PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 62 Fasc. 1 – 2005
Nova Série

STABILITÉ DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES OU ANTI-PÉRIODIQUES DE CERTAINS SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

Daad Abou Saleh

Recommended by J.P. Dias

Abstract: We consider the non linear differential system in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} u'(t) + ku(t)\Big(u(t)^2 + v(t)^2\Big) - \lambda u(t) = h_1(t) \\ v'(t) + kv(t)\Big(u(t)^2 + v(t)^2\Big) - \lambda v(t) = h_2(t)\ . \end{cases}$$

In order to study the stability of anti-periodic solutions of this system, a result of Liapounov in the stability theory of autonomous nonlinear ODE is enlarged to diffenrentials systems of the form $u' = F(t,u)$ in the Hilbert space framework with finite dimension. On the other hand, a result of R.Bellman in the instability theory of autonomous nonlinear ODE is enlarged to diffenrentials systems where L, the linearized operator for F, is a nonautonomous periodic operator.

1 – Introduction

Soit H un espace de Hilbert de dimension finie, muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et de norme associée $\|.\|$. On considère l'équation d'évolution non autonome suivante:

$$U'(t) = F(t, U(t)) \tag{1.1}$$

où F: $\mathbb{R}^+ \times H \to H$, de classe C^1 en U et uniformément différentiable en U par

Received: December 2, 2003.
AMS Subject Classification: 34A34, 34D20, 34D23.
Keywords: periodic solutions; stability.

rapport à t. Soit W une solution de (1.1) appartenant à l'espace $C^b(\mathbb{R}^+, H) \cap C^1(\mathbb{R}^+, H)$. On souhaite étudier la stabilité de la solution W de (1.1). W est une solution stable de (1.1) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon)$ tel que pour toute autre solution Y de (1.1), la condition

$$\|Y_0 - W_0\| \leq \delta(\varepsilon)$$

entraîne

$$\mathrm{Sup}_{t\geq 0} \|Y(t) - W(t)\| \leq \varepsilon \ .$$

On peut ramener l'étude de la stabilité de n'importe quelle solution de (1.1) à la stabilité de la solution nulle de

$$Z'(t) + L(t)Z(t) + \varepsilon(t, Z(t)) = 0 \tag{1.2}$$

avec

$$L(t) = -(\partial_W F(t, Z(t)))(Z(t))$$

et

$$\varepsilon(t, Z) = o(Z)$$

uniformément en t lorsque $Z \to 0$. Dans un certain nombre de cas que nous allons décrire, la stabilité de la solution nulle de l'équation:

$$Y'(t) + L(t)Y(t) = 0 \tag{1.3}$$

est équivalente à la stabilité de la solution nulle de (1.2). Plus préçisément, considérons ε: $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^+ \times H \to H$ une fonction continue et localement Lipshitzienne au voisinage de 0, L: $H \to H$ un opérateur linéaire autonome. Soit Λ l'ensemble des valeurs propres de L. On rappelle les deux théorèmes suivants:

Théorème 1.1 (de Liapounov)**.** *On suppose que:*
- $\forall \lambda \in \Lambda, Re(\lambda) > 0$*;*
- $\forall \eta > 0, \exists \delta_\eta$ *telque* $\|Z\| \leq \delta_\eta$ *alors* $\|\varepsilon(t, Z)\| \leq \eta \|Z\|$.

Alors la solution nulle de (1.2) *est exponentiellement stable au sens suivant: pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta(\varepsilon)$ *tel que toute autre solution* Y *de* (1.2) *qui vérifie:*

$$\|Y_0 - W_0\| \leq \delta(\varepsilon)$$

entraîne

$$\mathrm{Sup}_{t\geq 0} \|Y(t) - W(t)\| \leq \varepsilon \ . \ \blacksquare$$

Théorème 1.2 (de Bellman). *On suppose que:*

- $\exists \lambda \in \Lambda, Re(\lambda) < 0$;
- $\forall \eta > 0, \exists \delta_\eta$ *telque* $\|Z\| \leq \delta_\eta$ *alors* $\|\varepsilon(t, Z)\| \leq \eta \|Z\|$.

Alors la solution nulle de (1.2) *est instable .i.e. il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que* $\forall \delta > 0$ *il existe une solution* Y *de* (1.2) *qui vérifie:*

$$\|Y_0 - W_0\| \leq \delta$$

et

$$\mathrm{Sup}_{t \geq 0} \|Y(t) - W(t)\| \geq \varepsilon_0 \ . \blacksquare$$

Nous verrons plus loin que le résultat de stabilité de Liapounov se généralise au cas où L est un opérateur auto-adjoint dépendant du temps. D'autre part, le résultat d'instabilité de Bellman se généralise au cas où L est un opérateur dépendant du temps de façon périodique, sous une condition faisant intervenir la matrice de monodromie du système cf [3] .

