PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 58 Fasc. 3 – 2001
Nova Série

CONTRÔLABILITÉ EXACTE D'UN PROBLÈME AVEC CONDITIONS DE VENTCEL ÉVOLUTIVES POUR LE SYSTÈME LINÉAIRE DE L'ÉLASTICITÉ *

Amar Heminna

EXACT CONTROLLABILITY OF THE LINEAR ELASTICITY SYSTEM WITH EVOLUTIVE VENTCEL'S CONDITIONS

Abstract: In this work, we examine the exact controllability of the solution of a linear elasticity system, with evolutive Ventcel's conditions [3] in a bounded domain of $\mathbb{R}^3$. We use the Hilbert uniqueness methode, (H.U.M), of J.L. Lions [8]; some multipliers are defined on the boundary; the curvature tensor (see [5]), appears when computing some boundary integrals. This work can be inserted in the framework of the study of the exact controllability and stabilisation of various problems with Ventcel's conditions [3,4].

Résumé: On considère le problème de la contrôlabilité exacte de la solution du système linéaire de l'élasticité, avec des conditions de Ventcel évolutives, (cf. [3]), dans un domaine borné de $\mathbb{R}^3$. L'obtention d'une relation, en vue de la mise en oeuvre de la méthode d'unicité Hilbertienne, (H.U.M.), de J.L. Lions [8] a donné lieu à l'utilisation de multiplicateurs définis sur le bord du domaine; le tenseur de courbure de la frontière, (cf. [5]), apparait lors du calcul de certaines intégrales de bord. Ce travail entre dans le cadre de l'étude de la contrôlabilité exacte et de la stabilisation de divers problèmes de Ventcel, (cf. [3,4]).

Received: February 2, 2000.
Classification Mathématique: 93B03, 93B05, 93D15.
Mots-clés: Elasticité; Problème de Ventcel; Contrôlabilité.

* Ce travail a été en partie réalisé lors d'un séjour au D.M.I. de l'Ecole Centrale de Lyon.

1 – Introduction

Dans ce travail on étudie la contrôlabilité exacte de la solution du système linéaire de l'élasticité, avec des conditions de Ventcel évolutives. Les problèmes de Ventcel sont caractérisés par la présence d'opérateurs différentiels tangentiels de même ordre que l'opérateur principal.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière Γ de classe C^3 (pour donner un sens au tenseur de courbure cf. [5]). On note ν la normale unitaire sortante. Soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un champ vectoriel régulier défini dans Ω; on pose $\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$ et $\sigma(\mathbf{u}) = 2\,\mu\,\epsilon(\mathbf{u}) + \lambda(\operatorname{div}(\mathbf{u}))\,i_3$, ($\lambda$ et μ sont les coefficents de Lamé et i_3 est l'application identité de $\mathbb{R}^3$). Soit $m \in \Gamma$; on désigne par $T_m(\Gamma)$ le plan tangent en m à Γ, $\pi(m)$ la projection orthogonale sur $T_m(\Gamma)$. Soit $\mathbf{v} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$; on pose: $\mathbf{v}(m) = \mathbf{v}_T(m) + v_\nu(m).\nu(m)$ où $\mathbf{v}_T(m) = \pi(m)\,\mathbf{v}(m)$. On note ∂_m et ∂_ν les dérivations tangentielle et normale, $(\partial_m \nu)$ l'opérateur de courbure sur Γ et $\pi\,\partial_m \mathbf{v}_T\,\pi$ la dérivée covariante du champ $\mathbf{v}_T$. On a alors sur Γ, (cf. [1,6,11]):

$$\epsilon(\mathbf{v}) \;=\; \epsilon_T(\mathbf{v}) + \nu\,\overline{\epsilon_S}(\mathbf{v}) + \epsilon_S(\mathbf{v})\,\bar{\nu} + \epsilon_\nu(\mathbf{v})\,\nu\,\bar{\nu} \tag{1.1}$$

avec

$$\begin{aligned} 2\,\epsilon_T(\mathbf{v}) \;&=\; \pi\,\partial_m \mathbf{v}_T\,\pi + \overline{\pi\,\partial_m \mathbf{v}_T\,\pi} + 2\,v_\nu\,\partial_m \nu \;, \\ 2\,\epsilon_S(\mathbf{v}) \;&=\; \partial_\nu \mathbf{v}_T + \overline{\partial_m v_\nu} - (\partial_m \nu)\,\mathbf{v}_T \;, \qquad \epsilon_\nu(\mathbf{v}) = \partial_\nu v_\nu \;, \end{aligned} \tag{1.2}$$

et

$$\sigma(\mathbf{v}) \;=\; \sigma_T(\mathbf{v}) + \nu\,\overline{\sigma_S}(\mathbf{v}) + \sigma_S(\mathbf{v})\,\bar{\nu} + \sigma_\nu(\mathbf{v})\,\nu\,\bar{\nu} \tag{1.3}$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_T(\mathbf{v}) \;&=\; 2\,\mu\,\epsilon_T(\mathbf{v}) + \lambda\Big(\operatorname{tr}(\epsilon_T(\mathbf{v})) + \epsilon_\nu(\mathbf{v})\Big)\,i_2 \;, \\ \sigma_S(\mathbf{v}) \;&=\; 2\,\mu\,\epsilon_S(\mathbf{v}) \;, \\ \sigma_\nu(\mathbf{v}) \;&=\; 2\,\mu\,\epsilon_\nu(\mathbf{v}) + \lambda\Big(\operatorname{tr}(\epsilon_T(\mathbf{v})) + \epsilon_\nu(\mathbf{v})\Big) \;, \end{aligned} \tag{1.4}$$

où la barre désigne le transposé d'un vecteur, d'un endomorphisme, etc., i_2 est l'identité du plan tangent et "tr" symbolise la trace. D'après (1.3) on a: $\sigma(\mathbf{u}).\nu = \sigma_S(\mathbf{u}) + \sigma_\nu(\mathbf{u})\,\nu$. On pose:

$$\sigma_T^0(\mathbf{v}) \;=\; 2\,\mu\,\epsilon_T^0(\mathbf{v}) + \lambda^* \operatorname{tr}(\epsilon_T^0(\mathbf{v}))\,i_2$$

$$\text{avec} \quad \lambda^* = (2\,\lambda\,\mu)\,(\lambda + 2\,\mu)^{-1} \quad \text{et} \quad \epsilon_T^0(\mathbf{v}) = \epsilon_T(\mathbf{v}) \;.$$

Soit τ_T un champ régulier d'endomorphismes du plan tangent à Γ; la divergence tangentielle de τ_T est le champ de formes linéaires sur le plan tangent noté $\operatorname{div}_T \tau_T$ défini par:

$$\int_\Gamma \operatorname{div}_T \tau_T\, v_T\; d\Gamma \;=\; -\int_\Gamma (\tau_T : \pi\,\partial_m v_T\,\pi)\; d\Gamma \,, \qquad \forall\, v_T \in \mathcal{D}(\Gamma, T(\Gamma))$$

où $(\tau_T : \pi\partial_m v_T \pi) = \mathrm{tr}(\tau_T . \pi\partial_m v_T \pi)$ et $\mathcal{D}(\Gamma, T(\Gamma))$ désigne l'espace des champs tangents à Γ dont les composantes dans une base $\{a_1, a_2\}$ de $T_m(\Gamma)$ sont dans $\mathcal{D}(\Gamma)$.

On considère le système:

$$(1.5) \qquad \begin{cases} \mathbf{u}'' - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{dans } Q_T = \Omega \times (0,T), \\ \mathbf{u}_T'' + \sigma_S(\mathbf{u}) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u})} = \mathbf{g}_T & \text{sur } \Sigma_T = \Gamma \times (0,T), \\ u_\nu'' + \sigma_\nu(\mathbf{u}) + \sigma_T^0(\mathbf{u}) : \partial_m \nu = g_\nu & \text{sur } \Sigma_T, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_1^0, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}_1^1 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}_{|\Gamma}(0) = \mathbf{u}_2^0, \quad (\mathbf{u}_{|\Gamma})'(0) = \mathbf{u}_2^1 & \text{sur } \Gamma\ , \end{cases}$$

où $(' = \partial_t)$, $\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u})$ est le champ vectoriel de composantes $\sigma_{ij,j}(\mathbf{u})$, $i = 1,2,3$, $\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u})$ est la divergence tangentielle du champ d'endomorphismes du plan tangent $\sigma_T^0(\mathbf{u})$ et $(\sigma_T^0(\mathbf{u}) : \partial_m \nu) = \mathrm{tr}(\sigma_T^0(\mathbf{u}).\partial_m \nu)$.

Les conditions au bord dans (1.5) sont les conditions de Ventcel évolutives; elles sont obtenues par passage à la limite dans un problème de transmission posé dans l'ouvert formé de la jonction de l'ouvert Ω et d'une coque mince Ω_-^ε d'épaisseur ε posée sur son bord, infiniment rigide et infiniment dense, lorsque l'épaisseur ε de la coque tend vers 0; elles modélisent l'effet asymptotique du raidisseur Ω_-^ε (cf. [7] pour l'obtention de diverses conditions de Ventcel stationnaires).

On pose: $\mathbf{g}(m) = \mathbf{g}_T(m) + g_\nu(m)\,\nu(m)$ et on prend $\mathbf{f} = 0$ dans (1.5); il s'agit de trouver, pour des conditions initiales et un temps T convenables , un *contrôle* $\mathbf{g}$ tel que la solution $\mathbf{u}$ vérifie: $\mathbf{u}(T) = \mathbf{u}'(T) = 0$.

On considère les espaces:

- $L^2(\Gamma, T(\Gamma))$, (resp. $H^1(\Gamma, T(\Gamma))$), l'espace des champs tangents $\mathbf{v}_T$ dont les composantes dans une base du plan tangent sont dans $L^2(\Gamma)$, (resp. $H^1(\Gamma)$).

- $$\mathcal{H} = \mathbb{L}^2(\Omega) \times L^2(\Gamma, T(\Gamma)) \times L^2(\Gamma)$$

  muni de la norme produit.

- $$\mathbb{V} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega) :\ \mathbf{v}_{T|\Gamma} \in H^1(\Gamma, T(\Gamma)) \right\}$$

  muni de la norme:

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{V}} = \left(\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{v}_T\|^2_{H^1(\Gamma, T(\Gamma))} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

On verra à la Proposition 2.4 que cette norme est équivalente à la norme $\|\cdot\|$ définie par:

$$\|\mathbf{v}\| = \left(\int_\Omega \sigma(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{v})\ dx\ + \int_\Gamma \left(\sigma_T^0(\mathbf{v}) : \epsilon_T^0(\mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2\right)\ d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}.$$

- $$\mathcal{V} = \left\{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \colon\ \mathbf{v}_1 \in \mathbb{V},\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{1|\Gamma}\right\}$$

muni de la norme:

$$\|(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\|_{\mathcal{V}} = \|\mathbf{v}_1\|_{\mathbb{V}}\ .$$

On considère sur $\mathcal{H}$ l'opérateur non borné:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\mathrm{div}\sigma(.) & 0 \\ \sigma_S(\cdot) & -\overline{\mathrm{div}_T\sigma_T^0(\cdot)} \\ \sigma_\nu(\cdot) & \sigma_T^0(\cdot) : \partial_m\nu \end{pmatrix}$$

de domaine $D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{V} \colon\ \mathcal{A}U \in \mathcal{H}\}$. La norme de $D(\mathcal{A})$ est définie par:

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\|_{D(\mathcal{A})} = \Big(&\|\mathbf{u}_1\|_{\mathbb{V}}^2 + \|\,\mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{u}_1)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \\ &+ \left\|\sigma_S(\mathbf{u}_1) - \overline{\mathrm{div}_T\,\sigma_T^0(\mathbf{u}_2)}\right\|_{L^2(\Gamma,T(\Gamma))}^2 \\ &+ \left\|\sigma_\nu(\mathbf{u}_1) + \sigma_T^0(\mathbf{u}_2) : \partial_m\nu\right\|_{L^2(\Gamma)}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\ . \end{aligned}$$

On montre le résultat d'existence et d'unicité suivant:

Théorème 1.1.

(i) *Si* $\mathbf{f} \in L^1(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$, $\mathbf{g} \in L^1(0,T;\mathbb{L}^2(\Gamma))$, $(\mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0) \in \mathcal{V}$ *et* $(\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^1) \in \mathcal{H}$ *alors le problème (1.5) admet une solution (faible) unique* $\mathbf{u}$ *telle que:*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{|\Gamma}) \in C^0([0,T];\mathcal{V}) \cap C^1([0,T];\mathcal{H})$$

et il existe une constante positive C_1 *ne dépendant que de* Ω *telle que:*

$$\begin{aligned} &\|(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{|\Gamma})\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V})} + \|(\mathbf{u}', \mathbf{u}'_{|\Gamma})\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{H})} \leq \\ &\leq C_1\Big(\|\mathbf{f}\|_{L^1(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\mathbf{g}\|_{L^1(0,T;\mathbb{L}^2(\Gamma))} + \|(\mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0)\|_{\mathcal{V}} + \|(\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^1)\|_{\mathcal{H}}\Big)\ . \end{aligned}$$

(ii) *Si* $\mathbf{f} \in L^1(0,T;\mathbb{V})$, $\mathbf{g} = \mathbf{f}_{|\Gamma}$, $(\mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0) \in D(\mathcal{A})$ *et* $(\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^1) \in \mathcal{V}$ *alors la solution* $\mathbf{u}$ *du problème (1.5) est telle que:*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{|\Gamma}) \in C^0([0,T]; D(\mathcal{A})) \cap C^1([0,T]; \mathcal{V})$$

et il existe une constante positive C_2 *ne dépendant que de* Ω *telle que:*

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{|\Gamma})\|_{L^\infty(0,T;D(\mathcal{A}))} + \|(\mathbf{u}', \mathbf{u}'_{|\Gamma})\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V})} \leq \\ \leq C_2\Big(\|\mathbf{f}\|_{L^1(0,T;\mathbb{V})} + \|(\mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0)\|_{D(\mathcal{A})} + \|(\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^1)\|_{\mathcal{V}}\Big) .\end{aligned}$$

De plus on a $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_T, \sigma(\mathbf{u}).\nu) \in C^0([0,T]; \mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Omega) \times H^2(\Gamma, T(\Gamma)) \times \mathbb{L}^2(\Gamma))$ *et il existe une constante positive* C_3 *ne dépendant que de* Ω *telle que:*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Omega))} + \|\mathbf{u}_T\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Gamma,T(\Gamma)))} + \|\sigma(\mathbf{u}).\nu)\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Gamma,T(\Gamma)))} \leq \\ \leq C_3\Big(\|\mathbf{f}\|_{L^1(0,T;\mathbb{V})} + \|(\mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0)\|_{D(\mathcal{A})} + \|(\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^1)\|_{\mathcal{V}}\Big) .\end{aligned}$$

On considère maintenant le problème:

$$(1.6) \qquad \begin{cases} \varphi_1'' - \operatorname{div} \sigma(\varphi_1) = f_1 & \text{dans } Q_T, \\ \varphi_{2T}'' + \sigma_S(\varphi_1) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\varphi_2)} = f_{2T} & \text{sur } \Sigma_T, \\ \varphi_{2\nu}'' + \sigma_\nu(\varphi_1) + \sigma_T^0(\varphi_2) : \partial_m \nu = f_{2\nu} & \text{sur } \Sigma_T, \\ \varphi_1(0) = \varphi_1^0, \quad \varphi_1'(0) = \varphi_1^1 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_2(0) = \varphi_2^0, \quad \varphi_2'(0) = \varphi_2^1 & \text{sur } \Gamma , \end{cases}$$

et on suppose que $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \varphi_2^0) \in \mathcal{V}$ et $\varphi^1 = (\varphi_1^1, \varphi_2^1) \in \mathcal{H}$. Soit $\varphi_2 = \varphi_{2T} + \varphi_{2\nu}\, \nu$. L'énergie de la solution $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est définie par:

$$(1.7) \qquad \begin{aligned} E(\varphi, t) \;=\; & \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1) + |\varphi_1'|^2\Big)\, dx \\ & + \frac{1}{2}\int_\Gamma \Big(\sigma_T^0(\varphi_2) : \epsilon_T^0(\varphi_2) + |\varphi_2'|^2\Big)\, d\Gamma . \end{aligned}$$

On pose $f = (f_1, f_2)$ avec $f_2 = f_{2T} + f_{2\nu}\, \nu$; si $f = 0$ on dira que le problème (1.6) est homogène; l'énergie est alors une constante qui sera notée E_0.

Soit $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$; on pose: $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ et $R(\mathbf{x}_0) = \operatorname{Max}\{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|; x \in \overline{\Omega}\}$; on note par ∇_T le gradient tangentiel et par Δ_T le laplacien tangentiel.

On désigne par $|\cdot|_\Omega$ la norme de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et par $|\cdot|_\Gamma$ celle de $\mathbb{L}^2(\Gamma)$. On a le résultat d'unicité suivant:

Théorème 1.2. *Soient $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \varphi_2^0) \in D(\mathcal{A})$ et $\varphi^1 = (\varphi_1^1, \varphi_2^1) \in \mathcal{V}$. Il existe trois constantes positives δ, γ et c_2, qui ne dépendent que de Ω telles que si $T_0 = 2\,R(\mathbf{x}_0)\,(\sqrt{\delta}+\sqrt{\gamma})$ alors l'énergie E_0 de la solution $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ du problème homogène (1.6) vérifie l'estimation:*

$$\begin{aligned}(T - T_0)\,E_0 + \frac{1}{R(\mathbf{x}_0)\,\sqrt{\gamma}}\,|\varphi_1^0|_\Omega^2 + \frac{1}{2\,R(\mathbf{x}_0)\,\sqrt{\delta}}\,|\varphi_1^0|_\Gamma^2 \;\leq \\ \leq\; C\left(\int_{\Sigma_T}\left(|\varphi_2|^2 + |\varphi_2'|^2 + \sigma_T^0(\varphi_2) : \epsilon_T^0(\varphi_2) + |\nabla_T \varphi_{1\nu}|^2 + |\sigma(\varphi_1).\nu|^2\right) d\Sigma\right)\,.\end{aligned} \tag{1.8}$$

L'estimation (1.8) permet une mise en oeuvre de la méthode d'unicité Hilbertienne, (H.U.M.), de J.L. Lions ([8]), qui conduit au résultat de contrôlabilité exacte suivant:

Théorème 1.3. *On suppose Γ de classe C^3; il existe un temps $T_0 > 0$, un espace de Hilbert $\mathcal{F}$ et un isomorphisme $\Lambda\colon\ \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}'$ qui vérifient:*

- **(i)** *Pour tout $(\rho^1, -\rho^0) \in \mathcal{F}'$ il existe un contrôle $\mathbf{g} = \mathbf{g}_T + g_\nu\,\nu$ tel que la solution $\mathbf{u}$ du problème (1.5) avec $\mathbf{f} = 0$, $T > T_0$ et les conditions initiales $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{|\Gamma})(0) = \rho^0$, $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{|\Gamma})'(0) = \rho^1$ vérifie: $\mathbf{u}(T) = \mathbf{u}'(T) = 0$.*
- **(ii)** *On pose $(\varphi^0, \varphi^1) = \Lambda^{-1}(\rho^1, -\rho^0)$ et on note $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $(\varphi_2 = \varphi_{1|\Sigma_T})$ la solution du problème homogène (1.6) correspondant; alors le contrôle $\mathbf{g}$ est donné par:*

$$\begin{cases} \mathbf{g}_T \;=\; \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\varphi_1)} - \varphi_{1T} + \partial_t \varphi_{1T}'\;, \\ g_\nu \;=\; -\sigma_T^0(\varphi_1) : \partial_m \nu - \varphi_{1\nu} + \partial_t \varphi_{1\nu}' + \Delta_T \varphi_{1\nu}\;. \end{cases} \tag{1.9}$$

Dans ce travail on adopte le plan suivant: Au paragraphe 2 on donne quelques notations et quelques résultats préliminaires de géométrie intrinsèque pour les surfaces. Le paragraphe 3 est consacré à la démonstration du Théorème 1.1. Au pragraphe 4 on établit une identié qui permet de montrer le Théorème 1.2. Au paragraphe 5 on démontre le Thérème 1.3. On donne en annexe les calculs d'un terme qui intervient dans l'établissement de l'identité (4.1).

2 – Notations et résultats préliminaires

On reprend les définitions et les notations données en introduction. La convention de l'indice répété est adoptée:

$$\mathrm{tr}(\tau) = \tau_{11} + \tau_{22} + ... = \tau_{ii}\,, \qquad \mathbf{v}.\mathbf{w} = v_i\, w_i\,, \qquad \sigma(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{v}) = \sigma_{ij}(\mathbf{v})\, \epsilon_{ij}(\mathbf{v})\ .$$

Comme Γ est de classe C^2, pour tout point m de Γ on peut trouver un C^2-difféomorphisme χ d'un ouvert $\hat{\Gamma}$ de $\mathbb{R}^2$ sur un voisinage ouvert de m dans Γ. Les vecteurs $\mathbf{a}_\alpha = \partial\chi/\partial\xi^\alpha(\chi^{-1}(m))$, $\alpha \in \{1,2\}$ engendrent le plan $\mathrm{T}_m(\Gamma)$ tangent en m à Γ. On note par $\mathrm{T}(\Gamma)$ le fibré tangent, (cf. [1,6,11]). Soit $\mathcal{G}$ le tenseur métrique associé à χ de composantes: $g_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha.\mathbf{a}_\beta$, $\forall\,(\alpha,\beta) \in \{1,2\}^2$ et $(g^{\alpha\beta})_{1\le\alpha,\beta\le 2}$ le tenseur inverse. La base duale de $\{\mathbf{a}_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ est définie par: $\mathbf{a}^\alpha(m).\mathbf{a}_\beta(m) = \delta^\alpha_\beta$ (symbole de Kreonecker).

A un vecteur $\mathbf{v} = v^\alpha\, \mathbf{a}_\alpha$ on associe, par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$, la forme linéaire: $\overline{\mathbf{v}} = v_\alpha\, \mathbf{a}^\alpha$ avec $v_\alpha = g_{\alpha\beta}\, v^\beta$; comme $\partial_m \mathbf{v}_T = \frac{\partial \mathbf{v}_T}{\partial\xi^\alpha}\, \mathbf{a}^\alpha$, on obtient:

$$\pi\, \partial_m \mathbf{v}_T\, \pi \;=\; (v^\beta_{,\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\lambda}\, v^\lambda)\, \mathbf{a}_\beta\, \mathbf{a}^\alpha$$

où $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ est le symbole de Cristoffel défini par: $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\lambda\, \pi\, \mathbf{a}_{\alpha,\beta}$ $(\alpha = \partial/\partial\xi^\alpha)$.

