PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 57 Fasc. 4 – 2000

# CONTROLABILITE EXACTE DE L'EQUATION DES ONDES DANS UN DOMAINE MINCE A FRONTIERE ONDULEE

N. Laanaia

**Résumé:** On étudie la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes d'un corps tridimensionnel de faible épaisseur à frontière ondulée et son comportement asymptotique lorsque l'épaisseur tend vers zéro. On établit que la limite du contrôle exact est le contrôle exact d'un problème limite bidimensionnel dont l'opérateur est exprimé en fonction des ondulations. C'est une extension au cas de frontière ondulée du travail fait par J. Saint Jean Paulin et M. Vanninathan [5] dans le cas cylindrique.

## 1 – Position du problème et résultats préliminaires

**1.1.** Commençons par quelques notations. On désigne par $\omega$ un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\gamma$ régulière et par $d_+$ et $d_-$ deux fonctions de classe $C^1$ sur $\omega$ vérifiant:

$$\begin{gathered} d_+ \geq 0 \;\text{ et }\; d_- \leq 0 \quad \text{sur } \omega , \\ \text{il existe un nombre } \eta > 0 \text{ tel que } d_+ - d_- \geq \eta . \end{gathered} \tag{1.1}$$

Soit $e$ un petit paramètre $> 0$ destiné à tendre vers zéro. On considère un domaine cylindrique $\Omega^e$ de frontière $\Gamma^e$ à base ondulée; la frontière supérieure (resp. inférieure) sera notée par $\Gamma^e_+$ (resp. $\Gamma^e_-$) et dépendra de $e$ et de $d_+$ (resp. de $e$ et de $d_-$). La frontière latérale sera notée par $\Gamma^e_0$.

*Received*: March 2, 1999.
*Mots-clés*: Ondulation; Contrôlabilité exacte; HUM; Singularité; Comportement asymptotique..

On pose:

$$
\begin{aligned}
&\Omega^e = \Big\{(x_1,x_2,x_3) \mid\ (x_1,x_2) \in \omega \ \text{ et } \ e\,d_-(x_1,x_2) \le x_3 \le e\,d_+(x_1,x_2)\Big\}\ ,\\
&\Gamma_0^e = \Big\{(x_1,x_2,x_3) \mid\ (x_1,x_2) \in \gamma \ \text{ et } \ e\,d_-(x_1,x_2) \le x_3 \le e\,d_+(x_1,x_2)\Big\}\ ,\\
&\Gamma_+^e = \Big\{(x_1,x_2,x_3) \mid\ (x_1,x_2) \in \omega \ \text{ et } \ x_3 = e\,d_+(x_1,x_2)\Big\}\ ,\\
&\Gamma_-^e = \Big\{(x_1,x_2,x_3) \mid\ (x_1,x_2) \in \omega \ \text{ et } \ x_3 = e\,d_-(x_1,x_2)\Big\}\ ,\\
&\Gamma^e = \Gamma_0^e \cup \Gamma_+^e \cup \Gamma_-^e\ .
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Notons $\nu^e = {}^{\mathrm{t}}(\nu_1^e, \nu_2^e, \nu_3^e)$ le vecteur normal unitaire à $\Gamma^e$ dirigé vers l'extérieur de $\Omega^e$. Pour $x^0$ donné tel que $x_3^0 = 0$, on définit

$$
\begin{aligned}
&m(x) = x - x^0\ ,\\
&\gamma(x^0) = \Big\{x \in \gamma \mid\ m(x).\,\nu^e(x) > 0\Big\}\ ,\\
&\gamma_* = \gamma \setminus \gamma(x^0)\ ,\\
&\Gamma^e(x^0) = \Big\{x \mid\ (x_1,x_2) \in \gamma(x^0) \ \text{ et } \ e\,d_-(x_1,x_2) < x_3 < e\,d_+(x_1,x_2)\Big\}\ ,\\
&\Gamma_*^e = \Gamma_0^e \setminus \Gamma^e(x^0)\ .
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

On impose un contrôle de Dirichlet sur $\Gamma^e(x^0)$ et un contrôle de Neumann sur $\Gamma_\pm^e$. On fixe $T > 0$ et on considère le problème de contrôlabilité exacte suivant:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y = 0 \quad \text{dans } \ Q^e\ ,\\
&y = v \quad \text{sur } \ \Sigma^e(x^0)\ ,\\
&y = 0 \quad \text{sur } \ \Sigma_*^e\ ,\\
&\frac{\partial y}{\partial \nu^e} = w_\pm \quad \text{sur } \ \Sigma_\pm^e\ ,\\
&y(0) = y_0,\ \ \frac{\partial y}{\partial t}(0) = y_1 \quad \text{dans } \ \Omega^e\ ,
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

où l'on a noté

$$
\begin{aligned}
&Q^e = \Omega^e \times\, ]0,T[\ ,\\
&\Sigma^e = \Gamma^e \times\, ]0,T[\,, \quad \Sigma_0^e = \Gamma_0^e \times\, ]0,T[\,, \quad \Sigma_\pm^e = \Gamma_\pm^e \times\, ]0,T[\ ,\\
&\Sigma^e(x_0) = \Gamma^e(x_0) \times\, ]0,T[\,, \quad \Sigma_*^e = \Gamma_*^e \times\, ]0,T[\ .
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

On cherche, pour $T > 0$ fixé et des données initiales dans un espace hilbertien convenable, si l'on peut trouver des contrôles $v$ et $w_\pm$ qui permettent de ramener le système à l'équilibre à l'instant $T$, c'est-à-dire on veut que la solution $y$ de (1.4) vérifie de plus:

$$y(\cdot,T)=\frac{\partial y}{\partial t}(\cdot,T)=0 \quad \text{dans } \Omega^e . \tag{1.6}$$

**1.2.** L'objectif est d'étudier ce problème de contrôlabilité exacte et son comportement asymptotique lorsque l'épaisseur tend vers zéro. Les premiers résultats ont été établis dans le cas de l'épaisseur constante par J.L. Lions [3], puis par J. Yan [6] et J. Saint Jean Paulin – M. Vanninathan [5] dans le cas de domaines cylindriques minces. Pour résoudre le problème (1.4), on adapte la méthode d'unicité hilbertienne HUM décrite par J.L. Lions [2] qui repose essentiellement sur la majoration de l'énergie au moyen de la méthode des multiplicateurs et alors nécessite une régularité suffisante des solutions du problème homogène associé. On est donc amené, dans notre cas, à imposer des hypothèses supplémentaires, outre (1.1), sur $d_+$ et $d_-$ à cause des singularités des solutions aux intersurfaces entre les conditions aux limites du type Dirichlet et de type Neumann (pour plus de détails voir Grisvard [1]). On prend dans la suite $d_+$ et $d_-$ telles que:

(1.7) Pour tout point $y$ du bord $\Gamma^e_+\cap\Gamma^e_0$ (resp. du bord $\Gamma^e_-\cap\Gamma^e_0$), il existe un voisinage $V(y)$ tel que le plan tangent à $\Gamma^e_+$ (resp. à $\Gamma^e_-$) en $y$ passe au dessus de $\Gamma^e_+$ (resp. au dessous de $\Gamma^e_-$) dans $V(y)$.

**1.3.** Enfin, pour se ramener à un domaine fixe on introduit, comme dans [5], la transformation suivante:

$$z_1=x_1\,,\quad z_2=x_2\quad \text{et}\quad z_3=e^{-1}x_3\ . \tag{1.8}$$

On notera $\Omega$, $\Gamma_+$, $\Gamma_-$, $Q$, $\Sigma(z^0)$, $\Sigma_*$ et $\Sigma_\pm$ les ensembles correspondant aux ensembles $\Omega^e$, $\Gamma^e_+$, $\Gamma^e_-$, $Q^e$, $\Sigma^e(z^0)$, $\Sigma^e_*$ et $\Sigma^e_\pm$ par le changement de variables (1.8) et par $\nu={}^{\mathrm t}(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ le vecteur normal unitaire extérieur à $\Omega$.

