PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 58 Fasc. 4 – 2001
Nova Série

# SUR CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AVEC CONTRAINTES DANS UN GROUPE LIBRE — ADDENDA *

J. Almeida and M. Delgado

Dans l'article [1], les relations entre un théorème de Herwig et Lascar [7] sur certaines équations dans un groupe libre et la preuve donnée par Ash [3] de la "conjecture du type II" ont été étudiées. On a en effet donné des déductions formelles de chacun de ces résultats à partir de l'autre. Bien que les arguments dans [1] justifient pleinement la déduction du théorème de Ash à partir du théorème de Herwig et Lascar, il y a un détail qui manque pour la réciproque. Face à l'attention que ce sujet semble mériter à présent, les auteurs proposent dans cette note de clarifier la situation.

Comme cette note n'est qu'un complément de [1], on suppose que le lecteur connaît ce travail et on ne répète pas ici les définitions et notations introduites dans [1]. Ayant en perspective de possibles applications à d'autres cas que la pseudovariété de tous les groupes finis, on formule ici les résultats autant que possible pour une pseudovariété arbitraire de groupes.

L'observation principale de cette note consiste à montrer que la version du théorème de Ash pour les monoïdes inversifs [3, th. 5.1] implique le résultat de Herwig et Lascar. En particulier, comme on avait déjà établi que l'on pouvait déduire de celui-ci la version générale du théorème de Ash [3, th. 2.1], on obtient une nouvelle preuve du cas général à partir du cas inversif qui sert comme alternative à celle donnée par Ash [3, sections 8 à 10]. D'autre part, il est facile de montrer que la version inversif n'est qu'un cas particulier de la version générale, ce qui complète les relations entre les propriétés en question.

*Received*: October 12, 1999; *Revised*: October 12, 2000.
*AMS Subject Classification*: 20M07, 20E18, 20E10.
*Keywords*: Free group; Equation; Profinite topology; Relational morphism; Labeled graph; Free monoid; Finite monoid; Pseudovariety.
* Ce travail a été partiellement financé par FCT et par le projet Praxis/2/2.1/MAT/63/94.

Pour la suite, soit $\mathbf{H}$ une pseudovariété de groupes. Soit $FG_{\mathbf{H}}(A)$ le groupe relativement libre, sur un ensemble $A$, de la variété engendrée par $\mathbf{H}$. On dira que $\mathbf{H}$ est une *$\mathcal{RZ}$-pseudovariété* si le produit $H_1 \cdots H_n$ des sousgroupes finiment engendrés $H_1, ..., H_n$ du groupe $FG_{\mathbf{H}}(A)$ est fermé pour la topologie pro-$\mathbf{H}$. Le théorème de Ribes et Zalesskiĭ [9], donnant une preuve indépendante de celle de Ash de la conjecture du type II, montre précisément que la pseudovariété $\mathbf{G}$ de tous les groupes finis est une $\mathcal{RZ}$-pseudovariété.

On rappelle qu'on considère des systèmes d'équations associés à un graphe fini $\Gamma$ de la forme

$$x_{e\alpha}\, x_e \;=\; x_{e\omega} \qquad (e \in E(\Gamma)) \tag{1}$$

sur le groupe $FG_{\mathbf{H}}(A)$. Un étiquetage $\gamma$ du graphe $\Gamma$ par un monoïde fini $M$ ($A$-engendré) détermine des contraintes pour les solutions du système (1) dans $FG_{\mathbf{H}}(A)$:

