

GRÁFICOS DE CONTROL PARA LA MEDIA DE UN PROCESO EN POBLACIONES CON DISTRIBUCIÓN ASIMÉTRICA

EMERSON A. CHAPARRO S. *
JOSE A. VARGAS N. **

Resumen

En este artículo se presenta un método heurístico para la construcción de cartas de control para la media de un proceso cuando la distribución de la característica de interés no es simétrica. El método propuesto ajusta los límites de acuerdo a la dirección de la asimetría observada en los datos y coincide con el método clásico de Shewhart bajo condiciones de simetría. Se hicieron simulaciones para compararlo con los métodos de Shewhart, Choobineh y Ballard (1987) y Bai y Choi (1995). Se encontró que el método propuesto es aconsejable cuando la distribución de la característica de interés es moderadamente asimétrica; en caso contrario el método de Bai y Choi ajusta de manera óptima los límites de control de la carta \bar{X} .

Palabras Claves: Carta de Control, Probabilidad de Cobertura, Distribución Sesgada, Método Heurístico.

*Estadístico. Universidad Nacional de Colombia. e-mail:emerch75@yahoo.com

**Profesor Asociado, Departamento de Estadística, Universidad Nacional de Colombia; e-mail:avargas@matematicas.unal.edu.co

1. Introducción

En ciertos procesos industriales es común encontrarse con variables cuya distribución no es simétrica, por ejemplo, los tiempos de vida y algunos procesos químicos. Al aplicar una técnica estadística para el análisis de un conjunto de datos es necesario tener en cuenta las hipótesis que dicha técnica supone para su aplicación.

De acuerdo con Choobineh y Ballard(1987), en control de calidad existen tres posibilidades para enfrentar el problema de la asimetría en las distribuciones de la variable de interés para la construcción de cartas de control. La primera es no tener en cuenta el sesgo de la variable y construir la carta de acuerdo con las especificaciones de Shewhart; esta opción se basa en los trabajos realizados por Burr, según los cuales las cartas de control de Shewhart para la media son insensibles al sesgo de la población cuando las observaciones son agrupadas y se grafican con sus respectivas medias, a menos que ésta sea altamente sesgada (Choobineh y Ballard(1987)). La segunda opción es suponer una distribución para la característica en estudio y construir la carta de acuerdo con la probabilidad de cobertura preestablecida; algunos “precursores” de esta idea son Nelson, Bianco y Ferrell (citados en Choobineh y Ballard (1987) y Bai y Choi (1995)). Nelson desarrolló constantes para los límites de cartas de la mediana, rango, escala y localización. Bianco propuso una estadística para controlar los parámetros de escala y localización. Ambos supusieron que la distribución objetivo de la población era Weibull. Ferrell asumió que la distribución de la característica de calidad era lognormal y sugirió usar la carta de rango medio geométrico, en vez de la carta \bar{X} y la carta de rango geométrico en vez de la carta R . La tercera opción consiste en no suponer distribución alguna y obtener las cartas mediante procesos heurísticos alcanzando una probabilidad de cobertura deseada; algunos exponentes de esta opción son Choobineh y Ballard (1987)y Bai y Choi (1995).

Basados en los trabajos de Choobineh y Ballard (1987) y Bai y Choi (1995), se presenta una metodología heurística para la construcción de cartas de control para la media de un proceso que ajusta los límites de la carta de acuerdo a la dirección de la asimetría que la función de distribución de la característica de interés presente. El nuevo método propuesto proporciona los mismos límites que el método de Shewhart cuando la población objetivo es simétrica. Pero cuando la población objetivo es asimétrica los límites son ajustados de acuerdo con el grado de asimetría, siempre y cuando el grado de asimetría sea moderada. Como se mencionó anteriormente, los resultados obtenidos fueron comparados con los otros tres mediante métodos de simulación; para ello se observó en

primer lugar el comportamiento de la metodología propuesta bajo el supuesto de normalidad para comprobar el comportamiento esperado; esto es, que el método propuesto se reduce a la metodología Shewhart; luego se asumió que la población objetivo tenía una distribución Weibull con parámetro de forma α ($\alpha = 0,25, 0,5, 1, 2, 6$), y parámetro de localización $\beta = 1$ para comparar nuestro método con el de Choobineh y Ballard (1987) y Bai y Choi (1995). Por último, se asumió que la población objetivo seguía una distribución lognormal y gamma para observar el comportamiento de nuestra metodología en dichas poblaciones.