A toute fonction $f$ définie sur $\Omega^e$, on associe $f^e$ définie sur $\Omega$ par:

$$f(x)=f^e(z)\ .$$

Pour obtenir le problème associé à (1.4) par le changement de variables (1.8) on écrit $\nu^e(x)$ en fonction de $\nu(z)$ pour $x$ dans $\Gamma^e_\pm$ et $z$ dans $\Gamma_\pm$. Pour cela, on écrit

$\nu$ et $\nu^e$ en fonction de $d_\pm$ et de $e$. Un calcul simple nous donne:

$$(1.9)\quad \begin{aligned} &\nu_3^e = \pm\Big(e^2\,|\nabla d_\pm|^2+1\Big)^{-1/2},\quad \nu_1^e = -e\,\frac{\partial d_\pm}{\partial z_1}\,\nu_3^e\,,\quad \nu_2^e = -e\,\frac{\partial d_\pm}{\partial z_2}\,\nu_3^e \quad \text{sur } \Gamma_\pm^e\,,\\ &\nu_3 = \pm\Big(|\nabla d_\pm|^2+1\Big)^{-1/2},\quad \nu_1 = -\frac{\partial d_\pm}{\partial z_1}\,\nu_3\,,\quad \nu_2 = -\frac{\partial d_\pm}{\partial z_2}\,\nu_3 \quad \text{sur } \Gamma_\pm\,. \end{aligned}$$

De (1.9) on déduit:

$$(1.10)\qquad \nu_1^e(x) = e\,\lambda_\pm\,\nu_1(z)\,,\qquad \nu_2^e(x) = e\,\lambda_\pm\,\nu_2(z)\,,\qquad \nu_3^e(x) = \lambda_\pm\,\nu_3(z)$$

où l'on a noté

$$(1.11)\qquad \lambda_\pm = \lambda(e,d_\pm) = \left(\frac{|\nabla d_\pm|^2+1}{e^2\,|\nabla d_\pm|^2+1}\right)^{1/2} \quad \text{sur } \omega\,.$$

Le problème (1.4) devient alors:

Trouver deux contrôles $v^e$ et $w_\pm^e$ tels que la solution $y^e$ de

$$(1.12)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 y^e}{\partial t^2} - \Delta_e y^e = 0 \quad \text{dans } Q\,,\\ &y^e = v^e \quad \text{sur } \Sigma(z^0)\,,\\ &y^e = 0 \quad \text{sur } \Sigma_*\,,\\ &e\,\lambda_\pm\left(\frac{\partial y^e}{\partial z_1}\,\nu_1 + \frac{\partial y^e}{\partial z_2}\,\nu_2 + e^{-2}\,\frac{\partial y^e}{\partial z_3}\,\nu_3\right) = w_\pm^e \quad \text{sur } \Sigma_\pm\,,\\ &y^e(0) = y_0^e,\quad \frac{\partial y^e}{\partial t}(0) = y_1^e \quad \text{dans } \Omega\,, \end{aligned}$$

vérifie

$$(1.13)\qquad y^e(\cdot,T) = \frac{\partial y^e}{\partial t}(\cdot,T) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

avec la notation

$$(1.14)\qquad \Delta_e = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + e^{-2}\,\frac{\partial^2}{\partial z_3^2}\,.$$

## 2 – Mise en œuvre de la méthode HUM

### 2.1. Quelques résultats d'existence et de régularité

Dans ce paragraphe on énonce quelques résultats d'existence et de régularité qui nous seront très utiles pour appliquer la méthode des multiplicateurs.

Considérons le problème homogène suivant:

$$(2.1.1)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \phi^e}{\partial t^2} - \Delta_e \phi^e = 0 \quad \text{dans } \ Q \ , \\ &\phi^e = 0 \quad \text{sur } \ \Sigma_0 \ , \\ &\frac{\partial \phi^e}{\partial z_1}\nu_1 + \frac{\partial \phi^e}{\partial z_2}\nu_2 + e^{-2}\,\frac{\partial \phi^e}{\partial z_3}\nu_3 = 0 \quad \text{sur } \ \Sigma_\pm \ , \\ &\phi^e(0) = \phi_0, \ \ \frac{\partial \phi^e}{\partial t}(0) = \phi_1 \quad \text{dans } \ \Omega \end{aligned}$$

et l'énergie associée

$$(2.1.2)\qquad E(t) \;=\; \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi^e}{\partial t}(z,t)\right|^2 + |\nabla_e\,\phi^e(z,t)|^2\;dz \ ,$$

où par définition

$$(2.1.3)\qquad |\nabla_e\,\phi^e(z,t)|^2 \;=\; \left|\frac{\partial \phi^e}{\partial z_1}(z,t)\right|^2 + \left|\frac{\partial \phi^e}{\partial z_2}(z,t)\right|^2 + e^{-2}\left|\frac{\partial \phi^e}{\partial z_3}(z,t)\right|^2 \ .$$

On introduit les espaces

$$V = \Big\{\psi \in H^1(\Omega) \;|\; \psi = 0 \ \text{ sur } \Gamma_0\Big\}\,, \qquad V' = \text{ espace dual de } V \ .$$

On a le résultat d'existence et d'unicité de la solution de (2.1.1) suivant (d'après [2]):

**Lemme 2.1.1.** *Pour des conditions initiales $\phi_0$ dans $V$ et $\phi_1$ dans $L^2(\Omega)$, il existe une unique solution $\phi^e$ de (2.1.1) avec*

$$\phi^e \,\in\, C^0([0,T];V) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^2([0,T];V') \ .$$

*En plus, on a la conservation de l'énergie:*

$$(2.1.4)\qquad E(t) = E(0)\,, \qquad \forall\, t \ . \ \blacksquare$$

Pour la régularité de la solution $\phi^e$, on a le lemme suivant:

**Lemme 2.1.2.** *On prend les conditions initiales* $\phi_0 \in H^2(\Omega) \cap V$ *et* $\phi_1 \in V$. *Alors la solution* $\phi^e$ *de (2.1.1) vérifie la propriété de régularité suivante:*

$$\phi^e \in C^0([0,T]; H^s(\Omega) \cap V) \cap C^1([0,T]; V) \cap C^2([0,T]; L^2(\Omega))$$

*pour un* $s$ *tel que* $3/2 < s < 2$.

**Démonstration:** La géométrie de $\Omega$ ne nous permet pas d'appliquer les résultats de Lions [2]. Le lemme découle des résultats de Grisvard [1], p. 235 que l'on peut appliquer ici grâce à l'hypothèse (1.7) que vérifient $d_+$ et $d_-$. ∎

Considérons maintenant le problème suivant avec terme source non nul:

$$\text{(2.1.5)} \qquad \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \theta^e}{\partial t^2} - \Delta_e \theta^e = f \quad \text{dans } Q \,, \\ & \theta^e = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 \,, \\ & \frac{\partial \theta^e}{\partial z_1}\nu_1 + \frac{\partial \theta^e}{\partial z_2}\nu_2 + e^{-2}\frac{\partial \theta^e}{\partial z_3}\nu_3 = 0 \quad \text{sur } \Sigma_\pm \,, \\ & \theta^e(0) = \theta_0, \quad \frac{\partial \theta^e}{\partial t}(0) = \theta_1 \quad \text{dans } \Omega \,. \end{aligned}$$

**Lemme 2.1.3.**

**a)** *Soient* $f \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$, $\theta_0 \in V$, $\theta_1 \in L^2(\Omega)$. *Alors il existe une solution unique* $\theta^e$ *de (2.1.5) vérifiant la régularité suivante:*

$$\theta^e \in C^0(0,T; V) \cap C^1(0,T; L^2(\Omega)) \,.$$

*De plus, on a l'estimation:*

$$\text{(2.1.6)} \qquad E(t) \leq C_0 \left\{ E(0) + \left( \int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \right\} ,$$

*où* $E(t)$ *est défini dans (2.1.2) et* $C_0$ *une constante indépendante de* $e$.

**b)** *Pour* $f \in L^1(0,T; V)$, $\theta_0 \in H^2(\Omega) \cap V$ *et* $\theta_1 \in V$, *on a la propriété de régularité suivante:*

$$\theta^e \in C^0(0,T; H^s(\Omega) \cap V) \cap C^1(0,T; V)$$

*pour un* $s$ *tel que* $3/2 < s < 2$.