$$x_z \;\in\; z\,\gamma\,\theta \qquad (z \in \Gamma) \tag{2}$$

où $\theta = \theta_{\mathbf{H}}$ indique le morphisme relationnel $M \to FG_{\mathbf{H}}(A)$ engendré par les paires $(a, a)$ avec $a \in A$ ainsi que les paires $(m, a^{-1})$ avec $m \in M$ et $a \in A$ tels que $m\,a\,m = m$. En supposant que $\mathbf{H}$ est une $\mathcal{RZ}$-pseudovariété, grâce à un résultat du deuxième auteur [6, cor. 3.9], l'ensemble $z\,\gamma\,\theta$ est reconnu comme étant la fermeture pour la topologie pro-$\mathbf{H}$, dans le groupe $FG_{\mathbf{H}}(A)$, de l'ensemble des mots $w \in A^*$ qui donnent dans $M$ comme produit l'élément $z\,\gamma$. Par ailleurs, on peut vérifier que les $\mathcal{RZ}$-pseudovariétés satisfont un théorème de Pin et Reutenauer [8] donnant un algorithme pour le calcul de la fermeture pro-$\mathbf{H}$ de langages rationnels dans $FG_{\mathbf{H}}(A)$, notamment en remplaçant l'opération étoile par sousgroupe engendré. Ce point a été observé par Pin et Reutenauer dans le cas de $\mathbf{G}$ et a conduit à la conjecture, établie plus tard par Ribes et Zalesskiĭ [9], que $\mathbf{G}$ est une $\mathcal{RZ}$-pseudovariété. Le passage au cas général ne nécessite d'aucune modification [5]. En utilisant l'algorithme de Pin et Reutenauer, les contraintes (2) se traduisent par la disjonction d'un nombre fini de contraintes de la forme

$$x_z \;\in\; g_z\, H_{1,z} \cdots H_{n_z,z} \qquad (z \in \Gamma)\ , \tag{3}$$

où chaque $g_z \in FG_{\mathbf{H}}(A)$ et chaque $H_{i,z}$ est un sousgroupe finiment engendré de $FG_{\mathbf{H}}(A)$.

La difficulté dont les auteurs ne ce sont pas aperçus lors de la préparation de l'article [1] est qu'on ne trouve pas ainsi nécessairement toutes les contraintes de la forme (3). Par exemple, si $A = \{a, b\}$, on peut montrer que la contrainte

$$x \;\in\; \langle ab^{-1} \rangle$$

d'appartenance au sousgroupe engendré par $a\,b^{-1}$ ne peut pas être obtenue de cette façon dans le cas du groupe absolument libre. En effet, si on suppose que $\langle a\,b^{-1}\rangle = m\,\theta$ avec $\theta\colon\ M \to FG_{\mathbf{G}}(A)$, $M$ un monoïde fini $A$-engendré et $m \in M$, où $\theta$ est le morphisme relationnel ci-dessus, alors on arrive à une contradiction comme suit. D'après [2, lemma 4.8], si on continue à représenter par $a$ et $b$ les générateurs de $M$ qui le décrivent comme un monoïde $A$-engendré, alors, dans $M$, on obtient l'égalité $a\,b^{n!-1} = m$ pour $n = |M|$ et donc $a\,b^{n!-1} \in \langle a\,b^{-1}\rangle$ dans $FG_{\mathbf{G}}(A)$. Cela montre qu'il y a un entier positif $k$ et un entier $l$ tels que $a\,b^k = (a\,b^{-1})^l$ dans $FG_{\mathbf{G}}(A)$, ce qui est impossible car l'expansion de la puissance $(a\,b^{-1})^l$ donne un mot réduit du groupe libre différent du mot réduit $a\,b^k$. Donc, on n'obtient que des contraintes d'une forme particulière, en contraste avec celles qui sont données par la traduction du théorème de Herwig et Lascar décrite dans [1].

En revanche, on a montré dans [1] qu'il suffit de considérer des contraintes de la forme

$$x_z \in g_z\,H_z \qquad (z \in \Gamma) \tag{4}$$

où intervient comme facteur un seul sousgroupe finiment engendré de $FG_{\mathbf{H}}(A)$. On va maintenant montrer que toutes les contraintes de cette forme particulière sont produites quand on considère la version pour monoïdes inversifs du théorème de Ash.

On rappelle qu'un *monoïde inversif* est un monoïde $M$ tel que pour tout élément $m \in M$ il existe un et un seul *inverse* $m^{-1} \in M$ tel que $m\,m^{-1}\,m = m$ et $m^{-1}\,m\,m^{-1} = m^{-1}$. Un monoïde inversif peut donc être regardé comme étant muni d'une opération unaire d'inversion $m \mapsto m^{-1}$. Entre monoïdes inversifs on considère seulement des morphismes relationnels de monoïdes inversifs, c'est à dire des relations $M \to N$ de domaine $M$ qui sont des sousmonoïdes inversifs de $M \times N$. Comme tout groupe est trivialement un monoïde inversif, on peut considérer pour un monoïde inversif $A$-engendré le morphisme relationnel (de monoïdes inversifs) naturel $\eta_{A,\mathbf{H}}\colon\ M \to FG_{\mathbf{H}}(A)$ qui est défini comme étant le sousmonoïde inversif de $M \times FG_{\mathbf{H}}(A)$ engendré par les paires $(a, a)$ avec $a \in A$.

