EMPILEMENTS DE CERCLES ET APPROXIMATIONS CONFORMES

Yves COLIN DE VERDIÈRE *

Institut Universitaire de France
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
F-38402 Saint Martin d'Hères Cedex (France)

Frédéric MATHÉUS

Ecole Normale Supérieure de Lyon
Département de Mathématiques
46, Allée d'Italie
F-69364 Lyon (France)

Abstract. The variational approach previously developed by the first author to build finite circle packing immersions enables us to give a method to approximate conformal immersions of compact regions of the plane, with piecewise affine maps defined thanks to circle packings.

In the case of the complex exponential, there is an exact formula for the radii, and this gives a new interpretation of the famous Doyle spirals.

Résumé. L'approche variationnelle, développée antérieurement par le premier auteur pour construire des empilements de cercles immergés finis, fournit une méthode d'approximation des immersions conformes d'un compact du plan au moyen d'applications affines par morceaux définies à l'aide d'empilements de cercles.

Dans le cas de l'exponentielle complexe, on dispose d'une formule exacte pour les rayons, ce qui donne une nouvelle interprétation des spirales de Doyle.

M.S.C. Subject Classification Index (1991) : 11F72, 11R39, 22E55.

*GADGET

© Séminaires & Congrès 1, SMF 1996

TABLE DES MATIÈRES

I. INTRODUCTION

Répondant à une question posée par W. Thurston en 1985 (voir [Th]), Burt Rodin et Dennis Sullivan ([R-S]) ont montré comment les empilements de cercles permettaient de construire des approximations quasi-conformes de l'uniformisation de Riemann d'un ouvert simplement connexe borné de $\mathbb{C}$. Leur méthode repose sur un résultat de rigidité, la rigidité de l'empilement hexagonal standard (voir [R-S]).

Kenneth Stephenson a considérablement généralisé le résultat de Rodin et Sullivan : la combinatoire des empilements utilisés ainsi que les rayons des cercles sont variables (voir [St] et [H-R]). Il obtient également une approximation du module de la dérivée de l'application uniformisante. Il utilise des méthodes probabilistes qui mettent en jeu des marches aléatoires. Il prouve en particulier une version discrète de l'inégalité de Harnack grâce au théorème de récurrence de Polyà.

Dans [CV], le premier auteur propose une construction d'empilements de cercles reposant sur la résolution d'un problème de Dirichlet discret. Ce point de vue fournit une méthode d'approximation des fonctions holomorphes dont la dérivée ne s'annule pas (voir II). La convergence repose sur l'approche variationnelle développée dans [CV] où les empilements de cercles sont réalisés comme points critiques d'une certaine fonctionnelle (voir VI). Les calculs sont notablement allégés par l'existence d'un exemple, la fonction exponentielle, pour lequel les rayons des cercles des empilements associés sont explicitement connus (voir III). Cet exemple a été découvert "expérimentalement" à la suite de calculs sur ordinateur réalisés par le premier auteur et Laurent Guillopé. Il avait été observé, il y a quelques années, par P. Doyle (voir [C-R]).

II. ÉNONCÉ DU THÉORÈME D'APPROXIMATION

Rappelons la définition d'un empilement de cercles. Soit $\mathcal{T}$ une triangulation (finie ou infinie) d'un disque topologique et S l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$. Soit $r = (r_s)_{s\in S} \in (\mathbb{R}_+^*)^S$. On munit chaque triangle de $\mathcal{T}$ de la métrique euclidienne qui au côté ss' affecte la longueur $r_s + r_{s'}$. On obtient ainsi une variété riemannienne plate à singularités coniques, notée $\mathcal{T}_r$ (voir [Tr]). Soit s un sommet d'un triangle T de $\mathcal{T}$. Si $\alpha(s,T)$ désigne l'angle en s dans le triangle T et si s est un sommet intérieur, alors la courbure en s est

$$K_s(r) = 2\pi - \sum_{s\in T} \alpha(s,T) \ .$$

La famille de cercles $\mathcal{C} = \{C_s,\ s \in S\}$, où C_s est le cercle de $\mathcal{T}_r$ de centre s, de rayon r_s, possède la propriété suivante : les cercles C_s et $C_{s'}$ sont tangents si et seulement si l'arête ss' appartient au 1-squelette $\mathcal{T}^1$ de la triangulation $\mathcal{T}$.