**Démonstration:** Pour la régularité, voir Lions [2] p. 181 et Grisvard [1], p. 235. Pour montrer l'estimation (2.1.6) on multiplie dans (2.1.5) par $\dfrac{\partial \theta^e}{\partial t}$ et on intègre par parties sur $\Omega$. ∎

### 2.2. Inégalité directe

Avant d'énoncer une identité fondamentale, précisons quelques notations qui nous seront utiles dans la suite:

On montre sans peine qu'il existe des champs de vecteurs tangents qu'on notera $\tau^{1e}$, $\tau^{2e}$, $\tau^1$ et $\tau^2$ tels que $\{\nu^e(x),\, \tau^{1e}(x),\, \tau^{2e}(x)\}$ (resp. $\{\nu(z),\, \tau^1(z),$ $\tau^2(z)\}$) forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour tout $x$ dans $\Gamma^e_\pm$ (resp. pour tout $z$ dans $\Gamma_\pm$) et vérifiant:

$$\begin{gathered} \tau^{1e}(x) = \tau^1(z)\ , \\ \tau^{2e}_\alpha(x) = \lambda_\pm\, \tau^2_\alpha(z), \quad \alpha = 1,2, \qquad \text{et} \qquad \tau^{2e}_3(x) = e\, \lambda_\pm\, \tau^2_3(z)\ , \end{gathered} \tag{2.2.1}$$

où $\lambda_\pm$ est donnée dans (1.11).

Ainsi, pour toute fonction régulière $\phi^e$, on vérifie facilement que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^e}{\partial z_\alpha} &= \tau^1_\alpha \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau^1} + \lambda^2_\pm\, \tau^2_\alpha \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau^2} := \sigma_\alpha \phi^e\,, \qquad \alpha = 1,2\ , \\ e^{-1} \frac{\partial \phi^e}{\partial z_3} &= e\, \lambda^2_\pm\, \tau^2_3 \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau^2} := e\, \sigma_3\, \phi^e\ , \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

On dénote par:

$$\nabla^\sigma_e \phi^e = {}^{\mathrm{t}}(\sigma_1 \phi^e,\, \sigma_2\, \phi^e,\, e\, \sigma_3\, \phi^e) \tag{2.2.3}$$

le gradient tangentiel modifié de $\phi^e$ sur $\Gamma^e_\pm$.

En particulier, on a:

$$|\nabla_e\, \phi^e|^2 = |\nabla^\sigma_e \phi^e|^2 = |\sigma_1 \phi^e|^2 + |\sigma_2\, \phi^e|^2 + e^2\, |\sigma_3\, \phi^e|^2 \quad \text{sur } \Gamma^e_\pm\ . \tag{2.2.4}$$

On voit que, grâce à (2.2.4), $\sigma_j$ est continue de $H^1(\Gamma^e_*)$ sur $L^2(\Gamma^e_*)$ pour tout $j = 1,2,3$ et tout $\Gamma^e_*$ sous-ensemble ouvert de $\Gamma^e_\pm$.

On définit l'opérateur adjoint:

$$\sigma^*_j \colon\, L^2(\Gamma^e_*) \to (H^1(\Gamma^e_*))'$$

et on pose:

$$-\Delta_{\Gamma^e_*} = \sigma^*_1\, \sigma_1 + \sigma^*_2\, \sigma_2 + e^2 \sigma^*_3\, \sigma_3\ . \tag{2.2.5}$$

L'opérateur $-\Delta_{\Gamma_*^e}$ vérifie:

$$\langle -\Delta_{\Gamma_*^e} u\,,\, v\rangle = \int_{\Gamma_*^e} \nabla_e^\sigma u \cdot \nabla_e^\sigma v\,, \qquad \forall\, u, v \in H^1(\Gamma_*^e)\ . \tag{2.2.6}$$

Avec tout cela, on peut énoncer le résultat suivant:

**Théorème 2.2.1.** *Soit $(m_k)$ un champ de vecteurs de classe $W^{1,\infty}(\Omega)$. Alors, pour toute solution faible $\theta$ de (2.1.5), c'est-à-dire pour $\{\theta_0,\theta_1\}$ dans $V\times L^2(\Omega)$ et $f$ dans $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, on a:*

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma_0} m_\alpha\, \nu_\alpha \Big(\frac{\partial \theta^e}{\partial \nu}\Big)^2 d\sigma\, dt + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_\pm} m_k\, \nu_k \Big\{ \Big(\frac{\partial \theta^e}{\partial t}\Big)^2 - |\nabla_e^\sigma \theta^e|^2 \Big\}\, d\sigma\, dt =$$

$$= \Big[\int_\Omega \frac{\partial \theta^e}{\partial t}\, m_k\, \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\, dz\Big]_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_k} \Big\{ \Big(\frac{\partial \theta^e}{\partial t}\Big)^2 - |\nabla_e\, \theta^e|^2 \Big\}\, dz\, dt$$

$$+ \int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_\alpha}\, \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\, \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\, dz\, dt + \int_Q e^{-2}\, \frac{\partial m_k}{\partial z_3}\, \frac{\partial \theta^e}{\partial z_3}\, \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\, dz\, dt - \int_Q f\, m_k\, \frac{\partial \theta^e}{\partial z_k}\, dz\, dt\ .$$

On a appliqué ici la convention des indices répétés $(\alpha = 1,2$ et $k = 1,2,3)$ qu'on utilisera dans la suite.

**Démonstration:** On fait comme dans Lions [2]; on montre le résultat dans le cas d'une solution forte c'est-à-dire qui correspond à des données initiales $\theta_0 \in H^2(\Omega)\cap V$, $\theta_1 \in V$ et $f \in L^1(0,T;V)$, puis on passe au cas des solutions faibles par des arguments de densité. ∎

On établit à présent une majoration de la dérivée normale (inégalité directe). Les multiplicateurs classiques utilisés dans Lions [2]:

$$m_k \in W^{1,\infty}(\Omega)\ ,$$
$$m_k(z) = \nu_k(z) \quad \text{sur } \Gamma\ ,$$

ne conviennent pas à la structure géométrique de $\Omega$. Un choix convenable de multiplicateurs est le suivant:

$$\begin{cases} m_k \in W^{1,\infty}(\Omega)\ , \\ m_1, m_2 \ \text{ indépendants de } z_3\ , \\ m_\alpha = \nu_\alpha \quad \text{sur } \Gamma_0, \quad \alpha = 1,2\ , \\ m_3 = \dfrac{\partial d_\pm}{\partial z_1} m_1 + \dfrac{\partial d_\pm}{\partial z_2} m_2 \quad \text{sur } \Gamma_\pm\ . \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Un autre choix possible est:

$$\text{(2.2.8)}\qquad \begin{cases} m_k \in W^{1,\infty}(\Omega)\ , \\ m_1, m_2 \ \text{ indépendants de } z_3\ , \\ m_\alpha = 0 \quad \text{sur } \ \Gamma_0, \quad \alpha = 1,2\ , \\ m_3 \ = \ \dfrac{\partial d_\pm}{\partial z_1}\, m_1 + \dfrac{\partial d_\pm}{\partial z_2}\, m_2 + \Big(|\nabla d_\pm|^2 + 1\Big)^{1/2} \qquad \text{sur} \ \ \Gamma_\pm\ . \end{cases}$$

On voit facilement que de tels multiplicateurs existent toujours.

