LE SPECTRE DU LAPLACIEN : SURVOL PARTIEL DEPUIS LE BERGER-GAUDUCHON-MAZET ET PROBLÈMES

Yves COLIN DE VERDIÈRE *

Institut Universitaire de France
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
F-38402 Saint Martin d'Hères Cedex (France)

Abstract. I present some results obtained since the 70's on the direct and inverse problem for the spectrum of the Laplacian on a compact Riemannian manifold, spectrum and closed geodesics, spectrum and graphs, planar electrical nets.

Résumé. Je présente quelques résultats obtenus depuis les années 70 sur le problème direct et inverse pour le spectre du laplacien d'une variété riemannienne compacte : spectre et géodésiques fermées, spectre et graphe, réseaux électriques planaires.

M.S.C. Subject Classification Index (1991) : 58G15, 05C99.

*GADGET

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de donner un bref aperçu de ce qui à mes yeux constitue quelques développements marquants concernant l'étude des problèmes *directs* et *inverses* de la théorie spectrale du laplacien d'une variété riemannienne compacte depuis la parution en 1971 du Berger-Gauduchon-Mazet (alias [B-G-M]), le spectre d'une variété riemannienne compacte.

Ce livre a eu l'immense mérite d'attirer l'attention des géomètres riemanniens sur l'intérêt du spectre du laplacien comme invariant géométrique au même titre que la courbure, les géodésiques fermées, etc... De plus, il rassemblait pour le lecteur l'essentiel des connaissances du moment, qu'elles soient parues ou qu'elles fassent partie du folklore du sujet: exemples explicitement calculés, traitement détaillé de la méthode de l'équation de la chaleur, inégalité de Cheeger, etc...

L'impact de ce livre a été considérable et n'est sûrement pas étranger à la popularité qu'a acquis le spectre en 20 ans (voir [BE-B] pour une bibliographie jusqu'à 1982).

Pour la clarté, il m'a paru raisonnable de séparer cet exposé de façon un peu artificielle en 2 parties.

I. Problèmes inverses : quelles informations sur la variété riemannienne peut être lue dans le spectre ?

Le problème de l'isospectralité relève de ce thème, je n'y ferai pas allusion, me contentant de renvoyer à l'exposé de Hubert Pesce à cette table ronde.

Je me restreindrai ici à 2 sujets : *spectre du laplacien et longueurs des géodésiques fermées* et *déterminant et compacité.*

II. Problèmes directs.

Il s'agit de savoir quelles suites de nombres réels peuvent être le spectre d'un laplacien riemannien ou d'un opérateur de Schrödinger sur une variété compacte X donnée, la difficulté principale étant liée aux questions de multiplicités.

On évoquera en particulier la différence créée par la présence de champs magnétiques. On donnera un aperçu de travaux récents sur les réseaux électriques et les perspectives pour la compréhension de l'intégrale de Dirichlet.

Ce texte est dédié à Marcel Berger, mon directeur de thèse. Je saisis l'occasion pour lui exprimer mon admiration et ma reconnaissance.

La présente version de ce texte est postérieure de 2 annnées à la table ronde et j'ai donc tenu compte de quelques résultats postérieurs.

1. PROBLÈMES INVERSES

IA. Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques fermées.

Notons $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_k \leq ...$ le spectre d'une variété riemannienne compacte connexe (X, g) (voir [BGM]) et par $\mathcal{L}(X, g)$ l'ensemble des longueurs des géodésiques fermées (0 inclus, fermées=périodiques mais pas nécessairement primitives) de (X, g).

On a le théorème.

Théorème — *Soit $S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-it\sqrt{\lambda_k}}$, alors le support singulier de la distribution tempérée $S(t)$ est inclus dans $\pm\mathcal{L}(X, g)$ et on a égalité dans le cas suivant (grâce au calcul exact de la partie principale de la singularité) dit non dégénéré : la métrique g sur X sera dite* non dégénérée *si la fonction énergie sur l'espace des lacets de (X, g) n'admet que des variétés critiques non dégénérées au sens de Bott (c'est en particulier le cas si la différentielle de l'application de Poincaré n'admet pas 1 comme valeur propre) et les valeurs critiques prises sur les géodésiques fermées sont distinctes sauf éventuellement pour des géodésiques identiques à orientation près (c'est le cas si la courbure est < 0 et aussi dans la situation générique).*

En particulier, dans les cas précédents le spectre du laplacien détermine les longueurs des géodésiques périodiques.

Commentaires : ce théorème a été démontré pour la première fois dans ma thèse en 1973 ([CV1]) en utilisant une méthode dérivée de celle de l'équation de la chaleur et en fait proche de l'intégrale de Feynman, la formulation en termes de support singulier a été obtenue peu après, suite à mes travaux, par J. Chazarain et H. Duistermaat-V. Guillemin ([D-G]) ; ils utilisent le calcul des opérateurs intégraux de Fourier de Hörmander et le calcul précis de la partie principale des singularités à l'aide de la différentielle de l'application de Poincaré des géodésiques périodiques leur est dû.