On applique ces résultats à une classe spéciale de systèmes différentiels dans $\mathbb{R}^N$ de la forme

$$U' + KUf(\|U\|^2) - \lambda U = h \tag{1.4}$$

où $\|.\|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$, f une fonction de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et non constante sur $(0, +\infty)$, $K, \lambda \in \mathbb{R}$ et $h \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$, T-anti-périodique. Pour $N = 2$, Philippe Souplet a montré qu'il existe certains réels b, ε, ω tels que, (1.4) admet au moins deux solutions distinctes

$$U_1(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\sin \omega t \end{pmatrix},$$

$$U_2(t) = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} (1+\varepsilon)\cos \omega t - \varepsilon \sin \omega t \\ -\varepsilon \cos \omega t - (1+\varepsilon) \sin \omega t \end{pmatrix},$$

avec

$$K = \frac{-2\,\varepsilon\omega}{f(b^2) - f\Big[b^2(1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^2)\Big]},$$

$$\lambda = Kf(b^2) + \omega(1 + 2\varepsilon)$$

et

$$h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(Kf(b^2) - \lambda)\cos \omega t - \omega b \sin \omega t \\ -\omega b \cos \omega t - b(Kf(b^2) - \lambda) \sin \omega t \end{pmatrix}.$$

On va étudier le cas où $f(s) = s$. (1.4) s'écrit alors

$$\begin{cases} u' + Ku(u^2+v^2) - \lambda u = h_1 \\ v' + Kv(u^2+v^2) - \lambda v = h_2 \end{cases} \tag{1.5}$$

dans ce cas, on a

$$U_1(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\sin\omega t \end{pmatrix} ,$$

$$U_2(t) = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} (1+\varepsilon)\cos\omega t - \varepsilon\sin\omega t \\ -\varepsilon\cos\omega t - (1+\varepsilon)\sin\omega t \end{pmatrix} ,$$

$$K = \frac{\omega}{b^2(1+\varepsilon)} ,$$

$$\lambda = \frac{\omega}{(1+\varepsilon)} + \omega(1+2\varepsilon)$$

et

$$h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (kb^3-\lambda b)\cos\omega t - \omega b\sin\omega t \\ -\omega b\cos\omega t - (kb^3-\lambda b)\sin\omega t \end{pmatrix} .$$

L'objet principal de ce travail est l'étude de la stabilité des solutions U_1 et U_2. On montre dans la suite que la solution U_1 est stable pour $\varepsilon \in \,]-1,-\frac{1}{2}[$ et est instable pour $\varepsilon \in \,]-\infty,-\frac{3}{2}[\,\cup\,]0,+\infty[$. De même la solution U_2 est stable pour $\varepsilon \in \,]-\infty,-1[$ et est instable pour $\varepsilon \in \,]-\frac{1}{2},0[$.

2 – Généralisation du théorème de Liapounov sur la stabilité asymptotique

2.1. Linéarisation

On considère l'équation

$$U'(t) = F(t, U(t)) . \tag{2.6}$$

On souhaite linéariser (2.6) au voisinage de la solution W. Pour cela, on pose:

$$Y = W + Z$$

alors Z vérifie

$$Z'(t) = (\partial_W F(t, W(t)))(Z(t)) + \eta(t, Z(t)) \tag{2.7}$$

avec

$$\eta(t, Z(t)) = o(Z(t))$$

uniformément en t.

En effet, soit Y une solution de (2.6), en faisant un développement limité à l'ordre 1 de F, on a

$$W'(t) + Z'(t) = F(t, Y(t)) = F(t, W(t)) + \partial_W F(t, W(t)))(Z(t)) + \eta(t, Z(t))$$

or W est une solution de (2.6), donc

$$W'(t) = F(t, W(t))$$

d'où le résultat.

On pose

$$L(t) = -\partial_W F(t, W(t)))$$

et

$$\varepsilon(t, Z(t)) = -\eta(t, Z(t))$$

(2.7) s'écrit

(2.8) $$Z'(t) + L(t)Z(t) + \varepsilon(t, Z(t)) = 0$$

et le système linéarisé de (2.6) s'écrit

(2.9) $$Y'(t) + L(t)Y(t) = 0 \ .$$

2.2. Le cas non autonome

On considère l'équation

(2.10) $$Z'(t) + L(t)Z(t) + \varepsilon(t, Z(t)) = 0$$

où $L(t) : H \to H$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$, de classe C^0 en t, uniformément différentiable en W par rapport à t et $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times H \to H$.

Théorème 2.3. *On suppose que:*
(1) $\|\varepsilon(t, Z(t))\| \leq \gamma \|Z(t)\|$ *pour* $\|Z\| \leq \eta$*;*
(2) $\langle L(t)Z(t), Z(t)\rangle \geq \beta \|Z(t)\|^2$ *avec* $\beta > \gamma$.