**Remarque 2.2.1.** Pour des fonctions $d_+$ et $d_-$ constantes, on retrouve les multiplicateurs pris dans [5] (cas cylindrique à épaisseur constante). □

On a le résultat suivant:

**Théorème 2.2.2.** *Fixons $T^* > 0$. On prend $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, $\theta_0 \in V$ et $\theta_1 \in L^2(\Omega)$. Alors la solution $\theta^e$ de (2.1.5) vérifie:*

$$\text{(2.2.9)}\qquad \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \theta^e}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma\, dt \ \le \ C_1\, T \left\{ E(0) + \left( \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \right\}\ ,$$

$$\text{(2.2.10)}\qquad \left| \int_{\Sigma_\pm} \left\{ \left(\frac{\partial \theta^e}{\partial t}\right)^2 - |\nabla_e^\sigma \theta^e|^2 \right\} d\sigma\, dt \right| \ \le \ C_1\, T \left\{ E(0) + \left( \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \right\}\ ,$$

*où $C_1$ est une constante indépendante de $T \ge T^*$ et de $e$ mais dépendant de $T^*$.*

**Démonstration:** Pour avoir (2.2.9), resp. (2.2.10), on applique l'identité énoncée dans le Théorème 2.2.1 avec le choix (2.2.7), resp. (2.2.8). ■

**Remarque 2.2.2.** Si $f = 0$ alors:

$$\text{(2.2.11)}\qquad \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma\, dt \ \le \ C_2\, T\, E(0)\ ,$$

$$\text{(2.2.12)}\qquad \left| \int_{\Sigma_\pm} \left\{ \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\right)^2 - |\nabla_e^\sigma \phi^e|^2 \right\} d\sigma\, dt \right| \ \le \ C_2\, T\, E(0)\ ,$$

où $\phi^e$ solution de (2.1.1) et $C_2$ constante indépendante de $T$ et de $e$. □

### 2.3. Inégalité inverse

Dans ce paragraphe, on établit une deuxième estimation (inégalité inverse) en utilisant les multiplicateurs définis par:

$$\text{(2.3.1)}\qquad m_k = z_k - z_k^0\,, \quad k = 1,2,3 \quad \text{avec} \ \ z_3^0 = 0\ .$$

On introduit les notations suivantes:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(z^0) = \Big\{ z \mid (z_1, z_2) \in \gamma(z^0) \ \text{ et } \ d_-(z_1,z_2) < z_3 < d_+(z_1,z_2) \Big\} \ , \\
&\Gamma_\pm(z^0) = \Big\{ z \in \Gamma_\pm \mid m(z) \,.\, \nu(z) > 0 \Big\} \,, \qquad \Gamma^*_\pm(z_0) = \Gamma_\pm \backslash \Gamma_\pm(z^0) \ , \\
&\Sigma_\pm(z^0) = \Gamma_\pm(z^0) \times [0,T] \,, \qquad \Sigma^*_\pm(z^0) = \Gamma^*_\pm(z^0) \times [0,T] \ .
\end{aligned}
\tag{2.3.2}
$$

**Remarque 2.3.1.** Dans le cas cylindrique [5], on avait $\Gamma_\pm(z^0) = \Gamma_\pm$ et $\Gamma^*_\pm(z^0) = \emptyset$. Ici c'est plus compliqué car $m \,.\, \nu$ n'est pas nécessairement strictement positif. □

**Théorème 2.3.1.** *Soit $\phi^e$ solution de (2.1.1) avec des conditions initiales $\phi_0$ dans $H^2(\Omega) \cap V$ et $\phi_1$ dans $V$. Alors il existe des constantes $C_3$ et $T^* > 0$ indépendantes de $e$ telles que pour $T \geq T^*$, on a:*

$$
\begin{aligned}
E(0) \ \leq \ C_3 \Bigg\{ &\int_{\Sigma(z^0)} \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma dt + \int_{\Sigma_\pm(z^0)} \left\{ \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial t} \right)^2 + (\phi^e)^2 \right\} d\sigma\, dt \\
&+ \int_{\Sigma^*_\pm(z^0)} |\nabla^\sigma_e \phi^e|^2 \ d\sigma\, dt \Bigg\} \ .
\end{aligned}
\tag{2.3.3}
$$

*où $\Sigma(z^0)$ est définie dans (1.5).*

**Démonstration:** Il suffit d'écrire le deuxième terme de l'identité énoncée dans le Théorème 2.2.1, c'est-à-dire l'intégrale sur $\Sigma_\pm$, en une somme d'intégrales sur $\Sigma_\pm(z^0)$ et $\Sigma^*_\pm(z^0)$ et de procéder comme dans [5]. ■

### 2.4. Mise en place de la méthode HUM

Grâce à l'inégalité inverse (2.3.3) et au Lemme 2.1.2, l'expression

$$
\begin{aligned}
\|\{\phi_0, \phi_1\}\|_F \ = \ \Bigg\{ &\int_{\Sigma(z^0)} \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma\, dt + \int_{\Sigma_\pm(z^0)} \left\{ \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial t} \right)^2 + (\phi^e)^2 \right\} d\sigma\, dt \\
&+ \int_{\Sigma^*_\pm(z^0)} |\nabla^\sigma_e \phi^e|^2 \ d\sigma\, dt \Bigg\}^{1/2} ,
\end{aligned}
\tag{2.4.1}
$$

où $\phi^e$ est solution de (2.1.1), est bien définie et définit une norme dans $(H^2(\Omega) \cap V) \times V$.

Considérons alors l'espace de hilbert $F$ le complété de $(H^2(\Omega) \cap V) \times V$ par rapport à la norme (2.4.1). On note $F'$ le dual de $F$.

On a: $\{\phi_0, \phi_1\} \in F$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \phi^e}{\partial \nu}\Big|_{\Sigma(z^0)} \in L^2(\Sigma(z^0)) \ , \\ \phi^e \text{ et } \dfrac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big|_{\Sigma_\pm(z^0)} \in L^2(\Sigma_\pm(z^0)) \ , \\ \nabla_e^\sigma \phi^e|_{\Sigma_\pm^*(z^0)} \in \Big(L^2(\Sigma_\pm^*(z^0))\Big)^3 \ . \end{array}\right. \tag{2.4.2}$$

L'espace $F$ est maintenant défini; on introduit le problème rétrograde:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi^e}{\partial t^2} - \Delta_e \psi^e = 0 \quad \text{dans } Q \ , \\ & \psi^e = \frac{\partial \phi^e}{\partial \nu} \quad \text{sur } \Sigma(z^0) \ , \\ & \psi^e = 0 \quad \text{sur } \Sigma_* \ , \\ & \frac{\partial \psi^e}{\partial z_1} \nu_1 + \frac{\partial \psi^e}{\partial z_2} \nu_2 + e^{-2} \frac{\partial \psi^e}{\partial z_3} \nu_3 = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial}{\partial t}\Big(\dfrac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big) - \phi^e & \text{sur } \Sigma_\pm(z^0) \ , \\ \Delta_e^\sigma \phi^e & \text{sur } \Sigma_\pm^*(z^0) \ , \end{array}\right. \\ & \psi^e(T) = \frac{\partial \psi^e}{\partial t}(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega \ , \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

où $\phi^e$ solution de (2.1.1) avec $\{\phi_0, \phi_1\} \in F$ et $T > 0$ tel que l'inégalité inverse a lieu.

La dérivée $\dfrac{\partial}{\partial t}\Big(\dfrac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big)$ est prise au sens de la dualité entre $H^1\Big(0, T; L^2(\Gamma_\pm(z^0))\Big)$ et son dual, c'est-à-dire:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial \phi^e}{\partial t}\Big), v \right\rangle = -\int_{\Sigma_\pm(z^0)} \frac{\partial \phi^e}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \, d\sigma \, dt \qquad \forall\, v \in H^1\Big(0, T; L^2(\Gamma_\pm(z^0))\Big) \ .$$

De même, comme $\phi^e \in L^2\Big(0, T; H^1(\Gamma_\pm^*(z^0))\Big)$, alors:

$$\Delta_e^\sigma \phi^e \in L^2\Big(0, T; (H^1(\Gamma_\pm^*(z^0)))'\Big) \ ,$$

et on écrit

$$\langle -\Delta_e^\sigma \phi^e, v \rangle = \int_{\Sigma_\pm^*(z^0)} \nabla_e^\sigma \phi^e \, \nabla_e^\sigma v \, d\sigma \, dt \, , \qquad \forall\, v \in L^2\Big(0, T; H^1(\Gamma_\pm^*(z^0))\Big) \ .$$

La solution $\psi^e$ de (2.4.3) est définie par la méthode de transposition [2]; on multiplie (2.1.5) (problème en $\theta^e$) par $\psi^e$ et on intègre sur $Q$. On trouve sans peine la formulation du problème (2.4.3):

Trouver $\psi^e \in L^\infty(0,T;V')$ qui vérifie: $\exists\, \{\psi_1^e, -\psi_2^e\} \in F'$ tel que:

$$
\begin{aligned}
{}_{F'}\Big\langle \{\psi_1^e, -\psi_2^e\}, \{\theta_0,\theta_1\} \Big\rangle_F &= \int_Q f\, \psi^e \, dz\, dt + \int_{\Sigma(z^0)} \frac{\partial \theta^e}{\partial \nu}\, \frac{\partial \phi^e}{\partial \nu}\, d\sigma\, dt \\
&\quad + \int_{\Sigma_\pm(z^0)} \left\{ \frac{\partial \theta^e}{\partial t}\, \frac{\partial \phi^e}{\partial t} + \theta^e \phi^e \right\} d\sigma\, dt \\
&\quad + \int_{\Sigma^*_\pm(z^0)} \nabla_e^\sigma \theta^e . \nabla_e^\sigma \phi^e \; d\sigma\, dt \;,
\end{aligned} \tag{2.4.4}
$$

pour toute solution $\theta^e$ de (2.1.5) où l'on a pris $f \in L^1(0,T;V)$ et $\{\theta_0,\theta_1\} \in F$.