Ce théorème résulte de l'écriture de formules de traces pour certaines fonctions du laplacien : l'exponentielle complexe $e^{-z\Delta}$ (Schrödinger) dans mon cas, l'exponentielle $e^{-it\sqrt{\Delta}}$ (équation des ondes) pour les autres auteurs. Ces formules sont des généralisations approchées des formules de Poisson (cas des tores plats) et de Selberg (cas des surfaces à courbure -1).

De telles formules avaient été obtenues peu auparavant de façon non rigoureuse par les physiciens Gutzwiller ([GU]) et Balian-Bloch ([B-B]). Les travaux de ces derniers ont été directement à l'origine de ma thèse. J'en ai eu connaissance grâce à Marcel Berger.

Il est clair que l'intégrale de Feynman est au cœur du sujet, fournissant une heuristique donnant simplement la formule de traces ([CV2], [CV8]), y compris le terme lié à l'application de Poincaré, le déterminant du Hessien de l'énergie étant calculable en ces termes ([KA]).

On pourra, pour les développements récents du côté de la physique, se référer à l'école d'été des Houches organisée par Gianonni et Voros sur le chaos quantique ([G-V]).

Applications : le théorème précédent a des applications importantes pour le problème inverse. Il a conduit à des théorèmes de rigidité spectrale en courbure négative (absence de déformations isospectrales non triviales : travaux de V. Guillemin-D. Kazdan [G-K], améliorés par M. Min-Oo [MO]).

Le problème de savoir si le flot géodésique détermine la métrique a fait l'objet récemment d'une attention importante (voir exposé de C. Croke à cette table ronde).

Problèmes : a) A-t-on toujours égalité entre le support singulier de $S(t)$ et l'ensemble $\pm\mathcal{L}(X,g)$? Ce problème est à ma connaissance toujours ouvert, ainsi que la question analogue dans le cas analytique. Il semble raisonnable de penser que dans le cas C^∞ la réponse est non. C'est moins clair pour le cas analytique. Dans le cas de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique B constant sur un tore plat, le support singulier de la trace

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-it\sqrt{B(k+\frac{1}{2})}}$$

est réduit à 0.

b) La formule de traces est reliée aux oscillations de la densité des valeurs propres. Il s'agit cependant d'une analyse relativement grossière ne faisant pas intervenir les valeurs propres individuelles, mais les regroupant par paquets de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Il semble qu'on ne puisse pas obtenir une information plus fine en général à l'aide des formules de trace.

L'étude statistique des niveaux d'énergie est un sujet d'actualité en physique (chaos quantique) et des études numériques semblent montrer qu'à un échelle très fine et dans des situations assez génériques (non arithmétiques par exemple), les valeurs propres obéissent aux statistiques des matrices aléatoires; pour cela consulter les exposés de Bohigas, M. Berry et C. Schmidt dans [G-V], et [SC].

c) Guillemin ([GN]), s'appuyant sur des travaux de Zelditch (non encore publiés), a obtenu récemment le résultat suivant : dans une situation générique, la singularité de la trace de $exp(-it\sqrt{\Delta})$ associée à une géodésique périodique γ détermine les invariants de Birkhoff de γ.

IB. Déterminant et compacité.

Le déterminant $det'(\Delta) = \prod_{k=2}^{\infty} \lambda_k$ peut être défini par régularisation, à cause du comportement asymptotique régulier des valeurs propres.

Usuellement, on utilise la régularisation ζ introduite par Ray et I.M. Singer pour définir un analogue analytique de la torsion (combinatoire) de Reidemeister, et basée sur les travaux de Seeley sur les puissances complexes d'un opérateur elliptique : on définit pour $Re(s) >> 0$ la fonction ζ par la série absolument convergente

$$\zeta(s) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^s}$$

et le développement asymptotique de Minakshisundaram-Pleijel montre que ζ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe qui est holomorphe en 0. On pose alors

$$det'(\Delta) = e^{-\zeta'(0)} ,$$

ce qui dans le cas d'une matrice symétrique définie positive redonne le déterminant usuel.

En particulier $det'(\Delta)$ ne dépend que des valeurs propres du laplacien. Mais c'est un invariant global par opposition aux invariants locaux de l'équation de la chaleur.

B. Osgood, R. Phillips et P. Sarnak ([O-P-S]) ont utilisé cet invariant spectral pour prouver le :

Théorème. — *Si X est de dimension 2, tout ensemble isospectral de métriques (modulo les difféomorphismes) est compact pour la topologie* C^∞.

Ce théorème utilise de façon cruciale la formule de Polyakov qui donne la différentielle du déterminant relativement à un changement conforme de métrique.

Les résultats mentionnés dans IA et IB laissent penser que, au moins pour les surfaces, les ensembles isospectraux sont très petits, peut-être même toujours finis.

Il serait en particulier intéressant de comprendre le cas des surfaces de Zoll ([BE]) qui ont toutes même ensemble des longueurs des géodésiques périodiques (et même des flots géodésiques conjugués).