Las probabilidades de cobertura obtenidas por el método heurístico propuesto son similares y en algunos casos mayores a las obtenidos por las otras metodologías en función del tamaño de muestra y del valor de los parámetros de forma. Otra característica del nuevo método radica en la simplificación de los cálculos para la obtención de los límites.

Se entiende por método heurístico aquel que se desarrolla con base en los resultados hallados a partir de simulaciones. Para mayor comprensión del tema se presentará a continuación un bosquejo de los métodos considerados como patrón de comparación.

2. Carta de Control \bar{X}

La construcción de una carta \bar{X} supone una serie de condiciones y se basa en las estimaciones derivadas de los datos; ello implica que las condiciones en que se tomen deben permanecer constantes en los intervalos de observación desde el inicio del estudio.

Los supuestos de la metodología de Shewhart para operar una carta \bar{X} son los siguientes:

- La distribución de los datos es normal o aproximadamente normal.
- Los tamaños de los grupos son iguales.
- Las observaciones son independientes.
- Todos los grupos son igualmente ponderados (Wetherill y Brown, 1991)

Cuando no se conocen los valores de μ y σ los límites 3σ para la media están dados por:

$$\bar{\bar{x}} \pm 3 \frac{\bar{S}}{c_4 \sqrt{n}}$$

donde $\bar{\bar{x}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{x}_i$ (Media Global), $\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i$

y

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2} \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, m$$

c_4 es una constante que puede calcularse a partir del tamaño muestral n .

En la literatura es común encontrar los límites de control expresados de la siguiente forma:

$$\bar{\bar{X}} \pm A_3 \bar{S}$$

donde

$$A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}}$$

Algunos valores de las constantes c_4 y A_3 en función del tamaño de la muestra se encuentran en el cuadro 1 adaptado de Duncan (1952).

n	c_4	A_3	d_2	A_2
2	0.798	2.66	1.128	1.88
3	0.866	1.95	1.693	1.02
4	0.921	1.63	2.059	0.73
5	0.940	1.43	2.326	0.58
6	0.952	1.29	2.534	0.48
7	0.959	1.18	2.704	0.42
8	0.965	1.10	2.847	0.37
9	0.969	1.03	2.970	0.34
10	0.973	0.98	3.078	0.31

Cuadro 1: Valores de c_4 , A_3 , d_2 y A_2 para algunos valores de n

En muchas aplicaciones prácticas de los métodos de control de calidad, se utilizan rangos en lugar de desviaciones típicas para medir la variabilidad. Una estimación para la desviación típica es:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

donde d_2 es una constante que se encuentra en función de n . De este modo, la carta \bar{x} queda determinada por los siguientes componentes:

$$LC = \bar{\bar{x}}$$

$$LCI = \bar{\bar{x}} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R}$$

$$LCS = \bar{\bar{x}} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R}$$

donde A_2 es una constante que depende de n . Algunos valores de d_2 y A_2 se presentan en el cuadro 1.

Como se mencionó anteriormente, uno de los supuestos fuertes bajo el cual se encuentra sustentada la construcción de la carta control \bar{x} hace referencia a la distribución que sigue la característica de interés. Sin embargo, en algunos procesos industriales los datos que se obtienen conllevan a dudar de la validez de este supuesto. Por ejemplo, ciertas medidas de procesos químicos y observaciones de tiempos de vida son frecuentemente sesgadas. Por tal motivo, el supuesto de normalidad es un problema que conduce a explorar otras posibles soluciones. A continuación se presentan algunos aportes que algunos autores han dado al respecto; particularmente, los obtenidos por Choobineh y Ballard (1987) y Bai y Choi(1995).

3. Cartas de control para la media de un proceso en poblaciones con distribución sesgada

El método propuesto por Choobineh y Ballard (1987) el cual denominaron método WV (las letras WV hacen alusión a la nomenclatura de Weighted-Variance) posee como base principal el concepto del método de distribución recortada. La idea principal del método en mención, consiste en dividir la distribución asimétrica en dos segmentos, con los cuales se crean dos distribuciones simétricas que poseen la misma media de la distribución original, pero diferentes desviaciones estándar. El método WV usa dichas distribuciones para obtener los límites de la carta de control, una para obtener el límite inferior (LCI) y la otra para deducir el límite de control superior de la carta (LCS). De esta forma, si la distribución es sesgada a la derecha, la distancia del LCI a la media del proceso es menor que la distancia que se obtenga de la media del proceso a LCS. De manera análoga se tiene si la distribución es sesgada a la izquierda; es decir, la distancia de la media del proceso al LCI es mayor que la distancia establecida hasta el LCS, si la distribución es simétrica, las distancias de la línea central de la carta a cada uno de los límites será la misma.

