PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 52 Fasc. 3 – 1995

EQUATIONS LINÉAIRES DANS LES ANNEAUX NILPOTENTS AU SENS DE LIE

Gérard Endimioni

Abstract: *Linear equations in Lie nilpotent rings.* Let A be a ring and let $(\mathcal{L}_n(A))_{n\geq 1}$ be the family of two-sided ideals defined by $\mathcal{L}_1(A) = A$ and $\mathcal{L}_n(A) = A[\mathcal{L}_{n-1}(A), A]$ with $[x, y] = xy - yx$. Assume that $\bigcap_{n\geq 1} \mathcal{L}_n(A) = 0$. In the usual way, we regard the family $(\mathcal{L}_n(A))_{n\geq 1}$ as a fondamental system of neighbourhoods of 0 for a separated topology such that A is a topological ring. Let $\widehat{A} = \varprojlim(A/\mathcal{L}_n(A))$ the completion of A. If $a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_k \in A$, we prove that the linear equation $a_1xb_1 + ... + a_kxb_k = c$ is soluble in $\widehat{A}$ for all $c \in \widehat{A}$ if and only if $a_1b_1 + ... + a_kb_k$ is invertible in $\widehat{A}$. Moreover, solution is unique and is given by the limit of a certain sequence. If A is strongly Lie nilpotent (i.e. $\mathcal{L}_n(A) = 0$ for some n), we can take $\widehat{A} = A$ in the previous result. We give an application to linear equations in an arbitrary ring. In particular, we prove that in a ring A, if $a_1b_1 + ... + a_kb_k$ is invertible, then all the solutions of the equation $a_1xb_1 + ... + a_kxb_k = 0$ are in $\bigcap_{n\geq 1} L_n(A) = 0$, where $L_n(A)$ is the two-sided ideal generated by elements of the form $[x_1, ..., x_n]$.

1 – Introduction

Dans tout cet article, A désigne un anneau ayant un élément unité. Le commutateur de deux éléments x et y de A est défini par $[x, y] = xy - yx$. Plus généralement, on définit $[x_1, ..., x_n]$ par $[x_1, ..., x_n] = [[x_1, ..., x_{n-1}], x_n]$. Si n est un entier supérieur ou égal à 1, nous noterons $\lambda_n(A)$ (resp. $L_n(A)$) le sous-groupe additif (resp. l'idéal bilatère) de A engendré par les éléments de la forme $[x_1, ..., x_n]$ $(x_1, ..., x_n \in A)$. En d'autres termes, $\lambda_n(A)$ est le n-ième terme de la suite centrale descendante de la **Z**-algèbre de Lie associée à A. La suite $(\mathcal{L}_n(A))_{n\geq 1}$ d'idéaux de A est définie par $\mathcal{L}_1(A) = A$ et $\mathcal{L}_n(A) = A[\mathcal{L}_{n-1}(A), A]$ pour $n > 1$ (plus précisément, $\mathcal{L}_n(A)$ est l'idéal bilatère de A engendré par les éléments de

Received: December 10, 1993.

la forme $[x,y]$, où $x \in \mathcal{L}_{n-1}(A)$ et $y \in A$). Il est clair que l'on a les inclusions $\lambda_n(A) \subseteq L_n(A) \subseteq \mathcal{L}_n(A)$. S'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\lambda_n(A) = 0$ (i.e. si la **Z**-algèbre de Lie associée à A est nilpotente), nous dirons que A est *nilpotent au sens de Lie*, ou plus rapidement que A est *L-nilpotent*. S'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\mathcal{L}_n(A) = 0$, nous dirons que A est *fortement L-nilpotent*. Enfin, si B est un sous-ensemble de A et s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que chaque produit de n éléments de B soit nul, on dit que B est *nilpotent*. Les suites $(\lambda_n(A))_{n\geq 1}$ et $(\mathcal{L}_n(A))_{n\geq 1}$ ont souvent été étudiées, en particulier dans le cadre des algèbres de groupes (on pourra par exemple consulter [5, Chap. V] ou [4]).

