PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 56 Fasc. 3 – 1999

EXISTENCE GLOBALE ET STABILISATION FRONTIERE NON LINEAIRE D'UN SYSTEME D'ELASTICITE

A. Guesmia

Résumé: Dans ce travail, on étudie l'existence, l'unicité et la stabilisation d'un système d'élasticité par un feedback frontière non linéaire. On applique la théorie des semi-groupes non linéaires et des inégalités intégrales.

Abstract: In this paper, we study the existence, the uniqueness and the stabilization of an elasticity system with a nonlinear boundary feedback. We use the nonlinear semigroup theory and some integral inequalities.

1 – Introduction

Soit Ω un ouvert borné non vide dans $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, ...)$ de frontière Γ de classe C^2 et soit a_{ijkl}, $i, j, k, l = 1, ..., n$ un ensemble des fonctions dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ tels que

$$a_{ijkl}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl} \geq \alpha\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{ij} \quad \text{et} \quad a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl} \quad \text{sur} \quad \Omega \tag{1.1}$$

pour un nombre $\alpha > 0$ fixé et pour tout tenseur symétrique ε_{ij} (dans toute la note, on utilisera la convention de sommation sur les indices répétés). On fixe un point $x_0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ et on note

$$h(x) = x - x_0\,, \qquad R = \|h\|_{L^\infty(\Omega)}\ . \tag{1.2}$$

Posons

$$\Gamma_0 = \Big\{x \in \Gamma\colon\ h(x).\nu(x) \leq 0\Big\} \quad \text{et} \quad \Gamma_1 = \Gamma \backslash \Gamma_0 \tag{1.3}$$

avec $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_0 = \emptyset$ et $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ est le vecteur normal extérieur à Γ.

Received: January 30, 1998; *Revised*: July 13, 1998.
1991 Mathematics Subject Classification: 35L55, 35B40.
Keywords: Global existence, uniqueness, stabilization, nonlinear damping, integral inequalities, elasticity.

Soient $a \geq 0$ et $g_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ des fonctions continues croissantes telles que $g_i(0) = 0$.

Pour une fonction donnée $u = (u_1, ..., u_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ on pose

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ij} = a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \quad \text{ sur } \Omega$$

où, $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ et $u_{j,i} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$. En cas de nécéssité de précision on note $\varepsilon_{ij}(u)$ et $\sigma_{ij}(u)$ au lieu de ε_{ij}, σ_{ij}.

Considérons le système

$$(1.4) \qquad \begin{cases} u_i'' - \sigma_{ij,j} = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_i = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \sigma_{ij}\,\nu_j + a\,u_i + g_i(u_i') = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(0) = u_i^0 \;\text{ et }\; u_i'(0) = u_i^1 & \text{sur } \Omega, \\ i = 1, ..., n\ , \end{cases}$$

où, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $' = \frac{\partial}{\partial t}$, $\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ et $u_i(0)$, $u_i'(0)$ désignent, respectivement, les fonctions $x \mapsto u_i(x, 0)$, $x \mapsto u_i'(x, 0)$.

On définit l'énergie de la solution par la formule

$$(1.5) \qquad E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_i'\,u_i' + \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij})\,dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} a\,u_i\,u_i\,d\Gamma\,, \qquad t \in \mathbb{R}^+\ .$$

On observe que E est une fonction positive, et par la formule de Green on obtient, formellement,

$$(1.6) \qquad E'(t) = -\int_{\Gamma_1} u_i'\,g_i(u_i')\,d\Gamma \leq 0\ ,$$

(remarquer que $x\,g_i(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et par suite l'énergie est décroissante.

Dans [1], Alabau et Komornik ont obtenu la stabilité uniforme du système (1.4) dans le cas où, $a_{ijkl} = \text{const}$ et $g_i(x) = bx$ avec $b > 0$. Le but de ce travail est de généraliser ces résultats au cas non linéaire avec des coefficients a_{ijkl} dépendants de la variable de l'espace.

On suppose que

$$(1.7) \qquad \Gamma_0 \neq \emptyset \quad \text{ ou } \quad a > 0$$

et

$$(1.8) \qquad |g_i(x)| \leq \hat{c}_i\,(1 + |x|)\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\ ,$$

pour des constantes $\hat{c}_i > 0$, $i = 1, ..., n$.

On définit trois espaces de Hilbert H, V et W par

$$H = (L^2(\Omega))^n\,, \qquad \|u\|_H^2 = \int_\Omega u_i\, u_i\, dx\ ,$$

$$V = (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n\,, \qquad \|u\|_V^2 = \int_\Omega \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}\, dx + \int_{\Gamma_1} a\, u_i\, u_i\, d\Gamma$$

où, $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) :\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ (d'après les conditions (1.1), (1.7) et l'inégalité de Korn on constate que cette formule définit une norme sur V équivalente à la norme usuelle de $(H^1(\Omega))^n$) et

$$W = \Big(H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\Big)^n\,, \qquad \|u\|_W^2 = \int_\Omega (\Delta u_i\, \Delta u_i + \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij})\, dx + \int_{\Gamma_1} a\, u_i\, u_i\, d\Gamma\ .$$

On identifie H avec son dual H'. On obtient donc

$$W \subset V \subset H = H' \subset V' \subset W'\ ,$$

avec injection compacte et dense.

On a le résultat d'existence et d'unicité suivant:

Théorème 1.1. *On suppose que les conditions (1.1), (1.7) et (1.8) sont satisfaites. Pour toute donnée initiale $(u^0, u^1) \in V \times H$, le système (1.4) admet une solution (au sense faible) unique u vérifiant*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; V) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H)\ .$$

L'énergie de la solution, définie par (1.5) est décroissante. D'autre part, si z est une autre solution du système (1.4) correspondante à $(z^0, z^1) \in V \times H$, alors on a l'estimation suivante:

$$\|E(u - z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \ \leq\ E(u - z)(0)\ . \tag{1.9}$$

Pour la régularité de la solution on a le

Théorème 1.2. *Sous les conditions du Théorème 1.1 on a: pour toute donnée initiale $(u^0, u^1) \in W \times V$ telle que*

$$\sigma_{ij}(u^0)\, \nu_j + a\, u_i^0 + g_i(u_i^1) = 0 \quad \textit{sur}\ \ \Gamma_1 \tag{1.10}$$

la solution u (dite forte) du système (1.4) vérifie

$$u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V) \quad \textit{et} \quad u'' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H)\ . \tag{1.11}$$

Si de plus, les fonctions g_i sont globalement Lipschitz alors on a:

$$u \in L^{\infty}(\mathbb{R}^+; W) \ . \tag{1.12}$$

On étudie maintenant la stabilité du système (1.4). On désigne par γ le plus grand nombre positif tel que

$$(2\, a_{ijkl} - h_m\, \partial_m a_{ijkl})\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl} \ \geq\ \gamma\, a_{ijkl}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl} \quad \text{sur} \ \ \Omega \ , \tag{1.13}$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij} où, $h_m(x) = x_m - x_m^0$ et $\partial_m a_{ijkl} = \frac{\partial a_{ijkl}}{\partial x_m}$. On suppose que

$$|x - x_0| = R \quad \text{pour tout} \ \ x \in \Gamma_1 \ . \tag{1.14}$$

La condition (1.14) est vérifie pour tout domaine Ω où, la partie Γ_1 de sa frontière est une sphère; par example

$$\Omega = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n :\ r < |x - x_0| < R \Big\} \ ,$$

où, $0 < r < R$ et $\Gamma_1 = \{x \in \Gamma\colon\ |x - x_0| = R\}$ ou $r = 0$ et $\Gamma_0 = \emptyset$.