Supposons que $M$ est un monoïde inversif fini et soient $A$ et $B$ deux ensembles de générateurs de $M$. Notons $FIM(A)$ le monoïde inversif libre engendré par l'ensemble $A$. Alors la correspondance $a \mapsto (a, a)$ s'étend de façon unique à un homomorphisme $FIM(A) \to \eta_{A,\mathbf{H}}$ avec composantes $\varphi_A\colon\ FIM(A) \to M$ et $\pi_A\colon\ FIM(A) \to FG_{\mathbf{H}}(A)$ telles que $\varphi_A^{-1}\,\pi_A = \eta_{A,\mathbf{H}}$. De façon similaire, on a $\varphi_B^{-1}\,\pi_B = \eta_{B,\mathbf{H}}$. Supposons ensuite qu'un étiquetage $\gamma\colon\ E(\Gamma) \to M$ des arêtes d'un graphe fini $\Gamma$ est circuit-inévitable pour le morphisme relationnel $\eta_{A,\mathbf{H}}$. On prouve ensuite que $\gamma$ est aussi inévitable pour $\eta_{B,\mathbf{H}}$, ce qui montre l'indépendance de cette propriété de l'ensemble de générateurs choisi, observation qui sera utile ci-dessous. En effet, l'hypothèse de $\eta_{A,\mathbf{H}}$-inévitabilité entraîne l'existence d'un étiquetage $\delta : E(\Gamma) \to FIM(A)$ tel que $\delta\,\varphi_A = \gamma$ et $\delta\,\pi_A$ commute. Pour chaque $a \in A$ prenons $w_a \in FIM(B)$ tel que $w_a\,\varphi_B = a$ et soient $\sigma : FIM(A) \to FIM(B)$ et $\rho\colon FG_{\mathbf{H}}(A) \to FG_{\mathbf{H}}(B)$ les seuls homomorphismes de monoïdes inversifs qui étendent respectivement les correspondances $a \mapsto w_a$ et $a \mapsto w_a\,\pi_B$. Soit $\varepsilon = \delta\,\sigma$. De la commutativité du diagramme suivant on déduit que $\gamma$ est aussi $\eta_{B,\mathbf{H}}$-inévitable, comme cela était annoncé:

$$\begin{tikzcd}
 & & FIM(A) \arrow[dl, "\varphi_A"] \arrow[dd, "\sigma"] \arrow[r, "\pi_A"] & FG_{\mathbf{H}}(A) \arrow[dd, "\rho"] \\
E(\Gamma) \arrow[urr, bend left, "\delta"] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[drr, dashed, bend right, "\varepsilon"'] & M & & \\
 & & FIM(B) \arrow[ul, "\varphi_B"'] \arrow[r, "\pi_B"] & FG_{\mathbf{H}}(B)
\end{tikzcd}$$

En vue de l'indépendance de l'ensemble de générateurs de l'inévitabilité de $\gamma$ pour $\eta_{A,\mathbf{H}}$, on va représenter ce morphime relationnel simplement par $\eta_{\mathbf{H}}$.

Le résultat suivant est le théorème de Ash pour le cas inversif.

**Théorème 1** ([3, th. 5.1]). *Soit $M$ un monoïde inversif $A$-engendré et soit $\gamma\colon \Gamma \to M$ un étiquetage restreint $\mathbf{G}$-circuit-inévitable d'un graphe fini par $M$. Alors $\gamma$ est circuit-inévitable pour le morphisme relationnel $\eta_{\mathbf{G}}$.*

Comme dans le cas des monoïdes en général, on peut reformuler ce résultat en termes d'étiquetages complets de graphes finis.

**Théorème 2.** *Soit $M$ un monoïde inversif $A$-engendré et soit $\gamma\colon \Gamma \to M$ un étiquetage $\mathbf{G}$-inévitable d'un graphe fini par $M$. Alors $\gamma$ est inévitable pour le morphisme relationnel $\eta_{\mathbf{G}}$.*

Pour continuer, on a besoin du résultat suivant dû à Steinberg [11] dont la preuve a un caractère géométrique.