Alors la solution nulle de (2.10) *est stable.*

Avant de montrer ce résultat on a besoin du lemme suivant

Lemme 2.1. *On suppose qu'il existe une fonction* $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ *qui vérifie*
(1) $\phi \geq 0$*;*
(2) $\phi(0) < \eta$*;*
(3) ϕ *est absolument continue;*
(4) $\phi' \leq -\varepsilon\phi$ *p.p. sur* $\{\phi(t) \leq \eta\}$.

Alors, on a le résultat suivant

$$\phi(t) \leq \phi(0)\exp(-\varepsilon t) \quad \forall\, t \in [0,T] \ .$$

Démonstration du lemme: Puisque $\phi(0) < \eta$, alors il existe $\delta \geq 0$ tel que: $\phi(t) \leq \eta$ pour tout $t \in [0,\delta]$, par continuité de ϕ. Introduisons

$$T \ = \ \mathrm{Sup}\Big\{\delta \geq 0, \ \phi(t) \leq \eta, \ t \in [0,\delta]\Big\}$$

et montrons que

$$T = \infty \ .$$

Supposons que

$$T < \infty \quad \text{ i.e. } \ \phi(T) = \eta$$

alors

$$\phi(t) \leq \eta \quad \text{ pour } \ t \in [0,T]$$

en particulier, en intégrant

$$\phi' \leq -\varepsilon\phi$$

et en faisant tendre t vers T, on a

$$\phi(T) \leq \phi(0)\exp(-\varepsilon T) < \eta \ ,$$

d'où une contradiction. ∎

Démonstration du théorème: Calculons

$$\partial_t(\|z\|^2) = -2\,L(t)\langle z,z\rangle + \langle \varepsilon(t,z),z\rangle \ .$$

D'après les hypothèses

$$\partial_t(\|z\|^2) \leq -2\,\beta\|z\|^2 + 2\gamma\|z\|^2 \qquad \forall\|z\| \leq \eta \ .$$

On pose

$$\varepsilon = 2(\beta - \gamma) \ .$$

D'après le lemme 2.1, on a

$$\|z(t)\|^2 \leq \|z(0)\|^2 \exp(-\varepsilon t) \ .$$

Par suite la solution zero de (2.10) est exponentiellement stable. ∎

2.3. Le cas autoadjoint

$$Z'(t) + L(t)Z(t) + \varepsilon(t, Z(t)) = 0 \tag{2.11}$$

où $L(t) : H \to H \ \forall t \in \mathbb{R}^+$ est un opérateur auto-adjoint de classe C^0 en t et $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times H \to H$ telle que

$$\varepsilon(t, Z(t)) = o(Z(t))$$

lorsque $Z \to 0$ uniformément en t.

On pose

$$\nu(L(t)) \ = \ \inf_U \Big\{ (L(t)U, U), \ \|U\|^2 = 1 \Big\} \ .$$

Théorème 2.4. *S'il existe $\nu_0 > 0$ tel que $\nu(L(t)) \geq \nu_0 > 0 \ \forall t \geq 0$, alors 0 est une solution exponentiellement stable de* (2.11).

Démonstration: Ce théorème est un cas particulier du théorème 2.3 car ceci implique

$$\langle L(t)Z(t), Z(t) \rangle \geq \gamma_0 \|Z(t)\|^2$$

donc pour

$$\|Z\| \leq \eta$$

assez petit on peut utiliser le théorème 2.3. ∎

3 – Généralisation du théorème de Bellman sur l'instabilité

3.1. Rappel

On considère le système linéaire homogène suivant

$$y' = A(t)y \tag{3.12}$$

où $A(t+T) = A(t)$ pour $T > 0$ et $A : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}(n{\times}n)$ qui dépend de t d'une façon continue.

On appelle matrice de monodromie de (3.12) la matrice non singulière C qui vérifie:

$$Y(t+T) = Y(t)C$$

où $Y(t)$ est la matrice fondamentale solution de (3.12).

On appelle nombres caractéristiques de (3.12) les valeurs propres de la matrice de monodromie C. C vérifie la relation suivante: $C = \exp(BT)$ où B est une matrice constante. Si ρ est une valeur propre de C, alors $\rho = exp(\lambda T)$ où λ est une valeur propre de B. L'existence d'une telle matrice B est démontrée dans [4] page 120.

3.2. Le cas périodique

On considère d'abord l'équation

$$Z'(t) = A(t)Z(t) + \varepsilon(t, Z(t)) \tag{3.13}$$

où $A : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}(n{\times}n)$ est un opérateur dépendant du temps d'une façon C^1, périodique i.e. $A(t+T) = A(t)$ pour $T > 0$ et $\varepsilon : \mathbb{R}^+{\times}H \to H$ vérifie

$$\varepsilon(t, z) = o(z)$$

uniformément en t lorsque $z \to 0$.