Le résultat principal de ce travail est le suivant:

Théorème 1.3. *On suppose que les conditions (1.1), (1.3), (1.7), (1.13) et (1.14) sont satisfaites. Supposons que les fonctions g_i vérifient, pour deux constantes $p \in [1, +\infty)$, $q \in\,]0, 1]$ et pour des constantes $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$*

$$c_1\, |x|^p \leq |g_i(x)| \leq c_2\, |x|^q \quad si \ \ |x| \leq 1 \tag{1.15}$$

et

$$c_3\, |x| \leq |g_i(x)| \leq c_4\, |x| \quad si \ \ |x| > 1 \ . \tag{1.16}$$

Alors, pour tout $(u^0, u^1) \in V \times H$, la solution du système (1.4) vérifie les estimations

$$E(t) \leq M_0\, E(0)\, e^{-\omega t} \quad \forall\, t > 0 \quad si \ \ p = q = 1 \tag{1.17}$$

et

$$E(t) \leq M_1\, (1 + t)^{-\frac{r}{1-r}} \quad \forall\, t > 0 \quad si \ \ (p, q) \neq (1, 1) \ , \tag{1.18}$$

où, $r = \min\{\frac{2}{p+1}, \frac{2q}{q+1}\}$; $\omega, M_0 > 0$ sont des constantes indépendantes de $E(0)$ et $M_1 > 0$ est une constante dépendante de $E(0)$.

La condition (1.16) implique que g_i n'est pas bornée. Le résultat suivant montre qu'on peut affaiblir cette condition pour les solutions plus régulières.

Théorème 1.4. *Sous les conditions (1.1), (1.3), (1.7), (1.13) et (1.14). Si les fonctions g_i vérifient (1.15) telles que*

$$\begin{cases} p \geq 1 & \text{si } n = 1, \\ p > 1 & \text{si } n = 2, \\ p \geq n-1 & \text{si } n \geq 3 \end{cases} \tag{1.19}$$

et la condition suivante, pour $\lambda = \frac{1}{p-1}(p - \frac{r}{2-r})$ *(et* $\lambda \geq 1$ *si* $p = 1$*) où,* $r = \min\{\frac{2}{p+1}, \frac{2q}{q+1}\}$ *et* $c_5 > 0$,

$$|g_i(x)| \leq c_5 \, |x|^\lambda \quad \text{si } \; |x| > 1 \; . \tag{1.20}$$

Alors, pour toute donnée initiale $(u^0, u^1) \in W \times V$ *vérifiant (1.10), la solution du système (1.4) vérifie les estimations (1.17) et (1.18) avec des constantes* M_0, M_1 *et* ω *dépendantes de* u.

Remarques.

- Le Théorème 1.3 améliore les résultas de Alabau et Komornik [1] où, ils ont obtenu la stabilité uniforme de (1.4) dans le cas linéaire $g_i(x) = b\,x$, $a_{ijkl} =$ const et sous la condition $a < \frac{\alpha}{4R}$.
- Dans le cas linéaire $g_i(x) = b\,x$, $b > 0$, on a donné dans [6] une estimation du taux de décroissance en fonction des paramètres γ, α, b et R. De même, on donnera dans la démonstration du Théorème 1.3 une estimation de ω et M_0.
- Les résultats de ce travail restent vrais dans le cas où, a est une fonction positive dans $C^1(\bar{\Gamma}_1)$ telle que $a \geq a_0 > 0$ sur Γ_1 si $\Gamma_0 = \emptyset$.
- Pour les Théorèmes 1.1 et 1.2, on peut affaiblir la condition (1.8) en admettant des nonlinéarités surlinéaires, comme cela a été fait auparavant pour l'équation des ondes (voir Komornik [7]): on suppose qu'il existe des constantes $c_i' > 0$ et $q_i \in [1, +\infty)$, $i = 1, ..., n$ telles que $q_i(n-2) \leq n$ et $g_i(x) \leq c_i'(1 + |x|^{q_i})$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- La démonstration du résultat d'existence et d'unicité est basée sur la théorie des semi-groupes non linéaires (voir [2], [3] et [7]). Pour prouver les Théorèmes 1.3 et 1.4 on utilise des inégalités intégrales appliquées dans [4], [5], [8], [9] et [16], la methode de la théorie du contrôle (voir [10] et ses références) et quelques inégalités de [15].

2 – L'existence et l'unicité de la solution

On prend l'application du dual $A\colon V \to V'$, par la condition (1.8) la formule

$$\Big\langle Bu, v\Big\rangle_{V',V} := \int_{\Gamma_1} g_i(u_i)\, v_i\, d\Gamma\,, \qquad u,v\in V$$

définit une application $B\colon V\to V'$ (non linéaire en général). En effet, on utilise (1.8) et l'injection continue

$$V \subset (H^1(\Omega))^n \subset (L^2(\Gamma_1))^n\ .$$

On trouve

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_1} g_i(u_i)\, v_i\, d\Gamma\right| &\le \left(\int_{\Gamma_1} g_i(u_i)\, g_i(u_i)\, d\Gamma_1\right)^{\frac12} \left(\int_{\Gamma_1} v_i\, v_i\, d\Gamma\right)^{\frac12}\\ &\le c\,(1+\|u\|_V)\, \|v\|_V < \infty\ .\end{aligned}$$

D'où $Bu\in V'$ pour tout $u\in V$.