2 – Principaux résultats

Nous montrerons d'abord les résultats suivants, qui précisent les liens entre les différentes notions de nilpotence:

Théorème 1. *Si A est un anneau, les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *A est fortement L-nilpotent.*

ii) *A est L-nilpotent et $\lambda_2(A)$ est nilpotent.*

Théorème 2. *Si A est un anneau engendré par un nombre fini d'éléments, les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *A est fortement L-nilpotent.*

ii) *A est L-nilpotent.*

Le théorème précédent ne peut pas s'étendre à un anneau quelconque: il est construit dans [1] un anneau tel que $\mathcal{L}_n(A) \nsubseteq L_3(A)$ pour tout entier $n \geq 1$. L'anneau quotient $A/L_3(A)$ est donc L-nilpotent sans être fortement L-nilpotent.

Dans les anneaux vérifiant certaines conditions de nilpotence, nous nous proposons d'étudier la résolution d'une équation linéaire de la forme $\sum_{i=1}^{k} a_i\, x\, b_i = c$. Il est commode d'exprimer les résultats obtenus en termes topologiques. Le procédé qui permet d'associer à une famille d'idéaux une topologie compatible avec les opérations de l'anneau est bien connu. Soit A un anneau tel que $\bigcap_{n\geq 1} \mathcal{L}_n(A) = 0$ (i.e. A est résiduellement fortement L-nilpotent). La famille d'idéaux $(\mathcal{L}_n(A))_{n\geq 1}$ peut être considérée comme un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie faisant de A un anneau topologique séparé. La limite projective $\widehat{A} = \varprojlim(A/\mathcal{L}_n(A))$ s'interprète comme l'anneau complété de A pour cette topologie. En particulier, nous identifierons A avec son image par l'injection canonique de A dans $\widehat{A}$.

Théorème 3. *Soient A un anneau tel que $\bigcap_{n\geq 1}\mathcal{L}_n(A)=0$ et $\widehat{A}$ le complété de A pour la topologie associée à la famille d'idéaux $(\mathcal{L}_n(A))_{n\geq 1}$. Si $a_1,...,a_k$, $b_1,...,b_k$ sont des éléments fixés de A, on pose $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i\,x\,b_i$ pour tout $x\in\widehat{A}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *$\varphi(1)$ est inversible dans $\widehat{A}$.*

ii) *Pour tout $c\in\widehat{A}$, l'équation $\varphi(x)=c$ possède exactement une solution dans $\widehat{A}$.*

iii) *Pour tout $c\in\widehat{A}$, l'équation $\varphi(x)=c$ possède au moins une solution dans $\widehat{A}$.*

De plus, si une de ces conditions est satisfaite, la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par son premier terme x_1 (choisi arbitrairement dans $\widehat{A}$) et la relation de récurrence $x_n=x_{n-1}+\varphi(1)^{-1}(c-\varphi(x_{n-1}))$ (où c est un élément fixé de $\widehat{A}$) est convergente, de limite égale à la solution de l'équation $\varphi(x)=c$.

En fait, ce théorème est vrai si plus généralement $a_1,...,a_k,b_1,...,b_k$ sont des éléments de $\widehat{A}$. De plus, dans l'hypothèse i), on peut se contenter de supposer que $\varphi(1)$ est inversible à droite (ou à gauche) dans $\widehat{A}$ (Proposition 2).