Al igual que las cartas de control tipo Shewhart, el método WV, usa la desviación estándar del proceso para calcular cada uno de los límites de control; la diferencia radica en que la desviación estándar se multiplica por factores de ponderación diferentes de acuerdo al límite; es decir, para el límite inferior se multiplica la desviación por el factor $\sqrt{2(1-P_x)}$ y para el límite de control superior se utiliza el factor $\sqrt{2P_x}$; donde P_x representa la probabilidad de que

la variable aleatoria sea menor o igual que su media.

De esta manera, los límites de control para la carta \bar{x} de acuerdo al método WV son los siguientes:

$$LCS = \mu_x + \frac{3\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{2P_x}$$

$$\text{Línea Central} = \mu_x$$

$$LCI = \mu_x - \frac{3\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{2(1 - P_x)}$$

donde σ_x es la desviación estándar de X . Cuando μ_x y σ_x son desconocidos, se estiman de la siguiente forma:

$$\hat{\mu}_x = \bar{\bar{x}}; \text{ y } \hat{\sigma}_x = S_x$$

$\bar{\bar{x}}$ representa la media global de todas las observaciones de la muestra; es decir,

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i$$

y P_x se estima de la siguiente manera:

$$\bar{\bar{P}}_x = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I(\bar{x}_i)$$

donde

$$I(\bar{x}_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } \bar{x}_i \leq \bar{\bar{x}} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Algunas de las conclusiones más sobresalientes que presentaron Choobineh y Ballard (1987) consiste en la obtención de probabilidades de cobertura mayores a 0,98, con lo cual el método resulta ser bueno en poblaciones con distribución sesgada. Dichas probabilidades resultaron ser robustas con respecto al cambio en los valores de n y α , es decir, el método presentado por los autores ajusta el sesgo del proceso. La metodología propuesta resulta ser equivalente al método Shewhart cuando la distribución es aproximadamente simétrica ($\alpha = 6$).

En Bai y Choi (1995), los autores se basan en el método WV. El aporte que Bai y Choi (1995) dieron a la metodología propuesta se podría resumir en el hallazgo de constantes, similares a las utilizadas en la metodología Shewhart, que tienen en cuenta el tipo de sesgo que posee la distribución de la característica de interés. En dicho artículo presentan una tabla de las constantes en

mención para cada uno de los grados de asimetría.

La carta de control para la media del proceso propuesta por Bai y Choi (1995) se construye de la siguiente manera:

$$LCS = \bar{\bar{X}} + 3 \left(\frac{\bar{R}}{d'_2 \sqrt{n}} \right) \sqrt{2\hat{P}_X} = \bar{\bar{X}} + W_U \bar{R}$$

$$LC = \bar{\bar{X}}$$

$$LCI = \bar{\bar{X}} - 3 \left(\frac{\bar{R}}{d'_2 \sqrt{n}} \right) \sqrt{2(1 - \hat{P}_X)} = \bar{\bar{X}} - W_L \bar{R}$$

donde. \hat{P}_X : Un estimador de P sobre las m muestras. d'_2 : es una constante para poblaciones no normales que depende del sesgo y kurtosis de los datos. y W_U y W_L son constantes que se encuentran tabuladas para ciertas combinaciones de n y P_X .

En este caso se tiene que:

$$\hat{P}_x = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \delta(\bar{x} - x_{ij})}{mn}$$

donde $\delta(x) = 0$ para $x < 0$ e igual a 1 en otro caso.

Al igual que los primeros autores, Bai y Choi(1995) asumieron que la distribución de la población objetivo era Weibull con parámetro de localización fijo y parámetro de forma variable. Usando simulación de Montecarlo, el método WV fue comparado con los métodos de Shewhart y Ferrell mediante el uso de distribuciones objetivo Weibull o Distribución de Burr. Los métodos fueron comparados con base en la probabilidad de riesgo tipo I (una muestra extrema conduzca a tomar una acción, cuando no ha ocurrido cambio en el proceso). Las probabilidades de riesgo fueron obtenidas por simulación de Montecarlo para cada una de las metodologías (WV, Shewhart y Ferrell).