On multiplie l'équation dans (1.4) par $v\in V$ et on intègre par parties sur Ω. On utilise les conditions au bord et on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \Big(u_i'' - \sigma_{ij,j}(u)\Big)\, v_i\, dx\\ &= \int_\Omega \Big(u_i''\, v_i + \sigma_{ij}(u)\, v_{i,j}\Big)\, dx - \int_\Gamma \sigma_{ij}(u)\, \nu_j\, v_i\, d\Gamma\\ &= \int_\Omega \Big(u_i''\, v_i + a_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}(u)\, \varepsilon_{ij}(v)\Big)\, dx + \int_{\Gamma_1} \Big(a\, u_i\, v_i + g_i(u_i')\, v_i\Big)\, d\Gamma\\ &= \Big\langle u'' + Au + Bu',\, v\Big\rangle_{V',V}\ ,\end{aligned}$$

donc

$$u'' + Au + Bu' = 0 \quad \text{sur}\ \ \mathbb{R}^+\ . \tag{2.1}$$

On pose

$$u' := z\,, \qquad U := (u,z) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A}\, U := (-z,\, Au + Bz)\ .$$

On peut écrire le système (1.4) sous la forme

$$U' + \mathcal{A}\, U = 0 \ \ \text{sur}\ \mathbb{R}^+\,, \qquad U(0) = (u^0, u^1)\ . \tag{2.2}$$

On définit l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = V \times H$ et on considère l'opérateur $\mathcal{A}$ définie dans $\mathcal{H}$, de domaine

$$D(\mathcal{A}) = \Big\{ U = (u,z) \in V \times V :\ Au + Bz \in H \Big\} \ .$$

Lemme 2.1. *$\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone dans $\mathcal{H}$.*

Démonstration: La croissance des fonctions g_i donne la monotonie de $\mathcal{A}$. En effet, pour $U, \tilde{U} \in D(\mathcal{A})$ on a

$$\begin{aligned}
\Big\langle \mathcal{A}U - \mathcal{A}\tilde{U},\, U - \tilde{U} \Big\rangle_{\mathcal{H}} &= \Big\langle \tilde{z} - z,\, u - \tilde{u} \Big\rangle_V + \Big\langle Au - A\tilde{u} + Bz - B\tilde{z},\ z - \tilde{z} \Big\rangle_H \\
&= -\Big\langle z - \tilde{z},\, u - \tilde{u} \Big\rangle_V + \Big\langle A(u - \tilde{u}) + Bz - B\tilde{z},\ z - \tilde{z} \Big\rangle_{V',V} \\
&= \Big\langle Bz - B\tilde{z},\ z - \tilde{z} \Big\rangle_{V',V} \\
&= \int_{\Gamma_1} \Big(g_i(z_i) - g_i(\tilde{z}_i) \Big)\, (z_i - \tilde{z}_i)\, d\Gamma \ \geq\ 0 \ .
\end{aligned}$$

On montre maintenant que l'opérateur $I + \mathcal{A}$ est surjectif. En effet, soit $(u^0, z^0) \in \mathcal{H}$, on cherche $(u,z) \in D(\mathcal{A})$ tel que $(I + \mathcal{A})(u,z) = (u^0, z^0)$, c'est à dire

$$u = z + u^0 \quad \text{ et } \quad z + Az + Bz = z^0 - Au^0 \ .$$

Donc il suffit de montrer que $I + A + B :\ V \to V'$ est surjectif et de prendre $u = z + u^0$ et $z \in V$ tel que $(I + A + B)\, z = z^0 - Au^0$. Soit $f \in V'$, on pose $F\colon V \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u) \ =\ \frac{1}{2}\, \|u\|_H^2 + \frac{1}{2}\, \|u\|_V^2 + \sum_{i=1}^{n} \int_\Gamma G_i(u_i)\, d\Gamma - \langle f, u \rangle_{V',V}$$

où, $G_i(t) = \int_0^t g_i(s)\, ds,\ t \in \mathbb{R}$. On utilise (1.8) et on trouve que F est bien définie, continue, differentiable et on a

$$F'(u)\, v = \Big\langle (I{+}A{+}B)\, u - f,\ v \Big\rangle_{V',V}, \qquad \forall\, u, v \in V \ .$$

De plus, la monotonie des g_i implique la convexité de F, et comme $F(v) \to \infty$ quand $\|v\|_V \to \infty$ (car $F(v) \geq (\frac{1}{2}\, \|v\|_V - \|f\|_{V'})\, \|v\|_V$), alors F atteint son minimum en un point u. Donc $F'(u) = 0$, c'est à dire $(I + A + B)\, u = f$.

On applique la théorie des semi-groupes non linéaires et on trouve le Théorème 1.1 et la première partie du Théorème 1.2.

La démonstration de la deuxième partie du Théorème 1.2 se termine si on montre le

Lemme 2.2. *Si, pour tout $i = 1, \dots, n$, g_i est globalement Lipschitz, alors $D(\mathcal{A}) = \{(u, z) \in W \times V : \sigma_{ij}(u)\,\nu_j + a\,u_i + g_i(z_i) = 0$ sur $\Gamma_1\}$ et il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\|u\|_W \le c\Big(\|Au + Bz\|_H + \|z\|_V\Big) \quad \forall\,(u, z) \in D(\mathcal{A}) \ . \tag{2.3}$$

Les propriétés (1.11) et (2.1) impliquent que $u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$ et $Au + Bu' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H)$. On applique (2.3) et on obtient (1.12).

Démonstration du Lemme 2.2: Soit $(u, z) \in W \times V$ tel que $\sigma_{ij}(u)\,\nu_j + a\,u_i + g_i(z_i) = 0$, sur Γ_1. Pour que soit $(u, z) \in D(\mathcal{A})$, il reste à montrer que $Au + Bz \in H$. Pour cela, il suffit de prouver l'estimation

$$\left|\Big\langle Au + Bz,\, v\Big\rangle_{V',V}\right| \le c\,\|v\|_H\,, \qquad \forall\, v \in V \tag{2.4}$$

pour une constante c. On utilise la définition du A et B et on obtient

$$\Big\langle Au + Bz,\, v\Big\rangle_{V',V} = \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)\,dx + \int_{\Gamma_1}\Big(a\,u_i\,v_i + g_i(z_i)\,v_i\Big)\,d\Gamma\ .$$

Comme $u \in W$, on applique la formule de Green au terme $\sigma_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v) = \sigma_{ij}(u)\,v_{i,j}$. On obtient

$$\begin{aligned}\Big\langle Au + Bz,\, v\Big\rangle_{V',V} &= -\int_\Omega \sigma_{ij,j}(u)\,v_i\,dx + \int_{\Gamma_1}\Big(\sigma_{ij}(u)\,\nu_j + a\,u_i + g_i(z_i)\Big)\,v_i\,d\Gamma \\ &= -\int_\Omega \sigma_{ij,j}(u)\,v_i\,dx\ .\end{aligned}$$