A un champ scalaire régulier v défini sur $\overline{\Omega}$ on associe le champ de formes linéaires défini par:

$$(\partial_m v)(m) = v_{,\alpha}(m)\, \mathbf{a}^\alpha(m)\ .$$

Le vecteur transposé de la forme $(\partial_m v)(m)$ est le gradient tangentiel noté $(\nabla_T v)(m)$. Au champ normal $\nu(m)$ on associe le champ d'endomorphismes du plan tangent $\partial_m \nu$ défini par: $\partial_m \nu = \nu_{,\alpha}\, \mathbf{a}^\alpha$.

2.1. Déformations et contraintes

Soit $\mathbf{v}\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ un champ assez régulier; on désigne par $\nabla\mathbf{v}$ son gradient; on a sur Γ (cf. [1,6,11]):

$$\begin{aligned} \overline{\nabla\mathbf{v}} \;=\; &\pi\,(\partial_m \mathbf{v}_T)\,\pi + v_\nu(\partial_m \nu) + (\partial_\nu \mathbf{v}_T)\,\bar{\nu} \\ &+ \nu\Big((\partial_m v_\nu) - \overline{\mathbf{v}_T}(\partial_m \nu) + (\partial_\nu v_\nu)\,\bar{\nu}\Big)\ . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Les relations (1.1)–(1.4) sont une conséquence directe de (2.1).

Remarque 2.1. Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$; des formules (1.1)–(1.4) on obtient:

$$\begin{aligned}\epsilon(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{v}) &= \epsilon_T(\mathbf{v}) : \epsilon_T(\mathbf{v}) + 2\,|\epsilon_S(\mathbf{v})|^2 + |\epsilon_\nu(\mathbf{v})|^2 \ ; \\ \sigma(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{v}) &= 2\,\mu\Big(\epsilon_T(\mathbf{v}) : \epsilon_T(\mathbf{v}) + |\epsilon_\nu(\mathbf{v})|^2\Big) + 4\,\mu\,|\epsilon_S(\mathbf{v})|^2 \\ &\quad + \lambda\Big(\mathrm{tr}(\epsilon_T(\mathbf{v})) + \epsilon_\nu(\mathbf{v})\Big)^2 . \ \square\end{aligned}$$

On aura à considérer les espaces:

$\mathcal{L}_S(T_m(\Gamma))$ est l'espace des endomorphismes symétriques de $T_m(\Gamma)$.

$\mathcal{L}_S(T(\Gamma))$ est l'espace des opérateurs symétriques de $T(\Gamma)$;
un champ $\tau : \Gamma \to T(\Gamma)$ appartient à $\mathcal{L}_S(T(\Gamma))$ si $\tau(m)$ appartient à $\mathcal{L}_S(T_m(\Gamma))$ pour tout $m \in \Gamma$.

Remarque 2.2. $(\partial_m \nu)(m)$ est un élément de $\mathcal{L}_S(T_m(\Gamma))$; ses valeurs propres sont les courbures principales de Γ en m. $\square$

2.2. Quelques espaces fonctionnels

Soit $\mathbf{v}_T : \Gamma \to T(\Gamma)$, $\mathbf{v}_T(m) = v^\alpha(m)\,\mathbf{a}_\alpha(m)$ un champ tangent; On munit $L^2(\Gamma, T(\Gamma))$ de la norme: $\|\mathbf{v}_T\|_{L^2(\Gamma,T(\Gamma))} = (\int_\Gamma |\mathbf{v}_T|^2\, d\Gamma)^{\frac{1}{2}}$ qui est équivalente à la norme: $\mathbf{v}_T \to (\|v^1\|^2_{L^2(\Gamma)} + \|v^2\|^2_{L^2(\Gamma)})^{\frac{1}{2}}$. On munit $H^1(\Gamma, T(\Gamma))$ de la norme:

$$\|\mathbf{v}_T\|_{H^1(\Gamma,T(\Gamma))} = \Big(\|v^1\|^2_{H^1(\Gamma)} + \|v^2\|^2_{H^1(\Gamma)}\Big)^{\frac{1}{2}} . \tag{2.2}$$

Un champ $\tau_T :\ \Gamma \to \mathcal{L}_S(T(\Gamma))$ appartient à $L^2(\Gamma, \mathcal{L}_S(T(\Gamma)))$ si $(\tau_T : \tau_T)^{\frac{1}{2}} : \Gamma \to \mathbb{R}^+$ appartient à $L^2(\Gamma)$; on pose:

$$\|\tau_T\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{L}_S(T(\Gamma)))} = \|(\tau_T : \tau_T)^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Gamma)} .$$

Remarque 2.3. Si $\mathbf{v}_T \in H^1(\Gamma, T(\Gamma))$, alors: $\epsilon_T(\mathbf{v}_T) \in L^2(\Gamma, \mathcal{L}_S(T(\Gamma)))$. $\square$

Proposition 2.1. *L'expression* $\|\cdot\|^1_{H^1(\Gamma,T(\Gamma))}$ *définie par:*

$$\|\mathbf{v}_T\|^1_{H^1(\Gamma,T(\Gamma))} = \Big(\int_\Gamma \Big(|\mathbf{v}_T|^2 + \epsilon^0_T(\mathbf{v}_T) : \epsilon^0_T(\mathbf{v}_T)\Big)\, d\Gamma\Big)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H^1(\Gamma, T(\Gamma))$ *équivalente à la norme définie en (2.2).*

Preuve: Il suffit de prouver l'existence d'une constante $C > 0$ telle que:

$$\|\mathbf{v}_T\|_{H^1(\Gamma,T(\Gamma))} \leq C\,\|\mathbf{v}_T\|^1_{H^1(\Gamma,T(\Gamma))}\,, \qquad \forall\,\mathbf{v}_T \in H^1(\Gamma,T(\Gamma))\ .$$

S'il n'en était pas ainsi, il existerait une suite $\{\mathbf{v}_T^k\} \subset H^1(\Gamma,T(\Gamma))$ vérifiant:

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{v}_T^k\|_{H^1(\Gamma,T(\Gamma))} = 1\,, \quad \forall\,k \in \mathbb{N}\ ,\\
&\mathbf{v}_T^k \to 0 \quad \text{dans}\ \ L^2(\Gamma,T(\Gamma))\ ,\\
&\epsilon_T(\mathbf{v}_T^k) \to 0 \quad \text{dans}\ \ L^2(\Gamma,L_S(T(\Gamma)))\ .
\end{aligned}$$

On pose: $\mathbf{v}_T^k = v_T^{k1}\,\mathbf{a}_1 + v_T^{k2}\,\mathbf{a}_2$; les expressions de $\pi\,\partial_m\mathbf{v}_T\,\pi$ et du conjugué d'un vecteur données au début de ce paragraphe montrent que:

$$\overline{\pi\,\partial_m\mathbf{v}_T\,\pi}\ =\ (v^{k\mu}_{,\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda r}\,v^{kr})\,g^{\lambda\alpha}\,g_{\mu\beta}\,\mathbf{a}_\alpha\,\mathbf{a}^\beta\ ,$$

d'où:

$$(v^{k\alpha}_{,\beta} + g^{\lambda\alpha}\,g_{\beta\mu}\,v^{k\mu}_{,\lambda}) \to 0 \quad \text{dans}\ \ L^2(\Gamma)\ .$$

En prenant $\alpha = \beta$, on obtient: $v^{k1}_{,1} + v^{k2}_{,2} \to 0$ dans $L^2(\Gamma)$. On a:

$$g_{\alpha\eta}(v^{k\alpha}_{,\beta} + g^{\lambda\alpha}\,g_{\beta\mu}\,v^{k\mu}_{,\lambda})\ =\ g_{\alpha\eta}\,v^{k\alpha}_{,\beta} + g_{\beta\mu}\,v^{k\mu}_{,\eta}\ \longrightarrow\ 0 \quad \text{dans}\ \ L^2(\Gamma)\ .$$

En prenant $(\beta,\eta) = (1,1)$, $(\beta,\eta) = (2,2)$ et $(\beta,\eta) = (1,2)$ on obtient les limites suivantes dans $L^2(\Gamma)$: $(g_{11}v^{k1}_{,1} + g_{21}v^{k2}_{,1}) \to 0$, $(g_{22}\,v^{k2}_{,2} + g_{21}v^{k1}_{,2}) \to 0$, $(g_{11}v^{k1}_{,2} + g_{22}\,v^{k2}_{,1} \to 0$. Posons: $\mathbf{w}_T^k = \mathcal{G}\,\mathbf{v}_T^k = w^{k1}\mathbf{a}_1 + w^{k2}\,\mathbf{a}_2$. De $\mathbf{v}_T^k \to 0$ dans $L^2(\Gamma,T(\Gamma))$ et des limites précédentes on déduit que les suites (w^{k1}), (w^{k2}), $(w^{k1}_{,1})$, $(w^{k2}_{,2})$, $(w^{k2}_{,1} + w^{k1}_{,2})$ tendent vers 0 dans $L^2(\Gamma)$. L'inégalité de Korn dans l'ouvert $\hat{\Gamma}$ montre alors que $(w^{k1}, w^{k2}) \to 0$ dans $H^1(\Gamma) \times H^1(\Gamma)$. D'où $(v^{k1}, v^{k2}) \to 0$ dans $H^1(\Gamma) \times H^1(\Gamma)$ ce qui contredit la définition de la suite $\{\mathbf{v}_T^k\}$. ∎

Proposition 2.2. *L'application:* $\mathbf{v}_T \hookrightarrow \mathbf{v}_T - \overline{\mathrm{div}_T\,\sigma_T^0(\mathbf{v}_T)}$ *est un isomorphisme de* $H^s(\Gamma,T(\Gamma))$ *sur* $H^{s-2}(\Gamma,T(\Gamma))$ *pour tout réèl* $s \geq 1$.

Preuve: La forme bilinéaire:

$$\mathcal{B}\colon\ (\mathbf{v}_T,\mathbf{w}_T)\ \hookrightarrow\ \int_\Gamma \Big(\mathbf{v}_T.\mathbf{w}_T + \sigma_T^0(\mathbf{v}_T) : \epsilon_T^0(\mathbf{w}_T)\Big)\,d\Gamma$$

est continue et coercive sur $H^1(\Gamma,T(\Gamma)) = (H^1_0(\Gamma,T(\Gamma)))$ d'après la Proposition 2.1; alors pour tout $f \in H^{-1}(\Gamma,T(\Gamma))$ il existe $\mathbf{v}_T \in H^1(\Gamma,T(\Gamma))$ unique tel que: $\mathcal{B}(\mathbf{v}_T,\mathbf{w}_T) = (f,\mathbf{w}_T)$, $\forall\,\mathbf{w}_T \in H^1(\Gamma,T(\Gamma))$, avec:

$$C_2\,\|f\|_{H^{-1}(\Gamma,T(\Gamma))} \leq \|\mathbf{v}_T\|_{H^1(\Gamma,T(\Gamma))} \leq C_1\,\|f\|_{H^{-1}(\Gamma,T(\Gamma))}$$

ce qui prouve que l'application $\mathbf{v}_T \hookrightarrow \mathbf{v}_T - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{v}_T)}$ est un isomorphisme de $H^1(\Gamma, T(\Gamma))$ sur $H^{-1}(\Gamma, T(\Gamma))$. L'opérateur $\mathbf{v}_T \hookrightarrow \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{v}_T)}$ étant elliptique, cette application est aussi un isomorphisme de $H^2(\Gamma, T(\Gamma))$ sur $L^2(\Gamma, T(\Gamma))$. Comme $H^1(\Gamma, T(\Gamma)) = H_0^1(\Gamma, T(\Gamma))$ on déduit par interpolation que cette application est un isomorphisme de $H^{2-s}(\Gamma, T(\Gamma))$ sur $H^{-s}(\Gamma, T(\Gamma))$ pour tout réèl s compris entre 0 et 1 (cf. [9]). On termine par interpolation grâce à l'ellipticité de l'opérateur $\mathbf{v}_T \hookrightarrow \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{v}_T)}$. ∎

2.3. Densité et régularité

Lemme 2.1. *Soit $H(\operatorname{div}\sigma)$ l'espace défini par:*

$$H(\operatorname{div}\sigma) = \left\{ v \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \operatorname{div}\sigma(v) \in \mathbb{L}^2(\Omega) \right\}$$

muni de la norme:

$$\|v\|_{H(\operatorname{div}\sigma)} = \left(\|v\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\operatorname{div}\sigma(v)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

On peut définir une application continue

$$H(\operatorname{div}\sigma) \to \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbb{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma), \qquad v \to (v_{|\Gamma}, (\sigma(v).\nu)_{|\Gamma}) .$$

Preuve: Soient $w \in \mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et $\tilde{w} \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ (un relèvement continu) vérifiant $\tilde{w}_{|\Gamma} = w$ et $(\sigma(\tilde{w}).\nu)_{|\Gamma} = 0$. Pour $v \in H(\operatorname{div}\sigma)$ on pose:

$$(\tilde{\gamma}_1 v, w) = \int_\Omega \Big(\tilde{w} \operatorname{div}\sigma(v) - v \operatorname{div}\sigma(\tilde{w}) \Big)\, dx .$$

On montre que le terme de droite ne dépend pas du relèvement $\tilde{w}$; il suffit pour cela de prouver que ce terme est nul si $\tilde{w}$ est un élément de $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$.

Ce terme est nul si $\tilde{w}$ est un élément de $D(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et par densité il sera nul pour tout élément de $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$. On a:

$$|(\tilde{\gamma}_1 v, w)| \le C\, \|w\|_{\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \|v\|_{H(\operatorname{div}\sigma)} .$$

$\tilde{\gamma}_1 v$ est donc un élément de $\mathbb{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et on a $\|\tilde{\gamma}_1 v\|_{\mathbb{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} \le C\, \|v\|_{H(\operatorname{div}\sigma)}$.

$\tilde{\gamma}_1$ est donc continue de $H(\operatorname{div}\sigma)$ dans $\mathbb{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et si v est régulière on a $\tilde{\gamma}_1 v = (\sigma(v).\nu)_{|\Gamma}$.

Soient $w \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\tilde{w} \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ (un relèvement continu) vérifiant $\tilde{w}_{|\Gamma} = 0$ et $(\sigma(\tilde{w}).\nu)_{|\Gamma} = w$. Pour $v \in H(\operatorname{div}\sigma)$ on pose:

$$(\gamma_0 v, w) = \int_\Omega \Big(v \operatorname{div}\sigma(\tilde{w}) - \tilde{w} \operatorname{div}\sigma(v) \Big)\, dx \; .$$

On vérifie, comme précédemment, que γ_0 est bien définie et on a:

$$|(\gamma_0 v, w)| \le C \, \|w\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \, \|v\|_{H(\operatorname{div}\sigma)} \; .$$

$\gamma_0 v$ est donc un élément de $\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et on a: $\|\gamma_0 v\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \le C \, \|v\|_{H(\operatorname{div}\sigma)}$.

γ_0 est donc continue de $H(\operatorname{div}\sigma)$ dans $\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et si v est régulière on a $\gamma_0 v = v_{|\Gamma}$. ∎

Remarque 2.4. Pour tout élément $w \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ et tout élément $v \in H(\operatorname{div}\sigma)$ on a:

$$\begin{aligned} &\langle v, \sigma(w).\nu \rangle_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} - \langle \sigma(v).\nu, w \rangle_{\mathbb{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma), \mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} = \\ &\qquad = \int_\Omega \Big(v \operatorname{div}\sigma(w) - w \operatorname{div}\sigma(v) \Big)\, dx \; . \; \square \end{aligned}$$

Lemme 2.2. *Soit* $\mathbb{H}^1(\operatorname{div}\sigma) = \{v \in \mathbb{H}^1(\Omega) \colon \operatorname{div}\sigma(v) \in \mathbb{L}^2(\Omega)\}$ *muni de la norme:*

$$\|v\|_{\mathbb{H}^1(\operatorname{div}\sigma)} = \Big(\|v\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|\operatorname{div}\sigma(v)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{2}} \; .$$

$\mathcal{D}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ *est dense dans* $\mathbb{H}^1(\operatorname{div}\sigma)$.

Preuve: Soit $v \in \mathbb{H}^1(\operatorname{div}\sigma)$, et $f = v - \operatorname{div}\sigma(v) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$; on considère $\{f_k\} \subset \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ telle que: $f_k \to f$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et $\{g_k\} \subset \mathcal{D}(\Gamma, \mathbb{R}^3)$ telle que: $g_k \to v_{|\Gamma}$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^3)$. Soit v^k la solution du problème:

$$\begin{cases} v^k - \operatorname{div}\sigma(v^k) = f_k & \text{dans } \Omega, \\ v^k_{|\Gamma} = g_k & \text{sur } \Gamma \; . \end{cases}$$

On a: $\{v^k\} \subset \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$, $v^k \to v$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ et $\operatorname{div}\sigma(v^k) \to \operatorname{div}\sigma(v)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ donc $v^k \to v$ dans $\mathbb{H}^1(\operatorname{div}\sigma)$. ∎

Corolaire 2.1. *L'application:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \colon \; &\mathcal{D}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ &v \hookrightarrow \sigma(v)\,\nu = \sigma_S(v) + \sigma_\nu(v)\,\nu \end{aligned}$$

se prolonge de façon unique en une application continue: $\mathbb{H}^1(\operatorname{div}\sigma) \hookrightarrow \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Preuve: $\mathcal{L}$ est définie sur $\mathcal{D}\ (\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ par:

$$(\mathcal{L}u, v) \;=\; \int_{\Omega} \Big(\operatorname{div} \sigma(u).\tilde{v} + \sigma(u) : \epsilon(\tilde{v})\Big)\, dx$$

où $v \hookrightarrow \tilde{v}$ est un relèvement continu de $\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$; il existe alors une constante positive C telle que:

$$|(\mathcal{L}u, v)| \;\leq\; C\Big(\|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|\operatorname{div} \sigma(u)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega))}\Big)\, \|v\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\ .$$

On applique ensuite le Lemme 2.2. ∎

Proposition 2.3. *L'expression* $|||\cdot|||_{\mathbb{V}}$ *définie par:*

$$|||\mathbf{v}|||_{\mathbb{V}} \;=\; \Big(\int_{\Omega} \Big(\sigma(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2\Big)\, dx \;+ \int_{\Gamma} \sigma^0_T(\mathbf{v}) : \epsilon^0_T(\mathbf{v})\ d\Gamma\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

est une norme sur $\mathbb{V}$ *équivalente à* $\|\cdot\|_{\mathbb{V}}$ *définie par:*

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{V}} \;=\; \Big(\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{v}_T\|^2_{H^1(\Gamma, T(\Gamma))}\Big)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Preuve: On montre qu'il existe $C > 0$ tel que:

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{V}} \leq C\, |||\mathbf{v}|||_{\mathbb{V}}\,, \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{V}\ .$$

Dans le cas contraire on aurait une suite $\{\mathbf{v}^k\} \subset \mathbb{V}$ qui vérifie:

$$\|\mathbf{v}^k\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{v}^k_T\|_{H^1(\Gamma, T(\Gamma))} \;=\; 1 \quad \text{ et } \quad |||\mathbf{v}^k|||_{\mathbb{V}} \to 0\ .$$

De l'inégalité de Korn il vient: $\mathbf{v}^k \to 0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$. Alors $\mathbf{v}^k_T \to 0$ dans $L^2(\Gamma, T(\Gamma))$ et $v^k_\nu \to 0$ dans $L^2(\Gamma)$ ce qui joint à: $\int_\Gamma \sigma^0_T(\mathbf{v}^k) : \epsilon^0_T(\mathbf{v}^k)\, d\Gamma \to 0$ donne: $\epsilon^0_T(\mathbf{v}^k_T) \to 0$ dans $L^2(\Gamma, L_S(T(\Gamma)))$. La Proposition 2.1 montre que: $\mathbf{v}^k_T \to 0$ dans $H^1(\Gamma, T(\Gamma))$ ce qui avec $\mathbf{v}^k \to 0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ donne une contradiction. ∎

Proposition 2.4. *L'expression* $\|\cdot\|$ *définie par:*

$$\|\mathbf{v}\| \;=\; \Big(\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{v})\, dx \;+ \int_{\Gamma} \Big(\sigma^0_T(\mathbf{v}) : \epsilon^0_T(\mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2\Big)\, d\Gamma\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{2.4}$$

est une norme sur $\mathbb{V}$ *équivalente à la norme* $\|\cdot\|_{\mathbb{V}}$ *définie à la Proposition 2.3.*

Preuve: On sait de [8] qu'il existe $\delta > 0$ tel que:

$$\int_\Omega |\nabla \mathbf{v}|^2\, dx \ \le\ \delta \left(\int_\Omega \sigma(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{v})\, dx \ + \int_\Gamma |\mathbf{v}|^2\, d\Gamma \right) , \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega) \ .$$

Ce qui montre que $\| \cdot \|$ est bien une norme sur $\mathbb{V}$; pour montrer qu'elle est équivalente à $\| \cdot \|_{\mathbb{V}}$ on suppose le contraire; nous aurons une suite $\{\mathbf{v}^k\} \subset \mathbb{V}$ qui vérifie:

$$\begin{cases} \|\mathbf{v}^k\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{v}^k_T\|_{H^1(\Gamma, T(\Gamma))} = 1, \\ \|\mathbf{v}^k\| \to 0 \ . \end{cases}$$

Alors $\mathbf{v}^k_{|\Gamma} \to 0$ dans $\mathbb{L}^2(\Gamma)$ et $\epsilon^0_T(\mathbf{v}^k_T) \to 0$ dans $L^2(\Gamma, L_S(T(\Gamma)))$. La Proposition 2.1 montre alors que: $\mathbf{v}^k_T \to 0$ dans $H^1(\Gamma, T(\Gamma))$. Comme l'injection de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ est compacte on obtient: $\mathbf{v}^k \to 0$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ (il s'agit en fait d'une sous suite). L'inégalité de Korn montre alors que: $\mathbf{v}^k \to 0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ ce qui joint à $\mathbf{v}^k_T \to 0$ dans $H^1(\Gamma, (T(\Gamma)))$ donne une contradiction. ∎

Proposition 2.5. *On donne $\mathbf{u}_T \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))$ et $w_\nu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Il existe $\mathbf{v} \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ vérifiant: $\mathbf{v}_T = \mathbf{u}_T$, $\sigma_\nu(\mathbf{v}) = w_\nu$ sur Γ et il existe une constante positive C ne dépendant que de Ω telle que:*

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \ \le\ C \left(\|\mathbf{u}_T\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))} + \|w_\nu\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right) .$$

Preuve: Soit $\mathbf{w}_1$ la solution du problème:

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{w}_1) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{w}_{1T} = \mathbf{u}_T, \quad w_{1\nu} = 0 & \text{sur } \Gamma \ . \end{cases}$$

Alors $\mathbf{w}_1 \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ et $\|\mathbf{w}_1\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \le C\, \|\mathbf{u}_T\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))}$.

