PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 54 Fasc. 1 – 1997

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À RETARD PAR LA MÉTHODE D'EXTRAPOLATION

L. Maniar

Abstract: In this work we use extrapolation method to study retarded differential equations. We give some results for the existence and the continuous dependence with respect to the initial data.

1 – Introduction

Dans ce travail, on s'intéresse à résoudre par la méthode d'extrapolation l'équation différentielle à retard suivante:

$$(NRDE) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = Lx_t + f(t) \\ x_0 = \varphi \in C := C([-r,0];\mathbb{R}^n) \ , \end{cases}$$

où L est un opérateur linéaire borné de C à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Indiquons ici que Clément et al. (cf. [3], [4] and [5]) ont developpé une méthode, la perturbation par dualité, basée sur la notion d'espace "soleil" élaborée par Hille et Phillips [8], qui a été appliquée pour étudier l'équation différentielle à retard $(NRDE)$.

L'équation $(NRDE)$ a été aussi étudiée par M. Adimy [1], en utilisant la notion des semi-groupes intégrés introduite par W. Arendt [2].

La théorie d'extrapolation a été introduite par Da Prato–Grisvard [6] et Nagel [10]. Elle a été ensuite utilisée pour plusieurs propositions (cf. [11], [12], [15] et [14]).

Received: November 3, 1995; *Revised*: June 2, 1996.
AMS Classification Subject (1991): 34k.
Keywords: Extrapolation, Espace d'extrapolation, Semi-groupe d'extrapolation, Equation différentielle à retard.

2 – Préliminaires

Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et A un opérateur linéaire sur X à domaine $D(A)$.

L'opérateur A est dit *opérateur de Hille–Yosida* s'il existe des constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que $]\omega, +\infty[\, \subset \rho(A)$ (où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A) et

$$\left\|(\lambda I - A)^{-n}\right\| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}\,, \qquad \forall\,\lambda > \omega, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\ .$$

Si la constante ω peut être choisie < 0, A est dit de *type négatif*.

$D(A)$ n'est pas forcément dense dans X. Si on note par X_0 sa fermeture dans X i.e. $X_0 := \overline{D(A)}$, alors d'aprés le théorème de Hille–Phillips, on a le résultat suivant (cf. [8], Thm. 12.2.9).

Proposition 1. *Soit A un opérateur de Hille–Yosida sur X. Alors, la part A_0 de A dans X_0 donnée par*

$$D(A_0) = \Big\{x \in D(A)\colon\ Ax \in X_0\Big\}\,, \qquad A_0 x = Ax, \quad \forall\, x \in D(A_0)\ ,$$

engendre un C_0-semi-groupe $(T_0(t))_{t\geq 0}$ sur X_0. De plus $\rho(A) \subset \rho(A_0)$ et pour tout $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda I - A_0)^{-1}$ est la restriction de $(\lambda I - A)^{-1}$ dans X_0.

Pour définir la notion d'extrapolation, on suppose sans perdre de généralité que A est un opérateur de Hille–Yosida de *type négatif* sur X.

On munit l'espace X_0 d'une nouvelle norme définie par

$$\|x\|_{-1} = \|A_0^{-1} x\|, \qquad \text{pour} \ \ x \in X_0\ .$$

Le complété de $(X_0, \|\cdot\|_{-1})$ s'appelle *espace d'extrapolation* de X_0 associé à A_0 et sera noté par $(X_{-1}, \|\cdot\|_{-1})$.

Comme pour tout $x \in X_0$ et pour chaque $t \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned}\Big\|T_0(t)\,x\Big\|_{-1} &= \Big\|A_0^{-1}\,T_0(t)\,x\Big\| \\ &= \Big\|T_0(t)\,A_0^{-1}\,x\Big\| \leq M\|x\|_{-1}\ ,\end{aligned}$$

alors l'opérateur $T_0(t)$ peut être prolongé d'une façon unique en un opérateur linéaire borné dans X_{-1}. Ce prolongement est un C_0-semi-groupe sur X_{-1} noté $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ et appelé le *semi-groupe d'extrapolation* de $(T_0(t))_{t\geq 0}$.

