PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 56 Fasc. 2 – 1999

LOIS CONDITIONNELLES DES EXCURSIONS D'UN PROCESSUS DE MORKOV A NAISSANCE ET MORT ALEATOIRES

H. Boutabia

Résumé: On donne certaines lois conditionnelles des excursions et des couples d'excursions chevauchant des temps aléatoires quelconques d'un processus de Markov à naissance et mort aléatoires $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sans les hypothèses de dualité. $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ n'est pas supposé stationnaire comme dans [15], [16], [17]. Ceci étend les résultats de [17].

Abstract: We give certain conditional laws of excursions and of pairs of excursions straddling arbitrary random times for a right Markov process $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ with random times of birth and death without the duality hypotheses. $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ is not assumed to be stationary as was assumed in [15], [16], [17]. This extends results of [17].

1 – Introduction

Mitro [15] construit à partir de deux processus standards en dualité, un processus auxilliaire qui est un processus stationnaire à naissance et mort aléatoires, et construit dans [17] un "système de sortie mixte" permettant de décrire les couples d'excursions de ce processus auxilliaire.

Dans le présent article et en particulier dans les paragraphe 4 et 5, on étudiera dans diverses situations, pour un processus droit $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ à naissance et mort aléatoires et un ensemble aléatoire fermé et homogène M, l'indépendance conditionnelle des variables aléatoires $(\tau_G,\widetilde{\tau}_D)$ et $(Y_u)_{D<u<G}$, où:

$$G=\sup\Big\{s\in M\colon\ s\le T\Big\}\,,\qquad D=\inf\Big\{s\in M\colon\ s\ge S\Big\}\ ,$$

$$\tau_G=(Y_{G+t})_{t\ge0}\quad\text{ et }\quad \widetilde{\tau}_D=(Y_{(D-t)^-})_{t\ge0}\ ,$$

Received: September 22, 1997; *Revised*: April 1, 1998.

lorsque S et T sont deux temps aléatoires quelconques. On ne fera aucune hypothèse de dualité ni de stationnarité. On démontrera l'extension de la formule obtenue dans [12] permettant de calculer, pour un processus Z positif et (F_{D_t})-prévisible

$$\Big(D_t = \sup\Big\{s \in M,\ s > t\Big\},\quad t \in \mathbb{R}_+\Big) ,$$

l'expression de la forme:

$$P^x \sum_{s \in G^\circ} Z_s\, f(\theta_s)$$

$(\Omega, F, F_t, X_t, \theta_t, P^x)$ est la réalisation canonique du semi-groupe de transition de (Y_t), et G° est l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à M.

Dans le paragraphe 2 on adaptera le résultat de base obtenu par Maisonneuve dans [14], où l'on exprimera à l'aide des mesures de sorties de M, la loi de τ_G par rapport au passé de G. De façon similaire on précise dans le paragraphe 3, la loi de $\widetilde{\tau}_D$ par rapport au passé de $-D$, relatif au processus de réserve $(\widehat{Y}_t) = (Y_{(-t)^-})$ que l'on supposera markovien pour la circonstance.

2 – Notations et résultats préliminaires

Soit $(\Omega, F, F_t, X_t, \theta_t, P^x)$ la réalisation canonique d'un semi groupe standard (P_t), d'espace d'état E supposé lusinien. On note $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}^*$) la tribu borélienne (resp. des ensembles universellement mesurables) de E, et l'on désigne par δ le point cimetière (hors de E).

On considère l'ensemble W des applications w de $\mathbb{R}$ dans $E \cup \{\delta\}$ satisfaisant la condition suivante: il existe un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ sur lequel w est à valeur dans E, continue à droite avec des limites à gauche, et hors duquel $w = \delta$. Soient $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le processus des coordonées sur W (i.e. $Y_t(w) = w(t)$; $t \in \mathbb{R}$), (Σ^0_t) sa filtration naturelle et $\Sigma^0 = \sigma(Y_t\colon\ t \in \mathbb{R})$. Les variables aléatoires $\inf\{Y_t \in E\}$ et $\sup\{t\colon\ Y_t \in E\}$ seront notées respectivement α et β.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on désigne par τ_t la projection sur Ω telle que $X_{s} \circ \tau_t = Y_{t+s}$ sur $\{Y_t \in E\}$ $(s \geq 0)$, et par σ_t l'application à valeurs dans W telle que $\sigma_t = (Y_{t+u})_{u \in \mathbb{R}}$.

Notons que:

$$\theta_s \circ \tau_t = \tau_{t+s} \quad \text{et} \quad \sigma_t \circ \sigma_u = \sigma_{t+u} \qquad (t, u \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ s \geq 0) .$$

Il est facile de voir (d'après un théorème de Kuznetsov [9]) que si $(\eta_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est une famille de mesure σ-finies sur E telle que $\eta_{t+s} \geq \eta_t P_s$ $(t \in \mathbb{R},\ s > 0)$, alors il existe une unique mesure Q sur W telle que $\eta_t = Q(Y_t \in \cdot)$ sur $\mathcal{B}$ $(t \in \mathbb{R})$ et (Y_t)

est markovien de semi-groupe (P_t). Dans toute la suite nous supposerons que Q est une telle mesure. En fait, (Y_t) est fortement markovien sous Q (cf. [1], [15]), au sens que sur $\{Y_U \in E\}$,

$$Q\Big(f \circ \tau_U \,|\, \Sigma_U\Big) = P^{Y_U}(f) \tag{1}$$

pour $f \geq 0$ et F°-mesurable et U un temps d'arrêt de (Σ_t), où Σ_t est la Q-complétion de la tribu Σ^0_{t+} et $F^\circ = \sigma(X_s\colon\ s \geq 0)$ $(t \in \mathbb{R})$.

On note Σ la Q-complétion de Σ^0.

Soit $(\widehat{Y}_t) = (Y_{(-t)^-})$ le processus de réserve de (Y_t). Sur l'intervalle stochastique $]\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}[\, = \,]-\beta, -\alpha[$, $(\widehat{Y}_t)$ est continu à droite et posséde des limites à gauche dans E. Les objets analogues à Σ^0_t, Σ_t, τ_t et σ_t correspondant à $(\widehat{Y}_t)$ seront notés respectivement $\widehat{\Sigma}^0_t$, $\widehat{\Sigma}_t$, $\widehat{\tau}_t$ et $\widehat{\sigma}_t$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, $w \in W$ et $\omega \in \Omega$ on note $w \,/\, t \,/\, \omega$ la trajectoire $\overline{w}$ de W égale à w sur $]-\infty, t[$ et telle que $\overline{w}(u) = \omega(u-t)$ si $u \geq t$, on a alors $\tau_t(\overline{w}) = \omega$.

Ces trajectoires vont jouer un rôle clé dans les développements ultérieures.