Le premier terme du membre de droite de (2.4.4) est interprété par la dualité entre $L^1(0,T;V)$ et $L^\infty(0,T;V')$, et les autres termes de droite ont un sens par la définition (2.4.2) de $F$.

D'aprés Lions [2] p. 151, le problème (2.4.3) possède une solution $\psi^e$ et une seule vérifiant:

$$
\psi^e \in L^\infty(0,T;V') \quad \text{et} \quad \left\{ \frac{\partial \psi^e}{\partial t}(0), -\psi^e(0) \right\} \in F' \;.
$$

On définit maintenant l'opérateur $\Lambda^e\colon\, F \to F'$ par:

$$
\Lambda^e(\{\phi_0,\phi_1\}) = \left\{ \frac{\partial \psi^e}{\partial t}(0), -\psi^e(0) \right\}, \qquad \forall\, \{\phi_0,\phi_1\} \in F \;. \tag{2.4.5}
$$

En prenant $f = 0$ dans (2.4.4), on obtient facilement

$$
\|\Lambda^e\| \le 1 \;, \tag{2.4.6}
$$

On prend cette fois-ci $\{\theta_0,\theta_1\} = \{\phi_0,\phi_1\}$ et $f = 0$ dans (2.4.4), on montre que

$$
\|\Lambda^e\| \ge 1 \;, \tag{2.4.7}
$$

et donc, d'après (2.4.6) et (2.4.7),

$$
\Lambda^e \text{ est un isomorphisme de } F \text{ sur } F' \;. \tag{2.4.8}
$$

Par conséquent, pour tout $\{y_1^e, -y_0^e\} \in F'$, il existe une unique solution $\{\phi_0^e, \phi_1^e\}$ dans F telle que:

$$
\Lambda^e(\{\phi_0^e,\phi_1^e\}) = \{y_1^e, -y_0^e\} \;. \tag{2.4.9}
$$

En posant:

$$
\begin{aligned}
& v^e = \frac{\partial \phi^e}{\partial \nu} \quad \text{sur } \Sigma(z^0) \;, \\
& w_\pm^e = \begin{cases} e\,\lambda_\pm \left\{ \dfrac{\partial}{\partial t}\left( \dfrac{\partial \phi^e}{\partial t} \right) - \phi^e \right\} := w_1^e & \text{sur } \Sigma_\pm(z^0), \\ e\,\lambda_\pm\, \Delta_e^\sigma \phi^e := w_2^e & \text{sur } \Sigma^*_\pm(z^0) \;, \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.4.10}
$$

où $\lambda_\pm$ est définie dans (1.11), on constate que le problème (1.12) coincide avec (2.4.3), par suite $y^e = \psi^e$ et en particulier:

$$y^e(T) = \frac{\partial y^e}{\partial t}(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega .$$

Ainsi, on peut énoncer le théorème de contrôlabilité exacte suivant:

**Théorème 2.4.1.** *On fixe $T > 0$ tel que l'inégalité inverse a lieu. Alors le problème (1.12), avec des conditions initiales $\{y_1^e, -y_0^e\} \in F'$ est contrôlable exactement en $T$ avec les contrôles définis dans (2.4.10). Ces contrôles vérifient les propriétés de régularité suivantes:*

$$\text{(2.4.11 a)} \qquad v^e \in L^2(\Sigma(z^0)) \; ,$$

$$\text{(2.4.11 b)} \qquad w_1^e \in \Big(H^1(0,T; L^2(\Gamma_\pm(z^0)))\Big)' \quad \textit{et} \quad w_2^e \in L^2\Big(0,T; (H^1(\Gamma_\pm^*(z^0)))'\Big) \; . \blacksquare$$

## 3 – Etude asymptotique

Dans cette partie, on fait tendre $e$ vers zéro et on étudie le comportement asymptotique des problèmes cités en première partie: problème homogène (problème en $\phi^e$), problème rétrograde (problème en $\psi^e$) et enfin problème de contrôlabilité exacte (1.12), et ce en utilisant les estimations déja établies. On montre que la limite du contrôle latéral $v^e$ est le contrôle d'un problème bidimensionnel dont l'opérateur dépend des ondulations $d_+$ et $d_-$ et que le contrôle $w_\pm^e$ converge fortement vers zéro.

Pour tout $g$ défini sur $\Omega$, on pose:

$$m(g)(z_1,z_2) \;=\; \frac{1}{d_+ - d_-} \int_{d_-(z_1,z_2)}^{d_+(z_1,z_2)} g(z_1,z_2,z_3)\; dz_3 \; .$$

### 3.1. Comportement du problème homogène

On reprend le problème homogène de terme source non nul avec des conditions initiales qui dépendent de $e$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta^e}{\partial t^2} - \Delta_e\theta^e = f \quad \text{dans } \ Q\ , \\
&\theta^e = 0 \quad \text{sur } \ \Sigma_0\ , \\
&\frac{\partial\theta^e}{\partial z_1}\nu_1 + \frac{\partial\theta^e}{\partial z_2}\nu_2 + e^{-2}\frac{\partial\theta^e}{\partial z_3}\nu_3 \ = \ 0 \quad \text{sur } \ \Sigma_\pm\ , \\
&\theta^e(0) = \theta_0^e, \ \ \frac{\partial\theta^e}{\partial t}(0) = \theta_1^e \quad \text{dans } \ \Omega\ .
\end{aligned}
\tag{3.1.1}
$$

**Théorème 3.1.1.** *On suppose que* $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ *et que:*

$$
\begin{aligned}
&\theta_0^e \rightharpoonup \theta_0^* \quad \textit{dans } V \textit{ faible}\ , \\
&\left\{e^{-1}\frac{\partial\theta_0^e}{\partial z_3}\right\} \quad \textit{borné dans } \ L^2(\Omega)\ , \\
&\theta_1^e \rightharpoonup \theta_1^* \quad \textit{dans } \ L^2(\Omega) \textit{ faible}\ .
\end{aligned}
\tag{3.1.2}
$$

*Alors:*

$$
\begin{aligned}
&\theta^e \rightharpoonup \theta^* \quad \textit{dans } \ L^\infty(0,T;V) \textit{ faible}\ , \\
&\frac{\partial\theta^e}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial\theta^*}{\partial t} \quad \textit{dans } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \textit{ faible}\ .
\end{aligned}
\tag{3.1.3}
$$

*La limite $\theta^*$ est indépendante de $z_3$ et est l'unique solution du problème:*

$$
\begin{aligned}
&(d_+ - d_-)\frac{\partial^2\theta^*}{\partial t^2} + A\theta^* = (d_+ - d_-)\,m(f) \quad \textit{dans } \ \omega\times(0,T)\ , \\
&\theta^* = 0 \quad \textit{sur } \ \gamma\times(0,T)\ , \\
&\theta^*(0) = m(\theta_0^*), \ \ \frac{\partial\theta^*}{\partial t}(0) = m(\theta_1^*) \quad \textit{dans } \ \omega\ ,
\end{aligned}
\tag{3.1.4}
$$

*où l'on a noté $A$ l'opérateur differentiel elliptique du second ordre à coefficients variables défini par:*

$$
Au \ = \ -\sum_{i=1,2}\frac{\partial}{\partial z_i}\left((d_+ - d_-)\frac{\partial u}{\partial z_i}\right)\ .
\tag{3.1.5}
$$