De acuerdo con los resultados obtenidos en sus simulaciones, el método propuesto por Bai y Choi resulta ser comparable con la metodología Shewhart cuando las poblaciones son aproximadamente simétricas. De igual forma cuando α_3 (sesgo) crece, el método resulta ser significativamente mejor que el método Shewhart; de esta forma, las cartas \bar{x} y R obtienen errores tipo I menores que 0,010 y 0,015. En cuanto al método Ferrell, los errores tipo I del método WV son consistentemente menores que los obtenidos en el método Ferrell.

4. Método Propuesto

Sean $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$ variables aleatorias originadas para la i -ésima muestra ($j = 1, 2, \dots, m$) de una población con función de probabilidad $f(\cdot)$. Con base en ellas definamos los siguientes estadísticos:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}$$

$$X_{(n)} = \text{Max}\{X_{ij}; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$$

$$X_{(1)} = \text{Min}\{X_{ij}; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$$

$$R_{(n)} = X_{(n)} - X_{(1)}$$

Es decir, $R_{(n)}$ es el rango de las $m * n$ observaciones generadas. Con base en estas estadísticas, sea K la variable aleatoria definida de la siguiente forma:

$$K = \frac{X_{(n)} - \bar{\bar{x}}}{R_{(n)}}$$

Bajo el supuesto que $f(\cdot)$ es simétrica, tenemos que $K \cong 0,5$. Si la distribución es sesgada a la derecha $K > 0,5$ y por el contrario si la distribución presenta un sesgo a la izquierda $K < 0,5$. De este modo, establecemos como factor de corrección para el límite de control inferior $\sqrt{2(1-K)}$, y para el límite de control superior $\sqrt{2K}$. Así, los límites de control para la carta \bar{x} son:

$$LCI = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} \sqrt{2(1-K)}$$

$$LCS = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R} \sqrt{2K}$$

De esta manera, si la población es simétrica, el método se reduce al método Shewhart, pero si la población es sesgada el método ajusta los límites de acuerdo al grado de asimetría que presenta la población objetivo. Por ejemplo, si la población es sesgada a la derecha, la distancia del límite de control superior a la media del proceso es mayor que la distancia del límite de control inferior a la media del mismo.

Estos mismos pasos fueron seguidos para las cartas en poblaciones cuya característica de calidad siguieron funciones de distribución lognormal y gamma.

5. Ejemplo

Para dar una idea del funcionamiento y de la aplicación del método propuesto se utilizaron los datos de Cowden(1957) que también fueron aplicados por Bai y Choi(1995) en la ilustración de la técnica presentada por ellos en su artículo. Estos datos corresponden a 30 muestras aleatorias de cinco medidas cada una, representando las concentraciones de residuos resultantes de un proceso químico el cual se encuentra bajo control. Los datos se presentan en el anexo 5. Con base en ellos se obtuvieron los siguientes valores: Media General: $\bar{x} = 18,45$, Máximo General: $X_{(n)} = 135$, Mínimo General: $X_{(1)} = 1$, Rango General: $R_{(n)} = 134$; Rango Promedio: $\bar{R} = 40,40$. Con base en estos valores se calculó la constante K propuesta para obtener los límites de control. Aplicando la fórmula se obtuvo que $K = 0,8698$. Teniendo en cuenta que el tamaño de las muestras es $n = 5$ y de acuerdo con la Tabla 2, tomamos $A_2 = 0,58$. Con base en los anteriores valores se calculan los límites de control para la media del proceso de acuerdo al método propuesto.

