PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 61 Fasc. 2 – 2004
Nova Série

EN ENLEVANT D'UNE BASE ADDITIVE UNE PARTIE INFINIE

Bruno Deschamps et Georges Grekos

Résumé: Dans cet article, nous montrons que si A est une base additive d'ordre $h \geq 2$, alors il existe une partie infinie A_∞ de A telle que $A \setminus A_\infty$ soit une base d'ordre inférieur ou égal à $h^2 + h$.

Abstract: In this article, we show that if A is an additive basis of order $h \geq 2$, then there is an infinite subset A_∞ of A such that $A \setminus A_\infty$ is a basis of order less than or equal to $h^2 + h$.

1 – Problématique

Si A désigne une partie de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ et h un entier, $h \geq 2$, on note hA l'ensemble $\{x_1 + \cdots + x_h \mid x_1, ..., x_h \in A\}$. Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$; on écrira $A \sim B$, si la différence symétrique $A \triangle B$ est finie. On dit qu'une partie A de $\mathbb{N}$ est une *base additive* (ou *base asymptotique* ou *ensemble de base* — dans cet article on dira plus simplement *base*), s'il existe $h \in \mathbb{N}^*$ tel que $hA \sim \mathbb{N}$. Le plus petit entier $h \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $hA \sim \mathbb{N}$ est alors appelé *ordre* de A et noté $G(A)$.

Une base A peut contenir des éléments $a \in A$ tels que $A \setminus \{a\}$ ne soit pas une base. On notera par la suite A^* l'ensemble des éléments $a \in A$ tels que $A \setminus \{a\}$ soit une base. Si X désigne un ensemble, on notera $|X|$ son cardinal. Dans [Gre1], une généralisation d'une idée de [EG] prouve que le nombre des éléments $a \in A$ pour lesquels $A \setminus \{a\}$ n'est pas une base, est fini: il est majoré par l'ordre de la base. La meilleure majoration possible (à la constante multiplicative près) a été trouvée dans [DG].

Received: January 31, 2002; *Revised*: February 14, 2003.

Il résulte des travaux précédemment cités que si A désigne une base quelconque, on peut retirer à A certaines parties finies de cardinal aussi grand que l'on veut sans perdre la basicité: pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il existe une partie $F \subset A$ avec $|F| = k$ telle que $A \setminus F$ soit une base. Bien sûr, l'ordre de la nouvelle base peut augmenter, parfois de beaucoup. On pourra consulter [Gre2], [Nth2] et [Jia] à ce sujet.

L'objectif de cet article est de montrer qu'il est en fait toujours possible, pour une base A donnée, de trouver une partie infinie $B \subset A$ telle que $A \setminus B$ reste une base. Ce résultat avait déjà été remarqué pour quelques cas concrets, par exemple celui des carrés (cf. [Zol, p. 212, Satz 2(b)]). Nous montrons, en fait, plus précisément le

Théorème. *Si A est une base d'ordre $G(A) \leq h$, alors il existe une partie infinie A_∞ de A telle que $A \setminus A_\infty$ soit base d'ordre inférieur ou égal à $h^2 + h$.*

Après quelques commentaires nous posons en fin d'article quelques questions relatives à la notion de minimalité pour une base. Nous tenons à remercier le rapporteur de cet article pour les commentaires et remarques qu'il nous a adressés.

2 – Preuves

2.1. Preuve du théorème

(2.1.1) Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$A = \Big\{a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \cdots\Big\} .$$

En effet, la basicité et l'ordre sont des notions invariantes par translation.

(2.1.2) Soit $n_0 > 0$ tel que tout entier $n \geq n_0$ appartienne à hA. Remarquons que si a et a' sont deux éléments de A tels que $a > 0$ et $a' - a \geq n_0$, alors $a' - a \in hA$ et donc a' s'écrit sous la forme $a' = a + x_1 + \cdots + x_h$ où $x_i \in A \setminus \{a'\}$, $1 \leq i \leq h$, et par conséquent $a' \in (h+1)(A \setminus \{a'\})$.

(2.1.3) Soit k_0 tel que $a_{k_0} - a_1 \geq n_0$. La remarque (2.1.2) permet d'assurer que, pour chaque entier $j \geq k_0$, il existe un h-uplet $(x_{j,1}, ..., x_{j,h})$ (que nous considérerons comme fixé à partir de maintenant) tel que

$$(R_j) \qquad a_j \;=\; a_1 + x_{j,1} + \cdots + x_{j,h}$$

avec $x_{j,i} \in A \setminus \{a_j\}$ pour tout $1 \leq i \leq h$.

(2.1.4) Nous allons déterminer les éléments de la partie

$$A_\infty = \left\{ a^{(1)} < a^{(2)} < \cdots \right\}$$

de A par récurrence. Nous nous servirons, à chaque étape, du

(2.1.5) **Lemme.** *Soit E un ensemble de h éléments de A, tous supérieurs ou égaux à a_{k_0} et J un ensemble infini d'indices supérieurs ou égaux à k_0. Il existe un élément $e \in E$ tel que*

$$\left| \left\{ j \in J \mid \; \forall i = 1, ..., h, \; e \neq x_{j,i} \right\} \right| \; = \; +\infty \; .$$

(On dira alors que e est "absent" des relations (R_j) pour une infinité de $j \in J$, $j \geq k_0$, et on notera $e \notin (R_j)$ pour signifier que l'indice $j \in J$ appartient à l'ensemble ci-dessus.)