Dans le cas particulier d'un anneau fortement L-nilpotent, la famille d'idéaux $(\mathcal{L}_n(A))_{n\geq 1}$ induit sur A la toplogie discrète et l'on a $\widehat{A}=A$. Le théorème précédent s'écrit donc sous la forme suivante:

Corollaire 1. *Soit A un anneau fortement L-nilpotent. Alors, si φ est l'application de A dans A définie par $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i\,x\,b_i$ (où $a_1,...,a_k,b_1,...,b_k$ sont des éléments fixés de A), les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *$\varphi(1)$ est un élément inversible de A.*

ii) *Pour tout $c\in A$, l'équation $\varphi(x)=c$ possède exactement une solution dans A (i.e. φ est bijective).*

iii) *Pour tout $c\in A$, l'équation $\varphi(x)=c$ possède au moins une solution dans A (i.e. φ est surjective).*

De plus, si une de ces conditions est satisfaite, la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par son premier terme x_1 (choisi arbitrairement dans A) et la relation de récurrence $x_n=x_{n-1}+\varphi(1)^{-1}(c-\varphi(x_{n-1}))$ (où c est un élément fixé de A) est constante à partir d'un certain rang, cette constante étant égale à la solution de l'équation $\varphi(x)=c$.

Corollaire 2. *Soient A un anneau L-nilpotent et φ l'application définie dans le corollaire précédent. Alors, si $\varphi(1)$ est inversible, l'équation $\varphi(x) = c$ possède exactement une solution dans A pour tout $c \in A$.*

En effet, sous les hypothèses de ce corollaire, le sous-anneau de A engendré par $a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_k, c, \varphi(1)^{-1}$ est fortement L-nilpotent (Théorème 2). Le Corollaire 1 appliqué à ce sous-anneau et à l'application induite par φ montre l'existence d'une solution pour l'équation $\varphi(x) = c$. De même, si x' et x'' sont des solutions de cette équation, on montre que $x' = x''$ en appliquant le Corollaire 1 au sous--anneau engendré par $a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_k, \varphi(1)^{-1}, x', x''$.

Le corollaire précédent ne s'étend pas à un anneau quelconque (ou même résoluble pour sa structure de $\mathbf{Z}$-algèbre de Lie). Par exemple, dans l'anneau A des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2 à coefficients dans un anneau non nul, posons $a = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $c = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right)$. La matrice $a + b$ est inversible mais l'équation $ax + xb = c$ possède plus d'une solution dans A si $\gamma = 0$, et aucune si $\gamma \neq 0$.

Dans le cas d'un anneau A quelconque, on peut appliquer le Corollaire 2 à l'anneau quotient $A/L_n(A)$. Il vient:

Corollaire 3. *Soient $a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_k$ des éléments fixés d'un anneau A tels que $\sum_{i=1}^k a_i\, b_i$ soit inversible. Alors, si $x', x'' \in A$ sont deux solutions de l'équation $\sum_{i=1}^k a_i\, x\, b_i = c$ ($c \in A$), on a $x' \equiv x'' \bmod \bigcap_{n\geq 1} L_n(A)$. En particulier, l'ensemble des solutions de l'équation $\sum_{i=1}^k a_i\, x\, b_i = 0$ est inclus dans $\bigcap_{n\geq 1} L_n(A)$.*

Si $\sum_{i=1}^k a_i\, b_i$ n'est pas inversible, une telle propriété n'est pas nécessairement vraie: prenons à nouveau A égal à l'anneau des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2 à coefficients dans un anneau non nul. Il est facile de voir que $\bigcap_{n\geq 1} L_n(A)$ est constitué des matrices de A dont les éléments de la diagonale sont nuls. Si $a = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, l'ensemble des solutions dans A de l'équation $ax = 0$ est égal à l'ensemble des matrices de A dont la deuxième ligne est nulle. Il n'est donc pas inclus dans $\bigcap_{n\geq 1} L_n(A)$.

3 – Anneaux fortement L-nilpotents

Si $p \geq 1$ est un entier, nous appellerons *commutateur de poids p* tout élément $x \in A$ pouvant s'écrire sous la forme $x = [x_1, ..., x_p]$ ($x_1, ..., x_p \in A$). En particulier, les commutateurs de poids 1 sont les éléments de A.