$$LCI = 18,45 - (40,40) * (0,58) * \sqrt{2(1 - 0,8698)} = 6,55574$$

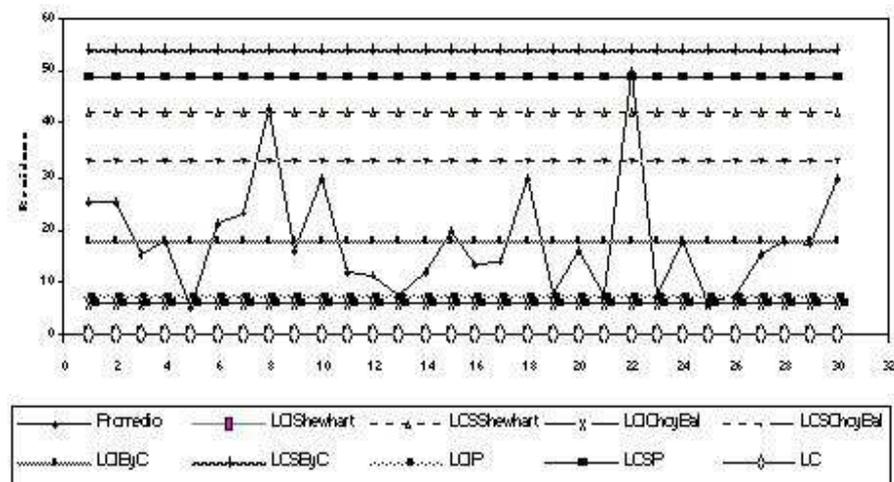
$$LC = 18,45$$

$$LCS = 18,45 + (40,40) * (0,58) * \sqrt{2(0,8698)} = 49,198$$

donde LC representa la Línea Central de la carta, correspondiente a la media del proceso, LCI es el Límite de Control Inferior y LCS hace referencia al Límite de Control Superior. Los límites obtenidos por Bai y Choi (1995) para la carta de control presentados en su artículo fueron: $LCS = 53,98$ y $LCI = -6,18$. Los límites para la carta de control mediante la metodología de Choobineh y Ballard (1987) son: $LCS = 33,67$ y $LCI = 6,87$. Del mismo modo, los límites de control mediante la metodología Shewhart para la carta de control son: $LCS = 41,86$ y $LCI = -4,96$.

Los resultados muestran que las distancias del LCS a la media del proceso, para las metodologías de Choobineh y Ballard, y Bai y Choi y el propuesto en este trabajo son mayores que las obtenidas por el método de Shewhart.

En el gráfico 1 se muestran las cartas para las distintas metodologías. Se observa que los límites obtenidos mediante los métodos de Bai y Choi y el propuesto muestran que el proceso se encuentra bajo control, tal como se suponía, mientras que los otros dos métodos establecen “falsas” señales de fuera de control.



6. Resultados

Para observar el comportamiento de las metodologías consideradas cuando la distribución de la característica de calidad es normal, tal como establece la metodología Shewhart, se presentan en el anexo 2 la tabla y gráfica correspondiente a las cartas establecidas y probabilidades de cobertura alcanzadas por cada uno de los métodos. Con base en la tabla 2A y gráfico 2A se observa que los cuatro métodos resultan ser equivalentes al método clásico. De esta forma se comprueba que el procedimiento propuesto se reduce al método clásico cuando la distribución de la característica de interés es normal o aproximadamente normal. Los resultados obtenidos en la simulación que se describió anteriormente, para poblaciones cuya característica de interés siguen una distribución Weibull se encuentran en la tabla del anexo 2, y de una manera más clara, en el gráfico del mismo anexo. La razón de trabajar con la distribución Weibull es que esta puede tomar una gran variedad de formas, desde altamente sesgadas hasta distribuciones casi simétricas de acuerdo a los cambios en el valor del parámetro de forma (Choobineh y Ballard, (1987)); por conveniencia de cálculos se tomó el parámetro de escala igual a 1 ($\beta = 1$).

Las tablas muestran los límites de control 3σ y una estimación de la probabilidad de cobertura para cada una de las cartas y para cada una de las combinaciones tamaño de muestra (n)– parámetro de forma (α) de la distribución Weibull. En ella se observa que los límites resultantes al aplicar el método propuesto son más cercanos a los registrados por los métodos de Choobineh

y Ballard y Bai y Choi, cuando la población presenta un grado de asimetría "moderada" ($\alpha = 1, 2$); esto es, en este caso los métodos resultan ser comparables y los métodos resultan ser equivalentes cuando la distribución es casi simétrica ($\alpha = 6$). Caso contrario ocurre cuando la población es "altamente sesgada" ($\alpha = 0,25, 0,5$); en este caso las probabilidades de cobertura obtenidas son más bajas que las obtenidas por los otros tres métodos. En este caso, el método que mejor ajusta la simetría de la población es el propuesto por Bai y Choi. Para cada uno de los casos de asimetría "moderada" ($\alpha = 1, 2$), se tiene que el método propuesto provee probabilidades de cobertura mayores de 0,99 y difieren poco ante cambios en los valores del tamaño de muestra (n).

Cuando la característica de calidad se distribuye lognormal, al igual que en el caso anterior, las probabilidades de cobertura obtenidas por el método propuesto son mayores de 0,90 y son indistintas con respecto al tamaño de la muestra; sin embargo, los límites de control son más "angostos" que los obtenidos por los otros tres métodos. En este caso, el método que mejor ajusta la asimetría es el propuesto por Bai y Choi.