Si pour tout sommet intérieur s, on a $K_s(r) = 0$, alors la variété $\mathcal{T}_r$ est immergée isométriquement dans $\mathbb{R}^2$ (mais non plongée a priori). On dit alors que $\mathcal{C}$ est un empilement de cercles de combinatoire $\mathcal{T}^1$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant l'hexagone unité $\mathcal{H}$ et soit f une fonction définie sur U, holomorphe, dont la dérivée ne s'annule pas. On note $\mathcal{T}_N$ (pour un entier $N \geq 1$) la triangulation de $\mathcal{H}$ par des triangles équilatéraux de côté $\frac{1}{N}$, S_N l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}_N$ et H_N l'empilement constitué de cercles de rayon $\frac{1}{2N}$ et dont les centres sont les sommets de $\mathcal{T}_N$. La figure page 223 représente $\mathcal{H}$, $\mathcal{T}_N$ et H_N pour $N = 3$. On observe que la combinatoire de H_N n'est autre que $\mathcal{T}_N^1$.

On construit un nouvel empilement, noté $\widetilde{H}_N$ de la façon suivante. Il doit vérifier les deux conditions *i)* et *ii)* ci-dessous :

i) la combinatoire de $\widetilde{H}_N$ est $\mathcal{T}_N^1$;

ii) les rayons des cercles du bord de $\widetilde{H}_N$ sont donnés par : $\frac{1}{2N}|f'(z_1)|, \ldots, \frac{1}{2N}|f'(z_{6N})|$, où $z_1, \ldots, z_{6N}$ désignent les centres des cercles de H_N situés sur $\partial\mathcal{H}$.

D'après le premier théorème du §4 de [CV], il existe un empilement de cercles vérifiant les conditions *i)* et *ii)* ci-dessus, et cet empilement est unique à isométrie près.

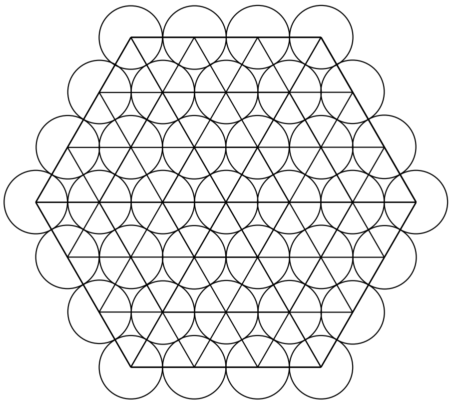

Fig. 1 : $\mathcal{H}, \mathcal{T}_3$ et H_3

Notons C_N^s le cercle de H_N centré en $s \in S_N$ et $\widetilde{C}_N^s$ le cercle de $\widetilde{H}_N$ correspondant à C_N^s. L'empilement $\widetilde{H}_N$ sera parfaitement déterminé si l'on exige qu'il satisfasse la condition suivante, dite de normalisation :

iii) le cercle $\widetilde{C}_N^0$ est centré en $f(0)$, et le cercle $\widetilde{C}_N^{1/N}$ est centré sur la demi-droite $f(0) + \mathbb{R}_+\overrightarrow{f'(0)}$.

Dans toute la suite, $\widetilde{H}_N$ désignera l'unique empilement de cercles du plan satisfaisant aux conditions *i)*, *ii)* et *iii)* ci-dessus.

On construit maintenant une application f_N définie sur $\mathcal{H}$ de la façon suivante :

• l'image par f_N du centre de tout cercle C de H_N est le centre du cercle correspondant $\widetilde{C}$ de $\widetilde{H}_N$;

• on prolonge f_N à chaque triangle de $\mathcal{T}_N$ en une application affine.

On notera que l'empilement $\widetilde{H}_N$ est immergé mais non nécessairement plongé, de sorte que l'application f_N n'est pas a priori injective.

Enfin, si $z \in \mathcal{H}$, on note $s_N(z)$ un sommet d'un triangle de $\mathcal{T}_N$ contenant z, et $r_N(z)$ le rayon du cercle de $\widetilde{H}_N$ correspondant au cercle de H_N de centre $s_N(z)$. Les fonctions f_N étant affines par morceaux, elles ne sont pas à proprement parler différentiables ; elles ont cependant des dérivées directionnelles, ce qui permet de leur attribuer une différentielle $f'_N(z)$ qui est une application linéaire par morceaux de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, homogène de degré 1. Sa norme ponctuelle est la borne supérieure des normes des vecteurs tangents unitaires en z. On peut aussi parler de la convergence

C^1, c'est-à-dire de la convergence uniforme des f_N et de la restriction des f'_N aux vecteurs unitaires. Les relations usuelles entre fonctions et dérivées (par exemple, formules des accroissements finis) sont satisfaites. On a le

Théorème. — *La suite des fonctions $(f_N)_{N\geq 1}$ converge au sens C^1 sur $\mathcal{H}$ vers f. De plus, on a l'équivalent $r_N(z) = \frac{|f'(z)|}{2N} + O\big(\frac{1}{N^2}\big)$ quand $N \to +\infty$, uniformément sur $\mathcal{H}$.*

Remarque. — Soit K un compact de $\mathbf{C}$, connexe, simplement connexe, à bord C^1 et dont l'intérieur contient 0. Soit f une fonction holomorphe définie sur un voisinage de K et dont la dérivée ne s'annule pas.