L'espace d'origine X est compris entre les espaces X_0 et X_{-1} (cf.[11], Thm.1.7).

Proposition 2. *Soit A un opérateur de Hille–Yosida de type négatif sur X. Pour la norme définie sur X par*

$$\|x\|_{-1} = \|A^{-1}x\|\,, \qquad \forall\, x \in X\ ,$$

X_0 est un sous espace dense dans $Y = (X, \|\cdot\|_{-1})$. Donc l'espace d'extrapolation X_{-1} est aussi le complété de Y et X s'injecte dans X_{-1}.

De plus A_{-1} est une extension de A sur X_{-1} et $(A_{-1})^{-1}X = D(A)$.

Le lemme suivant (cf. [11], Prop. 2.1) est essentiel pour la suite.

Lemme 3. *Pour $f \in L^1_{\rm loc}(0,+\infty;X)$ et $t \geq 0$, soit*

$$(T_{-1} * f)(t) = \int_0^t T_{-1}(t-s)\, f(s)\, ds\ ,$$

alors les propriétés suivantes sont vérifiées

i) $(T_{-1} * f)(t) \in X_0$,

ii) $\|(T_{-1} * f)(t)\| \leq M_1 \|f\|_{L^1(0,t;X)}$, *$M_1$ est indépendante de f et t,*

iii) $\lim\limits_{t\to 0^+} \|(T_{-1} * f)(t)\| = 0$.

Terminons ce paragraphe par un résultat de la perturbation d'un opérateur de Hille–Yosida, par un opérateur linéaire borné de X_0 dans X (cf. [13]).

Proposition 4. *Soit A un opérateur de Hille–Yosida sur X et $B\colon X_0 \to X$ un opérateur linéaire borné. Alors la part de $A+B$ dans X_0 engendre un C_0-semi-groupe $(T_0^B(t))_{t\geq 0}$ sur X_0. De plus, $(T_0^B(t))_{t\geq 0}$ vérifie la formule de Duhamel suivante*

$$T_0^B(t) = T_0(t) + \int_0^t T_{-1}(t-s)\, B\, T_0^B(t)\, ds\,, \qquad \forall\, t \geq 0\ .$$

3 – Application aux équations différentielles à retard

Considérons l'équation différentielles à retard suivante

$$(NRDE) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = Lx_t + f(t)\,, & t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in C\ , \end{cases}$$

où $L \in \mathcal{L}(C, \mathbb{R}^n)$ et $f\colon\ [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}^n$ continue.

Soit $(T(t))_{g\geq 0}$ le semi-groupe solution de l'équation à retard homogène suivante

$$(RDE)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = Lx_t\,, & t\geq 0,\\ x_0=\varphi\in C\ , \end{cases}$$

et de générateur l'opérateur A donné par

$$D(A)=\Big\{\varphi\in C^1([-r,0],\mathbb{R}^n):\ \varphi'(0)=L\varphi\Big\}\ ,$$

$$A\varphi=\varphi'\,,\qquad \forall\,\varphi\in D(A)\ .$$

Pour résoudre l'équation $(NRDE)$ et en particulier (RDE), nous allons lui associer un problème de Cauchy dans l'espace de Banach $X:=\mathbb{R}^n\times C$, muni de la norme

$$\left\|\begin{pmatrix}\eta\\ g\end{pmatrix}\right\| := |\eta|+\|g\|_C\,,\qquad \forall\begin{pmatrix}\eta\\ g\end{pmatrix}\in X\ ,$$

où

$$\|g\|_C:=\sup_{-r\leq\tau\leq 0}|g(\tau)|$$

et $|\cdot|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Le problème de Cauchy associé à l'équation $(NRDE)$ dans X est

$$(NACP)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}0\\ u(t)\end{pmatrix}=\mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\ u(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f(t)\\ 0\end{pmatrix}, & t\geq 0,\\ \begin{pmatrix}0\\ u(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \varphi\end{pmatrix}, \end{cases}$$