2. PROBLÈMES DIRECTS

Le *problème direct* consiste à comprendre quelles sont les propriétés spécifiques du spectre d'un opérateur *différentiel* autoadjoint. Posé dans cette généralité, le problème est surement très difficile. Il est clair que la formule des traces impose des restrictions (formule asymptotique de Weyl, développement de Minakshisundaram-Pleijel, singularités de $S(t)$) au moins dans le cas C^∞.

Trois familles d'opérateurs présentent un intérêt certain : les laplaciens riemanniens Δ_g, les opérateurs de Schrödinger sans champ magnétique $\Delta_g + V$ (ici $V \in \mathrm{C}^\infty(X, \mathbf{R})$), les opérateurs de Schrödinger avec champ électrique et magnétique, qui sont de la forme $H_{B,g} + V$, où $H_{B,g}$ est le laplacien associé à une connexion hermitienne sur un fibré en droites complexes sur X, dont la courbure est la 2-forme B.

Je vais me concentrer dans la suite sur le problème de trouver un opérateur dans une de ces trois familles sur une variété compacte X donnée et dont la suite des N premières valeurs propres (avec multiplicité) est donnée. On pourra aussi consulter le rapport [CV9].

IIA. Opérateurs de Schrödinger sans champ magnétique.

Le résultat suivant a été obtenu en 1985 ([CV4]).

Théorème. — *Si X est de dimension au moins 3, toute suite*

$$\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_N$$

est la suite des N premières valeurs propres d'un laplacien associé à une métrique riemannienne lisse sur X.

Cela résoud le problème en dimension ≥ 3; le cas de la dimension 1 est intéressant et bien connu : la suite des valeurs propres d'un opérateur de Schrödinger $-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ vérifie toujours

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4 \leq \lambda_5 < ... ;$$

en particulier, il y a des restrictions sur les multiplicités.

Des inégalités analogues ont été découvertes pour les opérateurs de Schrödinger sur les variétés compactes de dimension 2 par S.Y. Cheng [CG], puis améliorées par G. Besson [BN], N. Nadirashvili [NA], B. Sévennec [S] et l'auteur [CV4] (voir aussi [AE]). Notons $m(X)$ la multiplicité maximale de la première valeur propre d'un opérateur de Schrödinger sans champ magnétique sur X, on a

Théorème. — *La multiplicité maximale de la première valeur propre est donnée par $m(S^2) = 3$, $m(T^2) = 6$, $m(K^2) = m(P^2) = 5$ et si la caractéristique d'Euler $\chi(X) < 0$, $m(X) \leq 5 - 2\chi(X)$.*

Des résultats du même genre sont connus pour les autres valeurs propres. Remarquons aussi que la borne optimale est compatible avec la conjecture que $m(X) = C(X) - 1$, où $C(X)$ est le nombre chromatique de X. La relation avec la théorie des graphes n'est pas fortuite comme on le verra plus loin.

La preuve pour S^2 est *simple et de bon goût* : elle dépend du théorème de Courant sur les domaines nodaux, à savoir que si $f \in E_{\lambda_1}$ l'ensemble $\{f(x) > 0\}$ est connexe, et du théorème de Jordan. Une généralisation purement topologique de cette estimation a été obtenue récemment par Sévennec [S].

Théorème. — *Si un espace vectoriel E de fonctions analytiques réelles sur S^2 vérifie la propriété que pour toute fonction non nulle les ensembles où f est > 0 sont non vides et connexes, alors la dimension de E est ≤ 3.*

Laplaciens sur les graphes.

Soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe fini connexe (S est l'ensemble des sommets, A l'ensemble des arêtes). On s'intéresse à l'ensemble O_Γ des opérateurs de Schrödinger sur Γ. Ce sont les matrices symétriques réelles $H = (a_{i,j})$ sur $\mathbf{R}^S$ qui vérifient

$$a_{i,j} < 0 \text{ si } (i,j) \in A, \ a_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } (i,j) \notin A\,.$$

L'ensemble O_Γ est donc un cône sur $\mathbf{R}_+$ de dimension $\#A + \#S$.

Si $H \in O_\Gamma$, les valeurs propres de H vérifient

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_N \ ,$$

avec $N = \#S$.

L'idée est maintenant, si Γ se plonge dans X, d'obtenir le spectre de $H \in O_\Gamma$ comme début du spectre d'un opérateur de Schrödinger sur X.

On a donc besoin de deux choses :

– des arguments de perturbations singulières qui permettent de comprendre par exemple le comportement asymptotique des petites valeurs propres du problème de Neumann pour un petit voisinage tubulaire de l'image de Γ par le plongement dans X ou la convergence du spectre d'un opérateur de Schrödinger dans X vers le spectre de Neumann d'un domaine ouvert de X ;

– un argument de transversalité qui permet de contrôler exactement les limites en particulier dans les cas de multiplicités.