On a: $\sigma(\mathbf{w}).\nu = \sigma_S(\mathbf{w}) + \sigma_\nu(\mathbf{w})\, \nu$; soit $\mathbf{w}_2$ la solution du problème:

$$\begin{cases} \mathbf{w}_2 - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{w}_2) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma(\mathbf{w}_2).\nu = \Big(w_\nu - \sigma_\nu(\mathbf{w}_1) \Big)\, \nu & \text{sur } \Gamma \ . \end{cases}$$

Alors $\mathbf{w}_2 \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ et

$$\|\mathbf{w}_2\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \ \le\ C\, \|w_\nu - \sigma_\nu(\mathbf{w}_1)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \ .$$

Pour η positif assez petit on pose:

$$\Omega^\eta \;=\; \Big\{ M : OM = Om + x_\nu\, \nu(m),\;\; m \in \Gamma,\;\; -\eta < x_\nu < 0 \Big\}\;.$$

Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty([-\eta, 0])$ telle que: $\chi = 1$ au voisinage de zéro et $\chi = 0$ au voisinage de $-\eta$. Si $\mathbf{w}_{2T} = w_2^\alpha \mathbf{a}_\alpha$ on considère $\widetilde{w_2^\alpha}$ un relèvement continu de w_2^α dans $H^2(\Omega)$ puis on pose: $\mathbf{w}_{3T}(m, x_\nu) = \chi(x_\nu)\, \widetilde{w_2^\alpha}(m, x_\nu)\, \mathbf{a}_\alpha$ et $\mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_{3T}$ dans Ω^η et zéro ailleurs. Alors $\mathbf{w}_3 \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ et

$$\|\mathbf{w}_3\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \;\le\; C\, \|\mathbf{w}_2\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \;\le\; C\, \|w_\nu - \sigma_\nu(\mathbf{w}_1)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\;.$$

Soit $w_{4\nu}$ un élément de $H^2(\Omega)$ tel que:

$$w_{4\nu|\Gamma} = 0\,; \qquad (\partial_\nu w_{4\nu})_{|\Gamma} = \lambda\, (2\,\mu + \lambda)^{-1}\; \mathrm{tr}(\pi\, \partial_m \mathbf{w}_{3T}\, \pi)_{|\Gamma}\;,$$
$$\|w_{4\nu}\|_{H^2(\Omega)} \le C\, \|\, \mathrm{tr}(\pi\, \partial_m \mathbf{w}_{3T})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\;.$$

On pose: $\mathbf{w}_4(m, x_\nu) = \chi(x_\nu)\, w_{4\nu}(m, x_\nu)\, \nu(m)$ pour $-\eta < x_\nu < 0$ et $\mathbf{w}_4 = 0$ ailleurs. Alors: $\|\mathbf{w}_4\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \le C\, \|w_\nu - \sigma_\nu(\mathbf{w}_1)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$.

On termine la démonstration en prenant: $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_4$. ∎

Proposition 2.6. *Soit* $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ *avec* $\mathrm{div}\, \sigma(\mathbf{u}) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_T \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))$ *et* $\sigma_\nu(\mathbf{u}) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. *Alors:* $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ *et il existe une constante positive* C *telle que:*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \;\le\; C\, \Big(\|\mathbf{u} - \mathrm{div}\, \sigma(\mathbf{u})\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_T\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))} + \|\sigma_\nu(\mathbf{u})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \Big)\;.$$

Preuve: D'après la Proposition 2.5 il existe $\mathbf{v} \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ tel que $\mathbf{v}_T = \mathbf{u}_T$, $\sigma_\nu(\mathbf{v}) = \sigma_\nu(\mathbf{u})$ et

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \;\le\; C\Big(\|\mathbf{u}_T\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))} + \|\sigma_\nu(\mathbf{u})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \Big)\;.$$

On pose: $\mathbf{u} = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v}$ et $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$; on a: $\mathbf{w}_T = 0$, $\sigma_\nu(\mathbf{w})_{|\Gamma} = 0$ et $\mathrm{div}\, \sigma(\mathbf{w}) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$; alors: $\mathbf{w} \in \mathbb{H}^2(\Omega)$, et $\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \le C \|\mathbf{w} - \mathrm{div}\, \sigma(\mathbf{w})\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ (cf. [10]), ce qui donne:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \;&\le\; \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \\ &\le\; C\, \Big(\|\mathbf{u} - \mathrm{div}\, \sigma(\mathbf{u})\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_T\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))} + \|\sigma_\nu(\mathbf{u})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \Big)\;. \end{aligned}$$ ∎

Proposition 2.7. *Soit*

$$\mathcal{Z} = \Big\{ \mathbf{u} \in \mathbb{V}\colon\ \operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) \in \mathbb{L}^2(\Omega),\ \ \sigma_S(\mathbf{u}) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u})} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma, T(\Gamma)),\\ \sigma_\nu(\mathbf{u}) + \sigma_T^0(\mathbf{u})\colon \partial_m \nu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \Big\}\ ;$$

on a $\mathcal{Z} \subset \mathbb{H}^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_T \in H^{\frac{5}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))$ $\forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{Z}$, *et il existe une constante positive* C *ne dépendant que de* Ω *telle que:*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_T\|_{H^{\frac{5}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))} \le \\ \le C \left\| \sigma_S(\mathbf{u}) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u})} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))} \\ + C \left(\left\| \mathbf{u} - \operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \left\| \sigma_\nu(\mathbf{u}) + \sigma_T^0(\mathbf{u}) : \partial_m \nu \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right), \qquad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{Z}\,.$$

Preuve: Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{Z}$; d'après le Corollaire 2.1 on a $\sigma_S(\mathbf{u}) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))$; de $\sigma_T^0(\mathbf{u}) = \sigma_T^0(\mathbf{u}_T) + 2\,\mu\, u_\nu\, \partial_m \nu + \lambda^* u_\nu \operatorname{tr}(\partial_m \nu)\, i_2$ il vient alors $\overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}_T)} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))$ et donc $\mathbf{u}_T \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))$ d'après la Proposition 2.2; on obtient $\sigma_\nu(\mathbf{u}) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et donc $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ d'après la Proposition 2.6 et il existe une constante positive C ne dépendant que de Ω telle que:

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \le C\Big(\|\mathbf{u} - \operatorname{div}\sigma(\mathbf{u})\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_T\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))} + \|\sigma_\nu(\mathbf{u})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \Big)\,.$$

On montre qu'il existe une constante positive C telle que:

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \le C \left\| \sigma_S(\mathbf{u}) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u})} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))} \\ + C\Big(\left\| \mathbf{u} - \operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \left\| \sigma_\nu(\mathbf{u}) + \sigma_T^0(\mathbf{u})\colon \partial_m \nu \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \Big), \ \ \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{Z}\,.$$

Si cela n'était pas vrai il existerait une suite $\{\mathbf{u}^k\} \subset \mathcal{Z}$ telle que:

$$(2.5) \qquad \begin{cases} \|\mathbf{u}^k\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} = 1, \quad \mathbf{u}^k - \overline{\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}^k)} \to 0 & \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega), \\ \sigma_S(\mathbf{u}^k) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}^k)} \to 0 & \text{dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma, T(\Gamma)), \\ \sigma_\nu(\mathbf{u}^k) + \sigma_T^0(\mathbf{u}^k) : \partial_m \nu \to 0 & \text{dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\,. \end{cases}$$

En posant: $\mathbf{f}^k = \mathbf{u}^k - \operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}^k)$, $\mathbf{g}_T^k = \sigma_S(\mathbf{u}^k) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}^k)}$, $g_\nu^k = \sigma_\nu(\mathbf{u}^k) + \sigma_T^0(\mathbf{u}^k) : \partial_m\nu$ et $\mathbf{g}^k = \mathbf{g}_T^k + g_\nu^k\,\nu$ on obtient:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}^k,\mathbf{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}^k) : \epsilon(\mathbf{v})\,dx + \int_\Gamma \sigma_T^0(\mathbf{u}^k) : \epsilon_T^0(\mathbf{v})\,d\Gamma \;=\\ = \int_\Omega \mathbf{f}^k\,\mathbf{v}\,dx + \int_\Gamma \mathbf{g}^k\,\mathbf{v}\,d\Gamma\,, \qquad \forall\mathbf{v}\in\mathbb{V}\,,\end{aligned} \tag{2.6}$$

$\{\mathbf{u}^k\}$ étant bornée dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$ on a: $\mathbf{u}^k \to \mathbf{u} \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ dans $\mathbb{H}^{2-s}(\Omega)$ fort, avec $0 < s < \frac{1}{2}$. On peut alors passer à la limite dans (2.6); on obtient:

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v})\,dx + \int_\Gamma \sigma_T^0(\mathbf{u}) : \epsilon_T^0(\mathbf{v})\,d\Gamma \;=\; 0\,, \qquad \forall\mathbf{v}\in\mathbb{V}\,. \tag{2.7}$$

En prenant $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ dans (2.7) on obtient $\mathbf{u} = 0$; il vient alors de (2.5) $\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}^k) \to 0$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. De $\mathbf{u}^k \to 0$ et $\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}^k) \to 0$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ le Corollaire 2.1 donne: $\underline{\sigma(\mathbf{u}^k).\nu} = \sigma_S(\mathbf{u}^k) + \sigma_\nu(\mathbf{u}^k)\,\nu \to 0$ dans $\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$; de (2.5) on obtient alors $\overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}^k)} \to 0$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))$. Comme $\mathbf{u}^k_{|\Gamma} \to 0$ dans $\mathbb{H}^{\frac{3}{2}-s}(\Gamma)$, $(0<s<\frac{1}{2})$, et $\sigma_T^0(\mathbf{u}^k) = \sigma_T^0(\mathbf{u}_T^k) + \sigma_T^0(u_\nu^k\,\nu) = \sigma_T^0(\mathbf{u}_T^k) + 2\,\mu\,u_\nu\,\partial_m\nu + \lambda^* u_\nu \operatorname{tr}(\partial_m\nu)\,i_2$ on obtient $\overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}_T^k)} \to 0$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))$ d'où $\mathbf{u}_T^k \to 0$ dans $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))$ d'après la Proposition 2.2.

De la dernière limite de (2.5) on obtient alors $\sigma_\nu(\mathbf{u}^k) \to 0$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. La Proposition 2.6 montre que $\mathbf{u}^k \to 0$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$ ce qui contredit la première égalité de (2.5).

Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{Z}$; on a $\partial_\nu\mathbf{u} \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$; de (1.1)–(1.4) il vient $\sigma_S(\mathbf{u}) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))$ d'où $\overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u})} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))$.

Comme $\sigma_T^0(\mathbf{u}) = \sigma_T^0(\mathbf{u}_T) + \sigma_T^0(u_\nu\,\nu) = \sigma_T^0(\mathbf{u}_T) + 2\,\mu(u_\nu\,\partial_m\nu) + \lambda^* u_\nu \operatorname{tr}(\partial_m\nu)\,i_2$ alors $\overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}_T)} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))$; la Proposition 2.2 montre que $\mathbf{u}_T \in H^{\frac{5}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))$ et il existe une constante positive C ne dépendant que de Ω telle que:

$$\|\mathbf{u}_T\|_{H^{\frac{5}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))} \le C\,\left\|\mathbf{u}_T - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}_T)}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))}\,.$$

On a:

$$\begin{aligned}&\left\|\overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}_T)}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))} \le\\ &\qquad\le \left\|\overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u})} - \sigma_S(\mathbf{u})\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))} + \left\|\overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(u_\nu\,\partial_m\nu)}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))}\\ &\qquad\quad + \|\sigma_S(\mathbf{u})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))} \le\end{aligned}$$

$$\leq C\left(\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \left\|\overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u})} - \sigma_S(\mathbf{u})\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))}\right)$$

$$\leq C\left(\left\|\sigma_S(\mathbf{u}) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u})}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))} + \left\|\mathbf{u} - \operatorname{div}\sigma(\mathbf{u})\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right.$$
$$\left. + \left\|\sigma_\nu(\mathbf{u}) + \sigma_T^0(\mathbf{u}) : \partial_m \nu\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right) . \blacksquare$$

Remarque 2.5. On a: $\mathcal{V} = D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$ et $D(\mathcal{A}^{\frac{3}{2}}) = \{U \in \mathcal{V} :\ \mathcal{A}U \in \mathcal{V}\}$; Si $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in D(\mathcal{A}^{\frac{3}{2}})$ alors:

- Les Propositions 2.2 et 2.6 montrent que $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ et il existe une constante positive C qui ne dépend que de Ω telle que:

$$\|\mathbf{u}_1\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \leq C\left(\left\|\mathbf{u}_1 - \operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}_1)\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_{1T}\|^2_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))} + \|\sigma_\nu(\mathbf{u}_1)\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

- La Proposition 2.7 montre que $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{H}^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_{2T} \in H^{\frac{5}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))$ et il existe une constante positive C qui ne dépend que de Ω telle que:

$$\|\mathbf{u}_1\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_{2T}\|_{H^{\frac{5}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))} \leq$$
$$\leq C\left\|\sigma_S(\mathbf{u}_1) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}_2)}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))}$$
$$+ C\left(\left\|\mathbf{u}_1 - \operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}_1)\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \left\|\sigma_\nu(\mathbf{u}_1) + \sigma_T^0(\mathbf{u}_2) : \partial_m \nu\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right) . \square$$

Proposition 2.8. *L'injection:*

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}^{\frac{3}{2}}) \hookrightarrow \mathbb{H}^2(\Omega) \times H^{\frac{5}{2}}(\Gamma, T(\Gamma)) \times H^{\frac{3}{2}}(\Gamma), \\ (v_1, v_2) \to (v_1, v_{2T}, v_{2\nu}) \ , \end{cases}$$

est continue.

Preuve: D'après la Proposition 2.7 il suffit de montrer qu'il existe une constante positive C telle que:

$$\|v_1\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \|v_{2T}\|_{H^{\frac{5}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))} \leq C\,\|v\|_{D(\mathcal{A}^{\frac{3}{2}})}, \qquad \forall\, v = (v_1, v_2) \in D(\mathcal{A}^{\frac{3}{2}}) \ .$$

Dans le cas contraire on aura une suite $v^k = (v_1^k, v_2^k) \in D(\mathcal{A}^{\frac{3}{2}})$ qui vérifie:

$$\|v_1^k\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \|v_{2T}^k\|_{H^{\frac{5}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))} = 1 \quad \text{ et } \quad \|v^k\|_{D(\mathcal{A}^{\frac{3}{2}})} \to 0 \ .$$

De

$$\mathcal{A}v^k = \begin{pmatrix} -\operatorname{div}\sigma(v_1^k) \\ \sigma_S(v_1^k) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(v_2^k)} \\ \sigma_\nu(v_1^k) + \sigma_T^0(v_2^k) : \partial_m \nu \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$$

il vient

$$\begin{aligned} -\Big(\operatorname{div}\sigma(v_1^k)_\Gamma\Big)_T &= \sigma_S(v_1^k) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(v_2^k)}\,, \\ -\overline{\nu}\operatorname{div}\sigma(v_1^k)_\Gamma &= \sigma_\nu(v_1^k) + \sigma_T^0(v_2^k) : \partial_m \nu \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|v^k\|^2_{D(\mathcal{A}^{\frac{3}{2}})} &= \|v^k\|^2_{\mathcal{V}} + \|\mathcal{A}v^k\|^2_{\mathcal{V}} \\ &= \|v_1^k\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|\operatorname{div}\sigma(v_1^k)\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|v_{2T}^k\|^2_{H^1(\Gamma,T(\Gamma))} \\ &\quad + \Big\|\sigma_S(v_1^k) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(v_2^k)}\Big\|^2_{H^1(\Gamma,T(\Gamma))}\,. \end{aligned}$$

La Proposition 2.7 donne alors une contradiction. ∎

3 – Existence et régularité des solutions

Proposition 3.1. *Soient* $\mathbf{f} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ *et* $\mathbf{g} = \mathbf{g}_T + g_\nu\,\nu \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. *Le problème:*

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathbf{u} - \operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{f} && \textit{dans } \Omega, \\ &\sigma_S(\mathbf{u}) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u})} = \mathbf{g}_T && \textit{sur } \Gamma, \\ &\sigma_\nu(\mathbf{u}) + \sigma_T^0(\mathbf{u}) : \partial_m \nu = g_\nu && \textit{sur } \Gamma\,, \end{aligned} \right. \tag{3.1}$$

admet une solution unique $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$*; de plus* $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_T \in H^{\frac{5}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))$ *et il existe une constante positive* C *qui ne dépend que de* Ω *telle que:*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_T\|_{H^{\frac{5}{2}}(\Gamma,T(\Gamma))} \le C\Big(\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\Big)\,.$$

Preuve: Le problème (3.1) a pour formulation variationnelle:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Big(\mathbf{u}\,\mathbf{v} + \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v})\Big)\,dx + \int_\Gamma \sigma_T^0(\mathbf{u}) : \epsilon_T^0(\mathbf{v})\,d\Gamma &= \\ = \int_\Omega \mathbf{f}\,\mathbf{v}\,dx + \int_\Gamma \mathbf{g}\,\mathbf{v}\,d\Gamma\,, &\quad \forall\,\mathbf{v} \in \mathbb{V}\,. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 2.3 ce problème admet une solution unique $\mathbf{u}$ dans $\mathbb{V}$; il suffit alors d'appliquer la Proposition 2.7. ∎

Proposition 3.2. *Soient* $\mathbf{f} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ *et* $\mathbf{g} = \mathbf{g}_T + g_\nu \nu \in \mathbb{L}^2(\Gamma)$. *Le problème:*

$$\begin{cases} \mathbf{u} - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \textit{dans } \Omega, \\ \sigma_S(\mathbf{u}) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u})} = \mathbf{g}_T & \textit{sur } \Gamma, \\ \sigma_\nu(\mathbf{u}) + \sigma_T^0(\mathbf{u}) : \partial_m \nu = g_\nu & \textit{sur } \Gamma\ , \end{cases} \tag{3.2}$$

admet une solution unique $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$; *de plus* $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, $\mathbf{u}_T \in H^2(\Gamma, T(\Gamma))$, $\sigma(\mathbf{u}).\nu \in \mathbb{L}^2(\Gamma)$ *et il existe une constante positive* C *qui ne dépend que de* Ω *telle que:*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \|\sigma(\mathbf{u}).\nu\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} + \|\mathbf{u}_T\|_{H^2(\Gamma,T(\Gamma))} \le C\left(\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma)}\right).$$

Preuve: On supppose que $\mathbf{f} \in \mathbb{V}'$ et $\mathbf{g} \in \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Le problème (3.2) a pour formulation variationnelle:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Big(\mathbf{u}\,\mathbf{v} + \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v})\Big)\, dx + \int_\Gamma \sigma_T^0(\mathbf{u}) : \epsilon_T^0(\mathbf{v})\, d\Gamma &= \\ = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbb{V}',\mathbb{V}} + (\mathbf{g}, \mathbf{v}_{|\Gamma})_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, &\quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 2.3 le problème (3.2) admet une solution (faible) unique $\mathbf{u}$ dans $\mathbb{V}$ et il existe une constante positive C qui ne dépend que de Ω telle que:

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{V}} \le C\left(\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{V}'} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right).$$

D'après le Corollaire 2.1 on a $\sigma(\mathbf{u}).\nu \in \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et

$$\|\sigma(\mathbf{u}).\nu\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \le C\left(\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{V}} + \|\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u})\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right) \le C\left(\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right).$$

L'application $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \to (\mathbf{u}, \sigma(\mathbf{u}).\nu)$ est donc continue de $\mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega) \times \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

D'autre part, d'après la Proposition 3.1, cette application est continue de $\mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega) \times \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. On obtient, par interpolation, une application continue de $\mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Gamma)$ dans $\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Gamma)$.

De (3.2) il vient $\overline{\mathrm{div}_T\, \sigma_T^0(\mathbf{u})} \in L^2(\Gamma, T(\Gamma))$ d'où $\overline{\mathrm{div}_T\, \sigma_T^0(\mathbf{u}_T)} = \overline{\mathrm{div}_T\, \sigma_T^0(\mathbf{u})} - \overline{\mathrm{div}_T(2\,\mu\, u_\nu\, \partial_m \nu + \lambda^* u_\nu\, \mathrm{tr}(\partial_m \nu))} \in L^2(\Gamma, T(\Gamma))$ puisque $u_\nu \in H^1(\Gamma)$; la Proposition 2.2 donne alors $\mathbf{u}_T \in H^2(\Gamma, T(\Gamma))$ et

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_T\|_{H^2(\Gamma,T(\Gamma))} &\le C \left\| \mathbf{u}_T - \overline{\mathrm{div}_T\, \sigma_T^0(\mathbf{u}_T)} \right\|_{L^2(\Gamma,T(\Gamma))} \\ &\le C \Big(\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \left\| \sigma_S(\mathbf{u}) - \overline{\mathrm{div}_T\, \sigma_T^0(\mathbf{u})} \right\|_{L^2(\Gamma,T(\Gamma))} \\ &\quad + \|\sigma_S(\mathbf{u})\|_{L^2(\Gamma,T(\Gamma))} + \left\| \overline{\mathrm{div}_T\, \sigma_T^0(u_\nu\, \nu)} \right\|_{L^2(\Gamma,T(\Gamma))} \Big) \\ &\le C \left(\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} \right) . \ \blacksquare\end{aligned}$$

Proposition 3.3. *Si* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in D(\mathcal{A})$ *alors* $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, $\mathbf{u}_{2T} \in H^2(\Gamma, T(\Gamma))$, $\sigma(\mathbf{u}).\nu \in \mathbb{L}^2(\Gamma)$ *et l'application:*

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) &\to \mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Omega) \times H^2(\Gamma, T(\Gamma)) \times \mathbb{L}^2(\Gamma) \\ (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &\to (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{2T}, \sigma(\mathbf{u}_1).\nu) \end{aligned}$$

est continue.