On se donne un sous-ensemble aléatoire fermé de $]0, +\infty[$ défini sur Ω et noté M, que l'on supposera optionnel et homogène tel que la variable aléatoire $R = \inf M$ soit F^*-mesurable (F^* étant la complétée universelle de la tribu F°). Soit $(B, {}^*P)$ un système de sortie de M (cf. [10], [11]).

A M on associe le sous-ensemble fermé de $]\alpha, \beta[$ (noté encore M) défini par:

$$M = \bigcup_{\alpha < t < \beta} \{t + R \circ \tau_t\}\ ,$$

et à B on associe la mesure aléatoire sur W (notée encore B) portée par $]\alpha, \beta[$, telle que sur $\{Y_t \in E\}$ $(t \in R$ et $s > 0)$

$$B\Big(]t, t+s]\Big) = B_{s^\circ}\tau_t\ . \tag{2}$$

On notera que l'additivité de B assure l'existence de B sur W (cf. [7]) et que sur $\{Y_t \in E\}$

$$(M - t) \cap \,]0, +\infty[\, = M \circ \tau_t\ . \tag{3}$$

On désigne par G° (resp. D°) l'ensemble des extrémités gauches (resp. droites) des intervalles contigus à M, qui sont contenus dans $]\alpha, \beta[$.

La formule suivante est une extension du théorème (1.3) chapitre II [1]:

$$Q \sum_{t \in G^\circ} V_t f(\cdot, t, \tau_t) = \int_W Q(dw) \int_{\mathbb{R}} B(w, dt)\, V_t(w)\, {}^*P^{Y_t(w)}(f(w, t, \cdot)) \tag{4}$$

pour tout processus $V \geq 0$, (Σ_t)-optionnel et pour toute fonction $f \geq 0$, $\Sigma^0 \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes F^*$-mesurable ($\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}$).

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose:

$$G_t = \sup\Big\{s \in M:\ s \leq t\Big\} \quad (\sup \oslash = -\infty)\ ,$$

$$g_t = \sup\Big\{s \in M:\ s < t\Big\}\ ,$$

$$D_t = \inf\Big\{s \in M:\ s > t\Big\} \quad (\inf \oslash = +\infty)\ ,$$

$$A_t = t - G_t\,, \quad R_t = R \circ \tau_t\,, \quad r_t = R_{t^-} \quad \text{et} \quad d_t = D_{t^-}\ ,$$

et on note $(\Re_t)$ et $(\widehat{\Re}_t)$ les filtrations de (Σ) respectives (Σ_{D_t}) et $(\widehat{\Sigma}_{-g_{-t}})$.

Soit maintenant T un temps aléatoire sur (W, Σ), qui sera fixé dans toute la suite, tel que $T < D_T$ sur $\{Y_G \in E\}$ où l'on a posé $G = G_T$ et $d = D_T$.

On notera que Q est σ-finie sur la tribu $\Sigma_G \cap \{Y_G \in E\}$; en effet:

$$\{Y_G \in E\} = \bigcup_{r \text{ rationnel}} \bigcup_{n \in N} \{Y_r \in E_n^r\} \cap \{r \leq G\} \cap \{Y_G \in E\} \tag{5}$$

où (E_n^r) est une suite croissante de $\mathcal{B}$ convergeant vers E, telle que

$$Q(Y_r \in E_n^r) < +\infty\ .$$

Pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $w \in \{Y_G \in E\}$ on pose

$$A^w(\omega) = T(w\,/\,G(w)\,/\,\omega) - G(w)\ .$$

Nous utiliserons dans toute la suite la notation habituelle $\nu(\cdot|A) = \frac{\nu(\,\cdot\,;A)}{\nu(A)}$ si $0 < \nu(A) < +\infty$ et 0 ailleurs, pour toute mesure ν sur (Ω, F^*) et $A \in F^*$.

La formule (4) et une application du théorème 5.4 [14] nous permettent d'affirmer que sur $\{Y_G \in E\}$ la loi conditionnelle du futur de G par rapport à son passé est ${}^*P^{Y_G}$ après conditionnement par $\{0 \leq A^{\cdot} < R\}$, et par $\{A^{\cdot} < R\}$ lorsque T est un temps d'arrêt de $(\Re_t)$, d'où le résultat suivant:

Théorème 1. *Pour toute fonction $F \geq 0$ et F^* mesurable, on a pour presque tout $w \in \{Y_G \in E\}$:*

(i)

$$Q\Big(f(\tau_G)\,|\,\Sigma_G\Big)(w) = {}^*P^{Y_G(w)}\Big(f|0 \leq A^w < R\Big)\ ; \tag{6}$$

(ii) *La mesure ${}^*P^{Y_G(w)}$ est portée par:*

$$\Big\{G(w) \in G^\circ(w\,/\,G(w)\,/\,\cdot)\Big\}\ ;$$

(iii) *De plus si T est un temps d'arrêt de $(\Re_t)$ on a:*

$$Q\Big(f(\tau_G)\,|\,\Sigma_G\Big)(w) = {}^*P^{Y_G(w)}\Big(f|A^w < R\Big)\ . \tag{7}$$

Comme dans [14], la condition $0 \le A^w < R$ peut être remplacée par $A^w = 0$ si $T \in G^\circ$ sur $\{Y_T \in E\}$ et par $0 < A^w < R$ si $G < T$ sur $\{Y_G \in E\}$.

Soit la famille de mesures $P^{x,l,y}$ sur (Ω, F), définie pour $(x,\ell,y) \in E \times \mathbb{R}_+ \times E$ par:

$$P^{x,\ell,y} = {}^*P^x\Big(\cdot|R = \ell,\ X_R = y\Big)$$

et introduite dans le lemme 5.1 [14].

Pour tout $w \in \{Y_G \in E\}$ et pour tout $\omega \in \Omega$, on pose:

$$A_d^w(\omega) = A^w\Big(\omega\,/\,d(w)-G(w)\,/\,\tau_d(w)\Big)\ ,$$

où les trajectoires $\omega/s/\omega'$ sont définies pour $\omega,\omega' \in \Omega$ et $s > 0$ comme les trajectoires, $w/s/\omega$ avec $w \in W$, $\omega \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}$ (cf. [14]).

Dans ce cas les formules du théorème (5.4) de [14] s'adaptent également à notre situation, et on a pour presque tout $w \in \{Y_G \in E\}$ la loi conditionnelle de τ_G (resp. $k_R \circ \tau_G$) par rapport à la tribu engendrée par Σ_G, d, Y_d (resp. Σ_G, d, τ_d) est $\eta^w(\cdot|0 \le A^w < R)$ (resp. $\eta^w(k_R \in \cdot|0 \le A_d^w < R)$), où $\eta^w = P^{Y_G(w),d(w)-G(w),Y_d(w)}$. On notera que $k_R \circ \tau_G$ est l'excursion chevauchant T, où l'on a désigné par k_t l'opérateur de meurtre à t (i.e. $X_s(k_t) = X_s$ si $s < t$, δ si $s \ge t$).