Dicho comportamiento se mantiene cuando la distribución que sigue la característica de interés es gamma. En el anexo 2, se presenta la tabla de las cartas de control y probabilidades de cobertura asociadas a éstas obtenidas en la simulación. De acuerdo con ellas, se observa un comportamiento similar al caso anterior, esto es, el método propuesto obtiene probabilidades de cobertura mayores de 0,80, las cuales, se incrementan a medida que el parámetro de forma (α) de la distribución gamma también crece. Es así que para $\alpha = 1$ el método propuesto obtiene probabilidades de cobertura similares a los métodos de Shewhart y Choobineh y Ballard. Sin embargo la metodología propuesta por Bai y Choi (1995) resulta ser más eficaz obteniendo probabilidades de cobertura mayores a 0,97 y éstas son robustas con respecto al cambio en el valor del parámetro de forma (α).

7. Conclusiones

En este artículo se presentó un nuevo método heurístico para establecer los límites de control para la media de un proceso. Dicho método se basó en el trabajo presentado por Choobineh y Ballard (1987), el cual se reduce al método de Shewhart cuando la característica de calidad se distribuye normalmente. Para establecer el comportamiento del nuevo procedimiento para la obtención de los límites se supuso que la distribución asociada a la característica de interés seguía una distribución Weibull, lognormal y gamma.

En la simulación desarrollada, se tomó como elemento de evaluación la estimación de la probabilidad de cobertura. Con base en ella se concluyó que la metodología propuesta es aplicable en poblaciones cuando la distribución de la característica de interés posea una asimetría "moderada". En términos de la distribución Weibull, cuando se tenga conocimiento que el parámetro de forma sea mayor de 1. En poblaciones cuya distribución de la característica de interés posea una asimetría "severa", es decir, cuando el parámetro de asimetría sea menor que 1, el método que se recomienda utilizar es el presentado por Bai y Choi (1995).

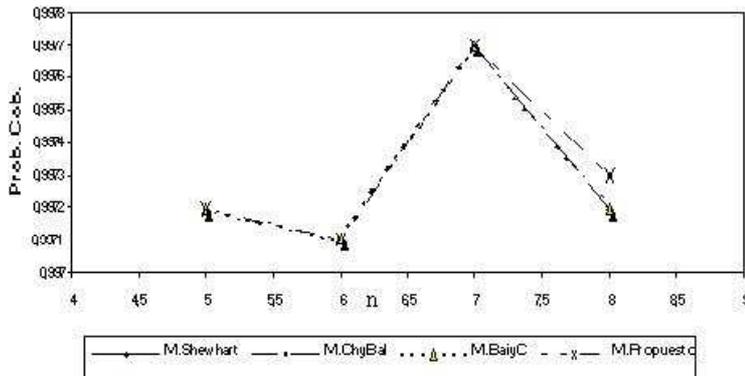
Del mismo modo, se encontró que en estudios en los que la característica de interés posea una distribución lognormal o gamma, la metodología propuesta por Bai y Choi (1995) resulta ser más eficaz que los otros métodos considerados en este trabajo.

Referencias

- [1] Bai, D.S., and Choi I. S. \bar{X} and R Control charts for skewed populations. Journal of Quality Technology. **27** (1995), 120–131, N 2.
- [2] Choobineh, F., and Ballard J.L., *Control-limits of QC Charts for skewed distributions using weighted-variance* IEEE Transactions on reliability. **R-36** (1987), 473–477, N 4.
- [3] Cowden, D.J., *Statistical methods in quality control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1957).
- [4] Duncan, Acheson, *Quality control and industrial statistics*. Richard D. Irwin, Inc. Chicago, (1952).
- [5] Vargas, J. A., *Control estadístico de procesos: Cartas de control*. XIII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística., Santa Fe de Bogotá, D.C. (1999).
- [6] Walpole R. E., Myers R. H., *Probabilidad y Estadística*. Mc Graw Hill, 4 edición, (1996).
- [7] Wetherill G.B., Brown D.W., *Statistical process control. Theory and practice*. Chapman and Hall, (1991).