Preuve: On rappelle que $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in D(\mathcal{A})$ si et seulement si $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathcal{V}$ et

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathbf{u}_1 - \mathrm{div}\, \sigma(\mathbf{u}_1) \in \mathbb{L}^2(\Omega), \\ &\sigma_S(\mathbf{u}_1) - \overline{\mathrm{div}_T\, \sigma_T^0(\mathbf{u}_2)} \in L^2(\Gamma, T(\Gamma)), \\ &\sigma_\nu(\mathbf{u}_1) + \sigma_T^0(\mathbf{u}_2) : \partial_m \nu \in L^2(\Gamma) . \end{aligned} \right. \tag{3.3}$$

La norme de $D(\mathcal{A})$ est définie par:

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\|_{D(\mathcal{A})} = \Big(&\|\mathbf{u}_1\|_{\mathbb{V}}^2 + \|\,\mathrm{div}\, \sigma(\mathbf{u}_1)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + \left\| \sigma_S(\mathbf{u}_1) - \overline{\mathrm{div}_T\, \sigma_T^0(\mathbf{u}_2)} \right\|_{L^2(\Gamma,T(\Gamma))}^2 \\ &+ \left\| \sigma_\nu(\mathbf{u}_1) + \sigma_T^0(\mathbf{u}_2) : \partial_m \nu \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} .\end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer la Proposition 3.2. $\blacksquare$

On pose: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_{|\Gamma} = \mathbf{u}_2$, $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, $\mathbf{g} = \mathbf{g}_T + g_\nu \nu$, $F = (\mathbf{f}, \mathbf{g})$, $U^0 = (\mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0)$ et $U^1 = (\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^1)$ alors le problème (1.5) s'écrit:

$$U'' + \mathcal{A} U = F\,, \quad U(0) = U^0\,, \quad U'(0) = U^1 . \tag{3.4}$$

Lemme 3.1. *L'injection $\mathcal{V} \to \mathcal{H}$ est compacte à image dense.*

Preuve: On commence par montrer la densité de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{H}$; Soit $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{H}$; On considère une suite $\{\mathbf{w}_2^k\} \subset \mathcal{D}(\Gamma, \mathbb{R}^3)$ qui converge vers $\mathbf{v}_2$ dans $\mathbb{L}^2(\Gamma)$ et $\mathbf{u}_2^k$ la solution du problème:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_2^k - \Delta \mathbf{u}_2^k = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}_{2|\Gamma}^k = \mathbf{w}_2^k & \text{sur } \Gamma , \end{cases}$$

alors $\mathbf{u}_2^k \to \mathbf{u}_2$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ solution du problème:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_2 - \Delta \mathbf{u}_2 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}_{2|\Gamma} = \mathbf{v}_2 & \text{sur } \Gamma . \end{cases}$$

Soit $\{\mathbf{w}_1^k\}$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ qui converge vers $\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_2$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. On pose $\mathbf{v}_1^k = \mathbf{w}_1^k + \mathbf{u}_2^k$; $(\mathbf{v}_1^k, \mathbf{v}_{1|\Gamma}^k)$ est alors une suite de $\mathcal{V}$ qui converge vers $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ dans $\mathcal{H}$.

La compacité de l'injection $\mathcal{V} \to \mathcal{H}$ est une conséquence immédiate de la compacité de l'injection $\mathbb{H}^1(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)$. ∎

Le Théorème (1.1) découle du théorème qui suit et de la Proposition 3.3.

Théorème 3.1. *On donne: $s \geq 0$ un nombre reèl, $F \in L^1(0,T; D(\mathcal{A}^s))$, $U^0 \in D(\mathcal{A}^{s+\frac{1}{2}})$ et $U^1 \in D(\mathcal{A}^s)$. Le problème (3.4) admet une solution unique: $U \in \mathcal{C}^0([0,T]; D(\mathcal{A}^{s+\frac{1}{2}})) \cap \mathcal{C}^1([0,T]; D(\mathcal{A}^s))$ et il existe une constante positive C ne dépendant que de Ω telle que:*

$$\begin{aligned} &\|U\|_{L^\infty(0,T; D(\mathcal{A}^{s+\frac{1}{2}}))} + \|U'\|_{L^\infty(0,T; D(\mathcal{A}^s))} \leq \\ &\qquad \leq C \left(\|F\|_{L^1(0,T; D(\mathcal{A}^s))} + \|U^0\|_{D(\mathcal{A}^{s+\frac{1}{2}})} + \|U^1\|_{D(\mathcal{A}^s)} \right) . \end{aligned}$$

Preuve: L'opérateur $\mathcal{A}$ est positif, auto-adjoint; d'après le Lemme (3.1) l'injection: $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H}$ est compacte à image dense; $D(\mathcal{A})$ est alors dense dans $\mathcal{V}$ et il existe dans $\mathcal{H}$ un système dénombrable de vecteurs propres de $\mathcal{A}$ complet dans $\mathcal{H}$ et dans $D(\mathcal{A})$. Si $\mathcal{A}U_k = \lambda_k U_k$, $k = 1, 2, ...$, alors:

$$U \in D(\mathcal{A}^s) \iff \sum_{k \geq 1} \lambda_k^{2s} (U, U_k)_{\mathcal{H}}^2 < +\infty ,$$

où $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ est le produit scalaire de $\mathcal{H}$. Il suffit alors d'écrire explicitement la formule de résolution:

$$U(t) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \cos(t\,\sqrt{\lambda_k})(U^0,U_k)_{\mathcal{H}}\, U_k \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} \sin(t\,\sqrt{\lambda_k})(U^1,U_k)_{\mathcal{H}}\,\frac{U_k}{\sqrt{\lambda_k}}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \sin\Big((t-s)\,\sqrt{\lambda_k}\Big)(F(s),U_k)_{\mathcal{H}}\,\frac{U_k}{\sqrt{\lambda_k}}\;ds\;. \blacksquare$$

Remarque 3.1. Le problème (3.4) admet la formulation variationnelle:

$$\begin{cases} (U'',V)+a(U,V)=(F,V)\,, \qquad \forall\, V=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)\in\mathcal{V}, \\ U(0)=U^0\,, \qquad U'(0)=U^1\;, \end{cases} \tag{3.5}$$

avec:

$$a(U,V) \;=\; \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}_1):\epsilon(\mathbf{v}_1)\;dx \;+\; \int_\Gamma \sigma^0_T(\mathbf{u}_2):\epsilon^0_T(\mathbf{v}_2)\;d\Gamma\;. \square$$

Remarque 3.2. On suppose: $F\in L^1(0,T;\mathcal{H})$, $U^0\in\mathcal{V}$ et $U^1\in\mathcal{H}$; l'énergie de la solution U du problème (3.5) s'écrit:

$$E(U,t) \;=\; \frac{1}{2}\Big(a(U,U)+\|U'\|^2_{\mathcal{H}}\Big)\;. \square$$

4 – Théorème d'unicité

4.1. Une identité

Proposition 4.1. *Soient $\mathbf{q}\in\mathbb{W}^{1,\infty}(\bar\Omega)$, $(\varphi^0,\varphi^1)\in D(\mathcal{A})\times\mathcal{V}$ et $f=(f_1,f_2)\in L^1(0,T;\mathcal{V})$; la solution $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$ du problème (1.6) correspondant vérifie l'identité:*

$$\Big(\varphi_1',(\mathbf{q}\nabla)\varphi_1\Big)_\Omega\Big|_0^T + \bigg(\varphi_{2T}',\,\Big(\pi\,\partial_m\varphi_{1T}\,\pi+\varphi_{1\nu}(\partial_m\nu)\Big)\,\mathbf{q}_T\bigg)_\Gamma\bigg|_0^T +$$
$$+\bigg(\varphi_{2\nu}',\,\Big(-\overline{\varphi_{1T}}(\partial_m\nu)\Big)\,\mathbf{q}_T\bigg)_\Gamma\bigg|_0^T + \int_{Q_T}\sigma(\varphi_1):\nabla\mathbf{q}\,\nabla\varphi_1\;dx\,dt$$
$$+\int_{Q_T}\frac{\operatorname{div}\mathbf{q}}{2}\Big(|\varphi_1'|^2-\sigma(\varphi_1):\epsilon(\varphi_1)\Big)\;dx\,dt \tag{4.1}$$
$$-\int_{\Sigma_T}\frac{q_\nu}{2}\Big(\mu\,|\partial_\nu\varphi_{1T}|^2+(2\,\mu+\lambda)\,|\partial_\nu\varphi_{1\nu}|^2\Big)\,d\Sigma\;+$$

$$+\int_{\Sigma_T}\frac{q_\nu}{2}\Big(\Big(2\,\mu\,\epsilon^0_T(\varphi_1)+\lambda\,\mathrm{tr}(\epsilon^0_T(\varphi_1))\,i_2\Big):\epsilon^0_T(\varphi_1)+\mu\Big|\overline{\partial_m\varphi_{1\nu}}-(\partial_m\nu)\,\varphi_{1T}\Big|^2-|\varphi'_1|^2\Big)\,d\Sigma$$
$$+\int_{\Sigma_T}\frac{\mathrm{div}_T\,\mathbf{q}_T}{2}\Big(|\varphi'_{2T}|^2-\sigma^0_T(\varphi_1):\epsilon^0_T(\varphi_1)\Big)\,d\Sigma$$
$$-\int_{\Sigma_T}\Big(\sigma^0_T(\varphi_2):\partial_m\nu\Big)\,\overline{\varphi_{1T}}(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\;d\Sigma$$
$$+\int_{\Sigma_T}\Big(\sigma^0_T(\varphi_2):(\pi\,\partial_m\varphi_{2T}\,\pi+\varphi_{2\nu}\,\partial_m\nu)\,\pi\,\partial_m\mathbf{q}_T\,\pi\Big)\,d\Sigma$$
$$+\int_{\Sigma_T}\partial_m\varphi_{2\nu}\Big(\sigma^0_T(\varphi_2)\,(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big)\,d\Sigma\;-\int_{\Sigma_T}\sigma_\nu(\varphi_1)\,(\partial_m\varphi_{1\nu})\,\mathbf{q}_T\;d\Sigma$$
$$+\int_{\Sigma_T}(\mathcal{R}:\sigma^0_T(\varphi_1)):(\varphi_{1T}\otimes\mathbf{q}_T)\,d\Sigma\;=$$
$$=\int_{Q_T}f_1(\mathbf{q}\nabla)\,\varphi_1\,dx+\int_{\Sigma_T}\overline{f_{2T}}(\pi\,\partial_m\varphi_{1T}\,\pi+\varphi_{1\nu}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\,d\Sigma$$
$$-\int_{\Sigma_T}f_{2\nu}(\overline{\varphi_{1T}}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\,d\Sigma\;, \tag{4.1}$$

où $\mathcal{R}$ est le tenseur de courbure de Γ (cf. [5]); c'est un tenseur une fois contravariant et trois fois covariant de composantes:

$$\mathcal{R}^\delta_{\alpha\beta\gamma}=\Gamma^\delta_{\gamma\alpha,\beta}-\Gamma^\delta_{\beta\alpha,\gamma}+\Gamma^\delta_{\beta r}\,\Gamma^r_{\gamma\alpha}-\Gamma^\delta_{\gamma r}\,\Gamma^r_{\beta\alpha}$$

avec: $1\le\alpha,\beta,\gamma,\delta\le 2$; les $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ sont les symboles de Cristoffel (cf. [1,6,11]).

Preuve: Les calculs qui suivent sont justifiés par le Théorème 1.1. On multiplie:

– La première équation de (1.6) par $(\mathbf{q}\nabla)\,\varphi_1$ et on intègre sur Q_T; on obtient:

$$\Big(\varphi'_1,\,(\mathbf{q}\nabla)\,\varphi_1\Big)_\Omega\Big|_0^T+\int_{Q_T}\frac{\mathrm{div}\,\mathbf{q}}{2}\Big(|\varphi'_1|^2-\sigma(\varphi_1):\epsilon(\varphi_1)\Big)\,dx\,dt\;+$$
$$+\int_{Q_T}\Big(\sigma(\varphi_1):\nabla\mathbf{q}\,\nabla\varphi_1\Big)\,d\Sigma+\int_{\Sigma_T}\frac{q_\nu}{2}\Big(\sigma(\varphi_1):\epsilon(\varphi_1)-|\varphi'_1|^2\Big)\,d\Sigma$$
$$-\int_{\Sigma_T}(\sigma(\varphi_1).\nu)\,(\mathbf{q}\nabla)\,\varphi_1\;dx\,dt\;=\;\int_{Q_T}f_1(\mathbf{q}\nabla)\,\varphi_1\,dx\;;$$

– La deuxième équation de (1.6) par $(\pi\,\partial_m\varphi_{1T}\,\pi+\varphi_{1\nu}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T$ et on intègre sur Σ_T; on obtient:

$$\Big(\varphi'_{2T},\,(\pi\,\partial_m\varphi_{1T}\,\pi+\varphi_{1\nu}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big)_\Gamma\Big|_0^T-\int_{\Sigma_T}\varphi'_{2T}(\pi\,\partial_m\varphi'_{1T}\,\pi+\varphi'_{1\nu}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\,d\Sigma\;+$$
$$+\int_{\Sigma_T}\sigma^0_T(\varphi_2):\pi\,\partial_m\Big((\pi\,\partial_m\varphi_{1T}\,\pi+\varphi_{1\nu}(\partial_m\nu))\,\mathbf{q}_T\Big)\,d\Sigma$$
$$+\int_{\Sigma_T}\overline{\sigma_S(\varphi_1)}\,(\pi\,\partial_m\varphi_{1T}\,\pi+\varphi_{1\nu}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\;d\Sigma\;=$$

$$= \int_{\Sigma_T} \overline{f_{2T}}(\pi\,\partial_m\varphi_{1T}\,\pi + \varphi_{1\nu}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\;d\Sigma\;;$$

– La troisième équation de (1.6) par $(-\overline{\varphi_{1T}}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T$ et on intègre sur Σ_T; on obtient:

$$\Big(\varphi'_{2\nu},\,(-\overline{\varphi_{1T}}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big)_\Gamma\Big|_0^T + \int_{\Sigma_T}\varphi'_{2\nu}\,(\overline{\varphi'_{1T}}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\,d\Sigma\;-$$
$$-\int_{\Sigma_T}(\sigma_T^0(\varphi_2):\partial_m\nu)\,(\overline{\varphi_{1T}}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\,d\Sigma\;-\int_{\Sigma_T}\sigma_\nu(\varphi_1)\,(\overline{\varphi_{1T}}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\,d\Sigma\;=$$
$$=\;-\int_{\Sigma_T} f_{2\nu}\,(\overline{\varphi_{1T}}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\,d\Sigma\;.$$

La somme des trois égalités précédentes donne:

$$\Big(\varphi'_1,\,(\mathbf{q}\nabla)\,\varphi_1\Big)_\Omega\Big|_0^T + \Big(\varphi'_{2T},\,(\pi\,\partial_m\varphi_{1T}\,\pi+\varphi_{1\nu}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big)_\Gamma\Big|_0^T\;+$$
$$+\;\Big(\varphi'_{2\nu},\,(-\overline{\varphi_{1T}}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big)_\Gamma\Big|_0^T + \int_{Q_T}\frac{\operatorname{div}\mathbf{q}}{2}\Big(|\varphi'_1|^2-\sigma(\varphi_1):\epsilon(\varphi_1)\Big)\,dx\,dt$$
$$+\int_{Q_T}\sigma(\varphi_1):\nabla\mathbf{q}\,\nabla\varphi_1\,dx\,dt\;+\int_{\Sigma_T}\frac{q_\nu}{2}\Big(\sigma(\varphi_1):\epsilon(\varphi_1)-|\varphi'_1|^2\Big)\,d\Sigma$$
$$-\int_{\Sigma_T}(\sigma(\varphi_1).\nu)\,(\mathbf{q}\nabla)\,\varphi_1\,d\Sigma\;-\int_{\Sigma_T}\varphi'_{2T}(\pi\,\partial_m\varphi'_{1T}\,\pi+\varphi'_{1\nu}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\,d\Sigma$$
$$-\int_{\Sigma_T}\varphi'_{2\nu}(-\overline{\varphi'_{1T}}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\,d\Sigma\;+\int_{\Sigma_T}\overline{\sigma_S(\varphi_1)}(\pi\,\partial_m\varphi_{1T}\,\pi+\varphi_{1\nu}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\,d\Sigma$$
$$+\int_{\Sigma_T}\sigma_\nu(\varphi_1)\,(-\overline{\varphi_{1T}}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\,d\Sigma\;+\int_{\Sigma_T}(\sigma_T^0(\varphi_2):\partial_m\nu)\,(-\overline{\varphi_{1T}}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\,d\Sigma$$
$$+\int_{\Sigma_T}\sigma_T^0(\varphi_2):\pi\,\partial_m\Big((\pi\,\partial_m\varphi_{1T}\,\pi+\varphi_{1\nu}(\partial_m\nu))\,\mathbf{q}_T\Big)\,d\Sigma\;=$$
$$=\int_{Q_T}f_1(\mathbf{q}\nabla)\,\varphi_1\,dx\;+\int_{\Sigma_T}\overline{f_{2T}}(\pi\,\partial_m\varphi_{1T}\,\pi+\varphi_{1\nu}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\,d\Sigma$$
$$+\int_{\Sigma_T}f_{2\nu}(-\overline{\varphi_{1T}}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\,d\Sigma\;.$$

On calcule ensuite les différents termes.

$$\int_{\Sigma_T}\overline{\varphi'_{2T}}(\pi\,\partial_m\varphi'_{2T}\,\pi)\,\mathbf{q}_T\,d\Sigma\;=\;\frac12\int_{\Sigma_T}\partial_m(|\varphi'_{2T}|^2)\,\mathbf{q}_T\,d\Sigma$$
$$=\;-\int_{\Sigma_T}\frac{\operatorname{div}_T\mathbf{q}_T}{2}\,|\varphi'_{2T}|^2\,d\Sigma\;.$$

Sachant que $(\mathbf{q}\nabla)\varphi_1 = \overline{\nabla\varphi_1}.\mathbf{q}$, on obtient de (2.1):

$$\begin{aligned}(\sigma(\varphi_1).\nu)\,(\mathbf{q}\nabla)\,\varphi_1 \;=\; & \overline{\sigma_S(\varphi_1)}\,(\pi\,\partial_m\varphi_{1T}\,\pi + \varphi_{1\nu}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T \\ & + \sigma_\nu(\varphi_1)\,(\partial_m\varphi_{1\nu} - \overline{\varphi_{1T}}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T + q_\nu(\sigma(\varphi_1).\nu)\,\partial_\nu\varphi_1 \;.\end{aligned}$$

Enfin d'après l'annexe on a:

$$\tag{4.2}\begin{aligned}\sigma_T^0(\varphi_2) : \pi\,\partial_m\Big((\pi\,\partial_m\varphi_{1T}\,\pi + \varphi_{1\nu}(\partial_m\nu))\,\mathbf{q}_T\Big)\,\pi \;=\; & \\ =\; \sigma_T^0(\varphi_2) : \Big(\pi\,(\partial_m\varphi_{2T})\,\pi + \varphi_{2\nu}(\partial_m\nu)\Big)\,(\pi\,\partial_m\mathbf{q}_T\,\pi) & \\ +\; (\partial_m\varphi_{2\nu})\,(\sigma_T^0(\varphi_2)\,(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T) \;+\; \frac{1}{2}\,\partial_m(\sigma_T^0(\varphi_2) : \epsilon_T^0(\varphi_2))\,\mathbf{q}_T & \\ -\; (\sigma_T^0(\varphi_2) : \partial_m\nu)\,(\partial_m\varphi_{1\nu})\,\mathbf{q}_T \;+\; (\mathcal{R} : \sigma_T^0(\varphi_1)) : (\varphi_{1T}\otimes\mathbf{q}_T) \;. &\end{aligned}$$

En remplaçant les termes précédents par leurs valeurs on obtient:

$$\tag{4.3}\begin{aligned}&\Big(\varphi_1',\,(\mathbf{q}\nabla)\,\varphi_1\Big)_\Omega\Big|_0^T + \Big(\varphi_{2T}',\,(\pi\,\partial_m\varphi_{1T}\,\pi + \varphi_{1\nu}(\partial_m\nu))\,\mathbf{q}_T\Big)_\Gamma\Big|_0^T \;- \\ &-\;\Big(\varphi_{2\nu}',\,(\overline{\varphi_{1T}}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big)_\Gamma\Big|_0^T + \int_{Q_T}\sigma(\varphi_1) : \nabla\mathbf{q}\,\nabla\varphi_1\,dx\,dt \\ &+ \int_{Q_T}\frac{\operatorname{div}\mathbf{q}}{2}\Big(|\varphi_1'|^2 - \sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1)\Big)\,dx\,dt \;+ \int_{\Sigma_T}(\partial_m\varphi_{2\nu})\,(\sigma_T^0(\varphi_2)\,(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T)\,d\Sigma \\ &+ \int_{\Sigma_T}\frac{q_\nu}{2}\Big(\sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1) - 2\,(\sigma(\varphi_1)\,\nu)\,(\partial_\nu\varphi_1) - |\varphi_1'|^2\Big)\,d\Sigma \\ &- \int_{\Sigma_T}(\sigma_T^0(\varphi_2) : \partial_m\nu)\,\overline{\varphi_{1T}}(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\;d\Sigma \;- \int_{\Sigma_T}\sigma_\nu(\varphi_1)\,(\partial_m\varphi_{1\nu})\,\mathbf{q}_T\;d\Sigma \\ &+ \int_{\Sigma_T}\frac{\operatorname{div}_T\mathbf{q}_T}{2}\,\Big(|\varphi_{2T}'|^2 - \sigma_T^0(\varphi_1) : \epsilon_T^0(\varphi_1)\Big)\;d\Sigma \\ &+ \int_{\Sigma_T}\Big(\sigma_T^0(\varphi_2) : (\pi\,\partial_m\varphi_{2T}\,\pi + \varphi_{2\nu}\,\partial_m\nu)\,(\pi\,\partial_m\mathbf{q}_T\,\pi)\Big)\,d\Sigma \\ &+ \int_{\Sigma_T}(\mathcal{R} : \sigma_T^0(\varphi_1)) : (\varphi_{1T}\otimes\mathbf{q}_T)\;d\Sigma \;= \\ &\qquad = \int_{Q_T}f_1(\mathbf{q}\nabla)\,\varphi_1\,dx \;+ \int_{\Sigma_T}\overline{f_{2T}}\,(\pi\,\partial_m\varphi_{1T}\,\pi + \varphi_{1\nu}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\;d\Sigma \\ &\qquad\quad - \int_{\Sigma_T}f_{2\nu}(\overline{\varphi_{1T}}\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\;d\Sigma \;.\end{aligned}$$