Soit $\mathcal{T}_N(\mathbf{C})$ la triangulation de $\mathbf{C}$ par des triangles équilatéraux de côté $\frac{1}{N}$, dont l'ensemble des sommets contient 0 et $\frac{1}{N}$. Soit $\mathcal{T}_N(K)$ la sous-triangulation de $\mathcal{T}_N(\mathbf{C})$ constituée des triangles de $\mathcal{T}_N(\mathbf{C})$ qui rencontrent K. Si N est assez grand, $\mathcal{T}_N(K)$ est une triangulation d'un disque topologique.

Dans ce qui précède et ce qui suit, en particulier dans l'énoncé du théorème, on peut remplacer $\mathcal{H}$ et $\mathcal{T}_N$ respectivement par K et $\mathcal{T}_N(K)$, ainsi que "sommets de $\mathcal{T}_N$ sur $\partial\mathcal{H}$" par "sommets frontières de $\mathcal{T}_N(K)$".

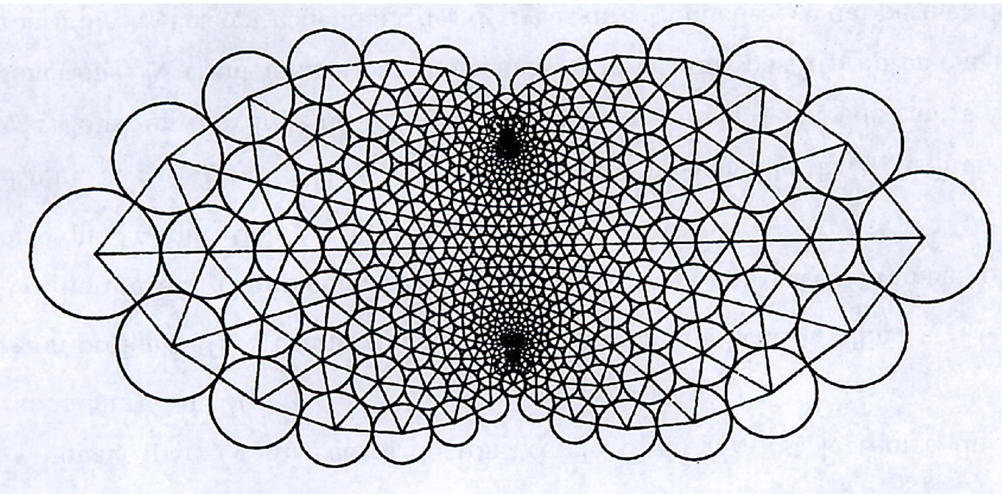

Fig. 2 : approximation de $sh(1,5 \cdot z)$ avec $N = 8$

Avant de prouver ce théorème, examinons un exemple.