A. Límites de control y probabilidades de cobertura para los cuatro métodos para una población normal estándar

n	Mét.Shewhart			Mét.WV (Choob. y Ball.)			Mét.WV (Bai y Choi)			Mét.Propuesto		
	LCI	LCS	PrCb	LCI	LCS	PrCb	LCI	LCS	PrCb	LCI	LCS	PrCb
5	-1.343	1.340	0.997	-1.343	1.340	0.997	-1.343	1.340	0.997	-1.343	1.340	0.997
6	-1.225	1.225	0.997	-1.221	1.226	0.997	-1.225	1.225	0.997	-1.223	1.224	0.997
7	-1.137	1.129	0.997	-1.136	1.126	0.997	-1.137	1.128	0.997	-1.135	1.128	0.997
8	-1.060	1.062	0.997	-1.060	1.059	0.997	-1.060	1.062	0.997	-1.061	1.059	0.997

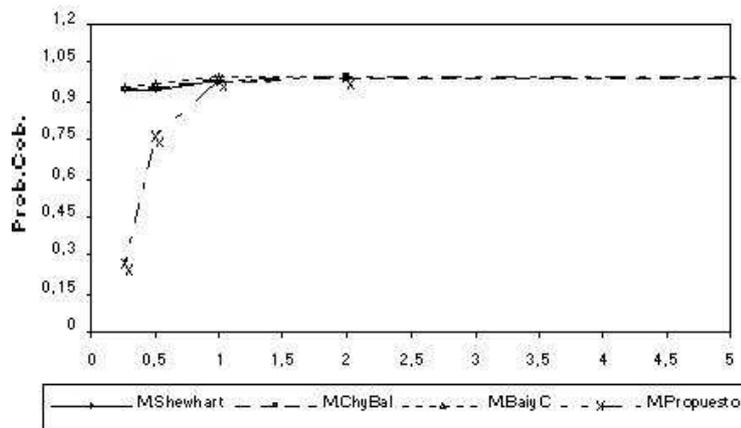


B. Límites de control y probabilidades de cobertura para los cuatro métodos para una población Weibull

Parámetro de forma $\beta = 1$

n	α	Método Shewhart			Método WV (Choob. y Ball.)		
		LCI	LCS	PrCb	LCI	LCS	PrCb
5	0.25	-38.3870	86.7342	0.9412	-14.5555	103.2234	0.9507
5	0.5	-1.8054	5.8038	0.9490	-1.2013	6.3101	0.9589
5	1	-0.2015	2.2025	0.9854	-0.1287	2.2675	0.9877
5	2	0.2716	1.5004	0.9968	0.2836	1.5104	0.9972
5	6	0.6874	1.1680	0.9967	0.6851	1.1649	0.9968

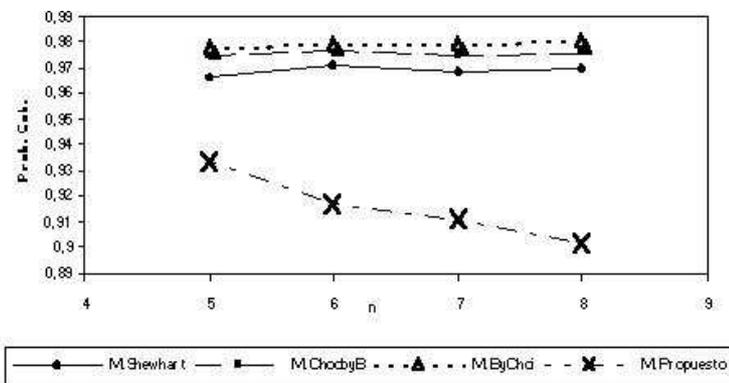
n	α	Método WV (Bai y Choi)			Método Propuesto		
		LCI	LCS	PrCb	LCI	LCS	PrCb
5	0.25	-4.1951	107.8160	0.9538	11.5741	111.6913	0.2710
5	0.5	-0.6504	6.6785	0.9655	0.6177	7.1936	0.7691
5	1	-0.0308	2.3511	0.9911	0.2746	2.5356	0.9821
5	2	0.2995	1.5268	0.9974	0.3652	1.5806	0.9968
5	6	0.6808	1.1610	0.9971	0.6722	1.1512	0.9970



C. Límites de control y probabilidades de cobertura para los cuatro métodos para una población lognormal

n	Método Shewhart			MétodoWV (Choob. y Ball.)		
	LCI	LCS	PrCb	LCI	LCS	PrCb
5	-0.4777	3.7838	0.9659	-0.2310	3.9968	0.9745
6	-0.3363	3.6324	0.9709	-0.1158	3.8239	0.9769
7	-0.2166	3.5037	0.9690	-0.0246	3.6709	0.9751
8	-0.1436	3.4348	0.9701	0.0396	3.5940	0.9754