**Proposition 3.** *Un sous-ensemble $S$ du groupe libre $FG_{\mathbf{G}}(A)$ est de la forme $S = P\,\eta_{\mathbf{G}}$ pour un sous-ensemble $P$ d'un monoïde inversif $A$-engendré fini $M$ si et seulement si $S$ est union de classes latérales de sousgroupes finiment engendrés.*

Donc, si on suit le même processus de reformulation du Théorème 2 en termes de systèmes d'équations que dans le cas général, on trouve des systèmes d'équations (1) sur le groupe libre $FG_{\mathbf{G}}(A)$ avec des contraintes de la forme (4), c'est à dire décrites par des classes latérales de sousgroupes finiment engendrés. En plus, n'importe quel ensemble de telles contraintes peut être obtenu de cette façon. En effet, d'après la Proposition 3, toute classe latérale d'un sousgroupe finiment engendré du goupe libre est de la forme $P\eta_{\mathbf{G}}$ pour un sous-ensemble $P$ d'un monoïde inversif $A$-engendré fini. Pour chaque $z \in \Gamma$, soit $M_z$ un monoïde inversif fini $A$-engendré donné par la Proposition 3 tel que, pour le morphisme relationnel $\eta_z \colon M_z \to FG_{\mathbf{G}}(A)$ naturel, on a

$$g_z\, H_z \;=\; P_z\, \eta_z \;.$$

Soit $M$ le produit direct (dans la catégorie des monoïdes inversifs $A$-engendrés) des monoïdes $M_z$ ainsi obtenus. Pour chaque contrainte du type (4) on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
& FIM(A) \arrow[ddl, bend right, "\varphi"'] \arrow[d, "\varphi_z"] \arrow[ddr, bend left, "\pi_{\mathbf{G}}"] & \\
& M_z \arrow[dr, "\eta_z"] & \\
M \arrow[ur, "\pi_z"] \arrow[rr, "\eta"] & & FG_{\mathbf{G}}(A)
\end{tikzcd}$$

On considère maintenant tous les étiquetages $\gamma$ du graphe $\Gamma$ par le monoïde fini $M$ tels que $z\,\gamma \in m_z\,\pi_z^{-1}$ avec $m_z \in P_z$. On s'intéresse alors à tous les systèmes du type (1) associés à ces étiquetages avec les contraintes $x_z \in z\,\gamma\,\eta$. Or ces contraintes sont plus fortes que les contraintes (4). En effet

$$z\,\gamma\,\eta \subseteq P_z\,\pi_z^{-1}\,\eta = P_z\,\pi_z^{-1}\varphi^{-1}\,\pi_{\mathbf{G}} = P_z(\varphi\pi_z)^{-1}\,\pi_{\mathbf{G}} = P_z\,\varphi_z^{-1}\,\pi_{\mathbf{G}} = P_z\,\eta_z = g_z\,H_z\,.$$

Donc un de ces systèmes a une solution si et seulement si (1) a une solution satisfaisant (4). Par conséquent si le système (1) sous les contraintes (4) n'admet pas de solution, on peut, grâce au Théorème 2, trouver des sousgroupes normaux d'indice fini $K_z$ tels que le système (1) avec les contraintes $x_z \in z\,\gamma\,\eta\,K_z$ n'aient pas de solution. Ce qui permet de conclure comme pour le théorème 7 de l'article [1].

Suivant la terminologie de [2], on dira que la pseudovariété de groupes $\mathbf{H}$ est *$\kappa$-réductible pour une classe $\mathfrak{C}$ de monoïdes inversifs finis* si tout étiquetage d'un graphe fini par un monoïde de $\mathfrak{C}$ qui soit $\mathbf{H}$-inévitable est aussi $\eta_{\mathbf{H}}$-inévitable. On dira que $\mathbf{H}$ *permet la réduction aux sousgroupes d'indice fini* pour des contraintes de la forme

$$x_z \in \varepsilon_z \quad (z \in \Gamma) \tag{5}$$

où chaque $\varepsilon_z$ est un produit de type fixé d'éléments et de sousgroupes finiment engendrés de $FG_{\mathbf{H}}(A)$ si, pour tout système d'équations de la forme (1) sur le groupe $FG_{\mathbf{H}}(A)$ qui n'a pas de solution qui satisfasse des contraintes données de la forme (5), on peut remplacer chaque sousgroupe finiment engendré dans les contraintes par un sousgroupe d'indice fini de $FG_{\mathbf{H}}(A)$ qui le contienne de façon à ce que le système reste sans solution satisfaisant les nouvelles contraintes.