Proposition 1. *Soit A un anneau. Alors, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{L}_n(A)$ est égal à l'ensemble des sommes d'éléments de la forme $x_1 \cdots x_r$ ($r \geq 1$), où $x_1, ..., x_r$ sont des commutateurs de poids respectifs $p_1, ..., p_r$, avec $p_1 + ... + p_r = n + r - 1$.*

Démonstration: Soit A_n l'ensemble des sommes d'éléments de la forme $x_1 \cdots x_r$ ($r \geq 1$, x_i de poids p_i, $p_1 + ... + p_r = n + r - 1$). Nous allons montrer l'égalité $\mathcal{L}_n(A) = A_n$ à l'aide d'une récurrence sur n. Le cas $n = 1$ étant immédiat, supposons cette égalité vérifiée jusqu'au rang $n - 1$ ($n > 1$). Pour établir l'inclusion $\mathcal{L}_n(A) \subseteq A_n$, il suffit de montrer que $z[y_1 \cdots y_r, y] \in A_n$ pour tout $y, z \in A$ et pour tout commutateur y_i de poids p_i (avec $p_1 + ... + p_r = (n-1) + r - 1$). Or, on a la relation

$$z[y_1 \cdots y_r, y] = \sum_{i=1}^{r} z\, y_1 \cdots y_{i-1}[y_i, y]\, y_{i+1} \cdots y_r \ .$$

L'égalité $1 + p_1 + ... + p_{i-1} + (p_i + 1) + p_{i+1} + ... + p_r = n + (r + 1) - 1$ prouve alors que $z[y_1 \cdots y_r, y] \in A_n$, donc $\mathcal{L}_n(A) \subseteq A_n$.

Pour établir l'inclusion $A_n \subseteq \mathcal{L}_n(A)$, considérons un élément de la forme $x = x_1 \cdots x_r$ ($r \geq 1$, x_i de poids p_i, $p_1 + ... + p_r = n + r - 1$) et montrons que $x \in \mathcal{L}_n(A)$ par une récurrence sur r. Si $r = 1$, x est un commutateur de poids n donc $x \in \mathcal{L}_n(A)$ car $\lambda_n(A) \subseteq \mathcal{L}_n(A)$. Supposons maintenant $r > 1$, la propriété étant vérifiée jusqu'au rang $r - 1$. Si $p_r = 1$, on a $p_1 + ... + p_{r-1} = n + (r - 1) - 1$, donc $x_1 \cdots x_{r-1} \in \mathcal{L}_n(A)$ d'après l'hypothèse de récurrence, d'où *a fortiori* $x = x_1 \cdots x_{r-1}\, x_r \in \mathcal{L}_n(A)$. Si $p_r > 1$, il existe $x', x'' \in A$ tels que $x_r = [x', x'']$, x' étant un commutateur de poids $p_r - 1$. On peut écrire:

$$x = x_1 \cdots x_{r-1}[x', x''] = [x_1 \cdots x_{r-1}\, x', x''] - [x_1 \cdots x_{r-1}, x'']\, x' \ .$$

L'égalité $p_1 + ... + p_{r-1} + (p_r - 1) = (n-1) + r - 1$ prouve que $x_1 \cdots x_{r-1}\, x' \in A_{n-1}$, d'où $x_1 \cdots x_{r-1}\, x' \in \mathcal{L}_{n-1}(A)$ d'après l'hypothèse de récurrence sur n, ce qui entraîne $[x_1 \cdots x_{r-1}\, x', x''] \in \mathcal{L}_n(A)$. On en déduit que

$$x \equiv -\sum_{i=1}^{r-1} x_1 \cdots x_{i-1}[x_i, x'']\, x_{i+1} \cdots x_{r-1}\, x' \bmod \mathcal{L}_n(A)$$

(avec $p_1 + ... + p_{i-1} + (p_i + 1) + p_{i+1} + ... + p_{r-1} + (p_r - 1) = n + r - 1$). Une récurrence sur p_r permet alors de conclure en montrant que x est dans $\mathcal{L}_n(A)$. ∎