**Démonstration:** On a l'existence de la solution de (3.1.4) d'après [4]. La démonstration du théorème est similaire à celle du théorème 8.1 de [5]. ∎

**Corollaire 3.1.1.** *Soit $\phi^e$ solution du problème suivant:*

$$
(3.1.6)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \phi^e}{\partial t^2} - \Delta_e \phi^e = f \quad \text{dans } Q ,\\
&\phi^e = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 ,\\
&\frac{\partial \phi^e}{\partial z_1}\nu_1 + \frac{\partial \phi^e}{\partial z_2}\nu_2 + e^{-2}\frac{\partial \phi^e}{\partial z_3}\nu_3 = 0 \quad \text{sur } \Sigma_\pm ,\\
&\phi^e(0) = \phi_0^e, \ \ \frac{\partial \phi^e}{\partial t}(0) = \phi_1^e \quad \text{dans } \Omega .
\end{aligned}
$$

*On suppose que:*

$$
(3.1.7)\qquad
\begin{aligned}
&\phi_0^e \rightharpoonup \phi_0^* \quad \text{dans } V \text{ faible} ,\\
&\left\{ e^{-1}\frac{\partial \phi_0^e}{\partial z_3} \right\} \quad \text{borné dans } L^2(\Omega) ,\\
&\phi_1^e \rightharpoonup \phi_1^* \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} ,
\end{aligned}
$$

*Alors:*

$$
(3.1.8)\qquad
\begin{aligned}
&\phi^e \rightharpoonup \phi^* \quad \text{dans } L^\infty(0,T;V) \text{ faible} ,\\
&\frac{\partial \phi^e}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \quad \text{dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible} ,
\end{aligned}
$$

*où $\phi^*$ est indépendante de $z_3$ et est l'unique solution du problème:*

$$
(3.1.9)\qquad
\begin{aligned}
&(d_+ - d_-)\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} + A\phi^* = (d_+ - d_-)\, m(f) \quad \text{dans } \omega \times (0,T) ,\\
&\phi^* = 0 \quad \text{sur } \gamma \times (0,T) ,\\
&\phi^*(0) = m(\phi_0^*), \ \ \frac{\partial \phi^*}{\partial t}(0) = m(\phi_1^*) \quad \text{dans } \omega . \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

### 3.2. Comportement du problème rétrograde

On prend d'abord $\{\phi_0^e, \phi_1^e\}$ tel que:

$$
(3.2.1)\qquad \|\{\phi_0^e, \phi_1^e\}\|_F \le C_4
$$

avec $C_4$ constante indépendante de $e$. On a alors (pour une sous-suite de $\{\phi_0^e, \phi_1^e\}$)

$$
(3.2.2)\qquad \{\phi_0^e, \phi_1^e\} \rightharpoonup \{\phi_0^*, \phi_1^*\} \quad \text{dans } F \text{ faible} ,
$$

et les hypothèses du Corollaire 3.1.1 sont satisfaites grâce à l'inégalité inverse (2.3.3), et par suite on a les convergences données par (3.1.7). En outre, (3.2.2) est équivalent à

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \phi^e}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \quad \text{dans } L^2(\Sigma_\pm(z^0)) \text{ faible },\\
&\frac{\partial \phi^e}{\partial \nu} \rightharpoonup \frac{\partial \phi^*}{\partial \nu} \quad \text{dans } L^2(\Sigma(z^0)) \text{ faible },\\
&\nabla_e^\sigma \phi^e \rightharpoonup \nabla^\sigma \phi^* \quad \text{dans } L^2(\Sigma_\pm^*(z^0)) \text{ faible },
\end{aligned} \tag{3.2.3}
$$

avec $\nabla^\sigma \phi^* = \nabla \phi^*$ sur $\Sigma_\pm^*(z^0)$ et $\phi^*$ est la solution de (3.1.9).

On a le résultat suivant:

**Théorème 3.2.1.** *Soit $\{\phi_0^e, \phi_1^e\}$ vérifiant (3.2.2). On résout le problème (3.1.6) en $\phi^e$, puis on résout le problème (2.4.3) en $\psi^e$ pour $\psi^e \in L^\infty(0,T;V')$. On a:*

$$
\begin{aligned}
&m(\psi^e) \in L^\infty(0,T;L^2(\omega)) \ ,\\
&m(\psi^e) \to \psi^* \quad \textit{dans } L^\infty(0,T;L^2(\omega)) \textit{ faible-étoile },
\end{aligned} \tag{3.2.4}
$$

*où $\psi^e \in L^\infty(0,T;L^2(\omega))$, indépendante de $z_3$ et est l'unique solution de:*

$$
\begin{aligned}
&(d_+ - d_-)\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} + A\psi^* = \left(\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} - \phi^*\right)\chi_{\omega_\pm(z^0)\times(0,T)}\\
&\qquad\qquad + \Delta\phi^* \chi_{\omega_\pm^*(z^0)\times(0,T)} \quad \textit{dans } \omega \times (0,T) \ ,\\
&\psi^* = \frac{\partial \phi^*}{\partial \nu} \quad \textit{sur } \gamma(z^0)\times(0,T) \ ,\\
&\psi^* = 0 \quad \textit{sur } \gamma_* \times (0,T) \ ,\\
&\psi^*(T) = \frac{\partial \psi^*}{\partial t}(T) = 0 \quad \textit{dans } \omega \ ,
\end{aligned} \tag{3.2.5}
$$

*où l'on a noté:*

$$
\begin{aligned}
&\omega_\pm(z^0) = \Big\{(z_1,z_2) \in \omega \,|\, (z_1,z_2,d_\pm(z_1,z_2)) \in \Gamma_\pm(z^0)\Big\} \ ,\\
&\omega_\pm^*(z^0) = \omega \backslash \omega_\pm(z^0) \ ,
\end{aligned} \tag{3.2.6}
$$

*et $\chi_{\omega_\pm(z^0)\times(0,T)}$ désigne la fonction caractéristique de $\omega_\pm(z^0)\times(0,T)$.*

**Démonstration:** On passe à la limite dans (2.4.3) (problème en $\psi^e$) en procèdant comme dans [5]; on considère sa formulation faible (2.4.4), on prend $\theta_0$, $\theta_1$ et $f$ indépendantes de $z_3$ et on utilise les éstimations (2.2.10), (2.1.6) et (2.2.11). ∎

### 3.3. Etude du problème limite bidimensionnel

On se donne un contrôle interne $\widetilde{w}$ et un contrôle frontière $\widetilde{v}$ et on considère le problème suivant:

$$
(3.3.1) \qquad \begin{aligned}
&(d_+ - d_-)\,\frac{\partial^2 \widetilde{y}}{\partial t^2} + A\widetilde{y} = \widetilde{w} \quad \text{dans } \omega \times (0,\widetilde{T}) , \\
&\widetilde{y} = \widetilde{v} \quad \text{sur } \gamma(z^0) \times (0,\widetilde{T}) , \\
&\widetilde{y} = 0 \quad \text{sur } \gamma_* \times (0,\widetilde{T}) , \\
&\widetilde{y}(0) = \widetilde{y}_0 \ \text{ et } \ \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial t}(0) = \widetilde{y}_1 \quad \text{dans } \omega .
\end{aligned}
$$

Pour $\widetilde{T}$ fixé $> 0$, on cherche $\widetilde{w}$ et $\widetilde{v}$ tels que:

$$
(3.3.2) \qquad \widetilde{y}(\widetilde{T}) = \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial t}(\widetilde{T}) = 0 \quad \text{dans } \omega .
$$

Pour $\{\widetilde{\phi}_0, \widetilde{\phi}_1\} \in \widetilde{V} \times L^2(\omega)$, le problème homogène associé à (3.3.1):

$$
(3.3.3) \qquad \begin{aligned}
&(d_+ - d_-)\,\frac{\partial^2 \widetilde{\phi}}{\partial t^2} + A\widetilde{\phi} = 0 \quad \text{dans } \omega \times (0,\widetilde{T}) , \\
&\widetilde{\phi} = 0 \quad \text{sur } \gamma \times (0,\widetilde{T}) , \\
&\widetilde{\phi}(0) = \widetilde{\phi}_0, \ \ \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial t}(0) = \widetilde{\phi}_1 \quad \text{dans } \omega ,
\end{aligned}
$$

admet une unique solution $\widetilde{\phi} \in C^0(0,\widetilde{T};\widetilde{V}) \cap C^1(0,\widetilde{T};L^2(\omega))$ d'après [4].