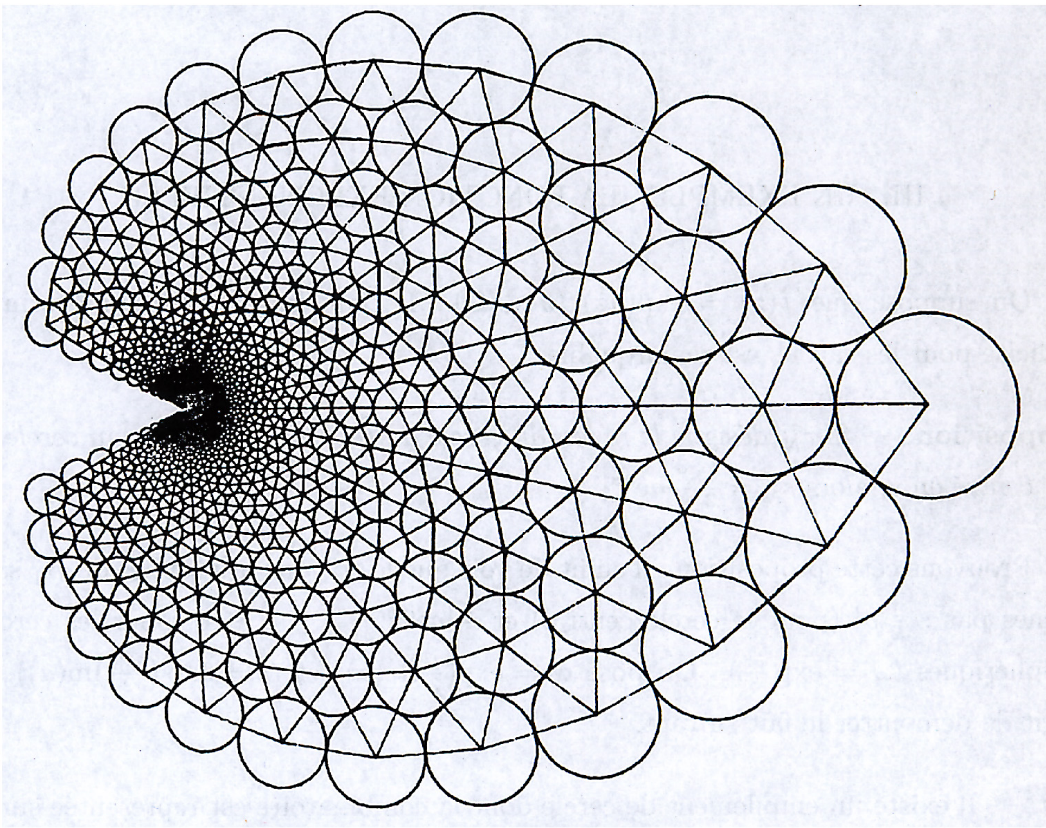

Fig. 3 : approximation de $e^{2,8\cdot z}$ avec $N = 12$.

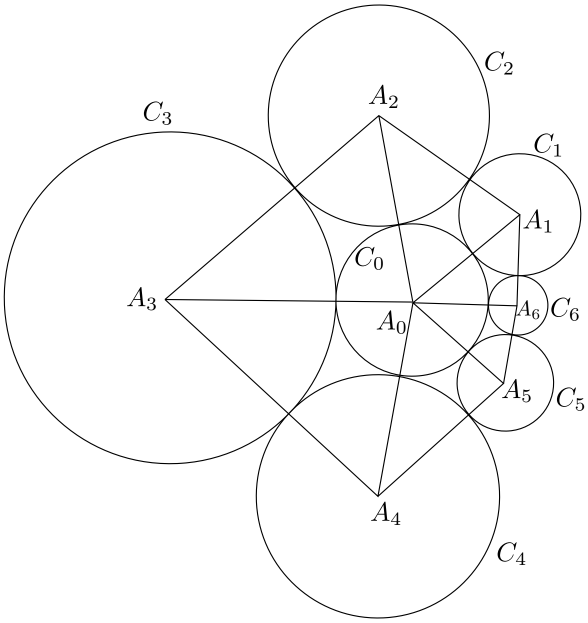

Fig. 4 : autour d'un cercle de rayon 1,
six cercles de rayons respectifs $\alpha^2, \alpha\beta,\ \frac{\beta}{\alpha},\ \frac{1}{\alpha^2},\ \frac{1}{\alpha\beta}, \frac{\alpha}{\beta}$.

III. UN EXEMPLE : LA FONCTION EXPONENTIELLE

On suppose que $f(z) = \exp(az)$ ($a \in \mathbb{C}$). Le fait d'avoir alors une formule explicite pour les rayons est remarquable.

Proposition. — *Si r_N^s désigne le rayon du cercle de $\widetilde{H}_N$ correspondant au cercle de H_N centré en s, alors $r_N^s = \frac{1}{2N}\,|a\mathrm{e}^{as}|$.*

Prouvons cette proposition. Il suffit de voir que les rayons des cercles de $\widetilde{H}_1$ sont donnés par : $\frac{1}{2}|a|$ (pour le cercle central) et $\frac{1}{2}\left|a\mathrm{e}^{a\omega k}\right|$, $1 \leq k \leq 6$, pour les cercles périphériques ($\omega = \exp\frac{i\pi}{3}$). On pose $\alpha = \exp(\frac{1}{2}\operatorname{Re}(a))$ et $\beta = \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Im}(a)\right)$. Il s'agit de démontrer le fait suivant.

Fait. — Il existe un empilement de cercle dont la combinatoire est représentée sur la figure ci-après et dont les rayons sont 1 pour le cercle central, et α^2, $\alpha\beta$, $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta}$ pour les cercles périphériques.

Dans le plan euclidien, on considère un cercle C_0 de rayon 1, un cercle C_1 de rayon $\alpha\beta$ et tangent extérieurement à C_0, un cercle C_2 (resp. C_3, C_4, C_5) de rayon $\frac{\beta}{\alpha}$ (resp. $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta}$) et tangent extérieurement à C_0 et C_1 (resp. C_0 et C_2, C_0 et C_3, C_0 et C_4) et un cercle C_6 tangent extérieurement à C_0, C_1 et C_5. On montre que C_6 a pour rayon α^2.