Les relations (1.1)–(1.4) et la Remarque 2.1 donnent:

$$
\begin{aligned}
\sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1) - 2\,(\sigma(\varphi_1)\,\nu)\,(\partial_\nu\varphi_1) \;=&\\
=\;& \sigma_T(\varphi_1) : \epsilon_T(\varphi_1) + 2\,\overline{\sigma_S(\varphi_1)}\,\epsilon_S(\varphi_1) - 2\,\overline{\sigma_S(\varphi_1)}\,\partial_\nu\varphi_{1T} - \sigma_\nu(\varphi_1)\,\epsilon_\nu(\varphi_1)\\
=\;& \Big(2\,\mu\,\epsilon_T(\varphi_1) + \lambda\,\mathrm{tr}(\epsilon_T(\varphi_1))\,i_2\Big) : \epsilon_T(\varphi_1)\\
&+\;\lambda\,\epsilon_\nu(\varphi_1)\,\mathrm{tr}(\epsilon_T(\varphi_1)) \;+\; 2\,\overline{\sigma_S(\varphi_1)}\,\Big(\epsilon_S(\varphi_1) - \partial_\nu\varphi_{1T}\Big) - \sigma_\nu(\varphi_1)\,\epsilon_\nu(\varphi_1)\\
=\;& \Big(2\,\mu\,\epsilon^0_T(\varphi_1) + \lambda\,\mathrm{tr}(\epsilon^0_T(\varphi_1))\,i_2\Big) : \epsilon^0_T(\varphi_1)\\
&+\;\mu\,\Big(|\overline{\partial_m\varphi_{1\nu}} - (\partial_m\nu)\,\varphi_{1T}|^2 - |\partial_\nu\varphi_{1T}|^2\Big) \;-\; (2\mu+\lambda)\,|\partial_\nu\varphi_{1\nu}|^2\;.
\end{aligned}
$$

D'où:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_T}\Big(\sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1) - 2\,(\sigma(\varphi_1)\,\nu)\,(\partial_\nu\varphi_1)\Big)\,d\Sigma \;=\\
&\quad= \int_{\Sigma_T}\bigg(\Big(2\,\mu\,\epsilon^0_T(\varphi_1) + \lambda\,\mathrm{tr}(\epsilon^0_T(\varphi_1))\,i_2\Big) : \epsilon^0_T(\varphi_1)\\
&\qquad+\;\mu\,|\overline{\partial_m\varphi_{1\nu}} - (\partial_m\nu)\,\varphi_{1T}|^2 - \mu\,|\partial_\nu\varphi_{1T}|^2 - (2\,\mu+\lambda)\,|\partial_\nu\varphi_{1\nu}|^2\bigg)\,d\Sigma\;.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

On obtient (4.1) à partir de (4.3) et (4.4). ∎

Lemme 4.1. *Pour tout champ scalaire η défini sur Γ et tout champ tangent $\mathbf{v}_T$ supposés réguliers on a:*

$$
(\partial_m\eta)\,\mathbf{v}_T = \mathrm{tr}(\mathbf{v}_T\,\partial_m\eta) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{div}_T\,\mathbf{v}_T = \mathrm{tr}(\pi\,\partial_m\mathbf{v}_T\,\pi)\;.
$$

Preuve: Si $\mathbf{v}_T = v^\alpha\,\mathbf{a}_\alpha$ alors $\mathrm{tr}(\mathbf{v}_T\,\partial_m\eta) = \mathbf{a}^\alpha(\mathbf{v}_T\,\partial_m\eta)\,\mathbf{a}_\alpha = v^\alpha\,\partial_\alpha\eta$. D'autre part $(\partial_m\eta)\,\mathbf{v}_T = (\partial_\beta\eta)\,\mathbf{a}^\beta(v^\alpha\,\mathbf{a}_\alpha) = (\partial_\alpha\eta)\,v^\alpha$, ce qui montre la première relation.

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ un champ scalaire; par définition on a, (d'après la première relation du Lemme 4.1):

$$
\int_\Gamma \psi\;\mathrm{div}_T\,\mathbf{v}_T\;d\Gamma \;=\; -\int_\Gamma(\partial_m\psi)\,\mathbf{v}_T\;d\Gamma \;=\; -\int_\Gamma \mathrm{tr}(\mathbf{v}_T(\partial_m\psi))\,d\Gamma\;.
$$

Or $\pi\,\partial_m(\psi\,\mathbf{v}_T)\,\pi = \mathbf{v}_T\,\partial_m\psi + \psi\,\pi\,(\partial_m\mathbf{v}_T)\,\pi$; d'où:

$$
\int_\Gamma \psi\;\mathrm{div}_T\,\mathbf{v}_T\;d\Gamma \;=\; -\int_\Gamma \mathrm{tr}(\pi\,\partial_m(\psi\,\mathbf{v}_T)\,\pi)\,d\Gamma \;+\; \int_\Gamma \psi\;\mathrm{tr}(\pi\,(\partial_m\mathbf{v}_T)\,\pi)\,d\Gamma\;.
$$

Si τ_T est un champ régulier d'endomorphismes du plan tangent à Γ et $\mathbf{v}_T$ un champ tangent régulier on a par définition:

$$\int_\Gamma \mathrm{div}_T\, \tau_T\, \mathbf{v}_T\ d\Gamma\ =\ -\int_\Gamma \mathrm{tr}(\tau_T\, \pi\, (\partial_m \mathbf{v}_T)\, \pi)\, d\Gamma$$

d'où:

$$\int_\Gamma \psi\ \mathrm{div}_T\, \mathbf{v}_T\ d\Gamma\ =\ \int_\Gamma \psi\, (\mathrm{div}_T i_2)\, \mathbf{v}_T\ d\Gamma\ +\int_\Gamma \psi\ \mathrm{tr}(\pi\, (\partial_m \mathbf{v}_T)\, \pi)\, d\Gamma\ .$$

On a pour tout $\mathbf{w}_T \in \mathcal{D}(\Gamma, T(\Gamma))$

$$\int_\Gamma (\mathrm{div}_T\, i_2)\, \mathbf{w}_T\ d\Gamma\ =\ -\int_\Gamma \mathrm{tr}(\pi\, (\partial_m \mathbf{w}_T)\, \pi)\, d\Gamma\ =\ -\int_\Gamma \mathrm{div}_T \mathbf{w}_T\ d\Gamma\ =\ 0\ ,$$

par définition de $\mathrm{div}_T\, \mathbf{w}_T$, d'où $\mathrm{div}_T\, i_2 = 0$, ce qui termine la démonstration. ∎

Lemme 4.2. *Pour $\mathbf{q} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{q}_T + q_\nu\, \nu$ on a*

$$\left\{\begin{aligned} &\pi\, \partial_m \mathbf{q}_T\, \pi + q_\nu\, \partial_m \nu = i_2, \\ &\nabla_T q_\nu = (\partial_m \nu)\, \mathbf{q}_T, \\ &\mathrm{div}_T\, \mathbf{q}_T = 2 - q_\nu\, \mathrm{tr}(\partial_m \nu)\ . \end{aligned}\right. \tag{4.5}$$

Preuve: On a, (cf. [1,6,11]):

$$\nabla \mathbf{q} = i_3 \quad \text{et} \quad \nabla \mathbf{q}_{|\Gamma} = \begin{pmatrix} \pi\, \overline{\partial_m \mathbf{q}_T}\, \pi + q_\nu\, \partial_m \nu & \overline{\partial_m q_\nu} - (\partial_m \nu)\, \mathbf{q}_T \\ \overline{\partial_\nu \mathbf{q}_T} & \partial_\nu q_\nu \end{pmatrix}\ .$$

Ce qui donne: $\pi\, \overline{\partial_m \mathbf{q}_T}\, \pi + q_\nu\, \partial_m \nu = i_2$ et $\overline{\partial_m q_\nu} - (\partial_m \nu)\, \mathbf{q}_T = 0$; la première relation de (4.5) est obtenue par transposition, sachant que l'opérateur de courbure $\partial_m \nu$ est symétrique; la troisième relation découle du Lemme 4.1 et de la première relation de (4.5). ∎

Proposition 4.2. *Soient $\mathbf{q} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \varphi_2^0) \in D(\mathcal{A})$ et $\varphi^1 = (\varphi_1^1, \varphi_2^1) \in \mathcal{V}$. La solution $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ du problème homogène (1.6) vérifie l'identité:*

$$\begin{aligned} &TE_0 + \Big(\varphi_1', (\mathbf{q}\nabla)\, \varphi_1 + \varphi_1\Big)_\Omega \Big|_0^T \\ &\quad + \Big(\varphi_{2T}', \Big(\pi\, \partial_m \varphi_{1T}\, \pi + \varphi_{1\nu} (\partial_m \nu)\Big)\, \mathbf{q}_T + \varphi_{2T}\Big)_\Gamma \Big|_0^T \\ &\quad + \Big(\varphi_{2\nu}', \big(-\overline{\varphi_{1T}}\, (\partial_m \nu)\big)\, \mathbf{q}_T + \varphi_{2\nu}\Big)_\Gamma \Big|_0^T\ = \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$
(4.6)\quad
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{\Sigma_T}\Big(|\varphi'_{2T}|^2 + 3\,|\varphi'_{2\nu}|^2 + \sigma^0_T(\varphi_2) : \epsilon^0_T(\varphi_2)\Big)\,d\Sigma \\
&\quad + \int_{\Sigma_T}\frac{q_\nu}{2}\bigg(|\varphi'_2|^2 + \mu\,\Big(|\partial_\nu\varphi_{1T}|^2 - \Big|\overline{\partial_m\varphi_{1\nu}} - (\partial_m\nu)\,\varphi_{1T}\Big|^2\Big) \\
&\qquad - \Big(2\,\mu\,\epsilon^0_T(\varphi_1) + \lambda\,\mathrm{tr}(\epsilon^0_T(\varphi_1))\,i_2\Big) : \epsilon^0_T(\varphi_1)\bigg)\,d\Sigma \\
&\quad + \int_{\Sigma_T}\frac{q_\nu}{2}\bigg(\Big(|\varphi'_{2T}|^2 - \sigma^0_T(\varphi_2) : \epsilon^0_T(\varphi_2)\Big)\ \mathrm{tr}(\partial_m\nu) \\
&\qquad + 2\,\sigma^0_T(\varphi_1) : (\pi\,\partial_m\varphi_{1T}\,\pi + \varphi_{1\nu}\,\partial_m\nu)\,\partial_m\nu + (2\,\mu + \lambda)\,|\partial_\nu\varphi_{1\nu}|^2\bigg)\,d\Sigma \\
&\quad + \int_{\Sigma_T}(\sigma^0_T(\varphi_2) : \partial_m\nu)\,\overline{\varphi_{1T}}(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\ d\Sigma \\
&\quad - \int_{\Sigma_T}\partial_m\varphi_{1\nu}\,\Big(\sigma^0_T(\varphi_1)\,(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big)\,d\Sigma \\
&\quad + \int_{\Sigma_T}\sigma_\nu(\varphi_1)\,(\partial_m\varphi_{1\nu})\,\mathbf{q}_T\,d\Sigma - \int_{\Sigma_T}(\mathcal{R} : \sigma^0_T(\varphi_1)) : (\varphi_{1T}\otimes\mathbf{q}_T)\,d\Sigma\ .
\end{aligned}
$$

Preuve: Il suffit de montrer l'identité (4.6) pour $(\varphi^0,\varphi^1) \in D(\mathcal{A}^{\frac{3}{2}}) \times D(\mathcal{A})$ et de généraliser par un argument de densité. On commence par exprimer la conservation de l'énergie:

$$
(4.7)\quad
\begin{aligned}
E_0 \;=\; &\frac{1}{2}\int_\Omega\Big(\sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1) + |\varphi'_1|^2\Big)\,d\Omega \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Gamma\Big(\sigma^0_T(\varphi_2) : \epsilon^0_T(\varphi_2) + |\varphi'_2|^2\Big)\,d\Gamma\ .
\end{aligned}
$$

D'après la Remarque 3.1 φ vérifie: $(\varphi'',v)+a(\varphi,v) = 0, \forall\, v \in \mathcal{V}$; en prenant $v = \varphi$ on obtient: $\partial_t(\varphi',\varphi)_{\mathcal{H}} - \|\varphi'\|^2_{\mathcal{H}} + a(\varphi,\varphi) = 0$, d'où la relation d'équipartition de l'énergie:

$$
(4.8)\quad (\varphi',\varphi)_{\mathcal{H}}\big|_0^T \;=\; \int_0^T\Big(|\varphi'|^2_{\mathcal{H}} - a(\varphi,\varphi)\Big)\,dt\ .
$$

On obtient (4.6) à partir de (4.1) en tenant compte de (4.5), (4.7) et (4.8). ∎

Soit $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$; on pose: $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ et $R(\mathbf{x}_0) = \mathrm{Max}\{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|;\ x \in \overline{\Omega}\}$.

Proposition 4.3. *Soient $\varphi^0 = (\varphi^0_1,\varphi^0_2) \in D(\mathcal{A})$ et $\varphi^1 = (\varphi^1_1,\varphi^1_2) \in \mathcal{V}$. Il existe trois constantes positives δ, γ et c_1, qui ne dépendent que de Ω telles que si $T_0 = 2\,R(\mathbf{x}_0)\,(\sqrt{\delta} + \sqrt{\gamma})$ et $M = \mathrm{Max}\{(1 + \gamma\,R(\mathbf{x}_0))\,\frac{1}{\sqrt{\gamma}},\ 2\,(R(\mathbf{x}_0)\,\sqrt{\delta})^{-1}\}$ alors l'énergie E_0 de la solution $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2)$ du problème homogène (1.6) vérifie* *l'identité:*

$$
\begin{aligned}
(4.9)\qquad & (T-T_0)E_0 + \frac{1}{R(\mathbf{x}_0)\sqrt{\gamma}}\,|\varphi_1^0|_\Omega^2 + \frac{1}{2\,R(\mathbf{x}_0)\sqrt{\delta}}\,|\varphi_1^0|_\Gamma^2 \;\leq \\
\leq\; & \frac{1}{2}\int_{\Sigma_T}\Big(|\varphi'_{2T}|^2 + 3\,|\varphi'_{2\nu}|^2\Big)\,d\Sigma \\
& + \int_{\Sigma_T}\frac{q_\nu}{2}\left(|\varphi'_2|^2 + \mu\Big(|\partial_\nu\varphi_{1T}|^2 - \Big|\overline{\partial_m\varphi_{1\nu}} - (\partial_m\nu)\,\varphi_{1T}\Big|^2\Big)\right)d\Sigma \\
& + \int_{\Sigma_T}\frac{q_\nu}{2}\left((2\,\mu+\lambda)\,|\partial_\nu\varphi_{1\nu}|^2 - \Big(2\,\mu\,\sigma_T^0(\varphi_1) + \lambda\,\mathrm{tr}(\epsilon_T^0(\varphi_1))\,i_2\Big) : \epsilon_T^0(\varphi_1)\right)d\Sigma \\
& + M\,c_1\int_{\Sigma_T}\Big(|\varphi_1|^2 + |\varphi'_1|^2\Big)\,d\Sigma + \int_{\Sigma_T}\sigma_\nu(\varphi_1)\,(\partial_m\varphi_{1\nu})\,\mathbf{q}_T \\
& + \int_{\Sigma_T}\frac{q_\nu}{2}\bigg(\Big(|\varphi'_{2T}|^2 - \sigma_T^0(\varphi_2) : \epsilon_T^0(\varphi_2)\Big)\,\mathrm{tr}(\partial_m\nu) \\
& \qquad + 2\,\sigma_T^0(\varphi_1) : (\pi\,\partial_m\varphi_{1T}\,\pi + \varphi_{1\nu}\,\partial_m\nu)\,\partial_m\nu\bigg)\,d\Sigma \\
& + \int_{\Sigma_T}(\sigma_T^0(\varphi_2) : \partial_m\nu)\,\overline{\varphi_{1T}}(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\;d\Sigma \\
& - \int_{\Sigma_T}\partial_m\varphi_{1\nu}\Big(\sigma_T^0(\varphi_1)\,(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big)\,d\Sigma \\
& - \int_{\Sigma_T}(\mathcal{R} : \sigma_T^0(\varphi_1)) : (\varphi_{1T}\otimes\mathbf{q}_T)\,d\Sigma\;.
\end{aligned}
$$

Preuve: On majore les termes intégrés de la relation (4.6) par la méthode de V. Komornik (cf. par exemple [8]). On pose:

$$\xi(t) \;=\; \Big(\varphi'_1(t),\,(\mathbf{q}\,\nabla)\,\varphi_1(t) + \varphi_1(t)\Big)_\Omega \;=\; \Big(\varphi'_1(t),\,q_k\,\partial_k\varphi_1(t) + \varphi_1(t)\Big)_\Omega$$

(∂_k désigne la dérivée par rapport à la variable d'espace x_k).

On a:

$$\Big|\Big(\varphi'_1,\,(\mathbf{q}\nabla)\,\varphi_1 + \varphi_1\Big)_\Omega\Big|_0^T \;\leq\; |\xi(0)| + |\xi(T)|\;.$$

On écrit:

$$|\xi(t)| \;\leq\; \frac{\alpha}{2}\,|\varphi'_1(t)|_\Omega^2 + \frac{1}{2\,\alpha}\,|q_k\,\partial_k\varphi_1(t) + \varphi_1(t)|_\Omega^2$$

où α est une constante positive qui sera choisie plus loin. On a:

$$
\begin{aligned}
|q_k\,\partial_k\varphi_1(t) + \varphi_1(t)|_\Omega^2 \;&=\; |q_k\,\partial_k\varphi_1(t)|_\Omega^2 \;+\; |\varphi_1(t)|_\Omega^2 \;+\int_\Omega q_k\,\partial_k(|\varphi_1(t)|^2)\,dx \\
&=\; |q_k\,\partial_k\varphi_1(t)|_\Omega^2 \;-\; 2\,|\varphi_1(t)|_\Omega^2 \;+\int_\Gamma q_\nu\,|\varphi_1(t)|^2\,d\Gamma \\
&\leq\; R(\mathbf{x}_0)^2\,|\nabla\varphi_1(t)|_\Omega^2 \;-\; 2\,|\varphi_1(t)|_\Omega^2 \;+\; R(\mathbf{x}_0)\int_\Gamma|\varphi_1(t)|^2\,d\Gamma\;.
\end{aligned}
$$

Sachant, (cf. [8], p. 231), qu'il existe $\gamma > 0$ tel que:

$$\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx \;\le\; \gamma\Big(\int_\Omega \sigma(v) : \epsilon(v)\, dx \;+ \int_\Gamma |v|^2\, d\Gamma\Big)\,, \qquad \forall\, v \in \mathbb{H}^1(\Omega)\ .$$

on obtient:

$$\begin{aligned}|q_k\, \partial_k \varphi_1(t) + \varphi_1(t)|^2_\Omega \;\le\; \gamma\, R(\mathbf{x}_0)^2 \int_\Omega \sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1)\, dx \\ -\; 2\, |\varphi_1(t)|^2_\Omega \;+\; \Big(R(\mathbf{x}_0) + \gamma\, R(\mathbf{x}_0)^2\Big) \int_\Gamma |\varphi_1(t)|^2\, d\Gamma\ ;\end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned}|\xi(t)| \;\le\; & \frac{\alpha}{2}\, |\varphi_1(t)|^2_\Omega \;+\; \frac{\gamma\, R(\mathbf{x}_0)^2}{2\,\alpha} \int_\Omega \sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1)\, dx \\ & -\; \frac{1}{\alpha}\, |\varphi_1(t)|^2_\Omega \;+\; \frac{1}{2\alpha} \Big(R(\mathbf{x}_0) + \gamma\, R(\mathbf{x}_0)^2\Big) \int_\Gamma |\varphi_1(t)|^2\, d\Gamma\ .\end{aligned}$$

Le choix $\alpha = R(\mathbf{x}_0)\sqrt{\gamma}$ donne:

$$\begin{aligned}|\xi(t)| \;\le\; & R(\mathbf{x}_0)\, \sqrt{\gamma} \left(\frac{1}{2}\, |\varphi_1'(t)|^2_\Omega + \frac{1}{2} \int_\Omega \sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1)\, dx\right) \\ & - \frac{1}{R(\mathbf{x}_0)\, \sqrt{\gamma}}\, |\varphi_1(t)|^2_\Omega \;+\; \frac{1}{2\,\sqrt{\gamma}} \Big(1 + \gamma\, R(\mathbf{x}_0)\Big) \int_\Gamma |\varphi_1(t)|^2\, d\Gamma \\ \le\; & R(\mathbf{x}_0)\, \sqrt{\gamma}\, E_0 \;-\; \frac{R(\mathbf{x}_0)\, \sqrt{\gamma}}{2} \int_\Gamma \sigma_T^0(\varphi_1(t)) : \epsilon_T^0(\varphi_1(t))\, d\Gamma \\ & -\; \frac{1}{R(\mathbf{x}_0)\, \sqrt{\gamma}}\, |\varphi_1(t)|^2_\Omega \;+\; \frac{1}{2\,\sqrt{\gamma}} \Big(1 + \gamma\, R(\mathbf{x}_0)\Big) \int_\Gamma |\varphi_1(t)|^2\, d\Gamma\ .\end{aligned}$$

$\varphi_{1|\Gamma}$ est un élément de $H^1(0,T;\mathbb{L}^2(\Gamma))$ qui s'injecte continûment dans $C^0([0,T];\mathbb{L}^2(\Gamma))$; il existe alors une constante positive c_1 telle que:

$$\|\varphi_1\|^2_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Gamma))} \;\le\; c_1 \Big(\|\varphi_1\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Gamma))} + \|\varphi_1'\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Gamma))}\Big)\ .$$

On obtient:

$$\begin{aligned}|\xi(t)| \;\le\; & R(\mathbf{x}_0)\, \sqrt{\gamma}\, E_0 \;-\; \frac{R(\mathbf{x}_0)\, \sqrt{\gamma}}{2} \int_\Gamma \sigma_T^0(\varphi_1(t)) : \epsilon_T^0(\varphi_1(t))\, d\Gamma \\ & -\; \frac{1}{R(\mathbf{x}_0)\, \sqrt{\gamma}}\, |\varphi_1(t)|^2_\Omega \;+\; \frac{c_1}{2\,\sqrt{\gamma}} \Big(1 + \gamma\, R(\mathbf{x}_0)\Big) \int_{\Sigma_T} \Big(|\varphi_1(t)|^2 + |\varphi_1'(t)|^2\Big)\, d\Gamma\end{aligned}$$

et

$$\Big|\Big(\varphi_1',\, (\mathbf{q}\nabla)\varphi_1 + \varphi_1\Big)_\Omega\Big|_0^T \;\le \tag{4.10}$$

$$\le\; 2\, R(\mathbf{x}_0)\sqrt{\gamma}\, E_0 - \frac{1}{R(\mathbf{x}_0)\sqrt{\gamma}}\, |\varphi_1^0|^2_\Omega + \Big(1 + \gamma R(\mathbf{x}_0)\Big)\, \frac{c_1}{\sqrt{\gamma}} \int_{\Sigma_T} \Big(|\varphi_1(t)|^2 + |\varphi_1'(t)|^2\Big)\, d\Sigma\ .$$