3 – L'excursion du processus de reserve chevauchant un temps aléatoire quelconque

Soit S un temps aléatoire sur (W, Σ), qui sera également fixé dans toute la suite, tel que $g_s < S$ sur $\{Y_{D^-} \in E\}$, où l'on a posé $D = d_s$.

Pour les analogues des résultats cités plus haut et toute suite, nous ferons l'hypothèse que le processus $(\widehat{Y}_t)$ est également markovien sous Q, relativement à un autre semi-groupe standard $(\widehat{P}_t)$ et sa filtration naturelle. La réalisation canonique de $(\widehat{P}_t)$ sera notée $(\Omega, F, \widehat{F}_t, X_t, \theta_t, \widehat{P}^x)$. Notons que dans les situations étudiées par Mitro ([15], [16], [17]) η_t ne dépend pas de t. Dans ce cas les processus (Y_t) et $(\widehat{Y}_t)$ sont stationnaires.

Soit $\widehat{M}$ un ensemble aléatoire, défini sur Ω, de la même manière que M a ceci-près qu'il est $(\widehat{F}_t)$-optionnel, au lieu d'être (F_t)-optionnel, et tel que la variable aléatoire $\widehat{R} = \inf \widehat{M}$ soit F^*-mesurable. On note encore $\widehat{M}$ le sous-ensemble de $]\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}[$, défini par:

(8)
$$\widehat{M} = \bigcup_{\widehat{\alpha}<t<\widehat{\beta}} \{t+\widehat{R} \circ \widehat{\tau}_t\}$$

et on supposera dans toute la suite que $\widehat{M} = -M$, de sorte que si t est une extrémité gauche d'un intervalle contigu à $\widehat{M}$, alors $(-t)$ est une extrémité droite d'un intervalle contigu à M. L'exemple le plus important est celui considéré par Getoor et Sharpe [6], où

$$M = \Big\{s \geq 0\colon\ (X_s-, X_s) \in \Gamma\Big\},\quad \widehat{M} = \Big\{s \geq 0\colon\ (X_s-, X_s) \in \widehat{\Gamma}\Big\} \quad \text{sur}\ \ \Omega\ ,$$

Γ étant un borélien de $E \times E$ et $\widehat{\Gamma} = \{(x,y)\colon\ (y,x) \in \Gamma\}$.

$$\text{Sur}\ \ W\ ,\qquad M = \Big\{s \in \mathbb{R}\colon\ (Y_s-, Y_s) \in \Gamma\Big\},\quad \widehat{M} = \Big\{s \in \mathbb{R}\colon\ (\widehat{Y}_s-, \widehat{Y}_s) \in \widehat{\Gamma}\Big\}\ .$$

Remarque 1. Il est intéressant de noter que: $M = M \circ \widehat{\sigma}_0$ et $D^\circ = D^\circ \circ \widehat{\sigma}_0$, en particulier on a:

$$g_t \circ \widehat{\sigma}_0 = g_t \ (\text{pour tout}\ t \in \mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad g_s \circ \widehat{\sigma}_0 = g_{s \circ \widehat{\sigma}_0}\ .$$

En effet, $M = M \circ \widehat{\sigma}_0$ provient de la définition (8) de $\widehat{M}$ et $D^\circ = D^\circ \circ \widehat{\sigma}_0$ découle de l'égalité:

$$D^\circ = \Big\{t \in \mathbb{R}\colon\ \widehat{R} \circ \widetilde{\tau}_t > 0\ \ \text{et}\ \ \widehat{R} \circ \widehat{\tau}_{(-t)}- = 0\Big\}\ .$$

Pour les résultats qui vont suivre, il est commode d'exprimer les formules faisant intervenir le processus $(\widehat{Y}_t)$, à l'aide des opérateurs:

$$\widetilde{\tau}_t = \widehat{\tau}_{-t} \qquad (X_s \circ \widetilde{\tau}_t = Y_{(t-s)^-}\ \ \text{pour}\ \ s \geq 0)$$

et des tribus $\widetilde{\Sigma}_t = \widehat{\Sigma}_{-t}$. La tribu $\widetilde{\Sigma}_t$ est alors engendrée par les ensembles de Q-mesures nulles et les variables aléatoire Y_{u^-} tel que $u > t$.

Pour tout $w \in \{Y_{D^-} \in E\}$ et pour tout $\omega \in \Omega$ on pose:

$$r^w(\omega)\ =\ D(w) - S(w\,/\,-D(w)\,/\,\omega)\ .$$

Pour l'analogue du théorème 1, on a sur $\{Y_{D^-} \in E\}$ la loi conditionnelle du futur de $-D$ par rapport à son passé, relativement au processus $(\widehat{Y}_t)$, est ${}^*\widehat{P}^{Y_{D^-}(w)}$ après conditionnement par $\{0 \leq r^\cdot < \widehat{R}\}$, et par $\{r^\cdot < \widehat{R}\}$ lorsque $-S$ est un temps d'arrêt de $(\widehat{\Re}_t)$, où $(\widehat{B}, {}^*\widehat{P})$ est un système de sortie optionnel de $\widehat{M}$.

Théorème 2. *Pour toute fonction $\widehat{f} \geq 0$ et F^*-mesurable, on a pour presque tout $w \in \{Y_{D^-} \in E\}$:*

(i)

$$Q\Big(\widehat{f}(\widetilde{\tau}_D) \,|\, \widetilde{\Sigma}_D\Big)(w) = {}^*\widehat{P}^{Y_{D^-}(w)}\Big(\widehat{f} | 0 \leq r^w < \widehat{R}\Big) \ ; \tag{9}$$

(ii) *la mesure ${}^*\widehat{P}^{Y_{D^-}(w)}$ est portée par:*

$$\Big\{D(w) \in D^\circ(w \,/\, -D(w) \,/\, \cdot)\Big\} \ ;$$

(iii) *de plus si S est un temps d'arrêt de $(\widetilde{\Re}_t) = (\widetilde{\Sigma}_{g_t})$ on a:*

$$Q\Big(\widehat{f}(\widetilde{\tau}_D) \,|\, \widetilde{\Sigma}_D\Big)(w) = {}^*\widehat{P}^{Y_{D^-}(w)}\Big(\widehat{f} \,|\, r^w < \widehat{R}\Big) \ . \tag{10}$$

Démonstration: Observons d'abord que $D = D \circ \widehat{\sigma}_0$ sur $\{Y_{D^-} \in E\}$. En vertu de la remarque 1, il suffit de voir que:

$$S \circ \widehat{\sigma}_0 \in \,]g_S, D] \quad \text{sur} \ \ \{Y_{D^-} \in E\} \ ,$$

or si tel n'est pas le cas alors on aura:

$$S \circ \widehat{\sigma}_0 \notin \,]g_S \circ \widehat{\sigma}_0, D \circ \widehat{\sigma}_0], \quad \text{sur} \ \ \{Y_{D^-} \circ \widehat{\sigma}_0 \in E\} \ ,$$

ce qui contredirait l'hypothèse faite sur S.