On obtient ainsi le théorème suivant, en désignant par $C(X)$ le nombre chromatique de X (utilisé comme le plus grand entier N tel que le graphe complet à N sommets se plonge dans X) :

Théorème [CV4]. — *Si $N = C(X)$, il existe pour toute suite $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_N$ un opérateur de Schrödinger sur X qui admet cette suite comme suite des N premières valeurs propres (avec multiplicité).*

Le nombre $C(X)$ est connu ([RI]) et croît comme la racine carrée du genre de X.

Invariants de graphes.

L'étude de la famille O_Γ des opérateurs associés à un graphe conduit naturellement à la construction d'une famille de nouveaux invariants des graphes : en gros, il s'agit de comprendre la position de O_Γ par rapport à la *stratification d'Arnold* de $\mathrm{Sym}(\mathbf{R}^S)$, espace des matrices symétriques réelles $\#S \times \#S$. D'autres invariants peuvent être obtenus par l'étude de la *variété spectrale du graphe* : il s'agit du sous-ensemble de $O_\Gamma \times \mathbf{R}$ formé des couples (H, λ) tels que $\lambda \in \mathrm{spectre}(H)$.

Commençons par quelques rappels : Von Neumann et Wigner [VN-W] ont observé il y a fort longtemps que l'ensemble des matrices symétriques ayant une valeur propre de multiplicité 2 est de codimension 2 (et non pas 1 comme on pourrait s'y attendre). Plus généralement Arnold [AN] a étudié la stratification de $\mathrm{Sym}(\mathbf{R}^S)$ par les sous-ensembles de matrices ayant des valeurs propres avec certaines multiplicités.

Pour simplifier, nous introduirons seulement les variétés $\mathcal{A}_N$ ensemble des matrices symétriques sur $\mathbf{R}^S$ dont le spectre est de la forme $\lambda_1 < \lambda_2 = ... = \lambda_{N+1} < ...$ Les variétés $\mathcal{A}_N$ sont des sous-variétés algébriques (non-fermées) de codimension $\frac{N(N+1)}{2} - 1$ de $\mathrm{Sym}(\mathbf{R}^S)$.

On dira que la première valeur propre λ_1 de $H_0 \in O_\Gamma$ est *stable* si elle est de multiplicité N et que O_Γ coupe $\mathcal{A}_N$ transversalement en H_0.

La théorie des perturbations des valeurs propres donne un critère algébrique de stabilité.

Proposition. — *La valeur propre* λ_2 *est stable si les formes quadratiques* $q_{i,j}(x) = x_i x_j$ $((i,j) \in A)$ *et* $q_i(x) = x_i^2$, $(i \in S)$ *restreintes à l'espace propre* E_{λ_2} *engendrent les formes quadratiques sur cet espace.*

Cela n'est évidemment possible que si $\#A + \#S \geq N(N+1)/2$. On peut maintenant définir un invariant d'un graphe par

$$\mu(\Gamma) = \sup\{N | \exists H_0 \in O_\Gamma \cap \mathcal{A}_N \textit{ et } \lambda_2(H_0) \textit{ est stable}\}\,.$$

Il est clair qu'un grand nombre de variantes de cette définition est possible.

La propriété la plus intéressante de $\mu(\Gamma)$ est d'être croissant pour la relation des mineurs, classique en théorie des graphes : on dit que Γ_1 est *mineur* de Γ_2 si on peut passer de Γ_2 à Γ_1 en répétant les opérations de *contraction* (identifier 2 sommets voisins en supprimant l'arête qui les joint) et d'*effacement* (ôter une arête).

Du point de vue spectral la contraction se lit en ajoutant aux formes quadratiques de O_{Γ_2} une forme $\frac{1}{\varepsilon}(x_i - x_j)^2$ pour la contraction de l'arête (i,j). Pour l'effacement, on considère le cas où le coefficients $a_{i,j}$ associé à l'arête qu'on efface tend vers 0.

On voit en utilisant les techniques précédentes que si on peut plonger Γ dans X, alors X admet un opérateur de Schrödinger dont la multiplicité du λ_2 est $\mu(\Gamma)$.

En particulier on obtient le surprenant résultat.

Théorème [CV5]. — *Pour un graphe* Γ, $\mu(\Gamma) \leq 3$ *si et seulement si le graphe* Γ *est planaire.*

Preuve. Si Γ est planaire, le résultat de Cheng montre que $\mu(\Gamma) \leq 3$. La réciproque vient du critère de Kuratowski : un graphe non planaire contient comme mineur un des 2 graphes dits de Kuratowski (graphe complet à 5 sommets et graphe à 6 sommets dont chacun des 3 premiers sommets est joint à chacun des 3 autres par un arête). Il est facile de vérifier que $\mu(K) = 4$ si K est l'un des 2 graphes de Kuratowski.

Une preuve purement combinatoire (i.e. sans utiliser la majoration de Cheng) est donnée dans [BA-CV].

Problèmes :

– trouver la valeur de $m(X)$ pour les surfaces de genre > 1.