Pour majorer l'intégrale sur Γ on pose: $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_T + \mathcal{Y}_\nu \, \nu$ avec:

$$\mathcal{Y}_T \; = \; (\pi \, \partial_m \varphi_{1T} \, \pi + \varphi_{1\nu} \, \partial_m \nu) \, \mathbf{q}_T \qquad \text{et} \qquad \mathcal{Y}_\nu \; = \; -\overline{\varphi_{1T}} (\partial_m \nu) \, \mathbf{q}_T \; .$$

Soit $\eta(t) = (\varphi_2', \mathcal{Y} + \varphi_2)_\Gamma(t)$. On écrit:

$$|\eta(t)| \; \leq \; \frac{\beta}{2} \, |\varphi_2'(t)|_\Gamma^2 + \frac{1}{2\,\beta} \, |\mathcal{Y} + \varphi_2(t)|_\Gamma^2$$

où β est une constante positive qui sera choisie plus loin. On a:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{Y} + \varphi_2(t)|_\Gamma^2 \; &= \; |(\pi \, \partial_m \varphi_{1T} \, \pi + \varphi_{1\nu} \, \partial_m \nu) \, \mathbf{q}_T|_\Gamma^2 \; + \; |\overline{\varphi_{1T}} (\partial_m \nu) \, \mathbf{q}_T|_\Gamma^2 \\
&\quad + \; |\varphi_2|_\Gamma^2 \; + \; 2 \int_\Gamma \overline{\varphi_{1T}} (\pi \, \partial_m \varphi_{1T} \, \pi + \varphi_{1\nu} \, \partial_m \nu) \, \mathbf{q}_T \, d\Gamma \\
&\quad - \; 2 \int_\Gamma \varphi_{2\nu} (\overline{\varphi_{1T}} \, \partial_m \nu) \, \mathbf{q}_T \; d\Gamma \\
&= \; |(\pi \, \partial_m \varphi_{1T} \, \pi + \varphi_{1\nu} \, \partial_m \nu) \, \mathbf{q}_T|_\Gamma^2 \; + \; |(\overline{\varphi_{1T}} \, \partial_m \nu) \, \mathbf{q}_T|_\Gamma^2 \\
&\quad + \; |\varphi_2|_\Gamma^2 \; + \; \int_\Gamma \partial_m (|\varphi_{1T}|^2) \, \mathbf{q}_T \; d\Gamma \\
&= \; |(\pi \, \partial_m \varphi_{1T} \, \pi + \varphi_{1\nu} \, \partial_m \nu) \, \mathbf{q}_T|_\Gamma^2 \; + \; |(\overline{\varphi_{1T}} \, \partial_m \nu) \, \mathbf{q}_T|_\Gamma^2 \; - \; |\varphi_2|_\Gamma^2 \\
&\quad + \; \int_\Gamma q_\nu \, |\varphi_{1T}|^2 \, \mathrm{tr}(\partial_m \nu) \, d\Gamma \; + \; 2 \, |\varphi_{2\nu}|_\Gamma^2 \; .
\end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned}
|\eta(t)| \; \leq \; & \frac{\beta}{2} \, |\varphi_2'(t)|_\Gamma^2 \; + \; \frac{1}{2\beta} \, |(\pi \, \partial_m \varphi_{1T} \, \pi + \varphi_{1\nu} \, \partial_m \nu) \, \mathbf{q}_T|_\Gamma^2 \; + \; \frac{1}{\beta} \, |\varphi_{2\nu}|_\Gamma^2 \\
& + \; \frac{1}{2\beta} \, |\overline{\varphi_{1T}} (\partial_m \nu) \, \mathbf{q}_T|_\Gamma^2 \; - \; \frac{1}{2\beta} \, |\varphi_2|_\Gamma^2 \; + \; \frac{1}{2\beta} \int_\Gamma q_\nu \, |\varphi_{1T}|^2 \, \mathrm{tr}(\partial_m \nu) \; d\Gamma \; .
\end{aligned}$$

D'après la Proposition (2.4), il existe $\delta > 0$ tel que:

$$\begin{aligned}
& |(\pi \, \partial_m \varphi_{1T} \, \pi + \varphi_{1\nu} \, \partial_m \nu) \, \mathbf{q}_T|_\Gamma^2 \; + \; |\overline{\varphi_{1T}} (\partial_m \nu) \, \mathbf{q}_T|_\Gamma^2 \; + \int_\Gamma q_\nu \, |\varphi_{1T}|^2 \, \mathrm{tr}(\partial_m \nu) \; d\Gamma \; \leq \\
& \qquad \leq \; \delta \, R(\mathbf{x}_0)^2 \left(\int_\Omega \sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1) \, dx \; + \int_\Gamma \left(\sigma_T^0(\varphi_1) : \epsilon_T^0(\varphi_1) + |\varphi_1|^2 \right) d\Gamma \right) \; .
\end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned}
|\eta(t)| \; \leq \; & \frac{\beta}{2} \, |\varphi_2'(t)|_\Gamma^2 \\
& + \; \frac{\delta \, R(\mathbf{x}_0)^2}{2\,\beta} \left(\int_\Omega \sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1) \, dx \; + \int_\Gamma \left(\sigma_T^0(\varphi_1) : \epsilon_T^0(\varphi_1) + |\varphi_1|^2 \right) d\Gamma \right) \\
& - \; \frac{1}{2\,\beta} \, |\varphi_2(t)|_\Gamma^2 \; + \; \frac{1}{\beta} \, |\varphi_{2\nu}(t)|_\Gamma^2 \; .
\end{aligned}$$

Le choix $\beta = R(\mathbf{x}_0)\sqrt{\delta}$ et la compacité de l'injection

$$H^1(0,T;L^2(\Gamma)) \to \mathcal{C}([0,T];L^2(\Gamma))$$

donnent:

$$|\eta(t)| \;\leq\; R(\mathbf{x}_0)\sqrt{\delta}\,E_0 \;-\; \frac{1}{2\,R(\mathbf{x}_0)\sqrt{\delta}}\,|\varphi_1(t)|^2_\Gamma \;+\; \frac{c_1}{R(\mathbf{x}_0)\sqrt{\delta}}\int_{\Sigma_T}\Big(|\varphi_1|^2+|\varphi_1'|^2\Big)\,d\Sigma$$

et

$$\begin{aligned} |(\varphi_2',\mathcal{Y}+\varphi_2)_\Gamma|_0^T \;&\leq\; 2\,R(\mathbf{x}_0)\sqrt{\delta}\,E_0 \;-\; \frac{1}{2\,R(\mathbf{x}_0)\sqrt{\delta}}\,|\varphi_1^0|^2_\Gamma \\ &\quad+\; \frac{2\,c_1}{R(\mathbf{x}_0)\sqrt{\delta}}\int_{\Sigma_T}\Big(|\varphi_1|^2+|\varphi_1'|^2\Big)\,d\Sigma\;. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Les estimations (4.10) et (4.11) montrent que les termes intégrés sont majorés par:

$$\begin{aligned} &2\,R(\mathbf{x}_0)\,(\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta})\,E_0 \;-\; \frac{1}{R(\mathbf{x}_0)\sqrt{\gamma}}\,|\varphi_1^0|^2_\Omega \;-\; \frac{1}{2\,R(\mathbf{x}_0)\sqrt{\delta}}\,|\varphi_1^0|^2_\Gamma \;+ \\ &\qquad\qquad +\; M\,c_1\int_{\Sigma_T}\Big(|\varphi_1|^2+|\varphi_1'|^2\Big)\,d\Sigma\;. \end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir l'estimation (4.9). ∎

Démonstration du Théorème 1.2: On utilise l'estimation (4.9). On a $\overline{\partial_m\varphi_{1\nu}} = \nabla_T\varphi_{1\nu}$. De (1.1)–(1.4) on obtient:

$$\partial_\nu\varphi_{1T} \;=\; \mu^{-1}\,\sigma_S(\varphi_1) + (\partial_m\nu)\,\varphi_{1T} - \nabla_T\varphi_{1\nu}$$

et

$$\partial_\nu\varphi_{1\nu} \;=\; (2\,\mu+\lambda)^{-1}\Big(\sigma_\nu(\varphi_1) - \lambda\,\operatorname{tr}(\epsilon_T^0(\varphi_1)\Big)\;.$$

La Proposition 2.1 donne alors:

$$\int_{\Sigma_T}|\partial_\nu\varphi_1|^2\,d\Sigma \;\leq\; C\int_{\Sigma_T}\Big(|\nabla_T\varphi_{1\nu}|^2+|\varphi_1|^2+\sigma_T^0(\varphi_1):\epsilon_T^0(\varphi_1)+|\sigma(\varphi_1).\nu|^2\Big)\,d\Sigma$$

où C est une constante positive qui ne dépend que de Ω.

De $\sigma_T^0(\varphi_1) \;=\; 2\,\mu\,\epsilon_T^0(\varphi_1) + \lambda^*\operatorname{tr}(\epsilon_T^0(\varphi_1))\,i_2$ on obtient, grâce à la Proposition 2.1

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\Sigma_T}\partial_m\varphi_{1\nu}\,(\sigma_T^0(\varphi_1)\,(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T)\;d\Sigma\right| \;\leq \\ &\quad\leq\; C\Big(\|\nabla_T\varphi_{1\nu}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma,T(\Gamma))}+\|\varphi_{1\nu}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))}+\|\varphi_{1T}\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Gamma,T(\Gamma))}\Big) \\ &\quad\leq\; C\int_{\Sigma_T}\Big(|\nabla_T\varphi_{1\nu}|^2+|\varphi_1|^2+\sigma_T^0(\varphi_1):\epsilon_T^0(\varphi_1)\Big)\,d\Sigma\;. \end{aligned}$$

Les autres termes de (4.9) sont estimés de façon analogue en appliquant la Proposition 2.1. ∎

5 – Contrôlabilité

5.1. Régularité des solutions faibles

Proposition 5.1. *Soit $f = \partial_t g$, $g \in L^1(0,T;D(\mathcal{A}))$; alors le problème:*

$$\theta'' + \mathcal{A}\theta = f\,, \qquad \theta(0) = \theta'(0) = 0\,,$$

admet une solution unique: $\theta \in \mathcal{C}^0([0,T];D(\mathcal{A}))$. $\theta'(T)$ est défini comme élément de $\mathcal{V}$ et il existe une constante $C>0$ telle que:

$$\|\theta\|_{L^\infty(0,T;D(\mathcal{A}))} + \|\theta'(T)\|_{\mathcal{V}} \;\leq\; C\,\|g\|_{L^1(0,T;D(\mathcal{A}))}\,.$$

Preuve: On prend $g \in \mathcal{D}(0,T;D(\mathcal{A}))$ puis on généralise par densité. Soient α et β définies par:

$$\alpha'' + \mathcal{A}\alpha = g\,, \qquad \alpha(0) = \alpha'(0) = 0\,,$$

et

$$\beta'' + \mathcal{A}\beta = \mathcal{A}g\,, \qquad \beta(0) = \beta'(0) = 0\,.$$

Alors $\alpha \in \mathcal{C}^0([0,T];D(\mathcal{A}^{\frac{3}{2}})) \cap \mathcal{C}^1([0,T];D(\mathcal{A}))$ et $\beta \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathcal{V}) \cap \mathcal{C}^1([0,T];\mathcal{H})$ et on a:

$$\|\alpha\|_{L^\infty(0,T;D(\mathcal{A}^{\frac{3}{2}}))} + \|\alpha'\|_{L^\infty(0,T;D(\mathcal{A}))} \;\leq\; C\,\|g\|_{L^1(0,T;D(\mathcal{A}))}\,,$$

$$\|\beta\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V})} + \|\beta'\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{H})} \;\leq\; C\,\|\mathcal{A}g\|_{L^1(0,T;\mathcal{H})} \;\leq\; C\,\|g\|_{L^1(0,T;D(\mathcal{A}))}\,,$$

or $\theta = \alpha'$ d'où: $\theta \in \mathcal{C}^0([0,T];D(\mathcal{A}))$ et $\|\theta\|_{L^\infty(0,T;D(\mathcal{A}))} \leq C\,\|g\|_{L^1(0,T;D(\mathcal{A}))}$; d'autre part: $\theta' = \alpha'' = -\mathcal{A}\alpha + g = -\beta + g$ d'où: $\theta'(T) = -\beta(T) \in \mathcal{V}$ et

$$\|\theta'(T)\|_{\mathcal{V}} \;\leq\; C\,\|g\|_{L^1(0,T;D(\mathcal{A}))}\,. \blacksquare$$

5.2. Le problème adjoint

On donne: $T > T_0$, $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \varphi_2^0) \in D(\mathcal{A})$, $\varphi^1 = (\varphi_1^1, \varphi_2^1) \in \mathcal{V}$; soit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ la solution du problème homogène (1.6); on pose:

$$\begin{aligned} \|(\varphi^0,\varphi^1)\|_{\mathcal{F}}^2 \;=\; \int_{\Sigma_T} \Big(& \sigma_T^0(\varphi_1) : \epsilon_T^0(\varphi_1) + |\varphi_1|^2 + |\varphi_1'|^2 \\ &+ |\nabla_T \varphi_{1\nu}|^2 + |\sigma(\varphi_1).\nu|^2\Big)\, d\Sigma\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Proposition 5.2. *$\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ est une norme sur $D(\mathcal{A})\times\mathcal{V}$; le complété $\mathcal{F}$ de $D(\mathcal{A})\times\mathcal{V}$ pour cette norme est contenu dans $\mathcal{V}\times\mathcal{H}$.*

Preuve: D'après (1.8) on a: $\|(\varphi^0,\varphi^1)\|_{\mathcal{V}\times\mathcal{H}} \le C\,\|(\varphi^0,\varphi^1)\|_{\mathcal{F}}$ d'où le résultat. ∎

Remarque 5.1. Soit $(\varphi^0,\varphi^1)\in\mathcal{F}$, φ la solution du problème homogène (1.6) correspondant; alors on a:

$$\varphi_1'\in L^2(\Sigma_T;\mathbb{R}^3)\,,\qquad \partial_\nu\varphi_1\in L^2(\Sigma_T;\mathbb{R}^3)\qquad\text{et}\qquad \varphi_{1\nu}\in L^2(0,T;H^1(\Gamma))\ .\ \square$$

Remarque 5.2. On a:

$$D(\mathcal{A})\times\mathcal{V}\subset\mathcal{F}\subset\mathcal{V}\times\mathcal{H}\qquad\text{et}\qquad \mathcal{V}'\times\mathcal{H}\subset\mathcal{F}'\subset D(\mathcal{A})'\times\mathcal{V}'\ .\ \square$$

Proposition 5.3. *Soient $f\in L^1(0,T;\mathcal{V})$ et $\{\theta^0,\theta^1\}\in\mathcal{F}$. Si θ est la solution du problème:*

$$\theta''+\mathcal{A}\theta=f\,,\qquad \theta(0)=\theta^0,\quad \theta'(0)=\theta^1\ ,$$

alors il existe une constante positive C ne dépendant que de Ω telle que:

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_T}\Big(\sigma_T^0(\theta_1):\epsilon_T^0(\theta_1)+|\theta_1|^2+|\theta_1'|^2+|\nabla_T\theta_{1\nu}|^2+|\sigma(\theta_1).\nu|^2\Big)\,d\Sigma\ &\le\\ \le\ C\Big(\|f\|_{L^1(0,T;\mathcal{V})}+\|\{\theta^0,\theta^1\}\|_{\mathcal{F}}\Big)\ .&\end{aligned}\tag{5.2}$$

Preuve: On pose $\theta=p+q$ où p est la solution du problème avec $f=0$ et q la solution avec les conditions initiales nulles. Par définition de $\mathcal{F}$ on a:

$$\int_{\Sigma_T}\Big(\sigma_T^0(p_1):\epsilon_T^0(p_1)+|p_1|^2+|p_1'|^2+|\nabla_Tp_{1\nu}|^2+|\sigma(p_1).\nu|^2\Big)\,d\Sigma\ =\ \|\{\theta^0,\theta^1\}\|_{\mathcal{F}}^2\ .$$

D'après le point (ii) du Théorème 1.1 on a:

$$(q_1,q_{1T},\sigma(q_1).\nu)\ \in\ C^0\Big([0,T];\,\mathbb{H}^{\frac32}(\Omega)\times H^2(\Gamma,T(\Gamma))\times\mathbb{L}^2(\Gamma)\Big)$$

et il existe une constante positive C ne dépendant que de Ω telle que:

$$\begin{aligned}\|q_1\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{H}^{\frac32}(\Omega))}+\|q_{1T}\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Gamma,T(\Gamma)))}+\|\sigma(q_1).\nu\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Gamma))}\ &\le\\ \le\ C\,\|f\|_{L^1(0,T;\mathcal{V})}&\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\Sigma_T}\Big(\sigma_T^0(q_1):\epsilon_T^0(q_1)+|q_1|^2+|q_1'|^2+|\nabla_Tq_{1\nu}|^2+|\sigma(q_1).\nu|^2\Big)\,d\Sigma\ \le\ C\,\|f\|_{L^1(0,T;\mathcal{V})}\ .\ ∎$$

On donne $(\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{F}$ et on apelle φ la solution du problème homogène (1.6) correspondant. Soit $(f, \{\theta^0, \theta^1\}) \in L^1(0,T;\mathcal{V}) \times \mathcal{F}$; on considère la forme linéaire L définie sur $\mathcal{F}$ par:

$$
\begin{aligned}
L(f, \{\theta^0, \theta^1\}) \;=\; -\int_{\Sigma_T} \Big(& \sigma_T^0(\varphi_1) : \epsilon_T^0(\theta_1) + \varphi_1\theta_1 + \varphi_1'\theta_1' \\
& + \nabla_T\varphi_{1\nu}\,\nabla_T\theta_{1\nu} - (\sigma(\varphi_1)\nu)\,(\sigma(\theta_1)\nu)\Big)\, d\Sigma
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

où θ est la solution du problème:

$$
\theta'' + \mathcal{A}\theta = f\,, \qquad \theta(0) = \theta^0, \quad \theta'(0) = \theta^1\ .
$$

Proposition 5.4. *Il existe $\psi \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}')$ et $(\rho^1, -\rho^0) \in \mathcal{F}'$ uniques tels que:*

$$
L(f, \theta^0, \theta^1) \;=\; \int_0^T \Big((\psi(t), f(t))_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \Big)\, dt \;-\; (\rho^1, \theta^0) + (\rho^0, \theta^1)
\tag{5.4}
$$

pour tout $(f, \{\theta^0, \theta^1\}) \in L^1(0,T;\mathcal{V}) \times \mathcal{F}$ et il existe une constante positive C ne dépendant que de Ω telle que:

$$
\|\psi\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V}')} + \|(\rho^1, -\rho^0)\|_{\mathcal{F}'} \;\le\; C\,\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{\mathcal{F}}\ .
\tag{5.5}
$$

Preuve: D'après la Proposition 5.3 on a:

$$
|L(f, \{\theta^0, \theta^1\})| \;\le\; C\,\Big(\|\{\theta^0, \theta^1\}\|_{\mathcal{F}} + \|f\|_{L^1(0,T;\mathcal{V})}\Big)\,\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{\mathcal{F}}
$$

d'où l'existence et l'unicité de $(\psi, \{\rho^1, -\rho^0\}) \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}') \times \mathcal{F}'$ vérifiant (5.5). ∎

Remarque 5.3. ψ est solution formelle du problème:

$$
\begin{cases}
\psi_1'' - \operatorname{div}\sigma(\psi_1) = 0 & \text{dans } Q,\\
\psi_{2T}'' + \sigma_S(\psi_1) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\psi_2)} \;=\; \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\varphi_1)} - \varphi_{1T} + \partial_t\varphi_{1T}' & \text{sur } \Sigma_T,\\
\psi_{2\nu}'' + \sigma_\nu(\psi_1) + \sigma_T^0(\psi_2) : \partial_m\nu \;= & \\
\qquad = \; -\sigma_T^0(\varphi_1) : \partial_m\nu + \partial_t\varphi_{1\nu}' - \varphi_{1\nu} + \Delta_T\varphi_{1\nu} & \text{sur } \Sigma_T,\\
\psi_1 - \psi_2 = \sigma(\varphi_1).\nu & \text{sur } \Sigma_T,\\
\psi(0) = \rho^0, \quad \psi'(0) = \rho^1; \quad \psi(T) = \psi'(T) = 0 & \text{dans } \Omega\ . \ \square
\end{cases}
$$

Afin de montrer que l'on peut donner un sens aux valeurs de ψ et ψ' aux bornes de l'intervalle $(0,T)$ on va utiliser le résultat de régularité des solutions faibles obtenu à la Proposition 5.1.