Comme $u \in W$, alors $(\sigma_{1j,j}, \dots, \sigma_{nj,j})(u) \in H$, et par suite on trouve (2.4). (Cette inclusion montre que $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$ sans la condition: g_i est globalement Lipschitz; car on constate maintenant que $(H_0^2(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n \subset D(\mathcal{A})$). D'autre part, soit $(u, z) \in D(\mathcal{A})$ c'est à dire: $u, z \in V$ et $Au + Bz \in H$, donc pour tout $v \in V$ on a

$$\Big\langle Au + Bz,\, v\Big\rangle_{V',V} = \Big\langle Au + Bz,\, v\Big\rangle_H\,,$$

et par suite

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)\,dx = \int_\Omega f_i\,v_i\,dx + \int_{\Gamma_1} h_i\,v_i\,d\Gamma$$

où, $f := (f_1, \dots, f_n) = Au + Bz$ et $h_i = -a\,u_i - g_i(z_i)$. Cette égalité implique que u est la solution faible du système suivant:

$$\begin{cases} -\sigma_{ij,j} = f_i & \text{dans } \Omega, \\ u_i = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \sigma_{ij}\,\nu_j = h_i & \text{sur } \Gamma_1, \\ i = 1, \dots, n\ . \end{cases}$$

On a $f\in H$ et $h:=(h_1,...,h_n)\in V$, en effet, $f\in H$, $u\in V$ par hypothèse et comme g_i est globalement Lipschitz (remarquer aussi que $g_i(0)=0$), alors

$$\int_\Omega g_i(z_i)\,g_i(z_i)\,dx \;\le\; c\int_\Omega z_i\,z_i \;\le\; c\,\|z\|_V^2 \;<\; \infty$$

et

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla g_i(z_i)|\,|\nabla g_i(z_i)|\,dx \;&=\; \int_\Omega |g_i'(z_i)|^2\,|\nabla z_i|^2\,dx\\ &\le\; c\int_\Omega |\nabla z_i|\,|\nabla z_i|\,dx \;\le\; c\,\|z\|_V^2 \;<\; \infty\;.\end{aligned}$$

Donc on applique la théorie de la régularité elliptique (remarquer que $\bar\Gamma_0\cap\bar\Gamma_1=\emptyset$ par hypothèse), on conclut que $u\in W$, $\sigma_{ij}(u)\,\nu_j+a\,u_i+g_i(z_i)=0$ sur Γ_1 et

$$\|u\|_W \;\le\; c'\Big(\|Au+Bz\|_H+\|(g_1(z_1),...,g_n(z_n))\|_V\Big) \;\le\; c\Big(\|Au+Bz\|_H+\|z\|_V\Big)\;.$$

D'où (2.3). La démonstration du Lemme 2.2 est terminée. ∎

3 – Démonstration du Théorème 1.3

On va montrer les estimations (1.17), (1.18) pour les solutions fortes, par arguments de densité (voir Lemme 2.2 et [9, Lemma 2.2]), le résultat se généralise aux solutions faibles. On prend alors la donnée initiale (u^0,u^1) dans $W\times V$ telle que (1.10), donc la solution du système (1.4) vérifie (1.11) et (1.12).

Lemme 3.1. *La fonction $E\colon\ \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ définie par (1.5) est décroissante, localement absolument continue et*

$$\int_S^T\int_{\Gamma_1} u_i'\,g_i(u_i')\,d\Gamma\,dt \;=\; E(S)-E(T) \;\le\; E(S) \tag{3.1}$$

pour tout $0\le S<T<\infty$.

Démonstration: On fixe $0\le S<T<\infty$, d'après (1.4) et (1.5) on a l'égalité

$$\begin{aligned}0 \;&=\; \int_S^T\int_\Omega (u_i''-\sigma_{ij,j})\,u_i'\,dx\,dt\\ &=\; \int_S^T\int_\Omega (u_i''\,u_i'+\sigma_{ij}\,u_{i,j}')\,dx\,dt \;-\int_S^T\int_\Gamma \sigma_{ij}\,\nu_j\,u_i'\,d\Gamma\,dt\\ &=\; \int_S^T\int_\Omega (u_i''\,u_i'+\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}')\,dx\,dt \;+\int_S^T\int_{\Gamma_1}\Big(a\,u_i\,u_i'+u_i'\,g_i(u_i')\Big)\,d\Gamma\,dt\\ &=\; E(T)-E(S) \;+\int_S^T\int_{\Gamma_1} u_i'\,g_i(u_i')\,d\Gamma\,dt\;.\end{aligned}$$

Et par suite

$$E(S) - E(T) \;=\int_S^T \int_{\Gamma_1} u_i'\, g_i(u_i')\, d\Gamma\, dt\ . \tag{3.2}$$

Or $x\, g_i(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, donc le terme de droite de (3.2) est positif; alors E est décroissante. L'identité (3.2) implique aussi que E est localement absolument continue, et comme E est positive alors (3.1) est satisfaite. ∎

On démontre le Théorème 1.3 en plusieurs étapes.

Etape 1. On fixe $T > 0$. Pour tout $(y^0, y^1) \in \mathcal{H}$, cherchons un contrôle $\phi \in (L^2(\Gamma_1 \times [0,T]))^n$ tel que la solution du système

$$\begin{cases} y_i'' - \sigma_{ij,j}(y) = 0 & \text{dans } \Omega \times [0,T], \\ y_i = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times [0,T], \\ \sigma_{ij}(y)\, \nu_j + a_0\, y_i = \phi_i & \text{sur } \Gamma_1 \times [0,T], \\ y_i(0) = 0 \;\text{ et }\; y_i'(0) = 0 & \text{sur } \Omega, \\ i = 1, ..., n \end{cases} \tag{3.3}$$

vérifie

$$y(T) = y^0, \;\; y'(T) = y^1 \quad \text{sur } \;\Omega \tag{3.4}$$

où, $0 < a_0 < \frac{\gamma\alpha}{4R}$ si $a \geq \frac{\gamma\alpha}{4R}$ et $a_0 = a$ si non.

Soit $(v^0, v^1) \in \mathcal{H}$, on considère le système suivant:

$$\begin{cases} v_i'' - \sigma_{ij,j}(v) = 0 & \text{dans } \Omega \times [0,T], \\ v_i = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times [0,T], \\ \sigma_{ij}(v)\, \nu_j + a_0\, v_i - v_i' = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times [0,T], \\ v(T) = v^0 \;\text{ et }\; v'(T) = v^1 & \text{sur } \Omega, \\ i = 1, ..., n\ , \end{cases} \tag{3.5}$$

qui admet une solution unique $(v(t), v'(t)) \in C([0,T]; \mathcal{H})$. (Il suffit de faire le changement de variable $\varphi(t) = v(T - t)$, $t \in [0,T]$ et appliquer le Théorème 1.1.) D'après [6, Theorem 1.3] et [5, Théorème 2], on a, il existe une constante positive ω_0 telle que

$$E_0(v(t)) \;\leq\; E_0(v(T))\, e^{1-\omega_0 (T-t)}\,, \qquad \forall\, t \in [0,T] \tag{3.6}$$

pour tout $(v^0, v^1) \in \mathcal{H}$ où, $E_0(v)$ est définie par (1.5) où, on remplace u par v et a par a_0.