– plus généralement, trouver les suites de multiplicités possibles : par exemple dans le cas de S^2 est-il possible d'avoir

$$\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 < \ldots ?$$

– compléter la liste des graphes Γ μ-critiques, c'est-à-dire dont tous les mineurs stricts Γ' vérifient $\mu(\Gamma') < \mu(\Gamma)$ [CV5]. Voir à ce sujet [BA-CV].

IIB. Champs magnétiques.

a) Généralités

On va considérer pour simplifier uniquement le cas des surfaces, qui est très important pour la physique du solide (effet Hall [NO], [TH], [T-K-N2], [CO] chapitre 4). Pour tout ce §, voir aussi [C-TO].

Soit donc (X, g) une surface riemannienne orientée complète. On considère sur X un fibré en droites complexes C^∞ muni d'une structure hermitienne et d'une connexion ∇ compatible avec cette structure.

On note B la courbure de cette connection, qui est la 2-forme à valeurs réelles sur X définie par

$$B(V, W) = -i[\nabla_V, \nabla_W] \ .$$

Cette connexion munit canoniquement le fibré L d'une structure de fibré holomorphe : si la métrique g est localement de la forme $g = e^{2\varphi}(dx^2 + dy^2)$, on pose

$$\nabla_{\bar{\mathrm{z}}} = 1/2(\nabla_{\mathrm{x}} + i\nabla_{\mathrm{y}}) \ .$$

Il suffit maintenant de décréter holomorphe les sections s telles que $\nabla_{\bar{\mathrm{z}}} s = 0$. Il est facile de voir que cela fait de L un fibré holomorphe. On peut du reste renverser la procédure : un fibré holomorphe muni d'une métrique hermitienne est automatiquement muni d'une connexion hermitienne unique telle que les sections holomorphes soient celles qui vérifient $\nabla_{\bar z} = 0$.

A ces structures, on peut associer deux *laplaciens* : l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique H_B et le laplacien complexe $\Delta_{\mathbf{C}}$.

L'opérateur H_B est donné, dans les coordonnées locales conformes, par

$$H_B s = -e^{-2\varphi}(\nabla_x^2 s + \nabla_y^2 s) \ ,$$

formule qui généralise le laplacien usuel sur l'espace de Hilbert des sections qui vérifient $\int_X |s|^2 v_g < +\infty$. Il est associé à la forme quadratique $q_B(s) = \int_X \|\nabla s\|^2 v_g$.

Le laplacien complexe est donné par

$$\Delta_{\mathbf{C}} s = -e^{-2\varphi} \nabla_z \nabla_{\bar{z}} s \ ,$$

et il est associé à la forme quadratique

$$q_{\mathbf{C}}(s) = \int_X |\nabla_{\bar{z}} s|^2 dx, dy \ .$$

Il y a entre ces deux laplaciens la relation fondamentale

$$H_B = 4\Delta_{\mathbf{C}} + \bar{B} \ ,$$

où l'on a posé $B = \bar{B} v_g$ (v_g étant la forme volume associée à l'orientation de X).

En particulier si le champ magnétique $\bar{B}$ est constant ≥ 0 ces deux opérateurs ont des spectres faciles à comparer. La première valeur propre de H_B est $\bar{B}$ si le fibré $L_{\mathbf{C}}$ a des sections holomorphes et ces sections forment l'espace propre associé. On peut donc utiliser la théorie des fibrés en droites holomorphes sur les surfaces de Riemann dans ce contexte.

b) Cas de la sphère S^2

Dans ce cas (quitte à choisir l'orientation pour avoir des sections holomorphes), on peut supposer que le degré de $L_{\mathbf{C}}$ est un entier $n \geq 0$. Il n' y a alors, g étant donné, qu'un champ $\bar{B}$ constant possible qui est donné par $\int_X B = 2\pi n$. La connexion hermitienne est alors unique à isomorphisme près.

La dimension de l'espace propre associé à la plus petite valeur propre est $n+1$ et une section holomorphe est caractérisée à homothétie près par son diviseur, ensemble de n points sur S^2 (avec multiplicité). On peut en particulier prescrire le développement de Taylor à l'ordre n en un point p fixé et on a ainsi un isomorphisme de l'espace propre $E_{\bar{B}}$ avec l'espace des polynômes complexes de degré $\leq n$.

Corollaire. — *Le premier espace propre est stable au sens d'Arnold pour les perturbations par des petits potentiels électriques.*

Ce résultat est obtenu dans le cas où g est la métrique canonique par une méthode différente dans la thèse de N. Torki [TO].

On en déduit par des techniques de perturbations singulières décrites dans [TO] (ôter un petit disque, trivialiser le fibré, ajouter un grand potentiel V dans le disque rebouché) le théorème.