On considère le système linéarisé de (3.13) suivant:

$$Y'(t) = A(t)\,Y(t)\ . \tag{3.14}$$

Théorème 3.5. *Il existe une matrice $P(t)$ périodique, C^1 et inversible pour tout t, telle que si Z est une solution de* (3.13), *alors $Y(t) = P^{-1}(t)Z(t)$ vérifie*

$$Y'(t) = BY(t) + \eta(t, Y(t)) \tag{3.15}$$

où B est une matrice constante et

$$\lim_{y\to 0} \mathrm{Sup}_{t\in\mathbb{R}} \frac{\|\eta(t,y)\|}{\|y\|} = 0 \ .$$

Démonstration: On sait d'après [4], qu'il existe $P(t)$ et une matrice constante B telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad B = P^{-1}(t)\,A(t)\,P(t) - P^{-1}(t)\,P'(t)$$

on a

$$Z(t) = P(t)\,Y(t) \ ,$$

donc

$$\begin{aligned} Z'(t) &= P(t)\,Y'(t) + P'(t)\,Y(t) \\ &= A(t)\,Z(t) + \varepsilon(t, Z(t)) \end{aligned}$$

on multiplie à gauche l'égalité par $P^{-1}(t)$

$$\begin{aligned} P^{-1}(t)\,Z'(t) &= P^{-1}(t)\,P(t)\,Y'(t) + P^{-1}(t)\,P'(t)\,Y(t) \\ &= P^{-1}(t)\,A(t)\,P(t)\,Y(t) + P^{-1}(t)\,\varepsilon(t, P(t)\,Y(t)) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \Big(P^{-1}(t)\,A(t)\,P(t) - P^{-1}(t)\,P'(t)\Big)\,Y(t) \\ &\quad + P^{-1}(t)\,\varepsilon(t, P(t)\,Y(t)) \end{aligned}$$

or

$$B = P^{-1}(t)\,A(t)\,P(t) - P^{-1}(t)\,P'(t) \ ,$$

donc

$$Y'(t) = B\,Y(t) + P^{-1}(t)\,\varepsilon(t, P(t)\,Y(t)) \ .$$

On pose

$$\eta(t, Y(t)) = P^{-1}(t)\,\varepsilon(t, P(t)\,Y(t))$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{\|\eta(t, Y(t))\|}{\|Y(t)\|} &\leq \frac{\|P^{-1}(t)\|\,\|\varepsilon(t, Z(t)))\|}{\|P^{-1}(t)\,Z(t)\|} \\ &\leq \frac{\|P^{-1}(t)\|\,\|Z(t)\|\,\|\varepsilon(t, Z(t))\|}{\|P^{-1}((t)\|\,\|Z(t)\|^2}\end{aligned}$$

or

$$\lim_{z\to 0} \|\varepsilon(t, z)\| = 0$$

uniformément en t, d'où

$$\lim_{y\to 0} \mathrm{Sup}_{t\in\mathbb{R}} \frac{\|\eta(t, y)\|}{\|y\|} = 0 \;. \blacksquare$$

Proposition 3.1. *Supposons que B possède n valeurs propres: ρ_1,...,ρ_n, comptées avec leur ordre de multiplicité. Alors on a le résultat suivant*

$$\sum_{i=0}^{n} \rho_i \;=\; \frac{1}{T}\int_0^T tr(A(s))\,ds \tag{3.16}$$

où T est la période de A.

Démonstration: Soit μ_1,...,μ_n les nombres caractéristiques de (3.14) correspondants à la période T de A et définis par

$$\mu_i = \exp(\rho_i T)$$

d'après [4], on a:

$$\prod_{i=0}^{n} \mu_i \;=\; \exp\Big(\int_0^T tr(A(s))\,ds\Big)$$

puisque

$$\rho_i = \frac{1}{T}\,\ln(\mu_i)$$

on en déduit (3.16). $\blacksquare$

Corollaire 3.1. *Si la somme des valeurs propres de B est positive, alors la solution nulle de* (3.13) *est instable. C'est en particulier le cas si*

$$\int_0^T tr(A(s))\,ds \;>\; 0\;.$$

Démonstration: Si la somme des valeurs propres est positive, alors il existe au moins une valeur propre positive de B. D'après le résultat de Bellman dans [1], la solution nulle de (3.15) est instable. On en déduit que la solution nulle est aussi instable pour (3.13) grâce au théorème 3.5. ∎

4 – Application à un système différentiel particulier

4.1. Introduction

On considère une classe spéciale de systèmes différentiels dans $\mathbb{R}^N$ de la forme

$$U' + KUf(\|U\|^2) - \lambda U = h \tag{4.17}$$

où $\|.\|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$, f une fonction de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ non constante sur $(0,+\infty)$, $K,\lambda \in \mathbb{R}$ et $h \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$, T-anti-périodique. Pour $N = 2$, Philippe Souplet a montré qu'il existe certains réels b,ε,ω tels que

$$U_1(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\sin\omega t \end{pmatrix}$$

et

$$U_2(t) = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} (1+\varepsilon)\cos\omega t - \varepsilon\sin\omega t \\ -\varepsilon\cos\omega t - (1+\varepsilon)\sin\omega t \end{pmatrix}$$

sont solutions de (3.17) avec:

$$K = \frac{-2\,\varepsilon\omega}{f(b^2) - f\Big[b^2(1+2\varepsilon+2\varepsilon^2)\Big]}\;,$$

$$\lambda \;=\; Kf(b^2) + \omega(1+2\varepsilon)$$

et

$$h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(Kf(b^2)-\lambda)\cos\omega t - \omega b\sin\omega t \\ -\omega b\cos\omega t - b(Kf(b^2)-\lambda)\sin\omega t \end{pmatrix}.$$