On utilise la solution v du système (3.5) et on considère le système

$$
\text{(3.7)} \qquad \begin{cases} w_i'' - \sigma_{ij,j}(w) = 0 & \text{dans } \Omega \times [0,T], \\ w_i = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times [0,T], \\ \sigma_{ij}(w)\,\nu_j + a_0\, w_i + w_i' = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times [0,T], \\ w(0) = v(0) \quad \text{et} \quad w'(0) = v'(0) & \text{sur } \Omega, \\ i = 1, ..., n\ , \end{cases}
$$

qui admet une solution unique $(w(t), w'(t)) \in C([0,T]; \mathcal{H})$ car $(v(0), v'(0)) \in \mathcal{H}$.

On pose $y = w - v$. D'après (3.5) et (3.7), on a y vérifie (3.3) avec $\phi = -(w' + v')$. On fixe $T > \frac{1}{\omega_0}(1 - \ln\frac{a_0}{a})$ et on pose $d = \frac{a}{a_0}\, e^{1-\omega_0 T}$; donc $d \in\,]0,1[$. On définit l'opérateur linéaire $\Lambda\colon\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ par

$$
\Lambda(v^0, v^1) = \Big(w(T),\ w'(T)\Big)\ .
$$

D'après (3.6), on a $E_0(v(0)) \le \frac{a_0}{a}\, dE_0(v(T))$. Alors (remarquer que les fonctions E et E_0 définies par (1.5) correspondant à a et a_0, respectivement, vérifient $E_0 \le E \le \frac{a}{a_0} E_0$; $E_0(w(0)) = E_0(v(0))$ et $E_0(w)$ est décroissante)

$$
\begin{aligned}
\|\Lambda(v^0, v^1)\|^2_{\mathcal{H}} \ &=\ \|(w(T), w'(T))\|^2_{\mathcal{H}} \ =\ 2\,E(w(T)) \ \le\ \frac{2a}{a_0}\, E_0(w(T)) \ \le \\
\le\ \frac{2a}{a_0}\, E_0(w(0)) \ &=\ \frac{2a}{a_0}\, E_0(v(0)) \ \le\ 2\,dE_0(v(T)) \ \le\ 2\,dE(v(T)) \ =\ d\,\|(v^0, v^1)\|^2_{\mathcal{H}}\ .
\end{aligned}
$$

Et par conséquent,

$$
\|\Lambda\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} \le d < 1\ .
$$

Donc $\Lambda - I$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Alors pour tout $(y^0, y^1) \in \mathcal{H}$, il existe $(v^0, v^1) \in \mathcal{H}$ tel que

$$
\text{(3.8)} \quad (y^0, y^1) = (\Lambda - I)\,(v^0, v^1) = \Big(w(T), w'(T)\Big) - (v^0, v^1) = \Big(y(T),\ y'(T)\Big)\ .
$$

D'où le résultat (3.4). D'autre part, on multiplie la première equation de (3.5) par v_i' et la première equation de (3.7) par w_i', on intègre par parties sur $\Omega \times [0,T]$ et on obtient

$$
\text{(3.9)} \qquad \int_0^T \int_{\Gamma_1} v_i'\, v_i'\, d\Gamma\, dt \ =\ E_0(v(T)) - E_0(v(0))\ ;
$$

$$
\text{(3.10)} \qquad \int_0^T \int_{\Gamma_1} w_i'\, w_i'\, d\Gamma\, dt \ =\ E_0(w(0)) - E_0(w(T))\ .
$$

Et par suite, (utiliser: $(y^0,y^1)=(\Lambda-I)(v^0,v^1)$ et $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})}\le\sqrt{d}$)

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\Gamma_1}\phi_i\,\phi_i\,d\Gamma\,dt \;&\le\; 2\int_0^T\int_{\Gamma_1}(v_i'\,v_i'+w_i'\,w_i')\,d\Gamma\,dt\\ &=\;2\Big(E_0(v(T))-E_0(v(0))+E_0(w(0))-E_0(w(T))\Big)\\ &=\;2\Big(E_0(v(T))-E_0(w(T))\Big)\\ &\le\;2\,E_0(v(T))\;\le\;2\,E(v(T))\;=\;\|(v^0,v^1)\|^2_{\mathcal{H}}\ ,\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^T\int_{\Gamma_1}\phi_i\,\phi_i\,d\Gamma\,dt\;\le\;\frac{1}{(1-\sqrt{d})^2}\,\|(y^0,y^1)\|^2_{\mathcal{H}}\ . \tag{3.11}$$

D'où $\phi\in(L^2(\Gamma_1\times[0,T]))^n$.

Etape 2. On applique le principe d'invariance de La Salle et on montre que l'énergie $E(t)\to 0$ quand $t\to\infty$. En effet, il suffit de montrer cette propriété pour $(u^0,u^1)\in W\times V$ tel que (1.10) et le résultat se généralise au $(u^0,u^1)\in\mathcal{H}$ par arguments de densité. D'aprés le Théorème 1.2 (on peut supposer que les fonctions g_i sont globalement Lipschitz et le résultat se généralise par l'application du [9, Lemma 2.2]), la trajectoire $\{u(t),u'(t)\}_{t\ge 0}$ est bornée dans $W\times V$, donc elle est relativement compacte dans $\mathcal{H}$. Appliquant le principe d'invariance de La Salle, il suffit de montrer que l'ensemble ω-limite

$$\omega\{u^0,u^1\}=\{0,0\}\ . \tag{3.12}$$

Comme $\omega\{u^0,u^1\}$ contient seulement les donnés initiales où, l'énergie est constante, on déduit de (1.6) que $u'=0$ sur Γ_1, donc u' vérifie le système (1.4) avec $\sigma_{ij}(u')\,\nu_j=0$ sur Γ_1. On applique [6, Theorem 1.1 et Lemma 2.2] (remarquer aussi que $E(u')=\text{const}$) on obtient $u'=0$; alors (1.4) implique que

$$\begin{cases}\sigma_{ij,j}=0 & \text{dans } \Omega\times\mathbb{R}^+,\\ u_i=0 & \text{sur } \Gamma_0\times\mathbb{R}^+,\\ \sigma_{ij}\,\nu_j+a\,u_i=0 & \text{sur } \Gamma_1\times\mathbb{R}^+,\\ u_i(0)=u_i^0 \ \text{ et }\ u_i'(0)=u_i^1 & \text{sur } \Omega,\\ i=1,...,n\ .\end{cases} \tag{3.13}$$

Multiplions (3.13) par u et intégrons par parties, on obtient

$$0 = \int_\Omega \sigma_{ij,j}\, u_i\, dx = -\int_\Omega \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}\, dx - \int_{\Gamma_1} a\, u_i\, u_i\, d\Gamma = -\|u\|_V^2 ,$$

ce qui implique que $u = 0$, d'où (3.12). Ce résultat de stabilité forte sera utilisé dans la démonstration de (1.18).