où $\mathcal{A}$ est l'opérateur défini sur X par

$$(1)\qquad \mathcal{A}=\begin{pmatrix}0 & L-\delta_0'\\ 0 & \dfrac{d}{d\tau}\end{pmatrix},\qquad D(\mathcal{A})=\{0\}\times C^1\ ,$$

avec δ_0' est l'opérateur défini par

$$\delta_0'\,\varphi:=\varphi'(0),\qquad \text{pour tout}\ \ \varphi\in C^1\ .$$

La première remarque, qu'on peut faire sur l'opérateur $\mathcal{A}$, est qu'il est à domaine non dense. Plus précisément on a $\overline{D(\mathcal{A})}=\{0\}\times C$. Nous allons montrer que $\mathcal{A}$ est un opérateur de Hille–Yosida et nous avons le lemme principal suivant

Lemme 5. *L'opérateur $\mathcal{A}$ défini par (1) est un opérateur de Hille–Yosida. Et pour tout $\lambda>\|L\|$, on a*

$$(\lambda I-\mathcal{A})^{-n}\begin{pmatrix}\eta\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \varphi_n\end{pmatrix},\qquad \forall\begin{pmatrix}\eta\\ \psi\end{pmatrix}\in X\ \ et\ \ n\in\mathbb{N}\ ,$$

où

$$\varphi_n = (\lambda I - A)^{-n}\,\psi + (\lambda I - A)^{-n+1}\Big(e^{\lambda\cdot}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,\eta\Big)\ .$$

Preuve: Pour $\lambda > \|L\|$ et $\binom{\eta}{\psi} \in X$, l'équation

$$(\lambda I - \mathcal{A})\begin{pmatrix}0\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta\\ \psi\end{pmatrix}$$

admet une solution $\binom{0}{\varphi}$ dans $\{0\} \times C^1$ donnée par

$$\varphi(\theta) = e^{\lambda\theta}\,\varphi(0) + \int_\theta^0 e^{\lambda(\theta-s)}\,\psi(s)\,ds\,, \qquad -r \le \theta \le 0\ ,$$

avec

$$\varphi(0) = \Delta^{-1}(\lambda)\Big[\psi(0) + L\Big(\int_\cdot^0 e^{\lambda(\cdot-s)}\,\psi(s)\,ds\Big)\Big] + \Delta^{-1}(\lambda)\,\eta\ .$$

Par suite

$$\varphi(\theta) = h(\theta) + e^{\lambda\theta}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,\eta\,, \qquad -r \le \theta \le 0\ ,$$

avec

$$h(\theta) := e^{\lambda\theta}\Delta^{-1}(\lambda)\Big[\psi(0) + L\Big(\int_\cdot^0 e^{\lambda(\cdot-s)}\,\psi(s)\,ds\Big)\Big] + \int_\theta^0 e^{\lambda(\theta-s)}\,\psi(s)\,ds\,, \quad -r \le \theta \le 0\ .$$

On peut vérifier facilement que h est continûment dérivable sur $[-r,0]$ et en utilisant la définition de $\Delta(\lambda)$, on montre aisément que $h'(0) = Lh$. C'est à dire $h \in D(A_L)$. De plus, pour tout $\theta \in [-r,0]$, on a

$$\Big(\lambda I - \frac{d}{d\tau}\Big)\,h(\theta) = \psi(\theta)\ .$$

D'où,

$$\varphi = (\lambda I - A)^{-1}\,\psi + e^{\lambda\cdot}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,\eta\ .$$

Le résultat est obtenu par itérations. ∎

Puisque l'opérateur $\mathcal{A}$ est un opérateur de Hille–Yosida alors, d'après Proposition 1, la part $(\mathcal{A})_0$ de $\mathcal{A}$ dans $X_0 := \overline{D(\mathcal{A})} = \{0\} \times C$ donnée par

$$(\mathcal{A})_0 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \dfrac{d}{d\tau}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}, \qquad D((\mathcal{A})_0) = \{0\} \times \Big\{\phi \in C^1 \colon\ \phi'(0) = L\phi\Big\}\ ,$$

engendre un C_0-semi-groupe sur $\{0\} \times C$. De plus, d'après un résultat dans ([11], p. 33), ce semi-groupe est donné explicitement par $\left(\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & T(t)\end{pmatrix}\right)_{t\ge 0}$.