Théorème. — *Pour tout entier N, il existe un opérateur de Schrödinger avec champs magnétique et électrique, sur le fibré trivial sur S^2, ayant la première valeur propre de multiplicité N.*

Ce théorème qui contraste avec celui de Cheng pose la

Question. — Existe-t-il une majoration en l'absence de champ électrique ou en terme de $\int_{S^2} |\bar{B}| v_g$?

c) Cas du tore $\mathbf{R}^2/\Gamma$

Ce cas est plus compliqué : pour chaque degré ≥ 1, il existe plusieurs fibrés holomorphes possibles. Si on suppose B constant et la métrique euclidienne dx^2+dy^2 sur le tore $X = \mathbf{R}^2/\Gamma$, on note L_a $(a \in X)$ le fibré de degré 1 associé au diviseur a. Si $X^\star = \mathbf{R}^2/\Gamma^\star$ où $\Gamma^\star$ est le réseau dual de Γ (les produits scalaires $\gamma.\gamma^\star$ des éléments de ces réseaux sont des multiples entiers de 2π), on peut associer à tout $\chi \in X^\star$ le fibré hermitien plat F_χ dont l'holonomie est $e^{i\chi}$.

On a alors

$$L_b = L_a \otimes F_\chi \ ,$$

où χ est donné par

$$b - a = \frac{i}{2\pi}(\chi(\gamma_2)\gamma_1 - \chi(\gamma_1)\gamma_2)$$

pour une base arbitraire orientée (γ_1, γ_2) de Γ (calcul de $\int_C z\frac{\varphi'}{\varphi}dz$ où φ est une section méromorphe de $(L_a)^{-1} \otimes L_b$, de diviseur $b-a$ et C un lacet générique qui borde un domaine fondamental).

On en déduit que, en degré n,

$$L_{a_1} \otimes L_{a_2} \otimes ... \otimes L_{a_n} = L_{b_1} \otimes L_{b_2} \otimes ... \otimes L_{b_n}$$

si et seulement si $a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n \bmod \Gamma$.

En particulier les diviseurs possibles pour un fibré L de degré n fixé satisfont l'unique condition que la somme $\sum a_i$ est constante mod Γ.

Cela permet de montrer que le fibré

$$H^0(X, L \otimes F_\bullet) \to X^\star$$

est de classe de Chern $c_1 = 1$. Cette propriété joue un rôle important dans l'étude de l'effet Hall.

On voit aussi en utilisant un argument analogue à celui de S^2 que la première valeur propre de Schrödinger avec champ magnétique constant est stable (et cela se généralise à toute surface de Riemann orientée).

IIC. Réseaux électriques.

Il s'agit, au-delà des valeurs propres, de comprendre l'intégrale de Dirichlet.

Pour cela, on attache à un réseau électrique une forme quadratique qui mesure l'énergie électrique totale.

On considère un graphe fini $\Gamma = (S, S_o, A)$, où S_o est une partie de l'ensemble des sommets S et A est l'ensemble des arêtes, et une forme quadratique R, sur $\mathbf{R}^S$ subordonnée à Γ ($R \in Q_\Gamma$) de la forme

$$R(x) = \sum_{(i,j)\in A} \rho_{i,j}(x_i - x_j)^2 \ ,$$

où $\rho_{i,j} > 0$.

Ces données représentent un réseau électrique ayant des entrées (S_o) où l'on applique un potentiel et des connexions qui sont les arêtes (i, j) de résistances $1/\rho_{i,j}$.

Le potentiel d'équilibre est défini de la façon suivante : pour chaque $x_o \in \mathbf{R}^{S_o}$, on considère le minimum $q_R(x_o) = \inf_{x|_{S_o}=x_o} R(x)$.

Les formes quadratiques q_R ne sont pas quelconques; si on écrit

$$q_R(x_o) = (x_o, A_R x_o) \ ,$$

où $(\ ,\ )$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^{S_o}$, $A_R x_o$ peut s'interpréter comme les intensités des courants électriques entrant dans Γ lorsqu'on applique les potentiels x_o.

On voit que A_R vérifie les propriétés suivantes indépendantes du graphe :

i) A_R est symétrique,

ii) $A_R(1) = 0$,

iii) $(A_R)_{i,j} \leq 0$.

Seule la propriété iii) n'est pas évidente : si on applique un potentiel x_o nul en tous les sommets sauf en i où il vaut 1, on observe un courant sortant par tous les autres sommets.

On s'intéresse au problème suivant : S_o étant donné sur une variété X avec ou sans bord, quel est l'ensemble des q_R possibles pour un graphe Γ plongé dans X ? Quelle est l'image de l'application Φ_Γ qui à $R \in Q_\Gamma$ associe q_R?

On désigne par Q_{S_o} l'ensemble des formes quadratiques vérifiant les propriétés i), ii) et iii). C'est un cône convexe fermé d'intérieur non vide d'un espace vectoriel de dimension $N(N-1)/2$ ($N = \#S_o$), l'espace des matrices symétriques $N \times N$ qui vérifient i) et ii) et que l'on note $\mathrm{Sym}_o(N)$.

Le problème considéré est bidimensionnel, en effet en dimension 3, on peut toujours choisir un graphe complet dont les sommets sont les points de S_o et retirer les arêtes correspondant aux coefficients non diagonaux nuls.

Le cas du disque

C'est ce cas qui est étudié dans [C-M-M] et repris et généralisé dans [CV7] et [C-G-V] (voir aussi [C-I-M] pour des résultats voisins).