Démonstration du Théorème 1: **i)⇒ii)** Si $\mathcal{L}_{n+1}(A) = 0$ ($n \geq 1$), on a aussi $\lambda_{n+1}(A) = 0$ car $\lambda_{n+1}(A) \subseteq \mathcal{L}_{n+1}(A)$, ce qui prouve que A est L-nilpotent. De plus, pour tout $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ dans A, on a $[x_1, y_1]...[x_n, y_n]$ dans $\mathcal{L}_{n+1}(A)$

d'après la Proposition 1, donc $\lambda_2^n(A) = 0$ (ce dernier résultat peut aussi se déduire de [3] où il est montré que si A est fortement L-nilpotent, alors $\mathcal{L}_2(A)$ est nilpotent).

ii)⇒i) Supposons maintenant que $\lambda_m(A) = \lambda_2^n(A) = 0$, avec $m, n > 1$ (l'implication est triviale si $m = 1$ ou $n = 1$). Soit x un élément de A pouvant s'écrire sous la forme $x = x_1 \cdots x_r$, où $x_1, ..., x_r$ sont des commutateurs de poids respectifs $p_1, ..., p_r$ liés par la relation

$$(\pi) \qquad p_1 + ... + p_r = \Big((m-2)(n-1) + 2\Big) + r - 1 \ .$$

Nous allons montrer que l'on a nécessairement $x = 0$, d'où $\mathcal{L}_{(m-2)(n-1)+2}(A) = 0$ d'après la Proposition 1. Pour cella, notons s le nombre d'indices $i \in \{1, ..., r\}$ tels que $p_i > 1$. L'égalité

$$x_1 \cdots x_i \, x_{i+1} \cdots x_r = x_1 \cdots [x_i, x_{i+1}] \cdots x_r + x_1 \cdots x_{i+1} \, x_i \cdots x_r$$

permet de déplacer les commutateurs de poids 1 dans le produit $x_1 \cdots x_r$, la relation (π) étant conservée pour chaque terme de la somme. Nous pouvons donc supposer que $p_1, ..., p_s > 1$ et $p_{s+1} = ... = p_r = 1$. Si l'un des poids p_i est supérieur ou égal à m, on a $x_i = 0$, d'où $x = 0$. Si $p_i \leq (m-1)$ pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, la relation (π) entraîne

$$p_1 + ... + p_s = (m-2)(n-1) + s + 1 \ ,$$

d'où

$$(m-2)(n-1) + s + 1 \leq s(m-1) \ ,$$

$$(m-2)(n-1) + 1 \leq s(m-2) \ .$$

Cette inégalité montre que l'on ne peut pas avoir $s \leq (n-1)$. Il vient $s \geq n$ d'où l'égalité $\lambda_2^s(A) = 0$ car $\lambda_2^n(A) = 0$. Les éléments $x_1, ..., x_s$ étant dans $\lambda_2(A)$, on en déduit que $x_1 \cdots x_s = 0$, ce qui prouve que $x = 0$. ∎

Démonstration du Théorème 2: Il suffit de montrer que ii) entraîne i), l'application réciproque étant triviale. Or, si A est un anneau L-nilpotent engendré par un nombre fini d'éléments, on sait que $\mathcal{L}_2(A)$ est nilpotent [2]. Il en est donc de même pour $\lambda_2(A)$. En appliquant le Théorème 1, on en déduit que A est fortement L-nilpotent. ∎

Proposition 2. *Dans un anneau A tel que $\bigcap_{n \geq 1} L_n(A) = 0$, tout élément inversible à gauche (ou à droite) est inversible.*