Ainsi, en posant $\widehat{w} = \widehat{\sigma}_0(w)$ pour tout $w \in \{Y_{D^-} \in E\}$, $t = D(w)$ est l'unique $t = D^\circ(w)$ tel que:

$$0 \leq t - S(\widehat{w} \,/\, -t \,/\, \widetilde{\tau}_t(w)) < \widehat{R} \circ \widetilde{\tau}_t(w) \ .$$

Ceci permet alors de raisonner comme dans le théorème 3.2 [14] et on obtient la formule:

$$Q\Big(\widehat{f}(\widetilde{\tau}_D) \,|\, \widetilde{\Sigma}_D\Big)(w) = {}^*\widehat{P}^{Y_{D^-}(w)}\Big(\widehat{f} | 0 \leq D(w) - S(\widehat{w}/-D(w)/\cdot) < \widehat{R}\Big) \tag{11}$$

pour presque tout $w \in \{Y_{D^-} \in E\}$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, la condition

$$0 \leq D - S(\widehat{\sigma}_0 \,/\, -D \,/\, \omega) < \widehat{R}(\omega)$$

est équivalente à

$$0 \leq r^{\cdot}(\omega) < \widehat{R}(\omega) \quad \text{sur} \ \ \{Y_{D^-} \in E\} \ .$$

La formule (9) découle de (11), et la suite du théorème se démontre comme pour le théorème 1. ∎

4 – Loi de $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ par rapport à $\Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D$

On se place dans la situation du paragraphe précédent et on suppose que

$$\sigma(G) \cap A \subset \widetilde{\Sigma}_D \quad \text{et} \quad \sigma(D) \cap A \subset \Sigma_G \ ,$$

où l'on a posé $A = \{\alpha < D < G < \beta\}$. Noter que ces hypothèses entraînent la σ-finitude de Q sur la tribu $(\Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D) \cap A$. En effet, on a

$$A = \bigcup_{r \text{ rationnel}} \bigcup_{n \in N} \{D < r \leq G\} \cap \{Y_r \in E_n^r\} \cap A \ ,$$

où (E_n^r) est la suite considérée dans (5).

Pour tout $w \in A$, considérons les mesures ν^w et $\widehat{\nu}^{\,w}$ sur (Ω, F^*) définies par:

$$\nu^w = {}^*P^{Y_G(w)}(\cdot|0 \leq A^w < R)\,, \qquad \widehat{\nu}^w = {}^*\widehat{P}^{Y_{D-}(w)}(\cdot|0 \leq r^w < \widehat{R}) \ . \tag{12}$$

Le théorème suivant est le résultat principal de cet article.

Théorème 3. *Pour presque tout $w \in A$ on a:*

$$Q\Big(F(\tau_G, \widetilde{\tau}_D) \mid \Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D\Big)(w) \ = \ \nu^w \otimes \widehat{\nu}^w(F) \tag{13}$$

pour toute fonction $F \geq 0$, $F^* \otimes F^*$-mesurable.

En particulier sur A, $\nu^{\cdot} \otimes \widehat{\nu}^{\cdot}$ est la loi conditionnelle du couple $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ par rapport à $\Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D$. Noter qu'un résultat similaire peut être obtenu à partir de la formule du "système de sortie mixte" (cf. [17]), sous les hypothèses de dualité.

Démonstration: Soit f, $\widehat{f}$ deux fonctions positives F^*-mesurables, et

$$\Lambda \in \Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D \quad \text{tel que} \quad Q(A \cap \Lambda) < +\infty \ .$$

Pour prouver (13), il suffit d'établir la formule suivante:

$$Q\Big(f(\tau_G)\,\widehat{f}(\widetilde{\tau}_D)\,I_{A\cap\Lambda}\Big) \ = \ \int_W Q(dw)\,\nu^w(f)\,\widehat{\nu}^w(\widehat{f})\,I_{A\cap\Lambda}(w) \ . \tag{14}$$

Comme $f(\tau_G)I_A = \varphi(D, \tau_D, G)I_A$ où $\varphi(s, \omega, t) = f(\theta_{t-s}(\omega))$ pour $(s, \omega, t) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}$ $(s < t)$, et comme τ_D est $\widetilde{\Sigma}_D$-mesurable (car le processus (τ_{-t}) est $(\widehat{\Sigma}_t)$-optionnel) alors $f(\tau_G)\,I_A$ est $\widetilde{\Sigma}_D$-mesurable. De la même façon on a $\sigma(Y_G) \cap A \subset \widetilde{\Sigma}_D$, et de manière similaire on montre que $\widehat{f}(\widetilde{\tau}_D)\,I_A$ est Σ_G-mesurable et $\sigma(Y_{D-}) \cap A \subset \Sigma_G$.

En utilisant la formule (9) et le fait que $w = w\,/\,G(w)\,/\,\tau_G(w)$, le premier membre de (14) devient

$$\int_w Q(dw)\, f(\tau_G(w))\, {}^*\widehat{P}^{Y_{D-}(w)}\Big(\widehat{f}|0 \le \le D(w) - S\Big((w\,/\,G(w)\,/\,\tau_G(w))\,/\,-D(w)\,/\,.\Big) < \widehat{R}\Big)\, I_{A\cap\Lambda}(w)\ ,$$

et d'après une extension de la formule (6), on obtient:

$$Q\Big(f(\tau_G)\,\widehat{f}(\widetilde{\tau}_D)\,I_{A\cap\Lambda}\Big) =$$

$$= \int_w Q(dw) \int_\Omega \nu^w(d\omega)\, f(\omega)\, {}^*\widehat{P}^{Y_{D-}(w)}\Big(\widehat{f}|0 \le \le D(w) - S\Big((w\,/\,G(w)\,/\,\omega)\,/\,-D(w)\,/\,\cdot\Big) < \widehat{R}\Big)\, I_{A\cap\Lambda}(w)\ . \tag{15}$$

Observons que pour presque tout $w \in A$ on a: $H(w,\, w/G(w)/\cdot) = H(w,w)\,\nu^w$ p.s., pour toute fonction $H \ge 0$ et $\Sigma_G \otimes \Sigma$-mesurable. En effet, une extension de la formule (6) nous permet d'écrire:

$$\int_A Q(dw)\,\nu^w\Big(H(w,\, w/G(w)/\cdot) \ne H(w,w)\Big) = Q(H \ne H; A) = 0\ .$$