Soit S_o un ensemble de N points sur le cercle, bord de X, supposés ordonnés cycliquement ; Γ est donc supposé planaire et plongé dans le disque unité.

Dans [C-M-M], les auteurs considèrent le cas du graphe $C_1(m, N)$ où $N = 4m + 3$ et le graphe Γ est constitué de N rayons issus de O et de m cercles intérieurs au disque et de centre O. Le nombre d'arêtes de ce graphe est alors exactement $N(N-1)/2$ qui est la dimension de $\mathrm{Sym}_o(N)$. Les auteurs montrent dans ce cas que Φ_Γ est un difféomorphisme dont ils caractérisent l'image.

Donnons quelques définitions : Soient B et C deux parties de S_o, à $p \leq N/2$ éléments, seront dites *non entrelacées* si $B = (i_1 < i_2 < ... < i_p)$ et $C = (j_1 > j_2 > ... > j_p)$ et $i_p < j_p < j_1 < i_1$. On notera $A_{B,C}$ la sous-matrice de A formée des éléments A_{i_k,j_l}. Avec cette numérotation de B et C, on peut parler sans ambiguïté du déterminant de $A_{B,C}$.

On dira que B et C non entrelacés sont $\Gamma-$*connectés* s'il existe des chemins γ_k $(1 \leq i \leq p)$ de Γ d'origine i_k et d'extrémité j_k 2 à 2 disjoints et ne rencontrant S_o qu'en leurs extrémités. Si c'est le cas pour tout choix de B, C non entrelacés, on dira que Γ est un $N-$*connecteur* . Si Γ est un $N-$connecteur minimal pour la relation de mineurs, on dira que c'est un $N-$*connecteur critique*.

Alors on a le théorème.

Théorème. — *i) Si B et C ne sont pas $\Gamma-$connectés, pour tout $R \in Q_\Gamma$,* $\det(A_R)_{B,C} = 0$ *(sans hypothèse de planarité).*

ii) Si Γ est planaire, pour tout B, C non entrelacés, $\det((-A_R)_{B,C}) > 0$.

On met ainsi en évidence pour chaque N un ouvert Ω_N de $\mathrm{Sym}_o(\mathbf{R}^N)$ en demandant aux matrices de Ω_N de vérifier les inégalités précédentes pour tout choix de B et C non entrelacés. On peut montrer que Ω_N est un ouvert contractible. On a le résultat

Théorème. — *Si Γ est un $N-$ connecteur critique, Φ_Γ est un difféomorphisme de Q_Γ dans Ω_N.*

En fait, on utilise la notion d'équivalence de réseaux électriques suivante : (Γ_1, R_1) et (Γ_2, R_2) seront dits *géométriquement* équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie de transformations élémentaires : parallèles, séries, enlever une boucle ou un bras mort et étoile-triangle ou triangle-étoile.

On a alors le théorème.

Théorème ([CV7], [C-I-G], [C-I-M]). — *Deux réseaux électriques (Γ_1, R_1) et (Γ_2, R_2) planaires ayant le même nombre de sommets au bord et tels que $q_{R_1} = q_{R_2}$ sont géométriquement équivalents.*

On peut en déduire en s'inspirant de [B-S-S-T] un algorithme pour décider si un polygône Π du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ à côtés parallèles aux axes est pavable par des carrés ([KE]) : en effet, on peut alors montrer que, si Π a 2N côtés, le polygône Π admet un pavage par des carrés si et seulement s'il admet un pavage par $m \leq N(N-1)/2$ rectangles dont le rapport des côtés soit rationnel.

BIBLIOGRAPHIE

[AE] C. Anné, *Majoration de multiplicités pour l'opérateur de Schrödinger*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie **8** (89-90), 53–60.

[AN] V. Arnold, *Modes and quasi-modes*, J. Functional Anal. **6** (1972), 94–101.

[BA-CV] R. Bacher, Y. Colin de Verdière, *Transformation $Y-\Delta$ et multiplicité des valeurs propres*, Bull. Soc. Math. France **123** (1995), 101–117.

[B-B] R. Balian, C. Bloch, *Distribution of Eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain III*, Ann. Phys. **69** (1972), 76–160.

[BE] A. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer, Erg. Math. (1978).

[BE-B] P. Berard, M. Berger, *Le spectre d'une variété riemannienne en 1982*, in *Spectra of Riemannian manifolds,* Kaigai (Tokyo) (1983).

[B-F-K] D. Burghelea, I. Friedlander, T. Kappeler, *On the determinant of elliptic differential and finite difference operators*, Commun. Math. Phys. **138** (1991), 1–18.

[B-G-M] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lect. Notes Math., Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1971).

[BN] G. Besson, *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Ann. Inst. Fourier **30** (1980), 109–128.

[B-S-S-T] V. Brooks, C. Smith, A. Stone, W. Tutte, *Dissecting a rectangle into squares*, Duke Math. J. **7** (1940), 312–340.