Démonstration: Soit $x \in A$ un élément inversible à gauche par exemple. Il existe donc $x' \in A$ tel que $x'\,x = 1$. Pour montrer que $[x, x'] = 0$, plaçons nous d'abord dans le cas où A est un anneau L-nilpotent. Le sous-anneau B engendré par $\{x, x'\}$ est L-nilpotent donc fortement L-nilpotent d'après le Théorème 2. Nous allons montrer que $[x, x'] \in \mathcal{L}_n(B)$ pour tout entier $n \geq 1$, ce qui permet de conclure dans ce cas. La propriété étant triviale pour $n = 1$, supposons que $[x, x'] \in \mathcal{L}_{n-1}(B)$ pour un entier $n > 1$. Il vient $[[x, x'], x'] \in \mathcal{L}_n(B)$. De plus:

$$\Big[[x, x'], x'\Big] = x\,x'^2 - 2\,x'\,x\,x' + x'^2\,x = x\,x'^2 - 2\,x' + x' = x\,x'^2 - x' \ .$$

En multipliant à droite par x, on obtient:

$$x\,x'^2\,x - x'\,x = x\,x' - x'\,x = [x, x'] \in \mathcal{L}_n(B) \ .$$

Dans le cas général, on se ramène au cas où l'anneau est L-nilpotent en considérant l'anneau quotient $A/L_n(A)$. Il en résulte que $[x, x']$ est dans $L_n(A)$ pour un entier n arbitraire, d'où $[x, x'] = 0$. ∎

4 – Démonstration du Théorème 3

Si $x = (\xi_i)_{i\geq 1}$ est un élément non nul de $\widehat{A}$ ($\xi_i \in A/\mathcal{L}_i(A)$), on note $\nu(x)$ le plus grand entier i tel que $\xi_i = 0$ et l'on pose $\nu(0) = +\infty$. Pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble des éléments $x \in \widehat{A}$ tel que $\nu(x) \geq n$ est un idéal de $\widehat{A}$ noté $\widehat{A}_n$. La famille $(\widehat{A}_n)_{n\geq 1}$ forme un système fondamental de voisinage de 0 pour la topologie de $\widehat{A}$. Cette topologie peut aussi être définie par la distance $\delta(x, y) = 2^{-\nu(x-y)}$. Remarquons encore que $[\widehat{A}_n, \widehat{A}] \subseteq \widehat{A}_{n+1}$.

i)$\Rightarrow$**ii)** Si c est un élément fixé de $\widehat{A}$, considérons l'application θ de $\widehat{A}$ dans $\widehat{A}$ définie par $\theta(x) = x + \varphi(1)^{-1}(c - \varphi(x))$. On peut écrire (pour tout $x, y \in \widehat{A}$):

$$\begin{aligned}
\theta(x) - \theta(y) &= x - y - \varphi(1)^{-1}(\varphi(x - y)) = x - y - \varphi(1)^{-1} \sum_{i=1}^{k} a_i(x - y)\,b_i \\
&= x - y - \varphi(1)^{-1} \sum_{i=1}^{k} a_i[x - y, b_i] - \varphi(1)^{-1} \sum_{i=1}^{k} a_i\,b_i(x - y) \\
&= -\varphi(1)^{-1} \sum_{i=1}^{k} a_i[x - y, b_i] \ .
\end{aligned}$$

Cette égalité montre que $x-y \in \widehat{A}_n$ entraîne $\theta(x)-\theta(y) \in \widehat{A}_{n+1}$. En d'autres termes, on a l'inégalité $\delta(\theta(x),\theta(y)) \leq 2^{-1}\delta(x,y)$, qui prouve que l'application θ est contractante. D'après le théorème du point fixe, on en déduit que l'équation $\theta(x)=x$, équivalente à $\varphi(x)=c$, possède exactement une solution dans $\widehat{A}$. De plus, cette solution est donnée par la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par un premier terme arbitraire $x_1 \in \widehat{A}$ et la relation de récurrence $x_n=\theta(x_{n-1})$.