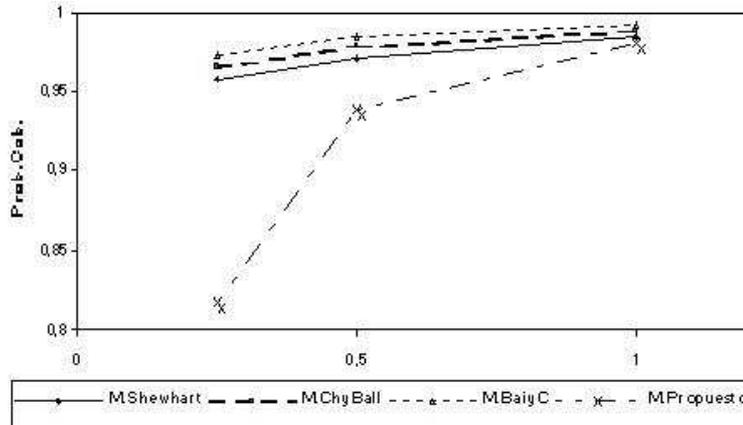
n	Método WV (Bai y Choi)			Método Propuesto		
	LCI	LCS	PrCb	LCI	LCS	PrCb
5	-0.0180	4.1584	0.9784	0.6449	4.4866	0.9333
6	0.0907	3.9809	0.9796	0.7444	4.2996	0.9168
7	0.1827	3.8299	0.9789	0.8078	4.1336	0.9110
8	0.2438	3.7509	0.9807	0.8581	4.0549	0.9013



D. Límites de control y probabilidades de cobertura para los cuatro métodos para una población gamma

n	β	α	Método Shewhart			Método WV (Choob. y Ball.)		
			LCI	LCS	PrCb	LCI	LCS	PrCb
5	1	0.25	-0.2294	0.7312	0.9575	-0.1710	0.7818	0.9664
5	1	0.5	-0.2762	1.2757	0.9722	-0.2097	1.3347	0.9790
5	1	1	-0.2020	2.2015	0.9856	-0.1301	2.2658	0.9889

n	β	α	Método WV (Bai y Choi)			Método Propuesto		
			LCI	LCS	PrCb	LCI	LCS	PrCb
5	1	0.25	-0.0930	0.8364	0.9733	0.0588	0.9019	0.8176
5	1	0.5	-0.1185	1.4059	0.9848	0.1154	1.5265	0.9397
5	1	1	-0.0309	2.3504	0.9919	0.2745	2.5347	0.9808



E. Datos de Cowden (1957). Residuos resultantes de un proceso químico

Grupo	E1	E2	E3	E4	E5	Promedio	Mínimo	Máximo	Rango
1	5	29	2	21	65	24.4	2	65	63
2	10	30	3	68	11	24.4	3	68	65
3	35	13	4	17	14	16.6	4	35	31
4	51	25	5	10	4	19	4	51	47
5	11	1	10	9	4	7	1	11	10
6	8	12	54	16	14	20.8	8	54	46
7	34	4	38	32	9	23.4	4	38	34
8	47	3	110	11	45	43.2	3	110	107
9	3	36	6	27	10	16.4	3	36	33
10	8	22	24	78	17	29.8	8	78	70
11	13	13	8	9	25	13.6	8	25	17
12	4	18	11	2	19	10.8	2	19	17
13	5	5	16	6	10	8.4	5	16	11
14	12	10	24	12	2	12	2	24	22
15	56	15	2	17	15	21	2	56	54
16	7	37	9	8	5	13.2	5	37	32
17	12	4	37	7	20	16	4	37	33
18	6	28	4	93	21	30.4	4	93	89
19	4	4	20	11	4	8.6	4	20	16
20	62	4	5	3	8	16.4	3	62	59
21	4	15	6	15	10	10	4	15	11
22	36	31	135	10	30	48.4	10	135	125
23	4	4	7	24	3	8.4	3	24	21
24	26	14	22	3	20	17	3	26	23
25	7	2	16	6	5	7.2	2	16	14
26	6	3	6	14	12	8.2	3	14	11
27	6	18	2	32	11	13.8	2	32	30
28	11	11	18	33	19	18.4	11	33	22
29	9	41	14	8	13	17	8	41	33
30	6	6	49	72	16	29.8	6	72	66