[C-I-M] E. Curtis, D. Ingermann, J. Morrow, *Circular planar graphs and resistors networks*, Preprint (Seattle) (1994), 1–31.

[C-M-M] E. Curtis, E. Mooers, J. Morrow, *Finding the conductors in circular networks from boundary measurements*, Preprint Univ. Washington (1991), 1–31.

[CG] S.Y. Cheng, *Eigenfunctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv. **51** (1979), 43–55.

[CO] A. Connes, *Géométrie non commutative*, Interéditions (1990).

[CV1] Y. Colin de Verdière, *Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques fermées*, Compositio Math. **27** (1973), 83–106, 159–184.

[CV2] Y. Colin de Verdière, *Paramétrix de l'équation des ondes et intégrale sur l'espace des chemins*, Séminaire Goulaouic-Schwartz, Centre de Math., Ecole Polytechnique (1974-1975).

[CV3] Y. Colin de Verdière, *Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold*, Comment. Math. Helv. **63** (1988), 184–193.

[CV4] Y. Colin de Verdière, *Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris **20** (1987), 599–615.

[CV5] Y. Colin de Verdière, *Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité*, J. Combinatorial Th. B **50** (1990), 11–21.

[CV6] Y. Colin de Verdière, *L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques*, Commun. Math. Phys. **105** (1986), 327–335.

[CV7] Y. Colin de Verdière, *Réseaux électriques planaires I*, Commentarii **69** (1994), 351–374.

[CV8] Y. Colin de Verdière, *Théorie spectrale et méthodes semi-classiques*, Cours (1994/1995/1996).

[CV9] Y. Colin de Verdière, *Multiplicités des valeurs propres : laplaciens discrets et laplaciens continus*, Rend. Mat. **13** (1994), 433–460.

[C-G-V] Y. Colin de Verdière, I. Gitler, D. Vertigan, *Réseaux électriques planaires II*, Prépublication Institut Fourier **276** (1994), 1–18 (à paraître dans Comm. Math. Helv.).

[C-TO] Y. Colin de Verdière, N. Torki, *Opérateurs de Schrödinger avec champs magnétiques*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grenoble **11** (1992-1993), 9–18.

[D-G] H. Duistermaat, V. Guillemin, *The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics*, Inventiones Math. **29** (1975), 39–79.

[G-K] V. Guillemin, D. Kazhdan, *Some inverse spectral results for negativily curved n-manifolds*, Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc. **36** (1980), 153–180.

[GN] V. Guillemin, *Wave-trace invariant and a theorem of Zelditch*, Internat. Math. Res. Notes **12** (1993), 303–308.

[GU] M. Gutzwiller, J. Math. Phys., **10** (1970), 1004, et **11** (1971), 1791.

[G-V] M. Gianonni, A. Voros, *Chaos and Quantum physics*, (Les Houches), North Holland, Amsterdam (1991).

[KA] D. Burghelea, I. Friedlander, T. Kappeler, *On the determinant of elliptic differential and finite difference operators in vector bundles over S^1*, Commun. Math. Phys. **138** (1991), 1–18.

[KE] R. Kenyon, *Tilling polygons by squares*, Prepub. Ec. Norm. Sup. Lyon (1993).

[MO] M. Min-Oo, *Spectral rigidity for manifolds with negative curvature operators in Nonlinear problems in geometry*, Contemp. Math. Amer. Math. Soc., ed. D. DeTurck (1985).

[NA] N. Nadirashvili, *Multiple eigenvalues of the Laplace operator*, Math. USSR Sbornik **61** (1988), 225–238.

[NO] S.P. Novikov, *Magnetic Bloch functions and vector bundles*, Sov. Math. Dokl. **23** (1981), 298–303.

[OPS] B. Osgood, R. Phillips, P. Sarnak, *Extremals of determinants of Laplacian et Compact isospectral sets of surfaces*, J. Functional Anal. **80** (1988), 148–234.

[RI] G. Ringel, *Map color theorem*, Springer New-York (1974).

[R-S] N. Robertson, P. Seymour, *Graphs Minors I*, J. Combinatorial Th. B **35** (1983), 39–61.

[S] B. Sévennec, *Majoration topologique de la multiplicité du spectre des surfaces*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie (Grenoble) **12** (1993–1994), 29–36.

[SC] C. Schmidt, *Triangular billiards in hyperbolic plane : spectral properties*, Preprint (Physique nucléaire Orsay) (1991), 1–11.

[TH] D. Thouless, *Localisation and the two-dimensional Hall effect*, J. Phys. **C-14** (1982), 3475–3480.

[T-K-N2] D. Thouless, M. Kohmoto, M. Nightingale, M. den Jis, *Quantized Hall conductance in a 2-dimensional periodic potential*, Phys. Rev. Lett. **49** (1982), 405–408.

[TO] N. Torki, *Stabilité des valeurs propres et champs magnétiques sur une variété et sur un graphe*, Thèse, Université de Grenoble 1, (1990).

[VN-W] J. von Neumann, E. Wigner, *Über das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen*, Phys. Z. **30** (1929), 467–470.