En posant:

$$H(w,w') = {}^*\widehat{P}^{Y_{D-}(w)}\Big(\widehat{f}\,|0 \le D(w) - S(w'/-D(w)/\cdot) < \widehat{R}\Big)$$

alors on a pour presque tout $w \in A$ (en utilisant la définition (12) de $\widehat{\nu}^w$):

$$\int_\Omega \nu^\omega(d\omega)\, f(\omega)\, {}^*\widehat{P}^{Y_{D-}(w)}\Big(\widehat{f}\,|0 \le \le D(w) - S\Big((w/G(w)/\omega)\,/\,-D(w)\,/\,\cdot\Big) < \widehat{R}\Big)\, I_{A\cap\Lambda}(w) = \nu^w(f)\,\widehat{\nu}^w(\widehat{f})$$

et en reportant dans le second membre de (15), on obtient la formule (14). ∎

Remarque 2. On notera que sur A la tribu $\Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D$ contient l'information fournie par $(Y_u)_{D<u<G}$ et par Y_G et Y_{D-}.

Exemple 1. Soit U un temps aléatoire sur (Ω, F^*) strictement terminal et exact:

$$U = s + U\circ\theta_s \ \text{ sur } \{U \ge s\} \quad \text{ et } \quad s + U\circ\theta_s \downarrow U$$

lorsque $s \downarrow 0$. On pose:

$$T = \inf_{\alpha<s<\beta}\{s + U\circ\theta_s\} \quad \text{ et } \quad S = \sup_{\alpha<s<\beta}\{s - U\circ\widetilde{\tau}_s\}\ .$$

Il est aisé de voir que $T = t + U \circ \tau_t$ sur $\{T \geq t;\, Y_t \in E\}$ et que $S = t - U \circ \widetilde{\tau}_s$ sur $\{S \leq t;\, Y_{t^-} \in E\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

La condition $A^w \geq 0$ (resp. $r^w \geq 0$) entraîne $A^w = U$ (resp. $r^w = U$), il résulte alors des formules (6) et (9) que sur $\{Y_G \in E\}$

$$Q\Big(f(\tau_G) \,|\, \Sigma_G\Big) = {}^*P^{Y_G}\Big(f | 0 \leq U < R\Big) \tag{16}$$

et sur $\{Y_{D^-} \in E\}$

$$Q\Big(\widehat{f}(\widetilde{\tau}_D) \,|\, \widetilde{\Sigma}_D\Big) = {}^*\widehat{P}^{Y_{D^-}}\Big(\widehat{f} \,| 0 \leq U < \widehat{R}\Big) \quad \text{sur} \quad \{Y_{D^-} \in E\}\ , \tag{17}$$

de plus si U est un temps d'arrêt de $(F_s)_{s \geq 0}$ alors T (resp. $-S$) est un temps d'arrêt de (Σ_t) (resp. $(\widehat{\Sigma}_t)$), et de ce fait la condition $0 \leq U$ peut être supprimés dans les formules (16) et (17). Ainsi le théorème 3 signifie que sur A la loi du couple $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ par $\Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D$ est

$${}^*P^{Y_G}\Big(\cdot | 0 \leq U < R\Big) \otimes {}^*\widehat{P}^{Y_{D^-}}\Big(\cdot | 0 \leq U < \widehat{R}\Big)\ ,$$

par conséquent les variables aléatoires $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ et $(Y_u)_{D<u<G}$ sont conditionnellement indépendantes étant donné (Y_G, Y_{D^-}).

Exemple 2. Soit T un temps d'arrêt de la filtration $(\Sigma_{G_t})_+$. D'après la discussion de l'exemple 6 [14] (adaptée à notre situation) on a sur $\{Y_G \in E\}$

$$Q\Big(f(\tau_G) \,|\, \Sigma_G\Big) = P^{A_T, Y_G}(f) \tag{18}$$

où l'on a posé pour tout $0 \leq a < +\infty$ et pour $x \in E \cup \{\delta\}$:

$$P^{a,x} = \begin{cases} {}^*P^x(\cdot | R > a) & \text{si } a > 0, \\ P^x & \text{si } a = 0\ . \end{cases}$$

Si maintenant S est tel que $-S$ soit un temps d'arrêt de filtration $(\widetilde{\Sigma}_{d_{-s}})_+$, alors on a de la même façon, la formule suivante:

$$Q\Big(\widehat{f}(\widetilde{\tau}_D) \,|\, \widetilde{\Sigma}_D\Big) = \widehat{P}^{r_s, Y_{D^-}}(\widehat{f}) \tag{19}$$

sur $\{Y_{D^-} \in E\}$ où $\widehat{P}^{a,x}$ est l'analogue de la mesure $P^{a,x}$ définie à l'aide de ${}^*\widehat{P}^x$.

Il résulte du théorème 3 que sur A, la loi conditionnelle de $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ par rapport à $\Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D$ est $P^{A_T, Y_G} \otimes \widehat{P}^{r_s, Y_{D^-}}$. Dans ce cas les variables aléatoires $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ et $(Y_u)_{D<u<G}$ sont conditionnellement indépendantes étant donné (Y_G, A_T, Y_{D^-}, r_s).

Exemple 3. Soient $a > 0$, $b > 0$, $T = \inf\{t\colon A_t > a\}$ et $S = \sup\{s\colon r_s > b\}$. D'après [11] T (resp. $-S$) est un temps d'arrêt de (Σ_{G_t}) (resp. $(\widetilde{\Sigma}_{d_{-s}})$) et comme $A_T = a$, $r_s = b$ sur A, alors d'après l'exemple précédent la loi de $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ par rapport à $\Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D$ est $P^{a,Y_G} \otimes \widehat{P}^{b,Y_{D^-}}$, et on a l'indépendance conditionnelle de $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ par rapport à $(Y_u)_{D<u<G}$, étant donné (Y_G, Y_{D^-}).

5 – Loi de $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ par rapport à $\Re_{G^-} \cap \widetilde{\Re}_{D^-}$

Rappelons qu'un ensemble $A \in \Re_{G^-}$ (resp. $\widetilde{\Re}_{D^-}$) s'il existe un processus $V(\Re_t)$ (resp. $(\widehat{\Re}_t)$)-prévisible tel que $I_A = V_G$ (resp. $I_A = V_{-D}$).