Proposition 5.5. *La fonction ψ définie à la Proposition 5.4 est telle que: $\psi \in \mathcal{W}^{1,\infty}(0,T;D(\mathcal{A})')$, de plus $\psi(0)$ et $\psi'(0)$ sont définis et on a: $\psi(0) = \rho^0$, $\psi'(0) = \rho^1$; $\psi(T) = \psi'(T) = 0$.*

Preuve: On prend $f = \partial_t g$ dans (5.4) avec $g \in L^1(0,T;D(\mathcal{A}))$ et $\{\theta^0,\theta^1\}=0$; $L(f,0,0)$ a encore un sens d'après les Propositions 5.1 et 3.3 et on a:

$$|L(f,0,0)| \;\leq\; C_T \,\|(\varphi^0,\varphi^1)\|_{\mathcal{F}}\, \|g\|_{L^1(0,T;D(\mathcal{A}))}$$

ce qui montre que $\psi \in \mathcal{W}^{1,\infty}(0,T;D(\mathcal{A})')$ et donne un sens à $\psi(0)$ et $\psi(T)$ comme éléments de $D(\mathcal{A})'$. Afin de donner un sens à $\psi'(0)$ et $\psi'(T)$ on procède comme dans [8]. On introduit les fonctions propres de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}m = \lambda\, m\,, \qquad m \in D(\mathcal{A})\ .$$

Si $f(t) = g(t)\,m$, $g \in \mathcal{D}(0,T)$, $\theta^0 = \alpha^0\, m$, $\theta^1 = \alpha^1\, m$, $(\alpha^0,\alpha^1) \in \mathbb{R}^2$, alors la solution du problème:

$$\theta'' + \mathcal{A}\theta = f\,, \qquad \theta(0) = \theta^0, \;\; \theta'(0) = \theta^1$$

s'écrit: $\theta = h\,m$ avec:

$$h'' + \lambda\, h = g\,, \qquad h(0) = \alpha^0, \;\; h'(0) = \alpha^1$$

en posant:

$$\xi_0(t) \;=\; -\int_\Gamma \varphi_1'\, m_1\; d\Gamma$$

et

$$\xi_1(t) \;=\; -\int_\Gamma \Big(\sigma_T^0(\varphi_1) : \epsilon_T^0(m_1) + \varphi_1\, m_1 + \nabla_T\varphi_{1\nu}\, \nabla_T m_{1\nu}\Big)\, d\Gamma \\ -\int_\Gamma (\sigma(\varphi_1).\nu)\,(\sigma(m_1).\nu)\; d\Sigma$$

on obtient:

$$\int_0^T (\psi,m)\,(h'' + \lambda\, h)\, dt \;+\; \alpha_1(\rho^0,m) - \alpha_0(\rho^1,m) \;=\; \int_0^T (\xi_0\, h' + \xi_1\, h)\, dt\ .$$

Comme h, α_0 et α_1 sont arbitraires, (ψ,m) vérifie:

$$(\psi,m)'' + \lambda(\psi,m) \;=\; \xi_1 - \partial_t\xi_0$$

avec: $\xi_0,\xi_1 \in L^2(0,T)$; cela donne un sens à $(\psi,m)'(0)$ et $(\psi,m)'(T)$ (cf. [8]), et on a:

$$(\psi,m)(T)\, h'(T) - (\psi,m)'(T)\, h(T) + (\psi,m)'(0)\, h(0) - (\psi,m)(0)\, h'(0) \;= \\ =\; h(0)(\rho^1,m) - h'(0)(\rho^0,m)$$

comme h est arbitraire, on obtient les valeurs annoncées. ∎

Remarque 5.4. Précisons le sens des conditions vérifiées par ψ.

- $\overline{\mathrm{div}_T\, \sigma_T^0(\varphi_2)}$ est un élément de $L^2(0,T;H^{-1}(\Gamma,T(\Gamma))$ défini par:

$$(\overline{\mathrm{div}_T\, \sigma_T^0(\varphi_2)},\, v_T) \;=\; -\int_{\Sigma_T} \sigma_T^0(\varphi_2) : \pi\,(\partial_m v_T)\,\pi\; d\Sigma$$

  pour tout élément $v_T \in L^2(0,T;H^1(\Gamma,T(\Gamma))$.

- $\partial_t \varphi'_{1T}$ est un élément de $(H^1(0,T;L^2(\Gamma,T(\Gamma))))'$ défini par:

$$(\partial_t \varphi'_{1T}, v_T) \;=\; -\int_{\Sigma_T} \overline{\varphi'_{1T}}\, v'_T\; d\Sigma\,, \qquad \forall\, v_T \in H^1(0,T;L^2(\Gamma,T(\Gamma)))\;.$$

- $\Delta_T \varphi_{1\nu|\Gamma}$ est un élément de $L^2(0,T;H^{-1}(\Gamma))$ défini par:

$$(\Delta_T \varphi_{1\nu}, v) = -\int_{\Sigma_T} \nabla_T \varphi_{1\nu}\, \nabla_T\, v\; d\Sigma\,, \quad \forall\, v \in L^2(0,T;H^1(\Gamma)) \;\; (H_0^1(\Gamma) = H^1(\Gamma))\;. \square$$

5.3. Le contrôle

Fin de la démonstration du Théorème 1.3

Soit: $\Lambda :\; \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}',\; (\varphi^0,\varphi^1) \mapsto (\psi'(0), -\psi(0))$ où ψ est définie par (5.4). L'opérateur Λ est un isomorphisme de $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}'$; en effet:

$$\begin{aligned}\Big\langle \Lambda\{\varphi^0,\varphi^1\},\, \{\varphi^0,\varphi^1\}\Big\rangle_{\mathcal{F}',\mathcal{F}} &= (\psi'(0),\varphi^0) - (\psi(0),\varphi^1)\\ &= -L(0,\varphi^0,\varphi^1) \;=\; \|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|^2_{\mathcal{F}}\;.\end{aligned}$$

On conclut grâce à la symétrie de Λ.

Soit $\{\rho^1,-\rho^0\} \in \mathcal{F}'$ et $(\varphi^0,\varphi^1) = \Lambda^{-1}\{\rho^1,-\rho^0\}$; soit φ la solution du problème homogène (1.6) avec les conditions initiales (φ^0,φ^1). Il suffit de prendre $\mathbf{u} = \psi$ où ψ est définie par (5.4); le contrôle $\mathbf{g}$ est donné par la Remarque 5.3. ∎

6 – ANNEXE

Calcul de:

$$\sigma_T^0(\mathbf{u}) : \pi\, \partial_m((\pi\, \partial_m \mathbf{u}_T\, \pi + \mathbf{u}_\nu\, \partial_m \nu)\, \mathbf{q}_T\Big)\, \pi\;.$$

La valeur de ce terme est cruciale dans la démonstration de la Proposition 4.1.

6.1. Relations préliminaires

Les notations sont celles du paragraphe 2. On utilisera les relations:

$$g_{\alpha\beta,\lambda} = \Gamma^r_{\alpha\lambda}\, g_{r\beta} + \Gamma^r_{\beta\lambda}\, g_{r\alpha}\,, \qquad g^{\alpha\beta}_{,\mu} = -\Gamma^\beta_{\lambda\mu}\, g^{\alpha\lambda} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}\, g^{\lambda\beta}$$

que l'on obtient par un calcul direct.

Soit A un champ d'endomorphismes du plan tangent de composantes $A^\alpha_\beta = \mathbf{a}^\alpha A\, a_\beta$ $(\alpha,\beta = 1,2)$; les composantes de son dual $\overline{A}$ sont données par: $\overline{A}^\mu_\lambda = A^r_s\, g^{s\mu}\, g_{r\lambda}$, $(\lambda,\mu = 1,2)$.

Si B est un autre champ d'endomorphismes on a: $(AB)^\alpha_\beta = A^\alpha_r B^r_\beta$.

Proposition 6.1. *Soit A un champ d'endomorphismes du plan tangent de composantes A^μ_λ, $\bar{A}$ le champ dual et $\mathbf{q}_T = q^\alpha\, \mathbf{a}_\alpha$ un champ tangent; alors:*

$$\bar{A}^\mu_\lambda\, A^\lambda_{\mu,\alpha}\, q^\alpha \;=\; 2^{-1}\, \partial_m(\bar{A}\!:\!A)\, \mathbf{q}_T \;+\; (\bar{A}A - A\bar{A})^\mu_\lambda\, \Gamma^\lambda_{\alpha\mu}\, q^\alpha\ .$$

Preuve: On a:

$$\begin{aligned}
\partial_m(\bar{A}\!:\!A)\, \mathbf{q}_T \;&=\; \partial_\alpha(\bar{A}^\mu_\lambda\, A^\lambda_\mu)\, q^\alpha \;=\; \bar{A}^\mu_{\lambda,\alpha}\, A^\lambda_\mu\, q^\alpha \;+\; \bar{A}^\mu_\lambda\, A^\lambda_{\mu,\alpha}\, q^\alpha \;= \\
&=\; \bar{A}^\mu_\lambda\, A^\lambda_{\mu,\alpha}\, q^\alpha \;+\; A^\lambda_\mu\, A^s_{r,\alpha}\, g^{r\mu}\, g_{s\lambda}\, q^\alpha \;+\; A^\lambda_\mu\, A^s_r\, (g^{r\mu}_{,\alpha}\, g_{s\lambda} + g^{r\mu}\, g_{s\lambda,\alpha})\, q^\alpha \\
&=\; 2\,\bar{A}^\mu_\lambda\, A^\lambda_{\mu,\alpha}\, q^\alpha \;+\; A^\lambda_\mu\, A^s_r\, (g^{rs}_{,\alpha}\, g_{s\lambda} + g^{r\mu}\, g_{s\lambda,\alpha})\, q^\alpha \\
&=\; 2\,\bar{A}^\mu_\lambda\, A^\lambda_{\mu,\alpha}\, q^\alpha \;-\; A^\lambda_\mu\, A^s_r\, \Big(g_{\lambda s}(\Gamma^r_{\theta\alpha}\, g^{\theta\mu} + \Gamma^\mu_{\theta\alpha}\, g^{\theta r}) \;-\; g^{r\mu}(\Gamma^\theta_{s\alpha}\, g_{\theta\lambda} + \Gamma^\theta_{\alpha\lambda}\, g_{\theta s})\Big)\, q^\alpha \\
&=\; 2\,\bar{A}^\mu_\lambda\, A^\lambda_{\mu,\alpha}\, q^\alpha + 2\,\Gamma^\nu_{\alpha\beta}(A\bar{A} - \bar{A}A)^\beta_\nu\, q^\alpha
\end{aligned}$$

qui donne la relation annoncée. ∎

Proposition 6.2. *Si $\mathbf{u}_T$ est un champ tangentiel régulier donné par $\mathbf{u}_T = u^\alpha\, \mathbf{a}_\alpha$ alors:*

$$(\pi\, \partial_m \mathbf{u}_T)^\lambda_{\alpha,\mu} \;=\; (\pi\, \partial_m \mathbf{u}_T)^\lambda_{\mu,\alpha} + \Gamma^\lambda_{\alpha\nu}(\pi\, \partial_m \mathbf{u}_T)^\nu_\mu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}(\pi\, \partial_m \mathbf{u}_T)^\nu_\alpha + \mathcal{R}^\lambda_{\nu\mu\alpha}\, u^\nu$$

où les $\mathcal{R}^\lambda_{\nu\mu\alpha} = \Gamma^\lambda_{\alpha\nu,\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\alpha} + \Gamma^\lambda_{\mu r}\, \Gamma^r_{\alpha\nu} - \Gamma^\lambda_{\alpha r}\, \Gamma^r_{\mu\nu}$, $1 \le \alpha,\mu,\nu,\lambda \le 2$, sont les composantes du tenseur de courbure sur Γ (cf. [5]).

Preuve: Les composantes du champ d'endomorphismes $\pi\, \partial_m \mathbf{u}_T\, \pi$ sont données par: $(\pi\, \partial_m \mathbf{u}_T)^\beta_\alpha = u^\beta_{,\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\lambda}\, u^\lambda$ d'où:

$$\begin{aligned}
(\pi\, \partial_m \mathbf{u}_T)^\lambda_{\alpha,\mu} \;&=\; (\pi\, \partial_m \mathbf{u}_T)^\lambda_{\mu,\alpha} + (\Gamma^\lambda_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\beta,\alpha})\, u^\beta + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\, u^\beta_{,\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\beta}\, u^\beta_{,\alpha} \\
&=\; (\pi\, \partial_m \mathbf{u}_T)^\lambda_{\mu,\alpha} + (\Gamma^\lambda_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\beta,\alpha})\, u^\beta + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\Big((\pi\, \partial_m \mathbf{u}_T)^\beta_\mu - \Gamma^\beta_{\mu\nu}\, u^\nu\Big) \\
&\quad -\; \Big((\pi\, \partial_m \mathbf{u}_T)^\beta_\alpha - \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\, u^\nu\Big)\, \Gamma^\lambda_{\mu\beta} \\
&=\; (\pi\, \partial_m \mathbf{u}_T)^\lambda_{\mu,\alpha} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}(\pi\, \partial_m \mathbf{u}_T)^\beta_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\beta}(\pi\, \partial_m \mathbf{u}_T)^\beta_\alpha \\
&\quad +\; (\Gamma^\lambda_{\alpha\nu,\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\alpha} + \Gamma^\lambda_{\mu r}\, \Gamma^r_{\alpha\nu} - \Gamma^\lambda_{\alpha r}\, \Gamma^r_{\mu\nu})\, u^\nu\ . \ ∎
\end{aligned}$$

Proposition 6.3. *Soit $A = A_\alpha^\beta \, \mathbf{a}_\beta \, \mathbf{a}^\alpha$ un champ d'endomorphismes du plan tangent et $\mathbf{q}_T = q^\alpha \, \mathbf{a}_\alpha$ un champ tangent; alors:*

$$(\pi \, \partial_m (A\mathbf{q}_T))_\mu^\lambda \;=\; (A \, \pi \, \partial_m \mathbf{q}_T)_\mu^\lambda + A_{\alpha,\mu}^\lambda q^\alpha + (A_\alpha^\nu \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - A_\nu^\lambda \Gamma_{\alpha\mu}^\nu) \, q^\alpha \; .$$

Preuve: Posons: $\mathbf{v}_T = A\mathbf{q}_T = v^\beta \mathbf{a}_\beta$ avec $v^\beta = A_\alpha^\beta q^\alpha$; alors:

$$(\pi \, \partial_m (A\mathbf{q}_T))_\mu^\lambda \;=\; v_{,\mu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\nu \;=\; A_{\alpha,\mu}^\lambda q^\alpha + A_\alpha^\lambda q_{,\mu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\alpha^\nu q^\alpha \; .$$

Il suffit de remarquer que $(\pi \, \partial_m \mathbf{q}_T)_\mu^\alpha = q_{,\mu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha q^\nu$ pour conclure. ∎

On pose $\partial_m \nu = \nu_{,\alpha} \, \mathbf{a}^\alpha = -b_\alpha^\beta \, \mathbf{a}_\beta \, \mathbf{a}^\alpha$ et $b_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} \, b_\beta^\mu$; alors:

Proposition 6.4. *On a les relations:*

$$\begin{aligned}
&b_{\alpha\beta} = \bar{\nu} \, \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \, , \qquad g^{\lambda t}(\nu_{,\mu}, \mathbf{a}_{t,\alpha}) = -g^{\lambda t} \, g_{sr} \, b_\mu^r \, \Gamma_{t\alpha}^s \; , \\
&g_{,\mu}^{\lambda t}(\nu, \mathbf{a}_{t,\alpha}) \;=\; -\Gamma_{\mu r}^t g^{\lambda r}(\nu, \mathbf{a}_{t,\alpha}) - \Gamma_{\mu r}^\lambda b_\alpha^r \; , \\
&b_{\alpha,\mu}^\lambda \;=\; b_{\mu,\alpha}^\lambda + g^{\lambda r} g_{st}(\Gamma_{\alpha r}^t b_\mu^s - \Gamma_{\mu r}^t b_\alpha^s) + b_\mu^r \Gamma_{\alpha r}^\lambda - \Gamma_{\mu r}^\lambda b_\alpha^r + g^{t\lambda} \, g_{sr}(\Gamma_{t\mu}^s b_\alpha^r - \Gamma_{t\alpha}^s b_\mu^r)
\end{aligned}$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$.

Preuve:

- $\bar{\nu} \, \mathbf{a}_\alpha = (\nu, \mathbf{a}_\alpha)$ donne par dérivation par rapport à ξ_β: $(\nu_{,\beta}, \mathbf{a}_\alpha) + (\nu, \mathbf{a}_{\alpha,\beta}) = 0$, d'où:

$$(\nu, \mathbf{a}_{\alpha,\beta}) \;=\; (b_\beta^\mu \, \mathbf{a}_\mu, \mathbf{a}_\alpha) \;=\; g_{\mu\alpha} \, b_\beta^\mu \;=\; b_{\alpha\beta} \; .$$

- D'après la relation précédente on a:

$$\begin{aligned}
g^{\lambda t}(\nu_{,\mu}, \mathbf{a}_{\alpha,t}) = -g^{\lambda t} \, b_\mu^r(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{\alpha,t}) &= -g^{\lambda t} \, b_\mu^r(\mathbf{a}_r, \pi \mathbf{a}_{\alpha,t}) \\
&= -g^{\lambda t} \, b_\mu^r(\mathbf{a}_r, \Gamma_{t\alpha}^s \mathbf{a}_s) = -g^{\lambda t} \, g_{rs} \, b_\mu^r \, \Gamma_{t\alpha}^s \; .
\end{aligned}$$

- D'après les relations données au début de ce paragraphe on a:

$$g_{,\mu}^{\lambda t}(\nu, \mathbf{a}_{\alpha,t}) \;=\; -(\Gamma_{\mu r}^t g^{\lambda r} + \Gamma_{\mu r}^\lambda g^{\mathrm{tr}})(\nu, \mathbf{a}_{\alpha,t}) \; .$$

La première relation de la proposition donne:

$$g^{\mathrm{tr}}(\nu, \mathbf{a}_{\alpha,t}) = g^{rt} \, b_{t\alpha} = g^{rt} \, g_{ts} \, b_\alpha^s = b_\alpha^r \; .$$

- On a $\nu_{,\alpha} = -b_\alpha^\lambda \, \mathbf{a}_\lambda$, d'où

$$b_\alpha^\lambda = -\mathbf{a}^\lambda \, \nu_{,\alpha} = -(\overline{\mathbf{a}^\lambda}, \nu_{,\alpha}) = -(g^{\lambda s} \, \mathbf{a}_s, \nu_{,\alpha}) = g^{\lambda s}(\mathbf{a}_{s,\alpha}, \nu)$$

et

$$b^\lambda_{\alpha,\mu} = g^{\lambda s}_{,\mu}(\mathbf{a}_{s,\alpha},\nu) + g^{\lambda s}(\mathbf{a}_{s,\alpha\mu},\nu) + g^{\lambda s}(\mathbf{a}_{s,\alpha},\nu_{,\mu}) \ ,$$
$$b^\lambda_{\mu,\alpha} = g^{\lambda s}_{,\alpha}(\mathbf{a}_{s,\mu},\nu) + g^{\lambda s}(\mathbf{a}_{s,\alpha\mu},\nu) + g^{\lambda s}(\mathbf{a}_{s,\mu},\nu_{,\alpha}) \ .$$

D'où:

$$b^\lambda_{\alpha,\mu} - b^\lambda_{\mu,\alpha} = g^{\lambda s}_{,\mu}(\mathbf{a}_{s,\alpha},\nu) - g^{\lambda s}_{,\alpha}(\mathbf{a}_{s,\mu},\nu) + g^{\lambda s}(\mathbf{a}_{s,\alpha},\nu_{,\mu}) - g^{\lambda s}(\mathbf{a}_{s,\mu},\nu_{,\alpha}) \ .$$

Les trois premières relations de la proposition donnent:

$$\begin{aligned} b^\lambda_{\alpha,\mu} - b^\lambda_{\mu,\alpha} &= -\Gamma^s_{\mu r}\, g^{\lambda r}(\nu,\mathbf{a}_{s,\alpha}) - \Gamma^\lambda_{\mu r}\, b^r_\alpha - g^{\lambda s}\,\Gamma^r_{s\alpha}\, g_{rt}\, b^t_\mu + \Gamma^s_{\alpha r}\, g^{\lambda r}(\nu,\mathbf{a}_{s,\mu}) \\ &\quad + \Gamma^\lambda_{\alpha r}\, b^r_\mu + g^{\lambda s}\,\Gamma^r_{s\mu}\, g_{rt}\, b^t_\alpha \\ &= -g^{\lambda r} g_{st}(\Gamma^t_{r\mu}\, b^s_\alpha - \Gamma^t_{r\alpha}\, b^s_\mu) + g^{\lambda t}\, g_{sr}(\Gamma^s_{\mu t}\, b^r_\alpha - \Gamma^s_{\alpha t}\, b^r_\mu) \\ &\quad + \Gamma^\lambda_{r\alpha}\, b^r_\mu - \Gamma^\lambda_{r\mu}\, b^r_\alpha \ , \end{aligned}$$

qui est la relation annoncée. ∎

6.2. Calculs

Soit $\mathbf{u} = \mathbf{u}_T + u_\nu\,\nu$ un champ régulier de vecteurs défini sur Γ; on pose:

$$\epsilon^0_t(\mathbf{u}_T) = 2^{-1}(\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi + \pi\,\overline{\partial_m\mathbf{u}_T}\,\pi)\ , \qquad \epsilon^0_T(\mathbf{u}) = \epsilon^0_t(\mathbf{u}_T) + u_\nu\,\partial_m\nu \ .$$

Alors

(6.1)
$$\begin{aligned} &\sigma^0_T(\mathbf{u}) : \pi\,\partial_m\Big((\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T + u_\nu\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big) = \\ &= 2\,\mu\,\epsilon^0_t(\mathbf{u}_T) : \pi\,\partial_m\Big((\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T)\,\mathbf{q}_T\Big) + 2\,\mu\,u_\nu\,\partial_m\nu : \pi\,\partial_m\Big((\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T)\,\mathbf{q}_T\Big) \\ &\quad + \lambda^*\,\mathrm{tr}(\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T)\,i_2 : \pi\,\partial_m\Big((\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T)\,\mathbf{q}_T\Big) \\ &\quad + \lambda^*\,u_\nu\,\mathrm{tr}(\partial_m\nu)\,i_2 : \pi\,\partial_m\Big((\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T)\,\mathbf{q}_T\Big) + \sigma^0_T(\mathbf{u}) : \pi\,\partial_m\Big(u_\nu\,(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big) \\ &= 2\,\mu\,X_1 + 2\,\mu\,u_\nu\,X_2 + \lambda^* X_3 + \lambda^*\,u_\nu\,X_4 + X_5 \ . \end{aligned}$$

6.2.1. Calcul de X_1

D'après la Proposition 6.3 on a:

$$\begin{aligned} X_1 &= \epsilon^0_t(\mathbf{u}_T) : (\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T)\,(\pi\,\partial_m\mathbf{q}_T) + (\epsilon^0_t(\mathbf{u}_T))^\mu_\lambda\,(\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T)^\lambda_{\alpha,\mu}\,q^\alpha \\ &\quad + (\epsilon^0_t(\mathbf{u}_T))^\mu_\lambda\,\Big((\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T)^\nu_\alpha\,\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - (\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T)^\lambda_\nu\,\Gamma^\nu_{\alpha\mu}\Big)\,q^\alpha \ . \end{aligned}$$

La Proposition 6.2 permet alors d'obtenir:

$$X_1 = \epsilon_t^0(\mathbf{u}_T) : (\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T)\,(\pi\,\partial_m \mathbf{q}_T) \;+\; (\epsilon_t^0(\mathbf{u}_T))^\mu_\lambda\,(\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T)^\lambda_{\mu,\alpha}\,q^\alpha$$
$$+\;(\epsilon_t^0(\mathbf{u}_T))^\mu_\lambda\Big((\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T)^\nu_\mu\,\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} - (\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T)^\lambda_\nu\,\Gamma^\nu_{\alpha\mu}\Big)\,q^\alpha \;+\; (\epsilon_t^0(\mathbf{u}_T))^\mu_\lambda\,\mathcal{R}^\lambda_{\nu\mu\alpha}\,u^\nu q^\alpha\ .$$