Preuve du Lemme: Posons $S = h. \max(E)$. La suite $(a_j - a_1)_j$ tendant vers $+\infty$, puisque J est infini, il existe un indice $j_0 \in J$ tel que

$$a_{j_0} - a_1 > S \; .$$

Puisque la somme de h éléments (distincts ou non) de E est $\leq S$, il est alors clair que pour tout $j \in J$, $j \geq j_0$, il existe $e_j \in E$ tel que $x_{j,i} \neq e_j$ pour tout $i = 1, ..., h$. Pour $e \in E$, posons

$$E(e) \; = \; \left\{ j \in J, \; j \geq j_0 \mid \; e_j = e \right\}$$

On a

$$\bigcup_{e \in E} E(e) \; = \; \left\{ j_0, j_0 + 1, ... \right\} \cap J$$

et donc $\bigcup_{e \in E} E(e)$ est un ensemble infini. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'éléments dans E, il s'ensuit que l'un des $E(e)$ est un ensemble infini. Ce qu'il fallait démontrer. ∎

(2.1.6) Initialisation (choix de $a^{(1)}$): considérons un ensemble E_1 de h termes de A, tous supérieurs ou égaux à a_{k_0}; par exemple

$$E_1 = \left\{ a_{k_0}, a_{k_0+1}, ..., a_{k_0+h-1} \right\} \; .$$

Notons $a^{(1)}$ un élément de E_1 qui est absent des relations (R_j) pour une infinité de $j \geq k_0$. Posons alors

$$I^{(1)} = \left\{ j \geq k_0 \mid \; a^{(1)} \notin (R_j) \right\}$$

et

$$A^{(1)} = \left\{ a_j \mid \; j \in I^{(1)} \right\} \; .$$

(2.1.7) Itération: supposons avoir déterminé, pour un certain entier $m \geq 1$, des éléments $a^{(1)} < a^{(2)} < \cdots < a^{(m)}$ de A appartenant respectivement à des ensembles d'entiers à h éléments $E_1, ..., E_m$ vérifiant pour tout $p = 1, ..., m-1$, $\min E_{p+1} > \max E_p$ et des ensembles infinis d'indices

$$I^{(m)} \subset I^{(m-1)} \subset \cdots \subset I^{(1)}$$

tels que pour tout $s = 1, ..., m$ et tout $j \in I^{(m)}$, on ait

$$a^{(s)} \notin (R_j) \ .$$

On considère alors l'ensemble

$$A^{(m)} = \left\{a_j \mid j \in I^{(m)}\right\} \subset A^{(m-1)} \subset \cdots \subset A^{(1)} \ .$$

Au rang $m+1$, on choisit un ensemble E_{m+1} constitué de h éléments de $A^{(m)}$, tous plus grands que $\max E_m$ (donc, en particulier, de $a^{(m)}$). D'après le Lemme (2.1.5), au moins un élément de E_{m+1} est absent des relations (R_j) pour une infinité de $j \in I^{(m)}$. Notons $a^{(m+1)}$ un tel élément et posons

$$A^{(m+1)} = \left\{a_j \in A^{(m)} \text{ tel que pour tout } i = 1, ..., h,\ x_{j,i} \neq a^{(m+1)}\right\}$$

et

$$I^{(m+1)} = \left\{j \in I^{(m)} \mid a_j \in A^{(m+1)}\right\} \quad \left(\subset I^{(m)}\right) \ .$$

(2.1.8) On détermine ainsi, par récurrence, une partie infinie

$$A_\infty = \left\{a^{(1)} < a^{(2)} < \cdots\right\}$$

de A.

Montrons maintenant que $B = A \setminus A_\infty$ est base d'ordre inférieur ou égal à $h^2 + h$. Pour cela, il suffit de montrer que tout entier $n \geq n_0$ appartient à $(h^2 + h)B$. Par hypothèse, n s'écrit sous la forme $n = n_1 + \cdots + n_h$ avec $n_j \in A$ pour tout $j \in \{1, ..., h\}$. Montrons que chaque n_j appartient à $(h+1)B$, ce qui achèvera la preuve.

Si n_j appartient à $B = A \setminus A_\infty$, puisque $a_0 = 0 \in B$, alors n_j s'écrit comme somme de lui-même et de h termes a_0 et appartient ainsi à $(h+1)B$. Si, maintenant, $n_j = a^{(m)}$ pour un certain entier $m \geq 1$, alors:

- Si $m = 1$, on a vu que $a^{(1)}$ vérifie la relation

$$a^{(1)} = a_1 + x_1 + \cdots + x_h \,, \qquad x_i \in A \setminus \{a^{(1)}\},\ \ 1 \leq i \leq h \ .$$

  Tous les x_i satisfont $x_i \leq a^{(1)} - a_1 < a^{(1)}$ et sont donc éléments de B.