En plus, en posant

$$
(3.3.4) \qquad \widetilde{E}(t) = \frac{1}{2}\int_\omega (d_+ - d_-)\left\{ \left(\frac{\partial^2 \widetilde{\phi}}{\partial t^2}\right) + |\nabla \widetilde{\phi}|^2 \right\} d\widetilde{z} .
$$

On a

$$
(3.3.5) \qquad \widetilde{E}(t) = \widetilde{E}(0) , \quad \forall t ,
$$

$$
(3.3.6) \qquad \widetilde{E}(0) = \frac{1}{2}\int_\omega (d_+ - d_-)\left\{ |\nabla \widetilde{\phi}_0|^2 + |\widetilde{\phi}_1|^2 \right\} d\widetilde{z} := \|\{\widetilde{\phi}_0, \widetilde{\phi}_1\}\|^2_{\widetilde{E}} .
$$

Soit $\widetilde{f} \in L^1(0,T;L^2(\omega))$, on introduit le problème de terme source non nul suivant:

$$(3.3.7)\qquad \begin{aligned} &(d_+ - d_-)\,\frac{\partial^2\widetilde{\theta}}{\partial t^2} + A\widetilde{\theta} = \widetilde{f} \quad \text{dans}\ \ \omega\times(0,\widetilde{T})\ , \\ &\widetilde{\theta} = 0 \quad \text{sur}\ \ \gamma\times(0,\widetilde{T})\ , \\ &\widetilde{\theta}(0) = \widetilde{\theta}_0,\ \ \frac{\partial\widetilde{\theta}}{\partial t}(0) = \widetilde{\theta}_1 \quad \text{dans}\ \ \omega\ . \end{aligned}$$

Pour $\{\widetilde{\theta}_0,\widetilde{\theta}_1\} \in \widetilde{V}\times L^2(\omega)$, on a $\widetilde{\theta} \in C^0(0,\widetilde{T};\widetilde{V}) \cap C^1(0,\widetilde{T};L^2(\omega))$.

Par la méthode des multiplicateurs on montre facilement

$$(3.3.8)\qquad \begin{aligned} &\int_{\gamma\times(0,\widetilde{T})} \left(\frac{\partial\widetilde{\theta}}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma\, dt \ \le\ C_5\,(\widetilde{T}+1)\left\{\widetilde{E}(0) + \|f\|^2_{L^1(0,\widetilde{T};L^2(\omega))}\right\}, \quad \forall\,\widetilde{T}>0\ , \\ &\int_{\gamma\times(0,\widetilde{T})} \left(\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma\, dt \ \le\ C_5\,(\widetilde{T}+1)\,\|\{\widetilde{\phi}_0,\widetilde{\phi}_1\}\|^2_{\widetilde{E}}, \quad \forall\,\widetilde{T}>0\ , \end{aligned}$$

où $C_5$ constante $> 0$.

De plus on a le résultat suivant:

**Lemme 3.3.1.** *Pour tout $\widetilde{T} > 2\max_{z\in\overline{\omega}} |\widetilde{m}(z)|$, avec $\widetilde{m}(z) = {}^{\mathrm{t}}(z_1 - z_1^0, z_2 - z_2^0)$, et pour $\{\widetilde{\phi}_0,\widetilde{\phi}_1\}$ dans $\widetilde{V}\times L^2(\omega)$, on a*

$$(3.3.9)\qquad \|\{\widetilde{\phi}_0,\widetilde{\phi}_1\}\|^2_{\widetilde{E}} \ \le\ C_6 \int_{\omega_\pm(z^0)\times(0,\widetilde{T})} \left\{\left(\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial t}\right)^2 + \widetilde{\phi}^2\right\} d\widetilde{z}$$

*avec $C_6$ constante $> 0$.*

**Démonstration:** On vérifie facilement que $\omega_\pm(z^0)$ est un voisinage de $\gamma(x^0)$ et le résultat découle immédiatement du lemme 2.4 p. 413 de Lions [2]. ∎

On définit alors la norme:

$$(3.3.10)\qquad \begin{aligned} \|\{\widetilde{\phi}_0,\widetilde{\phi}_1\}\|^2_{\widetilde{F}} \ =\ &\int_{\gamma(z^0)\times(0,\widetilde{T})} \left(\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma\, dt \\ &+ \int_{\omega_\pm(z^0)\times(0,\widetilde{T})} \left\{\left(\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial t}\right)^2 + \widetilde{\phi}^2\right\} d\widetilde{z} \\ &+ \int_{\omega^*_\pm(z^0)\times(0,\widetilde{T})} |\nabla\widetilde{\phi}|^2\ d\widetilde{z}\ . \end{aligned}$$

De (3.3.8) et (3.3.9) on déduit que pour $\widetilde{T}$ tel que (3.3.9) a lieu, les normes $\| \ \|_{\widetilde{F}}$ et $\| \ \|_{\widetilde{E}}$ sont equivalentes. Et parsuite

(3.3.11) $$\widetilde{F} = \widetilde{V} \times L^2(\omega) \quad \text{et} \quad \widetilde{F}' = \widetilde{V}' \times L^2(\omega) \ .$$

On introduit maintenant le problème retrograde:

Trouver $\widetilde{\psi} \in L^\infty(0, \widetilde{T}; L^2(\omega))$ solution de:

(3.3.12)
$$\begin{aligned}
&(d_+ - d_-) \frac{\partial^2 \widetilde{\psi}}{\partial t^2} + A\widetilde{\psi} = \left( \frac{\partial^2 \widetilde{\phi}}{\partial t^2} - \widetilde{\phi} \right) \chi_{\omega_\pm(z^0)\times(0,T)} \\
&\qquad\qquad + \Delta\widetilde{\phi}\, \chi_{\omega^*_\pm(z^0)\times(0,T)} \quad \text{dans} \ \ \omega \times (0,T) \ , \\
&\widetilde{\psi} = \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial \nu} \quad \text{sur} \ \ \gamma(z^0) \times (0,T) \ , \\
&\widetilde{\psi} = 0 \quad \text{sur} \ \ \gamma_* \times (0,T) \ , \\
&\psi^*(T) = \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial t}(T) = 0 \quad \text{dans} \ \ \omega \ ,
\end{aligned}$$

où $\widetilde{\phi}$ est solution de (3.3.3).

En multipliant dans (3.3.12) par $\widetilde{\theta}$ solution de (3.3.7) (avec $\{\widetilde{\theta}_0, \widetilde{\theta}_1\}$ dans $\widetilde{V} \times L^2(\omega)$), et en intégrant par parties, on obtient la formulation faible de (3.3.13) suivante:

Il existe $\{\widetilde{\psi}_0, \widetilde{\psi}_1\} \in L^2(\omega) \times \widetilde{V}'$ et $\widetilde{\psi} \in L^\infty(0, \widetilde{T}; L^2(\omega))$ tels que:

$$\begin{aligned}
&{}_{\widetilde{V}'}\langle \widetilde{\psi}_1, \widetilde{\theta}_0 \rangle_{\widetilde{V}} - {}_{L^2(\omega)}\langle \widetilde{\psi}_0, \widetilde{\theta}_1 \rangle_{L^2(\omega)} = \\
&\quad = \int_{\omega \times (0,\widetilde{T})} \widetilde{\psi}\, \widetilde{f}\, d\widetilde{z}\, dt + \int_{\gamma(z^0)\times(0,\widetilde{T})} \frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \nu} \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial \nu}\, d\sigma dt \\
&\quad + \int_{\omega_\pm(z^0)\times(0,\widetilde{T})} \left\{ \frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial t} \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial t} + \widetilde{\theta}\, \widetilde{\phi} \right\} d\sigma\, dt + \int_{\omega^*_\pm(z^0)\times(0,\widetilde{T})} \nabla\widetilde{\theta}.\nabla\widetilde{\phi}\, d\widetilde{z}\, dt \ .
\end{aligned}$$

On montre facilement que (3.3.13) admet une unique solution.