La Proposition 6.1 et l'identité:

$$(\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T)^\mu_\lambda\,(\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T)^\lambda_{\mu,\alpha}\,q^\alpha \;=\; 2^{-1}\,\partial_m(\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi : \pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)\,\mathbf{q}_T$$

donnent alors:

$$X_1 \;=\; \epsilon_t^0(\mathbf{u}_T) : (\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)\,(\pi\,\partial_m \mathbf{q}_T\,\pi) \;+\; 2^{-1}\,\partial_m\Big(\epsilon_t^0(\mathbf{u}_T) : \pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi\Big)\,\mathbf{q}_T$$
$$+\;\Big(\mathcal{R} : \epsilon_t^0(\mathbf{u}_T)\Big) : (\mathbf{u}_T \otimes \mathbf{q}_T)\ .$$

6.2.2. Calcul de X_2

D'après la Proposition 6.3 on a:

$$X_2 \;=\; \partial_m\nu : (\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)\,(\pi\,\partial_m \mathbf{q}_T\,\pi) \;+\; (\partial_m\nu)^\mu_\lambda\,(\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)^\lambda_{\alpha,\mu}\,q^\alpha$$
$$+\;(\partial_m\nu)^\mu_\lambda\Big((\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)^\nu_\alpha\,\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - (\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)^\lambda_\nu\,\Gamma^\nu_{\alpha\mu}\Big)\,q^\alpha\ .$$

La Proposition 6.2 donne:

$$X_2 \;=\; \partial_m\nu : (\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)\,(\pi\,\partial_m \mathbf{q}_T\,\pi) \;+\; (\partial_m\nu)^\mu_\lambda\,(\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)^\lambda_{\mu,\alpha}\,q^\alpha$$
$$+\;(\partial_m\nu)^\mu_\lambda\Big((\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)^\nu_\mu\,\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} - (\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)^\lambda_\nu\,\Gamma^\nu_{\alpha\mu}\Big)\,q^\alpha$$
$$+\;(\mathcal{R} : \partial_m\nu) : (\mathbf{u}_T \otimes \mathbf{q}_T)\ .$$

6.2.3. Calcul de X_3

Les Propositions 6.3 et 6.2 donnent:

$$X_3 = \mathrm{tr}(\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)\,i_2 : (\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)\,(\pi\,\partial_m \mathbf{q}_T\,\pi)$$
$$+\;\Big(\mathrm{tr}(\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)\,i_2\Big)^\mu_\lambda\,(\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)^\lambda_{\mu,\alpha}\,q^\alpha \;+\; \Big(\mathcal{R} : \mathrm{tr}(\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)\,i_2\Big) : (\mathbf{u}_T \otimes \mathbf{q}_T)$$
$$=\;\Big(\mathcal{R} : \mathrm{tr}(\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)\,i_2\Big) : (\mathbf{u}_T \otimes \mathbf{q}_T) \;+\; \mathrm{tr}(\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)\,i_2 : (\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)\,(\pi\,\partial_m \mathbf{q}_T\,\pi)$$
$$+\;2^{-1}\,\partial_m\Big(\mathrm{tr}(\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)\,i_2 : \pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi\Big)\,\mathbf{q}_T\ .$$

6.2.4. Calcul de X_4

D'après la Proposition 6.3 on a:

$$\begin{aligned} X_4 \;=\; & \operatorname{tr}(\partial_m\nu)\, i_2 : (\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)\,(\pi\,\partial_m \mathbf{q}_T\,\pi) \;+\; \Big(\operatorname{tr}(\partial_m\nu)\, i_2\Big)^\mu_\lambda (\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)^\lambda_{\alpha,\mu}\, q^\alpha \\ & + \Big(\operatorname{tr}(\partial_m\nu)\, i_2\Big)^\mu_\lambda \Big((\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)^\nu_\alpha\,\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - (\partial_m\nu)^\lambda_\nu\,\Gamma^\nu_{\alpha\mu}\Big)\, q^\alpha \;. \end{aligned}$$

La Proposition 6.2 permet d'obtenir:

$$\begin{aligned} X_4 \;=\; & \operatorname{tr}(\partial_m\nu)\, i_2 : (\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)\,(\pi\,\partial_m \mathbf{q}_T\,\pi) \;+\; \Big(\operatorname{tr}(\partial_m\nu)\, i_2\Big)^\mu_\lambda (\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)^\lambda_{\mu,\alpha}\, q^\alpha \\ & + \Big(\mathcal{R} : \operatorname{tr}(\partial_m\nu)\, i_2\Big) : (\mathbf{u}_T \otimes \mathbf{q}_T) \;. \end{aligned}$$

6.2.5. Calcul de X_5

Comme: $\pi\,\partial_m(u_\nu(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T) = (\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T(\partial_m u_\nu) + u_\nu\,\pi\,\partial_m((\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T)$ alors:

$$\begin{aligned} X_5 \;&=\; \sigma^0_T(\mathbf{u}) : (\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\,(\partial_m u_\nu) \;+\; u_\nu\,\sigma^0_T(\mathbf{u}) : \pi\,\partial_m\Big((\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big) \\ &=\; (\partial_m u_\nu)\,\Big(\sigma^0_T(\mathbf{u})\,(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big) \;+\; u_\nu\, X_6 \end{aligned}$$

avec: $X_6 = \sigma^0_T(\mathbf{u}) : \pi\,\partial_m((\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T)$; on calcule X_6:

$$\begin{aligned} X_6 \;&=\; \sigma^0_T(\mathbf{u}) : (\partial_m\nu)\,(\pi\,\partial_m \mathbf{q}_T) \;-\; (\sigma^0_T(\mathbf{u}))^\mu_\lambda\, b^\lambda_{\alpha,\mu}\, q^\alpha \;-\; (\sigma^0_T(\mathbf{u}))^\mu_\lambda\,(b^t_\alpha\,\Gamma^\lambda_{t\mu} - b^\lambda_t\,\Gamma^t_{\alpha\mu})\, q^\alpha \\ &=\; \sigma^0_T(\mathbf{u}) : (\partial_m\nu)\,\pi\,\partial_m \mathbf{q}_T\,\pi \;+\; X_7 \;. \end{aligned}$$

La troisième relation de la Proposition 6.4 donne:

$$\begin{aligned} X_7 \;&=\; -(\sigma^0_T(\mathbf{u}))^\mu_\lambda\, b^\lambda_{\mu,\alpha}\, q^\alpha \;-\; (\sigma^0_T(\mathbf{u}))^\mu_\lambda\,(\Gamma^\lambda_{\alpha r}\, b^r_\mu - \Gamma^t_{\alpha\mu}\, b^\lambda_t)\, q^\alpha \\ &=\; -(\sigma^0_T(\mathbf{u}))^\mu_\lambda\, b^\lambda_{\mu,\alpha}\, q^\alpha \;+\; \Big((\partial_m\nu)\,\sigma^0_T(\mathbf{u}) - \sigma^0_T(\mathbf{u})\,(\partial_m\nu)\Big)^\mu_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\mu}\, q^\alpha \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir:

$$\begin{aligned} X_5 \;=\; & (\partial_m u_\nu)\,\Big(\sigma^0_T(\mathbf{u})\,(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big) \;+\; u_\nu\Big(\sigma^0_T(\mathbf{u}) : (\partial_m\nu)\,(\pi\,\partial_m \mathbf{q}_T\,\pi) \\ & + \; (\sigma^0_T(\mathbf{u}))^\mu_\lambda\,(\partial_m\nu)^\lambda_{\mu,\alpha}\, q^\alpha + \Big((\partial_m\nu)\,\sigma^0_T(\mathbf{u}) - \sigma^0_T(\mathbf{u})\,(\partial_m\nu)\Big)^\mu_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\mu}\, q^\alpha\Big) \;. \end{aligned}$$

6.2.6. Résultat final

Théorème 6.1. *On a:*

$$\begin{aligned}
&\sigma_T^0(\mathbf{u}) : \pi\,\partial_m\Big((\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T + u_\nu\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big) \;= \\
&\quad= \;\sigma_T^0(\mathbf{u}) : (\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T + u_\nu\,\partial_m\nu)\,(\pi\,\partial_m\mathbf{q}_T) \;+\; (\partial_m u_\nu)\,\Big(\sigma_T^0(\mathbf{u})\,(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big) \\
&\qquad+\;\Big(\mathcal{R} : \sigma_T^0(\mathbf{u})\Big) : (\mathbf{u}_T\otimes\mathbf{q}_T) \;+\; 2^{-1}\,\partial_m\Big(\sigma_T^0(\mathbf{u}) : \epsilon_T^0(\mathbf{u})\Big)\,\mathbf{q}_T \\
&\qquad-\;\Big(\sigma_T^0(\mathbf{u}) : \partial_m\nu\Big)\,(\partial_m u_\nu)\,\mathbf{q}_T\;.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Preuve: En remplaçant $X_1, ..., X_5$ par leurs valeurs dans (6.1) on obtient:

$$\sigma_T^0(\mathbf{u}) : \pi\,\partial_m\Big((\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T + u_\nu\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big) \;=$$

$$\begin{aligned}
&= \;\sigma_T^0(\mathbf{u}) : (\pi\,\partial_m u_T + u_\nu\,\partial_m\nu)\,(\pi\,\partial_m\mathbf{q}_T) \;+\; (\partial_m u_\nu)\,\Big(\sigma_T^0(\mathbf{u})\,(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big) \\
&\quad+\;\Big(\mathcal{R} : \sigma_T^0(\mathbf{u})\Big) : (\mathbf{u}_T\otimes\mathbf{q}_T) \;+\; 2^{-1}\,\partial_m\Big(\sigma_T^0(\mathbf{u}) : \epsilon_T^0(\mathbf{u})\Big)\,\mathbf{q}_T \\
&\quad-\;2^{-1}\,\partial_m\Big(\sigma_T^0(\mathbf{u}) : u_\nu\,\partial_m\nu\Big)\,\mathbf{q}_T \;+\; 2\,\mu\,u_\nu(\partial_m\nu)_\lambda^\mu\,(\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi)_{\mu,\alpha}^\lambda\,q^\alpha \\
&\quad-\;2^{-1}\,\partial_m\Big(\Big(2\,\mu\,u_\nu\,\partial_m\nu + \lambda^* u_\nu\,\mathrm{tr}(\partial_m\nu)\,i_2\Big) : \pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi\Big)\mathbf{q}_T \\
&\quad+\;\mu\,u_\nu\Big(\Big(\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi - \overline{\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi}\Big)\partial_m\nu - (\partial_m\nu)\,\Big(\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi - \overline{\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi}\Big)\Big)_\lambda^\mu\Gamma_{\alpha\mu}^\lambda\,q^\alpha \\
&\quad+\;\lambda^* u_\nu\Big(\mathrm{tr}(\partial_m\nu)\,i_2\Big)_\lambda^\mu\,(\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi)_{\mu,\alpha}^\lambda\,q^\alpha \;+\; (\sigma_T^0(\mathbf{u}))_\lambda^\mu\,u_\nu\,(\partial_m\nu)_{\mu,\alpha}^\lambda\,q^\alpha\;.
\end{aligned}$$

De:

$$(\sigma_T^0(\mathbf{u}))_\lambda^\mu\,u_\nu(\partial_m\nu)_{\mu,\alpha}^\lambda\,q^\alpha \;=$$

$$= \;\partial_m\Big(\sigma_T^0(\mathbf{u}) : u_\nu\,\partial_m\nu\Big)\,\mathbf{q}_T \;-\; (\sigma_T^0(\mathbf{u}))_{\lambda,\alpha}^\mu\,u_\nu(\partial_m\nu)_\mu^\lambda\,q^\alpha \;-\; \Big(\sigma_T^0(\mathbf{u}) : \partial_m\nu\Big)\,(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T$$

il vient:

$$\sigma_T^0(\mathbf{u}) : \pi\,\partial_m\Big((\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T + u_\nu\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big) \;=$$

$$\begin{aligned}
&= \;\sigma_T^0(\mathbf{u}) : (\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T + u_\nu\,\partial_m\nu)\,(\pi\,\partial_m\mathbf{q}_T) \;+\; (\partial_m u_\nu)\,\Big(\sigma_T^0(\mathbf{u})\,(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big) \\
&\quad+\;\Big(\mathcal{R} : \sigma_T^0(\mathbf{u})\Big) : (\mathbf{u}_T\otimes\mathbf{q}_T) \;+\; 2^{-1}\,\partial_m\Big(\sigma_T^0(\mathbf{u}) : \epsilon_T^0(\mathbf{u})\Big)\,\mathbf{q}_T \\
&\quad+\;\mu\,u_\nu\Big((\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T - \overline{\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T})\,\partial_m\nu - \partial_m\nu\,(\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T - \overline{\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T})\Big)_\lambda^\mu\,\Gamma_{\alpha\mu}^\lambda\,q^\alpha \;-
\end{aligned}$$

$$- \Big(\sigma_T^0(\mathbf{u}) : \partial_m\nu\Big)\,(\partial_m u_\nu)\,\mathbf{q}_T \;+\; \Big\{2^{-1}\,\partial_m\Big(\sigma_T^0(\mathbf{u}) : u_\nu\,\partial_m\nu\Big)\,\mathbf{q}_T$$
$$+\; 2\,\mu\,u_\nu\,(\partial_m\nu)^\mu_\lambda\,(\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T)^\lambda_{\mu,\alpha}\,q^\alpha \;+\; \lambda^* u_\nu\,\mathrm{tr}(\partial_m\nu)\;\mathrm{tr}(\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T)_{,\alpha}\,q^\alpha$$
$$-\; u_\nu(\sigma_T^0(\mathbf{u}))^\mu_{\lambda,\alpha}\,(\partial_m\nu)^\lambda_\mu \;-\; 2^{-1}\,\partial_m\Big(\Big(2\,\mu\,u_\nu\,\partial_m\nu + \lambda^* u_\nu\,\mathrm{tr}(\partial_m\nu)\,i_2\Big) : \pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\Big)\,\mathbf{q}_T\Big\}\,.$$

En développant $\sigma_T^0(\mathbf{u})$ et en remarquant que la symétrie de $\partial_m\nu$ donne:

$$(u_\nu\,\partial_m\nu)^\lambda_{\mu,\alpha}\,(\overline{\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi})^\mu_\lambda \;=$$
$$=\; (u_\nu\,\partial_m\nu)^\lambda_{\mu,\alpha}\,(\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi)^\mu_\lambda + u_\nu\,(\partial_m\nu)^\lambda_\mu\,(\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi)^\mu_{\lambda,\alpha} - (u_\nu\,\partial_m\nu)^\lambda_\mu\,(\overline{\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi})^\mu_{\lambda,\alpha}\,.$$

On obtient la valeur du terme entre accolades:

$$\{...\} \;=\; \mu\,u_\nu\,(\partial_m\nu)^\lambda_\mu\,\Big((\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi)^\mu_{\lambda,\alpha} - (\overline{\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi})^\mu_{\lambda,\alpha}\,q^\alpha$$
$$=\; \mu\,u_\nu\,(\partial_m\nu)^\lambda_{\mu,\alpha}\,\Big(\pi\,\overline{\partial_m\mathbf{u}_T}\,\pi - \pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi\Big)^\mu_\lambda\,q^\alpha$$

d'où:

(6.3)
$$\sigma_T^0(\mathbf{u}) : \pi\,\partial_m\Big((\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T + u_\nu\,\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big) \;=$$
$$=\; \sigma_T^0(\mathbf{u}) : (\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T + u_\nu\,\partial_m\nu)\,\pi\,\partial_m\mathbf{q}_T \;+\; (\partial_m u_\nu)\,\Big(\sigma_T^0(\mathbf{u})\,(\partial_m\nu)\,\mathbf{q}_T\Big)$$
$$+\; \Big(\mathcal{R} : \sigma_T^0(\mathbf{u})\Big) : (\mathbf{u}_T \otimes \mathbf{q}_T) \;+\; 2^{-1}\,\partial_m\Big(\sigma_T^0(\mathbf{u}) : \epsilon_T^0(\mathbf{u})\Big)\,\mathbf{q}_T$$
$$+\; \mu\,u_\nu\,(\partial_m\nu)^\lambda_{\mu,\alpha}\,(\pi\,\overline{\partial_m\mathbf{u}_T}\,\pi - \pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi)^\mu_\lambda\,q^\alpha$$
$$+\; \mu\,u_\nu\Big((\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T - \overline{\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T})\,\partial_m\nu - (\partial_m\nu)\,(\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T - \overline{\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T})\Big)^\mu_\lambda\,\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}\,q^\alpha$$
$$-\; \Big(\sigma_T^0(\mathbf{u}) : \partial_m\nu\Big)\,(\partial_m u_\nu)\,\mathbf{q}_T\;.$$

La symétrie de $\partial_m\nu$ s'écrit: $(\partial_m\nu)^\lambda_\mu = (\partial_m\nu)^s_r g^{r\lambda} g_{\mu s}$, ce qui donne:

$$(\partial_m\nu)^\lambda_{\mu,\alpha}\,(\pi\,\overline{\partial_m\mathbf{u}_T}\,\pi)^\mu_\lambda \;=$$

(6.4)
$$=\; (\pi\,\overline{\partial_m\mathbf{u}_T}\,\pi)^\mu_\lambda\,(\partial_m\nu)^s_{r,\alpha}\,g^{r\lambda}\,g_{\mu s} \;+\; (\pi\,\overline{\partial_m\mathbf{u}_T}\,\pi)^\mu_\lambda\,(\partial_m\nu)^s_r\,(g^{r\lambda}\,g_{\mu s})_{,\alpha}$$
$$=\; (\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi)^r_s\,(\partial_m\nu)^s_{r,\alpha} \;+\; (\pi\,\overline{\partial_m\mathbf{u}_T}\,\pi)^\mu_\lambda\,(\partial_m\nu)^s_r\,g^{r\lambda}_{,\alpha}\,g_{\mu s}$$
$$+\; (\pi\,\overline{\partial_m\mathbf{u}_T}\,\pi)^\mu_\lambda\,(\partial_m\nu)^s_r\,g^{r\lambda}\,g_{\mu s,\alpha}\;.$$

Calcul des deux derniers termes. On a

$$(\pi\,\overline{\partial_m\mathbf{u}_T}\,\pi)^\mu_\lambda\,(\partial_m\nu)^s_r\,g^{r\lambda}_{,\alpha}\,g_{\mu s} \;=$$
$$=\; (\pi\,\overline{\partial_m\mathbf{u}_T}\,\pi)^\mu_\lambda\,(\partial_m\nu)^s_r\,(-g^{r\nu}\,\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} - g^{\nu\lambda}\,\Gamma^r_{\alpha\nu})\,g_{\mu s}$$
$$=\; -(\pi\,\overline{\partial_m\mathbf{u}_T}\,\pi)^\mu_\lambda\,(\partial_m\nu)^\nu_\mu\,\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \;-\; (\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi)^\nu_s\,(\partial_m\nu)^s_r\,\Gamma^r_{\alpha\nu}$$
$$=\; -\Big((\partial_m\nu)\,(\pi\,\overline{\partial_m\mathbf{u}_T}\,\pi) + (\pi\,\partial_m\mathbf{u}_T\,\pi)\,(\partial_m\nu)\Big)^\mu_\lambda\,\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}$$

et

$$
\begin{aligned}
(\pi\,\overline{\partial_m \mathbf{u}_T}\,\pi)^{\mu}_{\lambda}\,(\partial_m\nu)^s_r\,g^{r\lambda}\,g_{\mu s,\alpha} \ &= \\
&= \ (\pi\,\overline{\partial_m \mathbf{u}_T}\,\pi)^{\mu}_{\lambda}\,(\partial_m\nu)^s_r\,g^{r\lambda}(g_{\nu s}\,\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} + g_{\nu\mu}\,\Gamma^{\nu}_{\alpha s}) \\
&= \ (\pi\,\overline{\partial_m \mathbf{u}_T}\,\pi)^{\mu}_{\lambda}\,(\partial_m\nu)^{\lambda}_{\nu}\,\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} + (\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi)^r_{\nu}\,(\partial_m\nu)^s_r\,\Gamma^{\nu}_{\alpha s} \\
&= \ \Big((\partial_m\nu)\,(\pi\,\partial_m \mathbf{u}_T\,\pi) + (\pi\,\overline{\partial_m \mathbf{u}_T}\,\pi)\,(\partial_m\nu)\Big)^{\mu}_{\lambda}\,\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}\ .
\end{aligned}
$$

On obtient alors (6.2) en remplaçant ces deux termes par leurs valeurs dans (6.4) puis le résultat obtenu dans (6.3). ∎

REFERENCES

[**1**] DESTUYNDER, PH. – *Modélisation des Coques Minces Élastiques*, Cours Ecole Centrale des Arts et Manufactures.

[**2**] DUVAUT, G. et LIONS, J.L. – *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris (1972).

[**3**] HEMINNA, A. – Contrôlabilité exacte d'un problème avec conditions de Ventcel évolutives pour le système linéaire de l'élasticité, *C.R. Acad. Sci. Paris,* 324, série I (1997), 195–200.

[**4**] HEMINNA, A. – Stabilisation de problèmes de Ventcel, *C.R. Acad. Sci. Paris,* 328, série I (1999), 1171–1174.

[**5**] HUGHES, T.J.R. and MARSDEN, J.E. – *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632.

[**6**] LEMRABET, K. – *Etude de Divers Problèmes Aux Limites de Ventcel d'Origine Physique ou Mécanique dans Des Domaines Non Réguliers*, Thèse, U.S.T.H.B., Alger, 1987.

[**7**] LEMRABET, K. – Problème de Ventcel pour le système de l'élasticité dans un domaine de $\mathbb{R}^3$, *C.R. Acad. Sci. Paris,* 304, série I (1987), 151–154.

[**8**] LIONS, J.L. – *Contrôlabilité Exacte, Perturbation et Stabilisation de Systèmes Distribués*, 1, Masson, 1986.

[**9**] LIONS, J.L. et MAGENES, E. – *Problèmes Aux Limites Non Homogènes et Leurs Applications*, 1, Dunod, Paris, 1968.

[**10**] SANCHEZ-PALENCIA, E. et LEGUILLON, D. – *Computations of Singular Problems and Elasticity*, R.M.A., Masson, Paris, 1987.

[**11**] VALID, R. – *La Mécanique des Milieux Continus et Le Calcul des Structures*, Eyrolles, Paris, 1977.

Amar Heminna,
Institut de Mathématiques, USTHB,
B.P. 32, EL-Alia, 16111, Alger – ALGÉRIE
E-mail: `hemina@usa.net`