Notons $A_0, \ldots, A_6$ les centres respectifs des sept cercles $C_0, \ldots, C_6$. Les côtés du triangle $A_0A_1A_2$ ont pour longueurs $1+\alpha\beta$, $\alpha\beta+\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\alpha}+1$. Ceux du triangle $A_0A_3A_4$ ont pour longueurs $\frac{1}{\alpha\beta}+1$, $1+\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha\beta}$. Il existe donc une similitude directe S_1 de rapport $\alpha\beta$ qui envoie le triplet (A_0, A_3, A_4) sur (A_1, A_2, A_0). De même, on observe qu'il existe une similitude directe S_2 de rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ qui envoie le triplet (A_0, A_2, A_3) sur (A_5, A_0, A_4). Comme $S_1 \circ S_2(A_3) = S_2 \circ S_1(A_3) = A_0$, la translation $S_1 \circ S_2 \circ S_1^{-1} \circ S_2^{-1}$ est l'identité, donc S_1 et S_2 commutent. De plus, $S_1(C_5)$ est un cercle de rayon α^2 tangent extérieurement à $S_1(C_4) = C_0$ et $S_1(C_0) = C_1$, tandis que $S_2(C_1)$ est un cercle de rayon α^2 tangent extérieurement à $S_2(C_2) = C_0$ et $S_2(C_0) = C_5$. Comme

$S_1(C_5) = S_1 \circ S_2(C_0) = S_2 \circ S_1(C_0) = S_2(C_1)$, on en déduit que le cercle tangent extérieurement à C_1, C_0, C_5, à savoir C_6, a pour rayon α^2. Ceci prouve la proposition.

Remarque. — Notons $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ l'orbite du cercle C_0 sous l'action du groupe abélien de transformations affines engendré par S_1 et S_2, et Ω le centre commun aux deux similitudes S_1 et S_2. $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ est un empilement de cercles non injectif recouvrant $\mathbb{R}^2-\{\Omega\}$. Il possède un "relevé" $\widetilde{\mathcal{H}}(\alpha,\beta)$ qui est un empilement bijectif de $\widetilde{\mathbb{R}^2-\{\Omega\}}$ (le revêtement universel de $\mathbb{R}^2-\{\Omega\}$) combinatoirement équivalent à l'empilement hexagonal standard, car S_1 et S_2 commutent.

IV. SCHÉMA DE LA PREUVE

Dans la section suivante, on réalise $\widetilde{H}_N$ comme le temps 1 d'une déformation de l'empilement H_N.

Dans la section VI, on utilise l'approche variationnelle développée dans [CV] pour obtenir l'équivalent $r_N(z) = \frac{|f'(z)|}{2N} + O(\frac{1}{N^2})$. L'idée est la suivante : sachant que la collection des rayons des cercles de $\widetilde{H}_N$ est point critique d'une certaine fonctionnelle F, on évalue la dérivée de F en la collection $\left\{\frac{1}{2N}\,|f'(s)|\,,\ s \text{ sommet de } \mathcal{T}_N\right\}$: si cette dérivée est petite, si la dérivée seconde de F est grande, on a le résultat. C'est ici que l'utilisation de la fonction exponentielle permet d'éviter trop de calculs.

Les estimations de la section VI permettent dans la section VII d'utiliser le théorème d'Ascoli pour conclure.

V. DÉFORMATIONS D'EMPILEMENTS DE CERCLES

On va construire une famille continue d'empilements de cercles $\{H_N^t\}_{t\in[0,1]}$, telle que $\widetilde{H}_N^0$ soit isométrique à H_N et telle que $\widetilde{H}_N^1 = \widetilde{H}_N$, et on va étudier la façon dont varient en fonction de t les rayons des cercles de $\widetilde{H}_N^t$. On pose $u_N^s = \log r_N^s$.

L'empilement $\widetilde{H}_N^t$ est défini par les trois conditions suivantes :

i) la combinatoire de $\widetilde{H}_N^t$ est $\mathcal{T}_N^1$

ii) le rayon du k-ième cercle du bord de $\widetilde{H}_N^t$, noté $r_N^{z_k}(t)$ $(1 \leq k \leq 6N)$, est donné par

$$\log r_N^{z_k}(t) = u_N^{z_k}(t) = (1-t)\log\frac{1}{2N} + t\log\frac{|f'(z_k)|}{2N} ,$$

où $(z_1, \ldots, z_{6N})$ désigne la suite des centres des cercles de H_N situés sur le bord $\partial\mathcal{H}$ de $\mathcal{H}$.

iii) la condition de normalisation est la même que pour $\widetilde{H}_N$.