On va étudier le cas où $f(s) = s$. (4.17) s'écrit

$$\begin{cases} u' + Ku(u^2+v^2) - \lambda u = h_1 \\ v' + Kv(u^2+v^2) - \lambda v = h_2 \end{cases} \tag{4.18}$$

dans ce cas, on a

$$K = \frac{\omega}{b^2(1+\varepsilon)} \ , \tag{4.19}$$

$$\lambda = \frac{\omega}{(1+\varepsilon)} + \omega(1+2\varepsilon) \ , \tag{4.20}$$

$$U_1(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\sin\omega t \end{pmatrix} ,$$

$$U_2(t) = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} (1+\varepsilon)\cos\omega t - \varepsilon\sin\omega t \\ -\varepsilon\cos\omega t - (1+\varepsilon)\sin\omega t \end{pmatrix}$$

et

$$h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (kb^3 - \lambda b)\cos\omega t - \omega b\sin\omega t \\ -\omega b\cos\omega t - (kb^3 - \lambda b)\sin\omega t \end{pmatrix} .$$

4.2. Calcul des valeurs propres

On s'intéresse à la stabilité des solutions anti-périodiques U_1 et U_2 du système (4.18) qui s'écrit sous la forme

$$U'(t) = F(t, U(t))$$

avec

$$F(t, U(t)) = -K|U(t)|^2\, U(t) + \lambda U(t) + h(t) \ .$$

Soit $\Omega = \binom{\phi}{\psi}$ une solution anti-périodique quelconque de (4.18) avec $U = \Omega + z$. Au voisinage de Ω, on a

$$z'(t) - \partial_U F(t, \Omega(t))(z(t)) + O(z) \ = \ 0 \ ,$$

donc le système linéarisé de (4.18) s'écrit

$$y'(t) + L(t)y(t) = 0 \tag{4.21}$$

avec

$$L(t) = -\partial_U F(t, \Omega(t))$$

ou encore

$$L = \begin{pmatrix} K(3\phi^2 + \psi^2) - \lambda & 2\phi\psi \\ 2\phi\psi & K(3\psi^2 + \phi^2) - \lambda \end{pmatrix} .$$

Proposition 4.2. *Au voisinage de la solution*

$$U_1(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\sin \omega t \end{pmatrix} . \tag{4.22}$$

Les valeurs propres de L sont constantes et données par:

$$\alpha_1 = -\lambda + Kb^2$$

et

$$\alpha_2 = -\lambda + 3Kb^2 .$$

Démonstration: On remplace dans la matrice L, ϕ et ψ par les coordonnées de U_1. La matrice s'écrit

$$L(t) = \begin{pmatrix} Kb^2(\cos 2\omega t + 2) - \lambda & -Kb^2 \sin 2\omega t \\ -Kb^2 \sin 2\omega t & Kb^2(-\cos 2\omega t + 2) - \lambda \end{pmatrix} .$$

Les valeurs propres de la matrice L sont les racines du polynôme $\det(L(t) - \alpha I)$ où I est la matrice identité dans $\mathbb{R}^2$.

$$\det(L(t) - \alpha I) \ = \ (2Kb^2 - \lambda - \alpha)^2 - K^2 b^4 \ = \ 0$$

équivaut à

$$(3Kb^2 - \lambda - \alpha)\,(Kb^2 - \lambda - \alpha) \ = \ 0 \ .$$

Cette égalité est vérifiée si et seulement si

$$\alpha = \alpha_1 := -\lambda + Kb^2$$

ou

$$\alpha = \alpha_2 := -\lambda + 3Kb^2 \ . \ \blacksquare$$

Proposition 4.3. *Au voisinage de la solution*

$$U_2(t) = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} (1+\varepsilon)\cos \omega t - \varepsilon \sin \omega t \\ -\varepsilon \cos \omega t - (1+\varepsilon) \sin \omega t \end{pmatrix} . \tag{4.23}$$

Les valeurs propres de L sont constantes et données par

$$\beta_1 \ = \ -\lambda + C + Kb^2 \sqrt{4\,\varepsilon^2(1+\varepsilon)^2 + (1+2\varepsilon)^2}$$

et

$$\beta_2 \ = \ -\lambda + C - Kb^2 \sqrt{4\,\varepsilon^2(1+\varepsilon)^2 + (1+2\varepsilon)^2}$$

avec

$$C \ = \ 2\,Kb^2 \Big[(1+\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 \Big] \ .$$