On montre maintenant les estimation (1.17) et (1.18). On choisit $(y^0, y^1) = (u(T), u'(T))$, donc le système (3.3) admet une solution unique $(y, y') \in C(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$ telle que

$$\Big(y(T),\, y'(T)\Big) = \Big(u(T),\, u'(T)\Big) . \tag{3.14}$$

D'après (1.4), (3.3) et (3.14) et par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T\!\!\int_\Omega \Big[y_i'\,\Big(u_i'' - \sigma_{ij,j}(u)\Big) + u_i'\Big(y_i'' - \sigma_{ij,j}(y)\Big)\Big]\, dx\, dt \\ &= \int_0^T\!\!\int_\Omega \Big(u_i'\, y_i' + a_{ijkl}\, u_{i,j}\, y_{k,l}\Big)'\, dx\, dt \\ &\quad + \int_0^T\!\!\int_{\Gamma_1} \Big(y_i'\,\Big(a\, u_i + g_i(u_i')\Big) + u_i'\,(a_0\, y_i - \phi_i)\Big)\, d\Gamma\, dt \\ &= \int_\Omega \Big(u_i'(T)\, u_i'(T) + a_{ijkl}\, u_{i,j}(T)\, u_{k,l}(T)\Big)\, dx + \int_{\Gamma_1} a\, u_i(T)\, u_i(T)\, d\Gamma \\ &\quad + \int_0^T\!\!\int_{\Gamma_1} \Big((a_0 - a)\, u_i'\, y_i + y_i'\, g_i(u_i') - u_i'\, \phi_i\Big)\, d\Gamma\, dt \\ &= 2\, E(T) + \int_0^T\!\!\int_{\Gamma_1} \Big((a_0 - a)\, u_i'\, y_i + y_i'\, g_i(u_i') - u_i'\, \phi_i\Big)\, d\Gamma\, dt , \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$E(T) = \frac{1}{2}\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_1} \Big((a - a_0)\, u_i'\, y_i + u_i'\, \phi_i - y_i'\, g_i(u_i')\Big)\, d\Gamma\, dt . \tag{3.15}$$

D'après la démonstration de (3.4) et (3.11), on a $y = w - v$, $\phi = -(w' + v')$ où, v et w sont les solutions des systèmes (3.5) et (3.7), respectivement, et

$$\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_1} (w_i'\, w_i' + v_i'\, v_i')\, d\Gamma\, dt \le \frac{1}{(1-\sqrt{d})^2}\, E(T) . \tag{3.16}$$

On note par δ la constante positive (dépend seulement de Ω et de a) telle que

$$\|\varphi\|^2_{(L^2(\Gamma))^n} \le \delta\, \|\varphi\|_V^2 , \quad \forall\, \varphi \in V . \tag{3.17}$$

Cas $p = q = 1$. On a, d'après (1.15)–(1.16), (3.1) et (3.15)–(3.16),

$$\begin{aligned}
E(T) &\leq \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_1}\Big(|u_i'| + |g_i(u_i')|\Big)\Big((a-a_0)\,|y_i| + |y_i'| + |\phi_i|\Big)\,d\Gamma\,dt \\
&\leq \frac{\sqrt{3}}{2}\bigg(\int_0^T\int_{\Gamma_1}\Big(u_i'\,u_i' + 2\,u_i'\,g_i(u_i') + g_i(u_i')\,g_i(u_i')\Big)\,d\Gamma\,dt\bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad\times\bigg(\int_0^T\int_{\Gamma_1}\Big((a-a_0)^2\,y_i\,y_i + y_i'\,y_i' + \phi_i\,\phi_i\Big)\,d\Gamma\,dt\bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq b_1\bigg(\int_0^T\int_{\Gamma_1}u_i'\,g_i(u_i')\,d\Gamma\,dt\bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad\times\bigg(\int_0^T\int_{\Gamma_1}(w_i'\,w_i' + v_i'\,v_i')\,d\Gamma\,dt \;+\; \delta\,(a-a_0)^2\int_0^T\Big(\|v\|_V^2 + \|w\|_V^2\Big)\,dt\bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq b_1\Big(E(0) - E(T)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad\times\bigg(\frac{1}{(1-\sqrt{d})^2}\,E(T) + 2\,\delta\,T\,\frac{a}{a_0}\,(a-a_0)^2\Big(E_0(v(T)) + E_0(w(0))\Big)\bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq b_1\Big(E(0) - E(T)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad\times\bigg(\frac{1}{(1-\sqrt{d})^2}\,E(T) + 2\,\delta\,T\,\frac{a}{a_0}\,(a-a_0)^2\Big(1 + \frac{a_0}{a}\,d\Big)\,E_0(v(T))\bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq b_2\Big(E(0) - E(T)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(E(T)\Big)^{\frac{1}{2}}\,,
\end{aligned}$$

où,

$$b_1 \;=\; \sqrt{\frac{3}{2}}\;\sqrt{2 + \max\{c_2, c_4\} + \max\Big\{\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_3}\Big\}}\;;$$

$$b_2 \;=\; \frac{b_1}{1-\sqrt{d}}\;\sqrt{1 + 2\,\delta\,T\,(a-a_0)^2\Big(\frac{a}{a_0} + d\Big)}\;.$$

Et par conséquent

$$E(T) \;\leq\; \frac{1}{1+b_3}\,E(0) \tag{3.18}$$

où, $b_3 = \frac{1}{b_2^2}$. Par la même manière que dans la démonstration de (3.18) (on remplace l'intervalle $[0, T]$ par $[(m-1)\,T,\, mT]$), on obtient

$$E(mT) \;\leq\; \frac{1}{1+b_3}\,E\Big((m-1)\,T\Big) \;\leq\; \frac{1}{(1+b_3)^m}\,E(0)\,, \qquad m = 1, 2, \dots\,,$$

ce qui implique que $E(t) \le M_0\, E(0)\, e^{-\omega t}$ avec $M_0 = 1 + b_3$ et $\omega = \frac{1}{T}\, \ln(1+b_3)$. D'où (1.17).