L'implication **ii)**$\Rightarrow$**iii)** est triviale.

iii)$\Rightarrow$**i)** Montrons d'abord simultanément par récurrence les deux propriétés suivantes: pour tout entier $n \geq 1$, il existe $y_n \in \widehat{A}$ tel que $z_n = y_n\,\varphi(1)-1 \in \widehat{A}_n$ et l'on a l'inclusion $\varphi^{-1}(\widehat{A}_n) \subseteq \widehat{A}_n$. C'est clair pour $n=1$, en prenant y_1 arbitraire dans $\widehat{A}$. Supposons maintenant les deux propriétés établies pour $n-1$ ($n>1$) et considérons $z_{n-1}=y_{n-1}\,\varphi(1)-1 \in \widehat{A}_{n-1}$. D'après l'hypothèse iii) du théorème, il existe $t \in \widehat{A}$ tel que $\varphi(t)=-z_{n-1}$. L'inclusion $\varphi^{-1}(\widehat{A}_{n-1}) \subseteq \widehat{A}_{n-1}$ montre que $t \in \widehat{A}_{n-1}$. Vérifions que $y_n = y_{n-1}+t$ convient:

$$\begin{aligned}(y_{n-1}+t)\,\varphi(1)-1 &= z_{n-1}+t\sum_{i=1}^{k} a_i\,b_i \\ &= z_{n-1}+\sum_{i=1}^{k}[t,a_i]\,b_i+\sum_{i=1}^{k} a_i\,t\,b_i \\ &= \sum_{i=1}^{k}[t,a_i]\,b_i \in \widehat{A}_n\ .\end{aligned}$$

Afin de prouver l'inclusion $\varphi^{-1}(\widehat{A}_n) \subseteq \widehat{A}_n$, considérons un élément $x \in \widehat{A}$ tel que $\varphi(x) \in \widehat{A}_n$. Les inclusions $\varphi^{-1}(\widehat{A}_{n-1}) \subseteq \widehat{A}_{n-1}$ et $\widehat{A}_n \subseteq \widehat{A}_{n-1}$ entraînent que x est dans $\widehat{A}_{n-1}$. On a

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{k} a_i\,x\,b_i=\sum_{i=1}^{k} a_i[x,b_i]+\sum_{i=1}^{k} a_i\,b_i\,x\ ,$$

d'où $\sum_{i=1}^{k} a_ib_ix=\varphi(1)x \in \widehat{A}_n$. La classe de $\varphi(1)$ modulo $\widehat{A}_n$ étant inversible à gauche, on en déduit que x est dans $\widehat{A}_n$.

Remarquons maintenant que $(y_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy. En effet, on a $(y_{n+1}-y_n)\,\varphi(1) \in \widehat{A}_n$. La classe de $\varphi(1)$ modulo $\widehat{A}_n$ étant inversible à gauche, elle l'est aussi à droite (Proposition 2), donc $(y_{n+1}-y_n) \in \widehat{A}_n$. La suite $(z_n)_{n\geq 1}$ tendant vers 0, on en déduit que $\varphi(1)$ admet pour inverse la limite de $(y_n)_{n\geq 1}$. ∎

REFERENCES

[1] Gupta, N. and Levin, F. – On the Lie ideals of a ring, *J. Algebra,* 81 (1983), 225–231.

[2] Jennings, S.A. – On rings whose associated Lie rings are nilpotent, *Bull. Amer. Math. Soc.,* 53 (1947), 593–597.

[3] Misso, P. – A note on strongly Lie nilpotency, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2),* 40(1) (1991), 102–104.

[4] Passi, I.B.S. – *Group rings and their augmentation ideals*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 715, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[5] Sehgal, S.K. – *Topics in group rings*, Marcel Dekker, New York, 1978.

Gérard Endimioni,
Université de Provence, UFR-MIM, Unité de Recherche Associée au CNRS n$^{\underline{o}}$ 225,
3, place Victor Hugo, F-13331 Marseille Cedex 3 – FRANCE