Démonstration: On remplace dans la matrice L respectivement ϕ et ψ par $u_2(t)$ et $v_2(t)$. La matrice L s'écrit

$$L(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ B(t) & D(t) \end{pmatrix} .$$

Calculons $A(t)$, $B(t)$ et $D(t)$

$$\begin{aligned}
A(t) &= K(3\phi^2 + \psi^2) - \lambda \\
&= Kb^2 \Big\{ 3\Big[(1+\varepsilon)\cos\omega t - \varepsilon \sin\omega t\Big]^2 + \Big[-\varepsilon\cos\omega t - (1+\varepsilon)\sin\omega t\Big]^2 \Big\} - \lambda \\
&= Kb^2 \Big\{ \Big[3(1+\varepsilon)^2 + \varepsilon^2\Big]\cos^2\omega t + \Big[(1+\varepsilon)^2 + 3\varepsilon^2\Big]\sin^2\omega t \\
&\quad -4\varepsilon(1+\varepsilon)\sin\omega t\cos\omega t \Big\} - \lambda \\
&= Kb^2 \Big[(1+2\varepsilon)\cos 2\omega t - 2\varepsilon(1+\varepsilon)\sin 2\omega t + 2(1+\varepsilon)^2 + 2\varepsilon^2\Big] - \lambda \ ,
\end{aligned}$$

$$B(t) = Kb^2 \Big[-2\varepsilon(1+\varepsilon)\cos 2\omega t - (1+2\varepsilon)\sin 2\omega t\Big]$$

$$D(t) = Kb^2 \Big[-(1+2\varepsilon)\cos 2\omega t + 2\varepsilon(1+\varepsilon)\sin 2\omega t + 2(1+\varepsilon)^2 + 2\varepsilon^2\Big] - \lambda \ .$$

Les valeurs propres de L sont les racines du polynôme $\det(L(t) - \beta I)$ où I est la matrice identité dans $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned}
\det(L(t) - \beta I) &= \det \begin{pmatrix} A(t) - \beta & B(t) \\ B(t) & D(t) - \beta \end{pmatrix} \\
&= \Big(A(t) - \beta\Big)\Big(D(t) - \beta\Big) - B^2(t) \ .
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
C &= 2\,Kb^2 \Big[(1+\varepsilon)^2 + \varepsilon^2\Big] \\
C' &= Kb^2 \Big[(1+2\varepsilon)\cos 2\omega t - 2\varepsilon(1+\varepsilon)\sin 2\omega t\Big] \ ,
\end{aligned}$$

alors

$$\det(L(t) - \beta I) = (C + C' - \lambda - \beta)\,(C - C' - \lambda - \beta) - B^2(t)$$

d'où

$$\det(L(t) - \beta I) = (C - \lambda - \beta)^2 - C'^2 - B^2(t)$$

or

$$\begin{aligned}
C'^2 + B^2(t) &= K^2 b^4 \Big[(1+2\varepsilon)\cos 2\omega t - 2\varepsilon(1+\varepsilon)\sin 2\omega t\Big]^2 \\
&\quad + K^2 b^4 \Big[2\varepsilon(1+\varepsilon)\cos 2\omega t + (1+2\varepsilon)\sin 2\omega t\Big]^2 \ .
\end{aligned}$$

En effectuant ce calcul, on trouve que:

$$C'^2 + B^2(t) \;=\; K^2 b^4 \Big[(1+2\varepsilon)^2 + 4\varepsilon^2(1+\varepsilon)^2\Big]\,.$$

D'où

$$\det(L(t) - \beta I) \;=\; (C - \lambda - \beta)^2 - K^2 b^4 \Big[(1+2\varepsilon)^2 + 4\varepsilon^2(1+\varepsilon)^2\Big]$$

a pour zéros β_1 et β_2 comme annoncées. ∎

4.3. Etude des paramètres

K et λ étant fixés, on peut exprimer b et ω en fonction de ε. En effet, d'après (4.19) et (4.20)

$$b \;=\; \pm\sqrt{\frac{\lambda}{K\Big[1 + (1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)\Big]}} \tag{4.24}$$

et

$$\omega \;=\; K\lambda \frac{(1+\varepsilon)}{\Big[1 + (1+\varepsilon)\,(1+2\varepsilon)\Big]}\,. \tag{4.25}$$

Pour K et λ fixés, il existe deux couples (b,ω) et $(-b,\omega)$. Pour le premier couple (b,ω), il existe un terme forçant h et donc deux solutions distinctes qui sont U_1 et U_2. Pour le deuxième couple $(-b,\omega)$ le terme forçant h est transformé en $-h$ et les solutions U_1 et U_2 en $-U_1$ et $-U_2$. Or la matrice L reste inchangée quand on remplace U_i par $-U_i$, donc les questions de stabilité et d'instabilité restent inchangées en remplaçant b par $-b$. Donc on peut se restreindre à $b > 0$.