Cas $(p,q) \ne (1,1)$. On fixe $t \in \mathbb{R}^+$, soient

$$\Gamma_i^+ = \Big\{ x \in \Gamma_1 \colon \, |u_i'| > 1 \Big\} \quad \text{et} \quad \Gamma_i^- = \Big\{ x \in \Gamma_1 \colon \, |u_i'| \le 1 \Big\} \, . \tag{3.19}$$

On utilise (1.15), (1.16), (3.1) et on obtient (dans toute la suite, c désigne une constante positive dépendante de $E(0)$ et de T)

$$\begin{aligned}
\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^-} |u_i'|\, |\phi_i|\, d\Gamma\, dt \;&\le\; \Big(\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^-} u_i'\, u_i'\, d\Gamma\, dt \Big)^{\frac12} \Big(\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^-} \phi_i\, \phi_i\, d\Gamma\, dt \Big)^{\frac12} \\
&\le\; c \Big(\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^-} |u_i'|^{p+1}\, d\Gamma\, dt \Big)^{\frac{1}{p+1}} \Big(\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^-} (v_i'\, v_i' + w_i'\, w_i')\, d\Gamma\, dt \Big)^{\frac12} \\
&\le\; c \Big(E(0) - E(T) \Big)^{\frac{1}{p+1}} \Big(E(T) \Big)^{\frac12} \;;
\end{aligned}$$

de même, en utilisant (3.17),

$$\begin{aligned}
\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^-} (a - a_0)\, |u_i'|\, |y_i|\, d\Gamma\, dt \;&\le\; c \Big(\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^-} u_i'\, u_i'\, d\Gamma\, dt \Big)^{\frac12} \Big(\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^-} y_i\, y_i\, d\Gamma\, dt \Big)^{\frac12} \\
&\le\; c \Big(\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^-} |u_i'|^{p+1}\, d\Gamma\, dt \Big)^{\frac{1}{p+1}} \Big(\int_0^T \Big(\|v\|_V^2 + \|w\|_V^2 \Big)\, dt \Big)^{\frac12} \\
&\le c \Big(E(0) - E(T) \Big)^{\frac{1}{p+1}} \Big(E(T) \Big)^{\frac12} \;;
\end{aligned}$$

et par la même manière, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^-} |y_i'|\, |g_i(u_i')|\, d\Gamma\, dt \;&\le\; c \Big(\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^-} g_i(u_i')\, g_i(u_i')\, d\Gamma\, dt \Big)^{\frac12} \Big(\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^-} y_i'\, y_i'\, d\Gamma\, dt \Big)^{\frac12} \;\le \\
&\le\; c \Big(\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^-} |g_i(u_i')|^{\frac{q+1}{q}}\, d\Gamma\, dt \Big)^{\frac{q}{q+1}} \Big(\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^-} (v_i'\, v_i' + w_i'\, w_i')\, d\Gamma\, dt \Big)^{\frac12} \\
&\le\; c \Big(E(0) - E(T) \Big)^{\frac{q}{q+1}} \Big(E(T) \Big)^{\frac12} \, .
\end{aligned}$$

D'autre part, et comme dans le cas $p = q = 1$, on a

$$\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^+} \Big((a - a_0)\, u_i'\, y_i + u_i'\, \phi_i - y_i'\, g_i(u_i') \Big)\, d\Gamma\, dt \;\le\; c \Big(E(0) - E(T) \Big)^{\frac12} \Big(E(T) \Big)^{\frac12} \, .$$

Alors, on substitut ces inégalités dans (3.15), on obtient

$$\Big(E(T)\Big)^{\frac{1}{2}} \le c\left(\Big(E(0)-E(T)\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(E(0)-E(T)\Big)^{\frac{1}{p+1}} + \Big(E(0)-E(T)\Big)^{\frac{q}{q+1}}\right),$$

ce qui implique que

$$E(0) \le c\left(E(0)-E(T) + \Big(E(0)-E(T)\Big)^{\frac{2}{p+1}} + \Big(E(0)-E(T)\Big)^{\frac{2q}{q+1}}\right).$$

Comme l'énergie $E(t)\to 0$ quand $t\to\infty$, on peut choisir $T>\frac{1}{\omega_0}(1-\ln\frac{a_0}{a})$ assez grand tel que $E(T)\le 1$ (donc T dépend de $E(0)$). Soit $t\ge T$, par le même raisonnement que avant (on remplace l'intervalle $[0,T]$ par $[t,\,t+T]$), on obtient l'inégalité similaire de la précédente

$$E(t) \le c\left(E(t)-E(t+T) + \Big(E(t)-E(t+T)\Big)^{\frac{2}{p+1}} + \Big(E(t)-E(t+T)\Big)^{\frac{2q}{q+1}}\right).$$

Et par suite

$$\Big(E(t)\Big)^{\frac{1}{r}} \le c\Big(E(t)-E(t+T)\Big), \quad \forall\, t\ge T \tag{3.20}$$

où, $r=\min\{\frac{2}{p+1},\frac{2q}{q+1}\}$ ce qui donne (1.18) (voir [15, Lemma 1.1]). ∎

4 – Démonstration du Théorème 1.4

Dans la démonstration du Théorème 1.4, on utilise la régularité (1.11) qui est satisfaite pour les solutions fortes, et dans ce cas là, les constantes M_0, M_1 et ω dans (1.17) et (1.18) sont dépendantes de la solution u, ce qui ne nous permet pas de généraliser ces dernières pour les solutions faibles.

D'après la démonstration du Théorème 1.3, il suffit de montrer l'inégalité

$$\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_1}\Big(u_i'\,u_i' + g_i(u_i')\,g_i(u_i')\Big)\,d\Gamma\,dt \le \tag{4.1}$$

$$\le c\left(E(0)-E(T) + \Big(E(0)-E(T)\Big)^{\frac{2}{p+1}} + \Big(E(0)-E(T)\Big)^{\frac{2q}{q+1}} + \Big(E(0)-E(T)\Big)^{r}\right)$$

sous les conditions (1.15), (1.19)–(1.20). On définit Γ_i^+ et Γ_i^- par (3.19). Comme dans la démonstration du Théorème 1.3, on a, d'après (1.15),

$$\int_S^T\!\!\int_{\Gamma_i^-}\Big(u_i'\,u_i' + g_i(u_i')\,g_i(u_i')\Big)\,d\Gamma\,dt \le \tag{4.2}$$

$$\le c\left(\Big(E(0)-E(T)\Big)^{\frac{2}{p+1}} + \Big(E(0)-E(T)\Big)^{\frac{2q}{q+1}}\right).$$