Il est bien clair que $\widetilde{H}_N^1 = \widetilde{H}_N$. D'autre part $\widetilde{H}_N^0 = f(0) + \frac{f'(0)}{|f'(0)|}H_N$ est isométrique à H_N.

On va maintenant interpréter la famille $\left\{\frac{d}{dt}u_N^s(t)\right\}_{s\in S_N}$ comme solution d'un problème de Dirichlet discret.

On note B_N l'ensemble des sommets du bord de $\mathcal{T}_N$ et I_N l'ensemble des sommets intérieurs : on a $S_N = B_N \coprod I_N$. On note $u_N^B = (u_N^s)_{s\in B_N} \in \mathbb{R}^{B_N}$ (resp. $u_N^I = (u_N^s)_{s\in I_N} \in \mathbb{R}^{I_N}$) une famille de réels indexée par B_N (resp. I_N).

Dans [CV], le premier auteur construit une fonctionnelle $F : \mathbb{R}^{B_N} \times \mathbb{R}^{I_N} \to \mathbb{R}$ qui possède la propriété suivante : si $d_I F$ désigne la différentielle partielle de F par rapport aux variables indexées par I_N, alors on a $d_I F(u_N^B, u_N^I) = 0$ si et seulement si la collection des rayons $(\mathrm{e}^{u_N^s})_{s\in S_N}$ définit un empilement de cercles de combinatoire $\mathcal{T}_N$.

Explicitons la dérivée $d_I F$. Pour ce faire, à tout vecteur $u_N = (u_N^s)_{s\in S_N}$, on associe la métrique euclidienne à singularités coniques g_{u_N} sur $\mathcal{H}$ obtenue en recollant les triangles T de la triangulation $\mathcal{T}_N$ munis de la métrique euclidienne qui donne au côté ss' la longueur $\mathrm{e}^{u_N^s} + \mathrm{e}^{u_N^{s'}}$. Si $s \in I_N$ est un sommet d'un triangle $T \in \mathcal{T}_N$, on note $\alpha_T(s)$ l'angle en s dans le triangle T et $K_s(u_N) = 2\pi - \sum_{s\in T}\alpha_T(s)$. On a alors

$$d_I F(u_N) = \sum_{s\in I_N} K_s(u_N)\,du_N^s .$$

Dans le cas présent, pour tout $t \in [0,1]$, la collection de rayons $(\mathrm{e}^{u_N^s(t)})_{s\in S_N}$ définit un empilement de cercles de combinatoire $\mathcal{T}_N$, de sorte que l'on a

$$d_I F[u_N^B(t), u_N^I(t)] = 0 .$$

Par dérivation, il vient

$$d_{II}F\big[u_N^B(t)\cdot u_N^I(t)\big]\cdot \dot u_N^I(t) + d_{IB}F\big[u_N^B(t)\cdot u_N^I(t)\big]\cdot \dot u_N^B(t)=0\ ,$$

d'où

$$\forall t\in[0,1],\ \sum_{s\in I_N}\Bigg(\sum_{\substack{s'\in S_N\\ d_c(s',s)\le 1}}\frac{\partial K_s[u_N(t)]}{\partial u_N^{s'}}\dot u_N^{s'}(t)\Bigg)du_N^s=0$$

(d_c désigne la distance combinatoire dans le graphe $\mathcal{T}_N$).

Soit $b : B_N\to\mathbb{R}$ une fonction numérique. A toute fonction $\varphi\in\mathbb{R}^{I_N}$ prolongée par b sur B_N on associe la fonction $\Delta_b^{N,t}\varphi=\Delta_b\varphi\in\mathbb{R}^{I_N}$ définie par

$$\Delta_b\varphi(s)=\sum_{d_c(s',s)\le 1}\frac{\partial K_s[u_N(t)]}{\partial u_N^{s'}}\cdot\varphi(s')\ .$$

Les relations suivantes (où l'on note $s'\sim s$ pour s' voisin de s)

$$\sum_{d_c(s',s)\le 1}\frac{\partial K_s(u_N)}{\partial u_N^{s'}}=\frac{\partial K_s}{\partial u_N^s}+\sum_{s'\sim s}\frac{\partial K_s}{\partial u_N^{s'}}=0\ ;\quad \frac{\partial K_s}{\partial u_N^s}>0\ ,$$

$$\frac{\partial K_s}{\partial u_N^{s'}}<0 \text{ si } s'\sim s\ ;\quad \frac{\partial K_s}{\partial u_N^{s'}}=\frac{\partial K_{s'}}{\partial u_N^s}\text{ si } s'\sim s\ ,$$

assurent que l'opérateur Δ_0 est un laplacien discret sur I_N, c'est-à-dire un endomorphisme symétrique défini positif de $\mathbb{R}^{I_N}$.