En notant encore D_s la variable aléatoire sur Ω, $\inf\{u \in M:\ u > s\}$ pour $s \geq 0$, et en posant

$$X_s^D = X_{D_s} \quad \text{et} \quad Y_t^D = Y_{D_t} \ (\text{sur } W)$$

pour $t \in \mathbb{R}$, on a alors sur $\{Y_t \in E\}$

$$X_s^D \circ \tau_t = Y_{t+s}^D\ . \tag{20}$$

Soit $(L, {}^\circ P)$ un système de sortie (F_{D_s})-prévisible pour M (cf. [12]). Pour tout processus $Z \geq 0$ et (F_{D_s})-prévisible, et pour toute fonction $f \geq 0$ mesurable sur (Ω, F^*) on peut écrire $\forall\, x \in E$

$$P^x \sum_{s \in G^\circ} Z_s\, f(\theta_s) \ = \ P^x \int_{\mathbb{R}_+} Z_s\, {}^\circ P^{X_{s^-}^D}(f)\, L(ds) \tag{21}$$

où l'on a noté encore G°, l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à M (sur Ω).

Comme pour B, on définit la mesure aléatoire sur W (notée encore L) portée par $]\alpha, \beta[$ et telle que sur $\{Y_t \in E\}$ $(t \in \mathbb{R}$ et $s > 0)$

$$L\Big(]t, t+s]\Big) = L_s \circ \tau_t\ . \tag{22}$$

On a alors le théorème suivant:

Théorème 4. *Pour tout processus $V \geq 0$, $(\Re_t)$-prévisible et pour toute fonction f comme dans (21), on a:*

$$Q\Big(\sum_{t \in G^\circ} V_t\, f(\tau_t)\Big) \ = \ Q\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} V_t\, {}^\circ P^{Y_{t^-}^D}(f)\, L(dt)\Big)\ . \tag{23}$$

Remarque 3. Une application directe du théorème (4.1) [12] permet d'obtenir une telle formule, mais au lieu de ${}^{\circ}P^{Y^D_{t-}}$ on a un noyau N de $(\mathbb{R}\times W, P)$ dans (Ω, F°), où P est la tribu $(\Re_t)$-prévisible sur $\mathbb{R}\times W$.

Pour démontrer le théorème 4, nous avons besoin des deux propositions suivantes:

Proposition 1. *On a pour tout processus V et pour toute fonction f comme dans (23): $\forall\, u \in \mathbb{R}$*

$$Q\Big(I_{\{Y_u\in E\}} \sum_{\substack{t\in G^{\circ}\\ t>u}} V_t\, f(\tau_t)\Big) \;=\; Q\Big(I_{\{Y_u\in E\}} \int_u^{+\infty} V_t\, {}^{\circ}P^{Y^D_{t-}}(f)\, L(dt)\Big)\;. \tag{24}$$

Proposition 2. *Pour tout processus V, $(\Re_t)$-prévisible, le processus indexé par $\mathbb{R}_+$, $Z_s = V_{s+u}(w/u/\cdot)$ est (F_{D_s})-prévisible, quelque soit $w\in W$ et $u\in\mathbb{R}$ fixés.*

Démonstration de la Proposition 2: D'après un argument de classes monotones, il suffit de montrer que si V est $(\Re_t)$-adapté alors Z est (F_{D_s})-adapté, car la tribu $(\Re_t)$ (resp. (F_{D_s}))-prévisible est engendrée par les processus $(\Re_t)$ (resp. (F_{D_s}))-adaptés continus à gauche. On est donc ramené à montrer que l'application: $\omega \mapsto (w/u/\omega)$ est mesurable de (Ω, F_{D_s}) dans $(W, \Re_{s+u})$.

Rappelons qu'un ensemble $A \in \Re_{s+u}$ (resp. $B\in F_{D_s}$) si $A\cap\{D_{s+u}\le t\}\in\Sigma_t$, pour tout t appartenant à $\mathbb{R}$ (resp. $B\cap\{D_s\le t\}\in F_t$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$), et remarquons que l'application citée plus haut est mesurable de (Ω, F_t) dans (W, Σ_{t+u}), $t\ge 0$.

Pour tout $s,t\in\mathbb{R}_+$, et pour tout $A\in\Re_{s+u}$, on a:

$$\{\omega\colon\ w/u/\omega\in A\}\cap\{D_s\le t\} = \Big\{\omega\colon\ w/u/\omega\in A\cap\{D_{s+u}\le t+u\}\Big\}\in F_t\ ,$$

car

$$A\cap\{D_{s+u}\le t+u\}\ \in\ \Sigma_{t+u}\ ,$$

ce qui signifie que $\{\omega : w/u/\omega\in A\}\in F_{D_s}$. ∎

Démonstration de la Proposition 1: En vertu de la formule (1) et un raisonnement de classes monotones, on a pour toute variable aléatoire positive ψ, Σ_U-mesurable, et pour toute fonction positive g, $\Sigma_U\otimes F^{\circ}$-mesurable:

$$\int_{\{Y_U\in E\}} Q(dw)\,\psi(w)\,g(w,\tau_U(w)) \;=\; \int_{\{Y_U\in E\}} Q(dw)\,\psi(w)\,P^{Y_U(w)}(g(w,\cdot))\ , \tag{25}$$

U étant un temps d'arrêt de (Σ_t).

Observons que G° vérifie, d'après (3), l'égalité

$$(G^\circ - u) \cap]0, +\infty[= G^\circ \circ \tau_u \quad \text{sur} \quad \{Y_u \in E\} ,$$

par suite

$$s \in G^\circ \cap]u, +\infty[\ \Leftrightarrow \ s - u \in G^\circ(\tau_u) \quad \text{sur} \quad \{Y_u \in E\} ,$$

$$Q\Big(I_{\{Y_u \in E_n^u\}} \sum_{\substack{s \in G^\circ \\ s > u}} V_s \, f(\tau_s) \Big) \ = \ Q\Big(I_{\{Y_u \in E_n^u\}} \sum_{s \in G^\circ(\tau_u)} V_{s+u}(\cdot/u/\tau_s) \, f(\tau_{s+u}) \Big) ,$$

(E_n^u) étant la suite considérée dans la formule (5).