4 – Equations différentielles à retard homogènes

Dans ce paragraphe, nous appliquons le résultat de la Proposition 4, pour établir une formule de la variation de la constante qui permet d'exprimer le semi-groupe solution $(T(t))_{t\geq 0}$ de l'équation différentielle à retard homogène

$$(RDE) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = Lx_t\,, & t \geq 0, \\ x_0 = \varphi\ , \end{cases}$$

comme perturbation du semi-groupe donné explicitement par

$$(T_0(t)\,\varphi)(\tau) = \begin{cases} \varphi(t+\tau), & \text{si } t+\tau \leq 0, \\ \varphi(0), & \text{si } t+\tau \geq 0\ , \end{cases}$$

solution de l'équation à retard "triviale" suivante

$$(RDE)_0 \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = 0\,, & t \geq 0, \\ x_0 = \varphi\ , \end{cases}$$

et dont le générateur est

$$D(A_0) = \Big\{\varphi \in C^1\colon\ \varphi'(0) = 0\Big\}\,, \qquad A_0\varphi = \varphi', \quad \text{pour } \varphi \in D(A_0)\ .$$

Remarquons d'abord que l'opérateur $\mathcal{A}$ peut s'écrire sous la forme $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{B}$, où $\mathcal{B} := \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{A}_0$ est l'opérateur défini sur X par

$$(2) \qquad \mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} 0 & -\delta_0' \\ 0 & \dfrac{d}{d\tau} \end{pmatrix}\,, \qquad D(\mathcal{A}_0) := \{0\} \times C^1\ .$$

Autrement dit, l'opérateur $\mathcal{A}$ est une perturbation de $\mathcal{A}_0$ par l'opérateur $\mathcal{B}$ linéaire borné de $X_0 := \overline{D(\mathcal{A})} = \overline{D(\mathcal{A}_0)} = \{0\} \times C$ dans X.

Pour atteindre l'objectif de ce paragraphe, nous avons besoin du résultat suivant, qui est une conséquence immédiate du Lemme 5:

Corollaire 6. *L'opérateur $\mathcal{A}_0$ défini par (2) est un opérateur de Hille–Yosida. En plus, pour tout $\lambda > 0$, on a*

$$(\lambda I - \mathcal{A}_0)^{-1} \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}\,, \qquad \forall \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix} \in X\ ,$$

où

$$\varphi(\theta)=\frac{1}{\lambda}\,e^{\lambda\theta}[\psi(0)+\eta]+\int_\theta^0 e^{\lambda(\theta-s)}\,\psi(s)\,ds\,,\qquad -r\le\theta\le 0\;.$$

Il est simple de voir comme pour $\mathcal{A}$ que la part $(\mathcal{A}_0)_0$ de $\mathcal{A}_0$ dans $X_0=\{0\}\times C$ est donnée par

$$(\mathcal{A}_0)_0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \dfrac{d}{d\tau}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & A_0\end{pmatrix}\,,\qquad D((\mathcal{A}_0)_0)=\{0\}\times\Big\{\phi\in C^1:\ \phi'(0)=0\Big\}\ ,$$

et engendre le C_0-semi-groupe $\left(\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & T_0(t)\end{pmatrix}\right)_{t\ge 0}$ dans $X_0=\{0\}\times C$.

En notant par $(T_{0,-1}(t))_{t\ge 0}$ le C_0-semi-groupe d'extrapolation de $\left(\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & T_0(t)\end{pmatrix}\right)_{t\ge 0}$, nous avons, d'après Proposition 4, la formule de Duhamel suivante:

$$\begin{pmatrix}0\\ T(t)\,\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ T_0(t)\,\varphi\end{pmatrix}+\int_0^t T_{0,-1}(t-s)\begin{pmatrix}L(T(s)\varphi)\\ 0\end{pmatrix}ds\ ,\qquad \forall\,\varphi\in C\ \text{ et }\ \forall\,t\ge 0\ . \tag{3}$$

En utilisant cette formule, nous avons le résultat principal suivant:

Théorème 1. *Soit $\varphi\in C$. Alors on a:*

$$T(t)\,\varphi=T_0(t)\,\varphi+(I-A_0)\int_0^t T_0(t-s)\,\Big(e(\cdot)\,L(T(s)\,\varphi)\Big)\,ds\,,\qquad \forall\,t\ge 0\ ,$$

où $e(\cdot)$ est la fonction définie sur $[-r,0]$ par

$$e(\cdot)(\theta)=e^\theta\,,\qquad \forall\,\theta\in[-r,0]\ .$$

Preuve: D'après le Corollaire 6, en particulier pour $\lambda=1$, on a

$$(I-\mathcal{A}_0)^{-1}\begin{pmatrix}\eta\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ e(\cdot)\,\eta\end{pmatrix}\,,\qquad \forall\,\eta\in\mathbb{R}^n\ ,$$

Par suite la formule de Duhamel (3) devient

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0\\ T(t)\,\varphi\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0\\ T_0(t)\,\varphi\end{pmatrix}+\int_0^t T_{0,-1}(t-s)\,(I-\mathcal{A}_0)\begin{pmatrix}0\\ e(\cdot)LT(s)\,\varphi\end{pmatrix}ds\\ &=\begin{pmatrix}0\\ T_0(t)\,\varphi\end{pmatrix}+\Big(I-(\mathcal{A}_0)_{-1}\Big)\begin{pmatrix}0\\ \displaystyle\int_0^t T_0(t-s)\,\Big(e(\cdot)LT(s)\,\varphi\Big)ds\end{pmatrix}\ .\end{aligned}\tag{4}$$

Posons, pour tout $\tau \in [-r, 0]$

$$h(t,\tau) := \int_0^t T_0(t-s)\,\Big(e(\cdot)L(T(s)\,\varphi)\Big)(\tau)\,ds\,, \qquad \forall\, t \geq 0\ .$$

En utilisant la définition du semi-groupe $(T_0(t))_{t\geq 0}$, pour $\tau \in [-r, 0]$, nous avons

$$h(t,\tau) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{t+\tau} L(T(s)\,\varphi)\,ds + \int_{t+\tau}^t e^{t+\tau-s}\,L(T(s)\,\varphi)\,ds, & \text{si } t+\tau > 0,\\ \displaystyle\int_0^t e^{t+\tau-s}\,L(T(s)\,\varphi)\,ds, & \text{si } t+\tau \leq 0\ . \end{cases}$$

Par suite, il aisé de voir que

$$h(t,\cdot) \in C^1 \ \text{ et } \ \frac{\partial}{\partial\tau} h(t,0) = 0\,, \qquad \forall\, t \geq 0\ ,$$

i.e.,

$$h(t,\cdot) \in D(A_0)\,, \qquad \forall\, t \geq 0\ .$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 0 \\ h(t,\cdot) \end{pmatrix} \in D((\mathcal{A}_0)_0)\,, \qquad \forall\, t \geq 0\ ,$$

et donc

$$(I - (\mathcal{A}_0)_{-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ \displaystyle\int_0^t T_0(t-s)\,\Big(e(\cdot)\,L(T(s)\,\varphi)\Big)\,ds \end{pmatrix} = \tag{5}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ (I - A_0) \displaystyle\int_0^t T_0(t-s)\,\Big(e(\cdot)\,L(T(s)\,\varphi)\Big)\,ds \end{pmatrix}\ . \tag{6}$$

Par conséquent, d'après (4) et (6), on a le résultat du théorème. ∎

5 – Equations différentielles à retard non-homogènes

Dans ce paragraphe, nous appliquons la méthode d'extrapolation au problème de Cauchy, associé à l'équation $(NRDE)$ dans $X := \mathbb{R}^n \times C$, suivant

$$(NACP) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}, & t \geq 0,\\ \begin{pmatrix} 0 \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}, \end{cases}$$

pour montrer l'existence et la dépendance continue par rapport aux paramètres de la solution de l'équation à retard suivante

$$(NRDE) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = Lx_t + f(t)\,, & t \geq 0, \\ x_0 = \varphi\ , \end{cases}$$

où $L \in \mathcal{L}(C, \mathbb{R}^n)$ et $f\colon\ [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}^n$, continue.