En résumé, le vecteur $\dot u_N(t)=\{\dot u_N^s(t)\}_{s\in S_N}$ est la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases}\Delta_b^{N,t}\dot u_N(t)=0\\ \dot u_N^s(t)=b(s)=\log|f'(s)|\quad \text{si } s\in B_N\ .\end{cases}$$

Notons $A=\min\limits_{z\in\mathcal{H}}\log|f'(z)|$ et $B=\max\limits_{z\in\mathcal{H}}\log|f'(z)|$. L'inégalité $A\le\dot u_N^s(t)\le B$ est vraie pour tout sommet $s\in B_N$. D'après le principe du maximum (version discrète) elle est aussi vraie pour tout sommet intérieur. On en déduit que, pour tout $s\in S_N$, $A\le u_N^s(1)-u_N^s(0)\le B$, d'où, pour tout $s\in S_N$, $\mathrm{e}^A\le 2Nr_N^s\le\mathrm{e}^B$:

Proposition. — *Il existe deux constantes α et β ne dépendant que de f, telles que pour tout N, pour tout sommet $s\in S_N$, on ait $0<\frac{1}{N}\alpha\le r_N^s\le\frac{1}{N}\beta$.*

Cette proposition sera améliorée dans la section suivante où l'on donnera la limite de Nr_N^s. Une conséquence est que pour tout N, pour tous sommets $s, s' \in S_N$, on a $\frac{\beta}{\alpha} \geq \frac{r_N^{s'}}{r_N^s} \geq \frac{\alpha}{\beta}$, de sorte que les angles des triangles de $\widetilde{\mathcal{T}}_N$ sont minorés par une constante > 0 indépendante de N, de sorte que chaque application f_N envoie des triangles équilatéraux sur des triangles dont la distorsion est uniformément bornée, d'où

Corollaire 1. — *Il existe K (ne dépendant que de f) tel que, pour tout N, f_N est K-quasi-conforme.*

Citons enfin une autre conséquence de la proposition.

Corollaire 2. — *Il existe deux constantes C et D (ne dépendant que de f) telles que*

$$\forall N,\ \forall s \in I_N,\ 0 < C \leq \frac{\partial K_s}{\partial u_N^s} \leq D \text{ et } \forall s \in I_N,\ \forall s' \in S_N,\ s' \sim s,\ 0 < C \leq -\frac{\partial K_s}{\partial u_N^{s'}} \leq D\,.$$

Remarque. — La version discrète du principe du maximum donne une nouvelle démonstration du lemme de Schwarz-Pick discret (voir [St]). Soit $\mathcal{T}$ une triangulation d'un disque topologique, S (resp. B, I) l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$ (resp. sommets frontières, sommets intérieurs). Soient $r = (r_s)_{s\in S}$ et $r' = (r'_s)_{s\in S} \in (\mathbf{R}_+^*)^s$, et $\mathcal{T}_r$, $\mathcal{T}_{r'}$ les variétés riemanniennes plates à singularités coniques définies à partir de $\mathcal{T}$, r et r' au début de la section II.

La triangulation $\mathcal{T}$ possède deux réalisations géodésiques, dans $\mathcal{T}_r$ et dans $\mathcal{T}_{r'}$. On note $\Phi : \mathcal{T}_r \to \mathcal{T}_{r'}$ l'homéomorphisme affine par morceaux qui envoie de manière affine chaque triangle de $\mathcal{T}_r$ sur son correspondant dans $\mathcal{T}_{r'}$.

On note enfin c_s (resp. c'_s) le cercle de $\mathcal{T}_r$ (resp. $\mathcal{T}_{r'}$) de centre s de rayon r_s (resp. r'_s). On suppose que les familles de cercles $\mathcal{C} = \{c_s,\ s \in S\}$ et $\mathcal{C}' = \{c'_s,\ s \in S\}$ sont des empilements de cercles au sens défini dans la section II.