Il résulte de la formule (25) avec:

$$\Big(\ \psi = I_{\{Y_u \in E_n^u\}}, \quad g(w, \omega) = \Big(\sum_{s \in G^\circ} V_{s+u}(w/u/\cdot) \, f(\theta_s) \Big)(\omega) \ \text{ et } \ U = u \ \Big)$$

que:

$$(26) \qquad \begin{aligned} &Q\Big(I_{\{Y_u \in E_n^u\}} \sum_{\substack{s \in G^\circ \\ s > u}} V_s \, f(\tau_s) \Big) \ = \\ &= \int_{\{Y_U \in E_n^u\}} Q(dw) \, P^{Y_u(w)} \Big(\sum_{s \in G^\circ} V_{s+u}(w/u/\cdot) \, f(\theta_s) \Big) \ . \end{aligned}$$

D'après la formule (21) avec:

$$x = Y_u(w) \quad \text{ et } \quad Z_s = V_{s+u}(w \,/\, u \,/\, \cdot) ,$$

on a:

$$P^{Y_u(w)} \Big(\sum_{s \in G^\circ} V_{s+u}(w/u/\cdot) \, f(\theta_s) \Big) \ = \ P^{Y_u(w)} \Big(\int_{\mathbb{R}_+} V_{s+u}(w/u/\cdot) \, {}^\circ P^{X^D_{s^-}}(f) \, L(ds) \Big) ,$$

et la formule (26) devient:

$$\begin{aligned} &Q\Big(I_{\{Y_u \in E_n^u\}} \sum_{\substack{s \in G^\circ \\ s > u}} V_s \, f(\tau_s) \Big) = \\ &\qquad = \int_{\{Y_U \in E_n^u\}} Q(dw) \, P^{Y_u(w)} \Big(\int_{\mathbb{R}_+} V_{s+u}(w/u/\cdot) \, {}^\circ P^{X^D_{s^-}}(f) \, L(ds) \Big) \\ &\qquad = \int_{\{Y_U \in E_n^u\}} Q(dw) \, \Big(\int_{\mathbb{R}_+} V_{s+u}(w) \, {}^\circ P^{Y^D_{(s+u)^-}(w)}(f) \, L(\tau_u(w), ds) \Big) \\ &\qquad = \int_{\{Y_U \in E_n^u\}} Q(dw) \, \Big(\int_u^{+\infty} V_t(w) \, {}^\circ P^{Y^D_{t^-}(w)}(f) \, L(w, ds) \Big) , \end{aligned}$$

où dans la deuxième égalité on a utilisée la formule (25) avec:

$$\left(\Psi = I_{\{Y_u \in E_n^u\}}, \quad g(w,\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} V_{s+u}(w/u/\omega)\, {}^\circ P^{X^D_{s^-}(\omega)}(f)\, L(\omega, ds) \quad \text{et} \quad U = u \right) ,$$

et dans la dernière égalité on a utilisé la formule (22). La formule (24) s'obtient alors par le théorème de la convergence monotone. ∎

Démonstration du Théorème 4: Comme $G^\circ \subset \,]\alpha, \beta[$ et L est portée par $]\alpha, \beta[$, alors on a:

$$Q\Big(I_{\{\beta \le u\}} \sum_{\substack{t \in G^\circ \\ t > u}} V_t\, f(\tau_t)\Big) \;=\; Q\Big(I_{\{\beta \le u\}} \int_u^{+\infty} V_t\, {}^\circ P^{Y^D_{t^-}}(f)\, L(dt)\Big) = 0 \;.$$

En vertu de la proposition 1, il suffit de démontrer la formule suivante:

$$(27) \qquad Q\Big(I_{\{\beta \le \alpha < \beta\}} \sum_{\substack{t \in G^\circ \\ t > u}} V_t\, f(\tau_t)\Big) \;=\; Q\Big(I_{\{u \le \alpha < \beta\}} \int_u^{+\infty} V_t\, {}^\circ P^{Y^D_{t^-}}(f)\, L(dt)\Big) \;.$$

Soit (α_n) l'approximation dyadique décroissante de α.

D'après le raisonnement utilisé dans la démonstration de la proposition 1, on a en posant:

$$A_k = \left\{ \frac{k-1}{2^n} \le \alpha < \frac{k}{2^n} < \beta \right\}$$

($n \in N$ et k entier relatif):

$$(28) \qquad Q\Big(I_{A_k} \sum_{\substack{t \in G^\circ \\ t > k/2^n}} V_t\, f(\tau_t)\Big) \;=\; Q\Big(I_{A_k} \int_{k/2^n}^{+\infty} V_t\, {}^\circ P^{Y^D_{t^-}}(f)\, L(dt)\Big) \;.$$

En sommant par rapport à tous les entiers relatifs k tels que $u \le k/2^n$, on obtient:

$$(29) \qquad Q\Big(I_{\{u \le \alpha_n < \beta\}} \sum_{\substack{t \in G^\circ \\ t > u}} V_t\, f(\tau_t)\Big) \;=\; Q\Big(I_{\{u \le \alpha_n < \beta\}} \int_u^{+\infty} V_t\, {}^\circ P^{Y^D_{t^-}}(f)\, L(dt)\Big)$$

l'égalité (27) s'obtient alors de (29) d'après le théorème de convergence dominée. ∎

Soit maintenant le processus (sur W) $(\widehat{Y}^g_t) = (\widehat{Y}_{-g_{-t}})$ et $(\widehat{L}, {}^\circ\widehat{P})$ l'analogue de $(L, {}^\circ P)$ correspondant au processus indexé par $\mathbb{R}_+$:

$$X^{\widehat{D}}_s = X_{\widehat{D}_s} \quad \Big(\widehat{D}_s = \inf\{u \in \widehat{M} :\; u > s\} \;\; \text{sur } \Omega\Big) \;.$$

Les théorèmes 1, 2 et 3 peuvent être adaptés au conditionnement par rapport à $\Re_{G^-}$, $\widetilde{\Re}_{D^-}$ et $\Re_{G^-} \cap \widetilde{\Re}_{D^-}$ respectivement, a condition de remplacer $(B,{}^*P)$ par $(L,{}^\circ P)$, $(\widehat{B},{}^*\widehat{P})$ par $(\widehat{L},{}^\circ\widehat{P})$, Y_G par $Y^D_{G^-}$ et Y_{D^-} par $\widehat{Y}^g_{(-D)^-}$. La formule (6) devient:

$$Q\Big(f(\tau_G)\,|\,\Re_{G^-}\Big)(w) \;=\; {}^\circ P^{Y^D_{G^-}(w)}\Big(f|0 \le A^w < R\Big) \tag{30}$$

pour presque tout $w \in \{Y^D_{G^-} \in E\}$, et la formule (9) devient:

$$Q\Big(\widehat{f}(\widetilde{\tau}_D)\,|\,\widetilde{\Re}_{D^-}\Big)(w) \;=\; {}^\circ\widehat{P}^{\widehat{Y}^g_{(-D)^-}(w)}\Big(\widehat{f}|0 \le r^w < \widehat{R}\Big) \tag{31}$$

pour presque tout $w \in \{\widehat{Y}^g_{(-D)^-} \in E\}$.

On notera que:

$$Y^D_{G^-} = Y_{G^-} \;\text{ sur } \{G \in G^\circ \backslash I\}\,, \qquad Y_G \;\text{ sur } \{G \in I\}\;,$$

et que

$$\widehat{Y}^g_{(-D)^-} = Y_D \;\text{ sur } \{D \in D^\circ \backslash I\}\,, \qquad Y_{D^-} \;\text{ sur } \{G \in I\}\;,$$

où I est l'ensemble des points isolés de $M \cup \{\alpha, \beta\}$.