Notons par $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe d'extrapolation du semi-groupe $\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T(t) \end{pmatrix}\right)_{t\geq 0}$, engendré par la part de $\mathcal{A}$ dans $X_0 = \{0\} \times C$.

La solution forte, pour tout $\varphi \in C$ et $f \in C([0,+\infty[, \mathbb{R}^n)$, du problème de Cauchy $(NACP)$ est donnée par la formule de la variation de la constante suivante (cf. [11])

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T(t)\,\varphi \end{pmatrix} + \int_0^t T_{-1}(t-s) \begin{pmatrix} f(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds\,, \qquad t \geq 0\ . \tag{7}$$

Pour expliciter la deuxième composante de la solution forte du problème de Cauchy $(NACP)$, nous avons besoin du lemme fondamental suivant:

Lemme 7. *Soient $\varphi \in C$ et $f \in C([0,+\infty[, \mathbb{R}^n)$. Alors, pour tout $\lambda > \|L\|$, on a*

$$g(t,\cdot) := \int_0^t T(t-s)\left(e^{\lambda\cdot}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\right) ds \ \in\ D(A)\,, \qquad \forall\, t \geq 0\ .$$

Preuve: Pour tout $\tau \in [-r, 0]$, on a

$$(T(t)\varphi)(\tau) = \begin{cases} \varphi(t+\tau), & \text{si } -r \leq t+\tau \leq 0, \\ \varphi(0) + \displaystyle\int_0^{t+\tau} L(T(s)\,\varphi)\,ds, & \text{si } t+\tau \geq 0\ , \end{cases}$$

ce qui nous permet d'expliciter $g(t,\tau)$, pour tout $\tau \in [-r, 0]$, par

$$g(t,\tau) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{t+\tau} \Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\,ds + \int_{t+\tau}^t e^{\lambda(t+\tau-s)}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\,ds\, + \\ \quad + \displaystyle\int_0^{t+\tau}\int_0^{t+\tau-s} L\Big(T(\sigma)\Big(e^{\lambda\cdot}\Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\Big)\Big)\,d\sigma\,ds, & \text{si } t+\tau > 0, \\ \displaystyle\int_0^t e^{\lambda(t+\tau-s)}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\,ds, & \text{si } t+\tau \leq 0\ . \end{cases} \tag{8}$$

Puisque f est continue sur $[0,+\infty[$, alors $g(t,\cdot)$ est dérivable sur $[-r,0]$ et

$$(9)\qquad \frac{\partial}{\partial\tau}g(t,\tau)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{t+\tau} L\Big(T(t+\tau-s)\left(e^{\lambda\cdot}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\right)\Big)\,ds\,+\\ \qquad\displaystyle+\,\lambda\int_{t+\tau}^{t} e^{\lambda(t+\tau-s)}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\,ds, & \text{si } t+\tau>0,\\ \displaystyle\lambda\int_0^{t} e^{\lambda(t+\tau-s)}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\,ds, & \text{if } t+\tau\le 0\;.\end{cases}$$

Par suite $g(t,\cdot)$ est continûment dérivable sur $[-r,0]$ et

$$\frac{\partial}{\partial\tau}g(t,0)=L\,g(t,\cdot)\;,$$

i.e.,

$$g(t,\cdot)\in D(A)\,,\qquad \forall\,t\ge 0\;.$$

Ce qui achève la démonstration. ∎

En utilisant la formule de la variation de la constante (7) et le lemme précédent, on a

Théorème 2. *Soient $\varphi\in C$ et $f\in C([0,+\infty[,\mathbb{R}^n)$. Alors, la deuxième composante de la solution forte de $(NACP)$ est donnée, pour tout $\lambda>\|L\|$, par*

$$(10)\qquad u(t)=T(t)\,\varphi+(\lambda I-A)\int_0^t T(t-s)\left(e^{\lambda}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\right)ds\,,\qquad \forall\,t\ge 0\;.$$