En observant que le morphisme relationnel $\eta_{\mathbf{H}}$ est précisément la composition du morphisme relationnel $\eta_{\mathbf{G}}$ avec la projection naturelle de $FG_{\mathbf{G}}(A)$ dans $FG_{\mathbf{H}}(A)$, la Proposition 3 s'étend à d'autres pseudovariétés de groupes $\mathbf{H}$. L'argument présenté ci-dessus pour le cas de la pseudovariété $\mathbf{G}$ permet alors de prouver, plus généralement, le résultat suivant.

**Proposition 4.** *Si la pseudovariété de groupes $\mathbf{H}$ est $\kappa$-réductible pour la classe $\mathfrak{I}$ de tous les monoïdes inversifs finis, alors $\mathbf{H}$ permet la réduction aux sousgroupes d'indice fini pour contraintes décrites par classes latérales de sousgroupes finiment engendrés.*

En particulier, le Théorème 2 entraîne le théorème de Herwig et Lascar car on a montré dans [1] que celui-ci est équivalent à ce que $\mathbf{G}$ permette la réduction aux sousgroupes d'indice fini pour les contraintes décrites par classes latérales de sousgroupes finiment engendrés.

D'autre part, comme on a aussi montré dans [1], on a la réduction suivante.

**Proposition 5.** *Si $\mathbf{H}$ permet la réduction aux sousgroupes d'indice fini pour les contraintes décrites par classes latérales de sousgroupes finiment engendrés, alors $\mathbf{H}$ permet la réduction aux sousgroupes d'indice fini pour des contraintes arbitraires de la forme (5).*

Rappelons qu'un *inverse faible* d'un élément $m$ d'un monoïde $N$ est un élément $t$ tel que $t\,m\,t = t$. Si $N$ est un monoïde fini, il existe une seule puissance $m^k$ de chaque élément $m$ qui est un inverse faible de $m$, ce qui nous permet de définir une opération $m \mapsto m^{\omega-1}$ qu'on appelle d'*inversion faible*. Pour $k \geq 0$, on note $m^{k+1} m^{\omega-1}$ par $m^{\omega+k}$ et on observe que $m^{\omega} = m^{\omega+0}$ est un idempotent. Le groupe relativement libre $FG_{\mathbf{H}}(A)$ n'est que l'algèbre libre sur l'ensemble $A$ dans la variété de monoïdes avec opération additionnelle d'inversion faible (ce qu'on appellerait des *$\kappa$-monoïdes* dans la terminologie de [2]) engendrée par $\mathbf{H}$.

Pour un monoïde fini $A$-engendré $M$, soit $\mu_{\mathbf{H}}$ le sousmonoïde fermé par inversion faible du monoïde $M \times FG_{\mathbf{H}}(A)$ engendré par les paires $(a, a)$ avec $a \in A$; on appelle $\mu_{\mathbf{H}}$ le *$\kappa$-morphisme relationnel naturel*. Notons que, selon [2, lemme 4.8], $\mu_{\mathbf{H}} = \theta_{\mathbf{H}}$ où $\theta_{\mathbf{H}}$ est le sousmonoïde de $M \times FG_{\mathbf{H}}(A)$ engendré par les paires $(a, a)$ avec $a \in A$ ainsi que les paires $(m, a^{-1})$ avec $a \in A$ et $m$ un inverse faible de $a$, c'est à dire le morphisme relationnel introduit par Ash. De plus, en prenant le sousmonoïde fermé par inversion faible engendré par les paires $(a, a)$ avec $a \in A$, on n'a pas besoin d'utiliser l'opération d'inversion faible à plus d'un niveau.