D'autre part, on a

Cas $n = 1$. On observe que (1.15) et la croissance de g_i impliquent que $\inf\{|g_i(x)| : |x| > 1\} > 0$. Donc on utilise (1.11), (3.1) et l'injection $V \subset (H^1(\Omega))^n \hookrightarrow (L^\infty(\Gamma))^n$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\Gamma_i^+} u_i' \, u_i' \, d\Gamma \, dt &\leq c \int_0^T \int_{\Gamma_i^+} |u_i'| \, u_i' \, g_i(u_i') \, d\Gamma \, dt \\ &\leq c \int_0^T \|u'\|_{(L^\infty(\Gamma))^n} \Big(-E'(t) \Big) \, dt \\ &\leq c \Big(E(0) - E(T) \Big) \ ;\end{aligned} \tag{4.3}$$

de même, en utilisant (1.20) (remarquer que $\lambda \geq 1$),

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\Gamma_i^+} g_i(u_i') \, g_i(u_i') \, d\Gamma \, dt &\leq c \int_0^T \int_{\Gamma_i^+} |u_i'|^{\lambda-1} \, u_i' \, g_i(u_i') \, d\Gamma \, dt \\ &\leq c \int_0^T \Big(\|u'\|_{(L^\infty(\Gamma))^n} \Big)^{\lambda-1} \Big(-E'(t) \Big) \, dt \\ &\leq c \Big(E(0) - E(T) \Big) \ .\end{aligned} \tag{4.4}$$

Donc on déduit que

$$\int_0^T \int_{\Gamma_i^+} \Big(u_i' \, u_i' + g_i(u_i') \, g_i(u_i') \Big) \, d\Gamma \, dt \leq c \Big(E(0) - E(T) \Big) \ . \tag{4.5}$$

Cas $n \geq 2$. On a

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\Gamma_i^+} u_i' \, u_i' \, d\Gamma \, dt &\leq c \int_0^T \int_{\Gamma_i^+} |u_i'|^{\frac{2p}{p+1}} \Big(u_i' \, g_i(u_i') \Big)^{\frac{2}{p+1}} \, d\Gamma \, dt \\ &\leq c \int_0^T \|u'\|^{\frac{2p}{p+1}}_{(L^{\frac{2p}{p-1}}(\Gamma))^n} \left(\int_{\Gamma_1} u_i' \, g_i(u_i') \, d\Gamma \right)^{\frac{2}{p+1}} dt \ .\end{aligned}$$

On utilise (1.19) et on applique le théorème de trace, on obtient

$$V \subset \Big(H^1(\Omega) \Big)^n \hookrightarrow \Big(L^{\frac{2p}{p-1}}(\Gamma) \Big)^n \ .$$

Par l'utilisation du (1.11), on a

$$\int_0^T \int_{\Gamma_i^+} u_i' \, u_i' \, d\Gamma \, dt \leq c \Big(E(0) - E(T) \Big)^{\frac{2}{p+1}} \ ; \tag{4.6}$$

par la même manière, en utilisant (1.20),

$$\begin{aligned}\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^+} g_i(u_i')\, g_i(u_i')\, d\Gamma\, dt \;&\le\; c\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^+} |u_i'|^{\lambda(2-r)-r}\,(u_i'\, g_i(u_i'))^r\, d\Gamma\, dt\\ &\le c\int_0^T \Big(\int_{\Gamma_1} |u_i'|^{\frac{1}{1-r}(\lambda(2-r)-r)}\, d\Gamma\Big)^{1-r}\,\Big(\int_{\Gamma_1} u_i'\, g_i(u_i')\, d\Gamma\Big)^r dt\\ &\le c\int_0^T \|u'\|^{\frac{2p}{p-1}(1-r)}_{(L^{\frac{2p}{p-1}}(\Gamma))^n}\,\Big(-E'(t)\Big)^r dt\\ &\le c\Big(E(0)-E(T)\Big)^r .\end{aligned}$$

Cette inégalité et (4.6) donnent

$$\begin{aligned}\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_i^+}\Big(u_i'\, u_i' + g_i(u_i')\, g_i(u')\Big)\, d\Gamma\, dt \;\le&\\ \le\; c\bigg(\Big(E(0)-E(T)\Big)^{\frac{2}{p+1}} + \Big(E(0)-E(T)\Big)^r\bigg) .&\end{aligned}\tag{4.7}$$

Alors d'après (4.2), (4.5) et (4.7), on trouve (4.1) pour tout $n\in\{1,\,2,...\}$. Donc on termine la démonstration par le même raisonnement que dans la démonstration du Théorème 1.3, d'où on obtient les estimations (1.17)–(1.18).

REMERCIEMENT – L'auteur tient à remercier le professeur E. Zuazua pour ses précieuses remarques.

REFERENCES

[**1**] ALABAU, F. and KOMORNIK, V. – Observabilité, contrôlabilité et stabilisation frontière du système d'élasticité linéaire, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.,* 324 (1997), 519–524.

[**2**] BALL, J.M. – On the asymptotic behavior of generalized procssses, with applications to nonlinear evolution equations, *J. Diff. Eqs.,* 27 (1978), 224–265.

[**3**] CONRAD, F. and PIERRE, M. – Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedback, *Ann. Inst. Henri Poicaré,* 11 (1994), 485–515.

[**4**] CONRAD, F. and RAO, B. – Decay of solution of wave equation in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback, *Asymptotic Anal.,* 7 (1993), 159–177.

[**5**] GUESMIA, A. – Stabilisation frontière d'un système d'élasticité, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.,* 324 (1997), 1355–1360.

[**6**] GUESMIA, A. – On linear elasticity systems with variable coefficients, *Kyushu J. Math.,* 52 (1998), 227–248.

[**7**] KOMORNIK, V. – *Exact Controllability and Stabilization, The Multiplier Method*, Masson–John Wiley, Paris, 1994.

[**8**] KOMORNIK, V. – On the nonlinear boundary stabilization of the wave equation, *Chin. Ann. of Math.,* 14B(2) (1993), 153–164.

[**9**] KOMORNIK, V. – Well-posedness and decay estimates for a Petrovsky system by a semigroup approach, *Acta Sci. Math. (Szeged),* 60 (1995), 451–466.

[**10**] LIU, W.J. – Partial exact controllability and exponential stability of the higher dimensional linear thermoelasticity, *ESAIM Contrôle Optim. Calc. Var.,* 3 (1998), 23–48.

[**11**] LAGNESE, J.E. – Boundary stabilization of linear elastodynamic systems, *SIAM J. Control Opt.,* 21 (1983), 968–984.

[**12**] LAGNESE, J.E. – Uniform asymptotic energy estimates for solution of the equation of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary, *Nonlinear Anal. TMA,* 16 (1991), 35–54.

[**13**] LIONS, J.-L. – Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems, *SIAM Rev.,* 30 (1988), 1–68.

[**14**] NAKAO, M. – On the decay of solutions of some nonlinear dissipative wave equations in higher dimensions, *Math. Z.,* 193 (1986), 227–234.

[**15**] NAKAO, M. – Asymptotic stability for some nonlinear evolution equations of second order with unbounded dissipative terms, *J. Dif. Equ.,* 30 (1978), 54–63.

[**16**] ZUAZUA, E. – Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback, *SIAM J. Control Opt.,* 28 (1990), 446–477.

Aissa Guesmia,
Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS,
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cédex – FRANCE,
E-mail: guesmia@math.u-strasbg.fr