En plus, u vérifie la propriété de translation

$$(11)\qquad u(t)(\tau)=\begin{cases}\varphi(t+\tau), & si\ -r\le t+\tau\le 0,\\ u(t+\tau)(0), & si\ t+\tau>0\;.\end{cases}$$

Preuve: D'après Lemme 5, on a

$$(\lambda I-\mathcal{A})^{-1}\begin{pmatrix}\eta\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ e^{\lambda\cdot}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,\eta\end{pmatrix},\qquad \forall\,\eta\in\mathbb{R}^n\quad\text{et}\quad\forall\,\lambda>\|L\|\;.$$

La formule de la variation de la constante (7) devient

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0\\u(t)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0\\T(t)\,\varphi\end{pmatrix}+\int_0^t T_{-1}(t-s)\,(\lambda I-\mathcal{A})\begin{pmatrix}0\\ e^{\lambda\cdot}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\end{pmatrix}ds\\ &=\begin{pmatrix}0\\T(t)\,\varphi\end{pmatrix}+(\lambda I-(\mathcal{A})_{-1})\begin{pmatrix}0\\ \displaystyle\int_0^t T(t-s)\big(e^{\lambda\cdot}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\big)ds\end{pmatrix}\;.\end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, on a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^t T(t-s)\Big(e^{\lambda\cdot}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\Big)ds \end{pmatrix} \in D((\mathcal{A})_0)\,, \qquad \forall\, t \geq 0\,,$$

et donc

$$(12) \qquad (\lambda I - (\mathcal{A})_{-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^t T(t-s)\Big(e^{\lambda\cdot}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\Big)ds \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda I - A)\int_0^t T(t-s)\Big(e^{\lambda\cdot}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\Big)ds \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$(13) \qquad u(t) = T(t)\,\varphi + (\lambda I - A)\int_0^t T(t-s)\,\Big(e^{\lambda\cdot}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\Big)\,ds\,, \qquad \forall\, t \geq 0\,.$$

En explicitant $u(t)(\tau)$, pour tout $\tau \in [-r,0]$, à partir de (13), (8) et (9), la propriété de translation, s'en déduit alors aisément. ∎

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 3. *Soient $\varphi \in C$ et $f \in C([0,+\infty[,\mathbb{R}^n)$. Alors, l'équation $(NRDE)$ admet une solution unique x donnée par*

$$x(t) = \begin{cases} u(t)(0), & t > 0, \\ \varphi(t), & t \in [-r,0]\,, \end{cases}$$

où u est la deuxième composante de la solution forte de $(NACP)$ donnée par la formule (13).

En plus la solution de l'équation $(NRDE)$ satisfait l'estimation

$$\|x_t\| \leq M_1\, e^{\|L\|t}\Big[\|\varphi\|_C + \int_u^t e^{-\|L\|s}\,|f(s)|\,ds\Big]\,, \qquad \forall\, t \geq 0\,.$$

Inversement, si x est la solution de $(NRDE)$, pour $\varphi \in C$ et $f \in C([0,+\infty[,\mathbb{R}^n)$, alors la fonction $\binom{0}{u}$, définie par $u(t) = x_t$, $\forall\, t > 0$, $u(0) = \varphi$ est la solution forte du problème de Cauchy $(NACP)$.

Preuve: A partir de (13), (8) et (9), on a

$$\begin{aligned} u(t)(0) &= \varphi(0) + \int_0^t L(T(s)\varphi)\,ds + \lambda \int_0^t \Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\,ds \\ &+ \lambda \int_0^t \int_0^{t-s} L\Big(T(\sigma)\Big(e^{\lambda\cdot}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\Big)\Big)\,d\sigma\,ds \\ &- \int_0^t L\Big(T(t-s)\Big(e^{\lambda\cdot}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,f(s)\Big)\Big)\,ds\ , \end{aligned}$$

et en utilisant (8), on montre que

$$\frac{d}{dt} g(t,\cdot) = \frac{d}{d\tau} g(t,\cdot) + e^{\lambda\cdot}\,\Delta^{-1}(\lambda)\,f(t)\,, \qquad \forall\, t \geq 0\ .$$