Suivant [2], nous dirons qu'une pseudovariété $\mathbf{H}$ est *$\kappa$-réductible* pour des monoïdes finis arbitraires si un étiquetage d'un graphe fini par un monoïde fini est $\mathbf{H}$-inévitable si et seulement si il est inévitable pour le $\kappa$-morphisme relationnel naturel. D'une façon moins précise, on peut donc dire qu'une pseudovariété de groupes est $\kappa$-réductible si elle vérifie le théorème 2.1 de Ash [3].

Comme on a prouvé dans [1] que toute pseudovariété qui permet la réduction aux sousgroupes d'indice fini et qui vérifie le théorème de Pin et Reutenauer pour le calcul des fermetures pro-$\mathbf{H}$ de sous-ensembles rationnels de $FG_{\mathbf{H}}(A)$ est $\kappa$-réductible pour des monoïdes finis arbitraires, on obtient ainsi une nouvelle déduction de ce théorème à partir du cas inversif.

Finalement, on observe que l'hypothèse que la pseudovariété $\mathbf{H}$ soit $\kappa$-réductible entraîne qu'elle le soit aussi pour $\mathfrak{I}$. Pour le prouver, considérons à présent un étiquetage $\gamma\colon \Gamma \to M$ d'un graphe fini $\Gamma$ par un monoïde inversif fini $M$ tel que $\gamma$ soit $\mathbf{H}$-circuit inévitable. Soit $A$ un ensemble générateur de $M$ comme monoïde (et donc aussi comme monoïde inversif) et soient $\eta_{\mathbf{H}}\colon M \to FG_{\mathbf{H}}(A)$ et $\mu_{\mathbf{H}}\colon M \to FG_{\mathbf{H}}(A)$ les morphismes relationnels naturels, respectivement de monoïdes inversifs et de $\kappa$-monoïdes.

On va montrer que, sous les hypothèses ci-dessus, on a $\eta_{\mathbf{H}} = \mu_{\mathbf{H}}$. Or, comme l'inévitabilité du morphisme relationnel $\eta_{\mathbf{H}}$ est indépendante de l'ensemble des générateurs, cela permet de conclure que le cas inversif n'est qu'un cas particulier du théorème de Ash pour les monoïdes finis arbitraires. Pour montrer l'inclusion $\eta_{\mathbf{H}} \subseteq \mu_{\mathbf{H}}$, il suffit d'observer que les générateurs $(a, a)$ avec $a \in A$ appartiennent à $\mu_{\mathbf{H}}$ et qu'un inverse est en particulier un inverse faible. Pour l'inclusion contraire, il suffit de montrer que, si $a_1, ..., a_n \in A$, alors $((a_1 \cdots a_n)^{\omega-1}, (a_1 \cdots a_n)^{-1})$ appartient à $\eta_{\mathbf{H}}$. Soit $k$ un entier positif tel que $(a_1 \cdots a_n)^{\omega} = (a_1 \cdots a_n)^k$. Alors, on a, dans le monoïde inversif $M$,

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
(a_1 \cdots a_n)^{\omega-1} &= (a_1 \cdots a_n)^{\omega+1} \left((a_1 \cdots a_n)^{\omega+2}\right)^{\omega-1} \\
&= (a_1 \cdots a_n)^{k+1} \left((a_1 \cdots a_n)^{k+2}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

comme $(a_1 \cdots a_n)^{k+2} = ((a_1 \cdots a_n)^{k+1})^2$ puisque $(a_1 \cdots a_n)^{k+1}$ engendre un sousmonoïde de $M$ qui est un groupe cyclique. D'autre part, dans n'importe quel groupe, on a aussi

$$
(7)\qquad (a_1 \cdots a_n)^{-1} = (a_1 \cdots a_n)^{k+1} \left((a_1 \cdots a_n)^{k+2}\right)^{-1} .
$$

Des deux égalités (6) et (7), on déduit que $((a_1 \cdots a_n)^{\omega-1}, (a_1 \cdots a_n)^{-1}) \in \eta_{\mathbf{H}}$ ce qui montre que $\mu_{\mathbf{H}} \subseteq \eta_{\mathbf{H}}$.

On dit que la pseudovariété $\mathbf{H}$ *permet la réduction aux sousgroupes d'indice fini pour les systèmes de Herwig et Lascar* si, pour tout système d'équations considérés par ces auteurs sur le groupe $FG_{\mathbf{H}}(A)$ qui n'a pas de solution, on peut remplacer chaque sousgroupe finiment engendré par un sousgroupe d'indice fini de $FG_{\mathbf{H}}(A)$ qui le contienne de façon à ce que le système reste sans solution.