Comme dans le paragraphe précédent, si nous supposons que:

$$\sigma(G) \cap A \subset \widetilde{\Re}_{D^-} \quad \text{ et } \quad \sigma(D) \cap A \subset \Re_{G^-}\;,$$

on obtient la σ-finitude de Q sur la tribu $(\Re_{G^-} \cap \widetilde{\Re}_{D^-}) \cap A$ et l'analogue du théorème 3 de la même façon.

Théorème 5. *Pour presque tout $w \in A$*

$$Q\Big(F(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)\;|\;\Re_{G^-} \cap \widetilde{\Re}_{D^-}\Big)(w) \;=\; \mu^w \otimes \widehat{\mu}^w(F) \tag{32}$$

pour toute fonction $F \ge 0$ et $F^* \otimes F^*$-mesurable, où les mesures μ^w et $\widehat{\mu}^w$ sont définies de la même manière que ν^w et $\widehat{\nu}^w$ avec ${}^\circ P^{Y^D_{G^-}(w)}$ au lieu ${}^*P^{Y_G(w)}$ et ${}^\circ\widehat{P}^{\widehat{Y}^g_{(-D)^-}(w)}$ au lieu de ${}^*\widehat{P}^{Y_{D^-}(w)}$.

On remarquera que sur A, la tribu $(\Re_{G^-} \cap \widetilde{\Re}_{D^-})$ contient l'information fournie par $Y^D_{G^-}$, $\widehat{Y}^g_{(-D)^-}$ et par $(Y_u)_{D<u<G}$, et que les exemples 1, 2 et 3 s'adaptent également. Ainsi dans la situation de l'exemple 1, sur A la loi conditionnelle du couple $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ par rapport à $(\Re_{G^-} \cap \widetilde{\Re}_{D^-})$ est

$${}^\circ P^{Y^D_{G^-}}\Big(\cdot|0 \le U < R\Big) \otimes {}^\circ\widehat{P}^{\widehat{Y}^g_{(-D)^-}}\Big(\cdot|0 \le U < \widehat{R}\Big)\;,$$

ce qui signifie qu'il y a indépendance conditionnelle entre les variables aléatoires $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ et $(Y_u)_{D<u<G}$ étant donné $(Y^D_{G-}, \widehat{Y}^g_{(-D)-})$. Dans la situation de l'exemple 2, la loi citée plus haut est

$$^\circ P^{A_T, Y^D_{G-}} \otimes {}^\circ\widehat{P}^{r_S, \widehat{Y}^g_{(-D)-}}$$

et il y a indépendance conditionnelle entre $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ et $(Y_u)_{D<u<G}$ étant donné $(Y^D_{G-}, A_T, \widehat{Y}^g_{(-D)-}, r_s)$, où $^\circ P^{a,x}$ et $^\circ\widehat{P}^{a,x}$ sont les analogues des mesures $P^{a,x}$ et $\widehat{P}^{a,x}$ définies avec $^\circ P^x$ et $^\circ\widehat{P}^x$ au lieu de $^*P^x$ et $^*\widehat{P}^x$. Dans la situation de l'exemple 3, la loi citée plus haut est $^\circ P^{a, Y^D_{G-}} \otimes {}^\circ\widehat{P}^{b, \widehat{Y}^g_{(-D)-}}$ et on a l'indépendance conditionnelle entre les variables aléatoires $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ et $(Y_u)_{D<u<G}$ étant donné $(Y^D_{G-}, \widehat{Y}^g_{(-D)-})$.

On notera que si $Q(G \in I) = Q(D \in I) = 0$, alors on a le même résultat avec $\Re_{G-}$, $\widetilde{\Re}_{D-}$, Y^D_{G-}, $\widehat{Y}^g_{(-D)-}$ remplacés par respectivement Σ_{G-}, $\widetilde{\Sigma}_{D-}$, Y_{G-}, Y_D.

REFERENCES

[**1**] Boutabia, H. – Thèse de $3^{ème}$ cycle, Grenoble, 1985.

[**2**] Boutabia, H. et Maisonneuve, B. – Lois conditionnelles des excursions Markoviennes, *Sém. Prob.,* XXVI, Springer LN, 1526 (1992), 162–166.

[**3**] Dellacherie, C. et Meyer, P.A. – *Probabilités et Potentiel*, Chapitres I à IV, Hermann, 1975.

[**4**] Dellacherie, C. et Meyer, P.A. – *Probabilités et Potentiel*, Chapitres XII à XVI, Hermann, 1987.

[**5**] Dellacherie, C., Maisonneuve, B. et Meyer, P.A. – *Probabilités et Potentiel*, Chapitres XVII à XXIV, Hermann, 1992.

[**6**] Getoor, R.K. et Sharpe, M.J. – Excursion of dual processes, *Advances in Math.,* 45 (1982), 259–309.

[**7**] Getoor, R.K. – Killing a Markov process under a stationary measure involves creation, *Ann. Prob.,* 16 (1988).

[**8**] Kaspi, H. et Maisonneuve, B. – Predictible local times and exit systems, *Sém. Prob.,* XX, Springer LN, 1204 (1986), 95–100.

[**9**] Kuznetsov, S.E. – Construction of Markov processes with random times of birth and death, *Theor. Prob.,* 18 (1973), 571–575.

[**10**] Maisonneuve, B. – Exit systems, *Ann. Prob.,* 3 (1975), 399–411.

[**11**] Maisonneuve, B. – On the structure of certain excursions of Markov processes, *Z. Wahrs. Verw. Geb.,* 47 (1979), 61–67.

[**12**] Maisonneuve, B. – Systèmes de sorties (F_{D_t})-prévisibles, *Théor. Prob.,* 80 (1989), 395–405.

[**13**] Maisonneuve, B. – *Strict Past Conditioning at Arbitary Times*, Seminar on Stochastic Processes, 1985 (1986), 148–154, Birkhaüser, Boston.

[**14**] Maisonneuve, B. – Excursions chevauchant un temps aléatoire quelconque, *Asterisque,* 236, S.M.F. (1996).

[15] Mitro, J.B. – Dual Markov processes: Construction of useful auxiliary processes, *Z. Wahrs. Verw. Geb.,* 47 (1979), 139–156.

[16] Mitro, J.B. – Dual Markov functional: Applications of useful auxiliary processes, *Z. Wahrs. Verw. Geb.,* 48 (1979), 97–114.

[17] Mitro, J.B. – Exit systems for dual Markov processes, *Z. Wahrs. Verw. Geb.,* 66 (1984), 259–267.

Boutabia Hacène,
Université Badji Mokhtar Annaba, Institut de Mathématiques,
B.P. 12, El Hadjar, 23000 Annaba – ALGERIE