- Si $m > 1$, alors le terme n_j vérifie $n_j = a^{(m)} \in A^{(m-1)}$, et donc il s'écrit $n_j = a_1 + x_1 + \cdots + x_h$ avec pour chaque $i \in \{1, ..., h\}$, $x_i \neq a^{(1)}, ..., a^{(m-1)}$. Tous les x_i satisfont $x_i \leq n_j - a_1 < n_j = a^{(m)}$ et sont ainsi éléments de B, ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi s'achève la démonstration du théorème. ∎

Remarque. Deux questions se posent à propos de ce résultat:

Question 1. Dans cet énoncé, peut-on remplacer $h^2 + h$ par une autre fonction, plus petite, de h?

Question 2. Pour un ordre donné ($h^2 + h$, par exemple), existe-t-il des parties B de A, relativement plus denses (voir paragraphe suivant) que A_∞ dans A, telles que $A \setminus B$ soit une base? □

3 – Commentaires

Le théorème que nous venons de prouver, montre bien que pour parler de minimalité de base, on ne peut pas se contenter d'une notion purement ensembliste. Nous finissons cet article en proposant quelques pistes de réflexion à ce sujet.

Etant données deux parties $B \subset A$ de $\mathbb{N}$, on définit la *densité relative de B dans A* par la formule

$$d_A(B) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{\Big|B \cap [1, n]\Big|}{\Big|A \cap [1, n]\Big|} \ .$$

On peut alors remarquer que, pour la partie A_∞ construite dans ce papier, on a

$$d_A(A_\infty) \leq \frac{1}{h} \ .$$

En effet, dans la preuve, de chaque ensemble E_i, constitué de h éléments de A, nous en choisissons un qui fera partie de A_∞. De plus, pour chaque i, on a $\max E_i < \min E_{i+1}$. La propriété $d_A(A_\infty) \leq 1/h$ en découle alors.

Pour examiner la notion de minimalité, on peut introduire, pour une base donnée A, le réel:

$$\Omega(A) = \sup J(A)$$

où

$$J(A) = \Big\{\alpha \in [0, 1] \mid \exists\, B \subset A \text{ telle que } A \backslash B \text{ soit une base et } d_A(B) \geq \alpha\Big\} \ .$$

Le réel $\Omega(A)$ jauge, en quelque sorte, la densité minimale d'une base. En prenant une partie B finie, il apparaît immédiatement que $0 \in J(A)$. L'ensemble $J(A)$ est visiblement un sous-intervalle de $[0,1]$. On peut alors se demander si:

Question 3. $J(A)$ est-il toujours un intervalle fermé?

Si l'on prend pour A une progression arithmétique à laquelle on ajoute des éléments de sorte que $p.g.c.d.(A) = 1$ (par exemple $A = 3.\mathbb{N} \cup \{1\}$) ou l'ensemble des carrés ou encore l'ensemble des puissances k-ièmes, alors $\Omega(A) = 1$. Pour le cas des progressions arithmétiques c'est trivial, pour les carrés voir [Zol, p. 212, Satz 2(b)] et pour les puissances k-ièmes voir [Nth1]. De manière générale,

Question 4. A-t-on $\Omega(A) = 1$ pour toute base A?

REFERENCES

[DG] Deschamps, B. et Grekos, G. – Estimation du nombre d'exceptions à ce qu'un ensemble de base privé d'un point reste un ensemble de base, *J. Reine Angew. Math.,* 539 (2001), 45–53.

[EG] Erdös, P. and Graham, R.L. – On bases with an exact order, *Acta Arith.,* 37 (1980), 201–207.

[Gre1] Grekos, G. – *Sur l'ordre d'une base additive*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1987–1988, Exposé No. 31, 13 p.

[Gre2] Grekos, G. – On the order of a minimal additive basis, *J. Number Theory,* 71 (1998), 307–311.

[Jia] Jia, X.D. – On the order of subsets of asymptotic bases, *J. Number Theory,* 37 (1991), 37–46.

[Nth1] Nathanson, M.B. – *Waring's problem for sets of density zero*, in "Number Theory, Philadelphia 1980" (M.I. Knopp, Ed.), Lecture Notes in Math., 899, Springer-Verlag, 1981, pp. 301–310.

[Nth2] Nathanson, M.B. – *The exact order of subsets of additive bases*, in "Number Theory, New York 1982" (D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky, H. Cohn and M.B. Nathanson, Eds.), Lecture Notes in Math., 1052, Springer-Verlag, 1984, pp. 273–277.

[Zol] Zöllner, J. – Über eine Vermutung von Choi, Erdös und Nathanson, *Acta Arith.,* 45 (1985), 211–213.

Bruno Deschamps et Georges Grekos,
Lab. d'Arithmétique et d'Algèbre, Faculté des Sciences et Techniques, Université Jean Monnet,
23 rue du docteur Paul Michelon, 42023 Saint-Etienne, Cedex 2 – FRANCE
E-mail: Bruno.Deschamps@univ-st-etienne.fr
grekos@univ-st-etienne.fr