Le Diagramme 1 présente un résumé des liens entre les différentes propriétés d'une pseudovariété $\mathbf{H}$ considérées dans cette note.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{permet la réduction aux sous-groupes d'indice fini pour les systèmes de Herwig et Lascar} \arrow[dr] & \\
\text{permet la réduction aux sous-groupes d'indice fini pour des contraintes décrites par des classes latérales de sous-groupes finiment engendrés} \arrow[ur] \arrow[d, leftrightarrow] & & \text{permet la réduction aux sous-groupes d'indice fini pour des contraintes arbitraires de la forme (5)} \arrow[ll] \arrow[d, "\textit{pour } \mathbf{H} \textit{ une } \mathcal{RZ}\textit{-pseudovariété}"] \\
\kappa\text{-réductible pour } \mathfrak{I} & & \kappa\text{-réductible} \arrow[ll]
\end{tikzcd}
$$

**Diagramme 1 :** Relations entre propriétés d'une pseudovariété $\mathbf{H}$.

Pour le moment, on ne connaît qu'une pseudovariété de groupes qui soit $\kappa$-réductible pour $\mathfrak{I}$, notamment la pseudovariété $\mathbf{G}$. Par contre, il y a d'autres exemples de $\mathcal{RZ}$-pseudovariétés, par exemple la pseudovariété $\mathbf{Ab}$ de tous les groupes Abéliens finis [4] (voir aussi [10]). Le problème de la $\kappa$-réductibilité de $\mathbf{Ab}$ a été étudié par le deuxième auteur [6] mais reste ouvert. Les résultats de cette note suggèrent de traiter ce problème en essayant de prouver que $\mathbf{Ab}$ est $\kappa$-réductible pour $\mathfrak{I}$, soit sous la forme de la définition de cette propriété (comme cela avait déjà été observé par le deuxième auteur dans [6]), soit par sa traduction en termes de systèmes d'équations.

Les auteurs tiennent à remercier le rapporteur anonyme pour ses suggestions qui ont beaucoup contribué à rendre cet article plus lisible.

## REFERENCES

[1] ALMEIDA, J. et DELGADO, M. – Sur certains systèmes d'équations avec contraintes dans un groupe libre, *Portugal. Math.,* 56 (1999), 409–417.

[2] ALMEIDA, J. et STEINBERG, B. – On the decidability of iterated semidirect products and applications to complexity, *Proc. London Math. Soc.,* 80 (2000), 50–74.

[3] ASH, C.J. – Inevitable graphs: a proof of the type II conjecture and some related decision procedures, *Int. J. Algebra and Computation,* 1 (1991), 127–146.

[4] DELGADO, M. – Abelian pointlikes of a monoid, *Semigroup Forum,* 56 (1998), 127–146.

[5] DELGADO, M. – *Teorema do Tipo II e hiperdecidibilidade de pseudovariedades de grupos*, Thèse de doctorat, Université de Porto, 1997.

[6] DELGADO, M. – On the hyperdecidability of pseudovarieties of groups, *Int. J. Algebra and Computation,* à paraître.

[7] HERWIG, B. et LASCAR, D. – Extending partial automorphisms and the profinite topology on free groups, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 352 (2000), 1985–2021.

[8] PIN, J.-E. et REUTENAUER, C. – A conjecture on the Hall topology for the free group, *Bull. London Math. Soc.,* 23 (1991), 356–362.

[9] RIBES, L. et ZALESSKIĬ, P.A. – On the profinite topology on a free group, *Bull. London Math. Soc.,* 25 (1993), 37–43.

[10] STEINBERG, B. – Monoid kernels and profinite topologies on the free Abelian group, *Bull. Austral. Math. Soc.,* 60 (1999), 391–402.

[11] STEINBERG, B. – Inverse automata and profinite topologies on a free group, *J. Pure and Applied Algebra,* à paraître.

Jorge Almeida,
Centro de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto,
P. Gomes Teixeira, 4099-002 Porto – PORTUGAL
and
Manuel Delgado,
Centro de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto,
P. Gomes Teixeira, 4099-002 Porto – PORTUGAL