Sans perdre de généralité, on va supposer que $K = \lambda = 1$, cas auquel on peut se ramener par changement d'échelle de temps et par une homothétie sur (u,v). Le système s'écrit dans ce cas

$$\begin{cases} u' + u(u^2+v^2) - u \;=\; h_1 \\ v' + v(u^2+v^2) - v \;=\; h_2 \end{cases} \tag{4.26}$$

et les paramètres b et ω s'expriment en fonction de ε par:

$$\omega \;=\; \frac{1+\varepsilon}{1 + (1+2\varepsilon)\,(1+\varepsilon)}$$

et

$$b \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 + (1+2\varepsilon)\,(1+\varepsilon)}}$$

ou aussi

$$b = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 2}} \; .$$

Pour ε fixé, il existe un unique b, un unique ω et donc un unique terme forçant h pour lequel le système possède deux solutions anti-périodiques distinctes.

Proposition 4.4. (4.18) *possède deux solutions antipériodiques distinctes si et seulement si K et λ ont même signe.*

Démonstration: Si K et λ ont même signe, les formules précédentes donnent deux solutions distinctes. Supposons que K et λ sont de signes contraires et montrons que (4.18) ne peut pas avoir deux solutions antipériodiques distinctes. (4.18) s'écrit

$$U' + G(U) = h$$

avec G le gradient de la fonction suivante

$$f(u,v) \;=\; \frac{K}{4}(u^2+v^2)^2 - \frac{\lambda}{2}(u^2+v^2) \; .$$

Supposons que U_1 et U_2 soient deux solutions périodiques de (4.18) alors U_1 vérifie

$$U_1{}' + G(U_1) = h$$

et U_2 vérifie

$$U_2{}' + G(U_2) = h \; ,$$

d'où

$$U_1{}' - U_2{}' + G(U_1) - G(U_2) \;=\; 0$$

on multiplie la dernière égalité par $U_1 - U_2$, on obtient

$$\Big(U_1{}' - U_2{}', U_1 - U_2\Big) + \Big(G(U_1) - G(U_2), U_1 - U_2\Big) \;=\; 0 \; ,$$

d'où

$$\int_0^T \partial_t \frac{\|U_1 - U_2\|^2}{2}\, dt \;+\; \int_0^T \Big(G(U_1) - G(U_2),\, U_1 - U_2\Big)\, dt \;=\; 0 \; .$$

Puisque G est strictement monotone dès que $K\lambda \le 0$ et $|K| + |\lambda| \ne 0$, on en déduit que $U_1 = U_2$. ∎

4.4. Etude de la stabilité de la solution U_1

Proposition 4.5. *Si* $\varepsilon \in]-1, -\frac{1}{2}[$, *alors la solution* U_1 *est stable.*

Démonstration: La plus petite valeur propre de L est :

$$\alpha = -1 + b^2$$

ou encore

$$\alpha = -1 + \frac{1}{1 + (1 + 2\varepsilon)(1 + \varepsilon)} .$$

Ce qui équivaut à:

$$\alpha = -\frac{2\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 1}{2\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 2} .$$

En factorisant le numérateur on trouve

$$\alpha = -\frac{2(\varepsilon + \frac{1}{2})(\varepsilon + 1)}{2\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 2} .$$

Donc $\alpha > 0$ si et seulement si $\varepsilon \in]-1, -\frac{1}{2}[$. ∎

Proposition 4.6. *Si* $\varepsilon \in]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]0, +\infty[$, *alors la solution* U_1 *est instable.*

Démonstration: La matrice L est périodique de période π, ses valeurs propres vérifient

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} tr(L(s))\, ds .$$

Or

$$tr(L(s)) = 4b^2 - 2 .$$

Donc

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (4b^2 - 2)\, ds$$

ou encore

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 4b^2 - 2 ,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{4}{1 + (1 + 2\varepsilon)(1 + \varepsilon)} - 2 ,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{2\varepsilon(2\varepsilon + 3)}{2\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 2} .$$

Donc $\alpha_1 + \alpha_2 < 0$ si et seulement si $\varepsilon \in]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]0, +\infty[$.

Interprétation

Lorsque $\|\varepsilon\| \to \infty$, on a: $b \to 0$, et donc U_1 est "petite". C'est donc la partie linéaire, instable, qui domine. ∎

4.5. Etude de la stabilité de la solution U_2

Proposition 4.7. *Si $\varepsilon \in]-\infty, -1[$, alors la solution U_2 est stable.*

Démonstration: La plus petite valeur propre est

$$\beta = -1 + 2b^2\Big[(1+\varepsilon)^2 + \varepsilon^2\Big] - b^2\sqrt{4\varepsilon^2(1+\varepsilon)^2 + (1+2\varepsilon)^2}\ .$$