D'après (13) et les deux dernières équations, nous montrons facilement que $u(t)(0)$ est dérivable et vérifie

$$\frac{d}{dt} u(t)(0) = Lu(t) + f(t)\,, \qquad t \geq 0\ .$$

Par suite, la propriété de translation (11) implique que la fonction x définie sur $[-r,+\infty[$ par

$$x(t) = \begin{cases} u(t)(0), & \text{si } t \geq 0, \\ \varphi(t), & \text{si } t \in [-r,0]\ , \end{cases}$$

vérifie l'égalité suivante

$$x_t = u(t)\,, \qquad \forall\, t \geq 0\ .$$

D'où x est l'unique solution de l'équation différentielle à retard non-homogène $(NRDE)$.

Pour l'estimation, il suffit d'utiliser le fait que $x_t = u(t)$, l'estimation exponentielle satisfaite par $(T(t))_{t\geq 0}$ et Lemme 3.

Inversement, soit x la solution de l'équation à retard $(NRDE)$. Nous avons montré ci dessus que le problème de Cauchy $(NACP)$ admet une solution forte unique u, qui satisfait l'équation $(NRDE)$ et la propriété de translation (11).

Alors, par unicité de la solution de l'équation $(NRDE)$, on conclut que $u(t) = x_t$.

Par conséquent la fonction $\binom{0}{x_t}$ est la solution forte du problème de Cauchy $(NACP)$. ∎

REFERENCES

[1] ADIMY, M. – Integrated semigroups and delay differential equations, *J.M.A.A.,* 177 (1993), 321–349.

[2] ARENDT, W. – Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems, *Israel J. Math.,* 59 (1987), 125–134.

[3] CLÉMENT, PH., DIEKMANN, O., GYLLENBERG, M., HEIJMANS, H.J.A.M. and THIEME, H.R. – Perturbation theory for dual semigroups, Part I: The sun-reflexive case, *Math. Ann.,* 277 (1987), 709–725.

[4] CLÉMENT, PH., DIEKMANN, O., GYLLENBERG, M., HEIJMANS, H.J.A.M. and THIEME, H.R. – Perturbation theory for dual semigroups, Part II: Time-dependant perturbations in the sun-reflexive case, *Proc. Roy. Soc. Edinb.,* 109A (1988), 145–172.

[5] CLÉMENT, PH. and al. – *One-Parameter Semigroups*, CWI Monographs, 5, Amsterdam, 1987.

[6] DA PRATO, G. and GRISVARD, P. – On extrapolation spaces, *Rend. Accad. Naz. Lincei,* 72 (1982), 330–332.

[7] HALE, J.K. – *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[8] HILLE, E. and PHILIPS, R.S. – *Functional Analysis and Semigroups*, Amer. Math. Soc., Providence, 1975.

[9] NAGEL, R. – *One-Parameter Semigroups of Positive Operators*, Lecture Notes in Mathematics, 1184, Springer-Verlag, 1986.

[10] NAGEL, R. – Sobolev spaces and semigroups, *Semesterberichte functional-analysis,* 4 (1983), 1–20.

[11] NAGEL, R. and SINESTRARI, E. – *Inhomogeneous volterra integrodifferential equations for Hille–Yosida operators*, Marcel Dekker, Lecture Notes Pure Appl. Math., 150, 1994.

[12] NICKEL, G. and RHANDI, A. – On the essential spectral radius of semigroups generated by perturbations of a Hille–Yosida operators, *Tübinger Berichte, Heft* (1994/1995), 207–220.

[13] RHANDI, A. – *Méthodes d'extrapolation, une alternative des semi-groupes intégrés*, Cours d'Ecole d'Eté sur les équations à retard, Marrakech Juin 7–15, 1995.

[14] VAN NEERVEN, J. – *The Adjoint of a Semigroup of Linear Operators*, Lecture Notes Math., 1529, Springer-Verlag, 1992.

[15] WALTER, T. – *Störungstheorie von Generatoren und Favard–Klassen*, Dissertation, Tübingen, 1986.

L. Maniar,
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences Semlalia,
B.P.S.15, Marrakech – MAROC