$ — Transformation de Laplace, II.7.2.1;

$\mathcal{L}[\mathbf{E}, \mathbf{G}]$ — espace des applications linéaires continues de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{G}$;

$\mathcal{L}[\boldsymbol{U}]$ — algèbre des opérateurs linéaires continus dans $\boldsymbol{U}$;

Λ — espace des distributions sur $\mathbb{R}$ du type esponentiel;

Λ_0^+ — II.7.2.1;

$\mathcal{P}$ — II.4;

$\boldsymbol{U}$ — II.7.4.

BIBLIOGRAPHIE

[**1**] SEBASTIÃO E SILVA, J. – Sur le calcul symbolique d'opérateurs permutables, à spectre vide ou non borné, *Ann. Mat. Pura Appl.,* LVIII(IV) (1962), 219–276.

[**2**] RUDIN, W. – *Real and Complex Analysis*, McGraw–Hill, 1970.

[**3**] GUELFAND, I.M. and CHILOV, G.E. – *Les Distributions*, tome 2, Dunod, Paris, 1964.

[**4**] SEBASTIÃO E SILVA, J. – Les fonctions analytiques comme ultradistributions dans le calcul opérationnel, *Math. Ann.,* 136 (1958), 58–96.

[**5**] TREVES, F. – *Topological vector spaces, distributions and kernels,* Academic Press, London, 1967.

[**6**] SEBASTIÃO E SILVA, J. – Su certe classi di spazi localment convessi importanti per le applicazioni, *Rendiconti di Matematica e delle Applicazione, Série V,* XIV(1–2) (1955), Roma.

[**7**] SEBASTIÃO E SILVA, J. – Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite, *Portugaliae Math.,* 17(1) (1958).

Fernando Manuel Sequeira,
Urbanização da Portela, Lt. 52 – 10º Dto.,
Portela, Loures – PORTUGAL