Posons

$$P = -1 + 2b^2\Big[(1+\varepsilon)^2 + \varepsilon^2\Big]$$

$$Q = b^2\sqrt{4\varepsilon^2(1+\varepsilon)^2 + (1+2\varepsilon)^2}$$

et

$$\beta = P - Q\ .$$

On remarque que Q est toujours positive. Cherchons le signe de P

$$P = -1 + \frac{2\Big[(1+\varepsilon)^2 + \varepsilon^2\Big]}{2\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 2}\ .$$

En réduisant au même dénominateur, on trouve

$$P = \frac{2\varepsilon^2 + \varepsilon}{2\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 2}\ .$$

D'où P est positive si et seulement si

$$\varepsilon \in]-\infty, -\tfrac{1}{2}] \cup [0, +\infty[$$

et P est négative si et seulement si

$$\varepsilon \in]-\tfrac{1}{2}, 0[\ .$$

On va considérer $\varepsilon \in]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [0, +\infty[$ car sinon P est négative dans cet intervalle et parsuite β est aussi négative. Cherchons pour quelles valeurs de ε, β est positive. $\beta > 0$ est équivalent à

$$P > b^2\sqrt{4\varepsilon^2(1+\varepsilon)^2 + (1+2\varepsilon)^2}$$

ou encore, en élevant les deux termes au carré

$$\left(\frac{2\varepsilon^2+\varepsilon}{2\varepsilon^2+3\varepsilon+2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2\varepsilon^2+3\varepsilon+2}\right)^2\Big[4\varepsilon^2(1+\varepsilon)^2+(1+2\varepsilon)^2\Big]\ .$$

Cette inégalité est vérifiée si et seulement si

$$4\varepsilon^3+7\varepsilon^2+4\varepsilon+1\ <\ 0\ .$$

Posons

$$N(\varepsilon)\ =\ 4\varepsilon^3+7\varepsilon^2+4\varepsilon+1\ .$$

On remarque que $\varepsilon=-1$ est une racine de N.
Dans ce cas, N s'écrit

$$N(\varepsilon)=(\varepsilon+1)\,(4\varepsilon^2+3\varepsilon+1)\ .$$

Dire que $\beta>0$ équivaut à $N(\varepsilon)<0$ lorsque $P>0$. ∎

Proposition 4.8. *Si* $\varepsilon\in\,]-\frac{1}{2},0[$, *la solution* U_2 *est instable.*

Démonstration: La matrice L est périodique de période π, la somme de ses valeurs propres vérifient

$$\beta_1+\beta_2\ =\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi tr(L(s))\,ds$$

or

$$tr(L(s))\ =\ 4b^2\Big[(1+\varepsilon)^2+\varepsilon^2\Big]-2\ ,$$

donc

$$\beta_1+\beta_2\ =\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\Big(4b^2\Big[(1+\varepsilon)^2+\varepsilon^2\Big]-2\Big)\,ds$$

ou encore

$$\beta_1+\beta_2\ =\ 4b^2\Big[(1+\varepsilon)^2+\varepsilon^2\Big]-2\ .$$

On remplace b par son expression en fonction de ε, on obtient

$$\beta_1+\beta_2\ =\ \frac{4}{1+(1+2\varepsilon)\,(1+\varepsilon)}\Big[(1+\varepsilon)^2+\varepsilon^2\Big]-2\ .$$

En réduisant au même dénominateur, on trouve

$$\beta_1+\beta_2=\frac{4\varepsilon^2+2\varepsilon}{2\varepsilon^2+3\varepsilon+2}\ .$$

Donc $\beta_1+\beta_2<0$ si et seulement si $\varepsilon\in\,]-\frac{1}{2},0[$. ∎

REFERENCES

[1] Abou Saleh, D. et Haraux, A. – *A Hilbert space approach to instability in semi-linear partial differential equations*, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique-Paris VI sous le numéro R 99019, 10 p (1999).

[2] Bellman, R. – *Stability Theory of Differential Equations*, MacGraw-Hill, New-York, Toronto, London (1953).

[3] Coddington, E.A. et Levinson, N. – *Theory of Ordinary Differential Equation*, MacGraw-Hill, New-York, Toronto, London (1955).

[4] Hale, J.K. – *Ordinary Differential Equations*, Pure and Applied Mathematics, R. Courant, L. Bers, J.J. Stoker (1969).

[5] Haraux, A. – Stability questions in PDE, Lecture Notes, *Georgia Tech. seminar-course,* CDNS 92-90 (1992), 84 p.

[6] Souplet, Ph. – Optimal uniqueness condition for the antiperiodic solutions of some nonlinear parabolic equations, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications,* 32(2) (1998), 279–286.

[7] Souplet, Ph. – Une condition optimale d'unicité pour les solutions anti-périodiques d'équations d'évolution paraboliques, *C.R. Acad. Sc. Paris,* 313, Série I (1991), 365–370.

Daad Abou Saleh,
Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie,
Boîte courrier 187, 75252 Paris Cedex 05 – FRANCE
E-mail: daad.abousaleh@ccf.com