Définissons alors l'opérateur linéaire $\Lambda$

(3.3.14) $$\Lambda \colon \widetilde{F} \to \widetilde{F}' , \quad \Lambda(\{\widetilde{\phi}_0, \widetilde{\phi}_1\}) = \{\widetilde{\psi}_1, -\widetilde{\psi}_0\} \ .$$

On montre sans peine que $\Lambda$ est un isomorphisme de $\widetilde{F}$ sur $\widetilde{F}'$. Le problème bidimensionnel (3.3.1) est alors équivalent à:

Trouver $\{\widetilde{\phi}_0, \widetilde{\phi}_1\} \in \widetilde{F}'$ tel que

(3.3.15) $$\Lambda(\{\widetilde{\phi}_0, \widetilde{\phi}_1\}) = \{\widetilde{y}_1, -\widetilde{y}_0\} \ \in \ \widetilde{F}' \ ,$$

et on prend:

$$(3.3.16)\qquad \begin{aligned} &\widetilde{w} = \left(\frac{\partial^2\widetilde{\phi}}{\partial t^2} - \widetilde{\phi}\right)\chi_{\omega_\pm(z^0)\times(0,\widetilde{T})} + \Delta\widetilde{\phi}\,\chi_{\omega^*_\pm(z^0)\times(0,\widetilde{T})} \quad \text{dans}\ \ \omega\times(0,\widetilde{T})\ , \\ &\widetilde{v} = \frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial\nu} \quad \text{sur}\ \ \gamma(z^0)\times(0,\widetilde{T})\ . \end{aligned}$$

On a les propriétés de régularité suivantes:

$$(3.3.17)\qquad \begin{aligned} &\widetilde{w}|_{\omega^*_\pm(z^0)} \in L^2\Big(0,\widetilde{T};(H^1(\omega^*_\pm(z^0)))'\Big)\ , \\ &\widetilde{w}|_{\omega_\pm(z^0)} \in \Big(H^1(0,\widetilde{T};L^2(\omega_\pm(z^0)))\Big)'\ , \\ &\widetilde{v} \in L^2(\gamma(z^0))\ . \end{aligned}$$

On énonce maintenant le théorème de contrôlabilité exacte du problème bidimensionnel (3.3.1):

**Théorème 3.3.1.** *On considère le problème de contrôlabilité exacte (3.3.1), on prend les conditions initiales* $\{\widetilde{y}_0,-\widetilde{y}_1\}\in\widetilde{V}'\times L^2(\omega)$, *on prend aussi* $\widetilde{T}$ *tel qu'on a (3.3.9) et le Théorème 2.4.1. Alors le problème (3.3.1) est exactement contrôlable avec les contrôles donnés par (3.3.16).* ∎

### 3.4. Comportement du problème de contrôlabilité exacte

On suppose que:

$$(3.4.1)\qquad \begin{aligned} &\|\{y_1^e,-y_0^e\}\|_{F'} \le C_7, \quad \text{avec}\ C_7\ \text{constante indépendante de}\ e\ , \\ &m(y_0^e) \rightharpoonup y_0^* \quad \text{dans}\ \ L^2(\omega)\ \text{faible}\ , \\ &m(y_1^e) \rightharpoonup y_1^* \quad \text{dans}\ \ \widetilde{V}'\ \text{faible}\ . \end{aligned}$$

Du Théorème 2.4.9 il découle

$$(3.4.2)\qquad \|\{\phi_0^e,\phi_1^e\}\|_F \le C_8\ ,$$

où $\{\phi_0^e,\phi_1^e\}$ est une solution de (2.4.10) et $C_8$ constante indépendante de $e$.

On retrouve (3.2.1) et par conséquent on a, pour une sous suite de $e$, les convergences données par (3.1.7) et (3.2.3). On vérifie comme dans [5] qu'on a convergence pour toute la suite.

Enfin, d'après (2.4.10) et (3.2.3), on a

$$
\begin{aligned}
& w_1^e \to 0 \quad \text{dans} \quad \Big(H^1(0,T;L^2(\Gamma_\pm(z^0)))\Big)' \text{ fort },\\
& w_2^e \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2\Big(0,T;(H^1(\Gamma_\pm^*(z^0)))'\Big) \text{ fort },\\
& v^e = \frac{\partial \phi^e}{\partial \nu} \rightharpoonup \widetilde{v} = \frac{\partial \phi^*}{\partial \nu} \quad \text{dans} \quad L^2(\Sigma(z^0)) \text{ faible },
\end{aligned}
\tag{3.4.3}
$$

où $\phi^*$ est la solution du problème limite bidimensionnel avec les conditions initiales:

$$
\widetilde{y}_0 = m(\phi_0^*) \quad \text{et} \quad \widetilde{y}_1 = m(\phi_1^*) \ . \tag{3.4.4}
$$

On a alors le théorème

**Théorème 3.4.1.** *On prend $\{y_0^e, y_1^e\}$ vérifiant (3.4.1), et $T$ tel qu'on a le Théorème 3.3.1. Alors*

**a**) *Les contrôles $\{v^e, w_\pm^e\}$ vérifient*

$$
w_\pm^e = \begin{cases} w_1^e \to 0 & \textit{dans} \quad \Big(H^1(0,T;L^2(\gamma_\pm(z^0)))\Big)' \textit{ fort },\\ w_2^e \to 0 & \textit{dans} \quad L^2\Big(0,T;(H^1(\gamma_\pm^*(z^0)))'\Big) \textit{ fort },\end{cases} \tag{3.4.5a}
$$

$$
v^e \rightharpoonup \widetilde{v} = \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial \nu} \quad \textit{dans} \quad L^2(\Sigma(z^0)) \textit{ faible };\tag{3.4.5b}
$$

**b**) *La solution $y^e$ du problème (1.13) vérifie*

$$
m(y^e) \to y^* \quad \textit{dans} \quad L^\infty(0,T;L^2(\omega)) \textit{ faible-étoile },\tag{3.4.6}
$$

*où $y^*$ satisfait:*

$$
\begin{aligned}
(d_+ - d_-)\,\frac{\partial^2 y^*}{\partial t^2} + Ay^* &= \left(\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} - \phi^*\right)\chi_{\omega\pm(z^0)\times(0,T)}\\
&\quad + \Delta\phi^*\,\chi_{\omega_\pm^*(z^0)\times(0,T)} \quad \textit{dans} \quad \omega\times(0,T) \ ,\\
y^* &= \frac{\partial \phi^*}{\partial \nu} \quad \textit{sur} \quad \gamma(z^0)\times(0,T) \ ,\\
y^* &= 0 \quad \textit{sur} \quad \gamma_*\times(0,T) \ ,\\
y^*(T) &= \frac{\partial y^*}{\partial t}(T) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega \ ,
\end{aligned}
\tag{3.4.7}
$$

*où $\phi^*$ est l'unique solution de (3.1.9) et (3.4.4).* ∎

**Remarque 3.4.1.** La présentation de ce travail, ainsi que les démonstrations des résultats obtenus, s'inspirent du travail fait par J. Saint Jean Paulin et M. Vanninathan [5] dans le cas cylindrique. On retrouve les résultats établis dans [5] en prenant $d_+$ et $d_-$ constantes. □

## BIBLIOGRAPHIE

**[1]** GRISVARD, P. – Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités, *J. Maths. Pures Appl.,* 68 (1989), 215–259.
**[2]** LIONS, J.-L. – *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués*, Tome 1, collection RMA, Masson, 1988.
**[3]** LIONS, J.-L. – *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués*, Tome 2, collection RMA, Masson, 1988.
**[4]** LIONS, J.-L. et MAGENES, E. – *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Volume 2, p. 10, 11.
**[5]** SAINT JEAN PAULIN, J. et VANNINATHAN, M. – Exact controlability of vibrations of thin bodies, *Portugaliae Mathematica,* 51 (1994), 421–453.
**[6]** YAN, J. – Contrôlabilité exacte pour des domaines minces, *Asymptotic Analysis,* 5 (1992), 461–471.

Nabil Laanaia,
Département de Mathématiques, Université de Metz,
Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 01 – FRANCE