On a la

Proposition (lemme de Schwarz-Pick discret). — *Si $r_s \leq r'_s$ pour tout sommet frontière s. Alors* *i)* $r_s \leq r'_s$ *pour tout sommet intérieur* s *;*

ii) *l'application* $\Phi : \mathcal{T}_r \to \mathcal{T}_{r'}$ *augmente les distances.*

Preuve. On réalise la variété $\mathcal{T}_{r'}$ comme le temps 1 d'une déformation $\{\mathcal{T}_r(t), t \in [0,1]\}$ de la variété $\mathcal{T}_r$ comme ci-avant. En particulier, les rayons frontières de $\mathcal{T}_r(t)$ sont définis par

$$u_s(t) = \log r_s(t) = (1-t)\log r_s + t\log r'_s \ .$$

Pour tout t, il existe un laplacien discret Δ^t sur $\mathcal{T}$ (au sens de la section V) tel que

$$\begin{cases} \Delta^t \dot{u}(t) & = 0 \\ \dot{u}_s(t) & = \log \frac{r'_s}{r_s} \quad \text{si } s \in B \ . \end{cases}$$

Si $\dot{u}_s(t) \geq 0$ pour $s \in B$, alors cette inégalité est vraie pour tout sommet intérieur d'après le principe du maximum, donc $\log \frac{r'_s}{r_s} = u_s(1) - u_s(0) \geq 0$ pour $s \in I$, ce qui prouve *i)*. L'assertion *ii)* en résulte aussitôt.

VI. CONVERGENCE DES RAYONS

Soit $z \in \mathcal{H}$. Pour tout N, il existe un triangle $T_N \in \mathcal{T}_N$ tel que $z \in T_N$. Notons $s_N = s_N(z)$ l'un des sommets de T_N. Le but de cette section est d'établir la proposition suivante

Proposition 1. — *Si* $r_N(z)$ *désigne le rayon du cercle de* $\widetilde{H}_N$ *correspondant au cercle de* H_N *centré en* $s_N(z)$*. Alors on a uniformément sur* $\mathcal{H}$ $r_N(z) = \frac{|f'(z)|}{2N} + 0(\frac{1}{N^2})$ *quand* $N \to +\infty$.

Le problème est le suivant : on veut mesurer l'écart de $2Nr_N/|f'(z)|$ à 1, c'est-à-dire l'écart entre $\log r_N$ et $\log \frac{1}{2N}|f'(z)|$. On sait que la famille $\{\log r_N^s;\ s \in S_N\}$ est point critique d'une certaine fonctionnelle F, de sorte que si la dérivée de F en $\{\log \frac{1}{2N}|f'(s)|\}_{s \in S_N}$ est petite, et si la dérivée seconde de F est grande, on aura le résultat cherché.

1. Majoration de la courbure.

Soit $z_0 \in \mathcal{H}$, et, pour $1 \leq k \leq 6$, $v_k = z_0 + \varepsilon\omega^k$ où $\omega = \exp(i\frac{\pi}{3})$. On note α_k l'angle "en $|f'(z_0)|$" dans le triangle euclidien dont les côtés ont pour longueurs $|f'(z_0)| + |f'(v_k)|$, $|f'(v_k)| + |f'(v_{k-1})|$ et $|f'(v_{k-1})| + |f'(z_0)|$. On introduit enfin la courbure $K(\varepsilon)$ définie par

$$K(\varepsilon) = 2\pi - \sum_{k=1}^{6} \alpha_k \ .$$

On a le

Lemme 1. — *$K(\varepsilon) = O(\varepsilon^4)$ lorsque $\varepsilon \to 0$.*

Preuve du lemme 1. On a $\cos\alpha_k = 1 - 2\Big(1 + \big|\frac{f'(z_0)}{f'(v_{k-1})}\big|\Big)^{-1} \cdot \Big(1 + \big|\frac{f'(z_0)}{f'(v_k)}\big|\Big)^{-1}$. Pour ε proche de 0, $\frac{f'(z_0)}{f'(v_k)}$ est proche de 1 et donc la fonction $\varepsilon \mapsto \big|\frac{f'(z_0)}{f'(v_k)}\big|$ est C^∞ au voisinage de 0. Comme $\cos\alpha_k$ est alors proche de $\frac{1}{2}$, on en déduit que α_k dépend de manière C^∞ de ε au voisinage de 0, ainsi que $K(\varepsilon)$. Il suffit donc de vérifier que les termes d'ordre ≤ 3 dans le développement de Taylor de $K(\varepsilon)$ en 0 sont nuls.

On peut supposer que $z_0 = 0$ et que $f'(z_0) = 1$. On a donc $f'(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$. Comme la courbure dépend de ε et de f, on note $2\pi - \sum_{k=1}^{6} \alpha_k = K(\varepsilon, f) = K(\varepsilon, a_1, a_2, \ldots,)$. Le développement limité de $K(\varepsilon, f)$ au voisinage de 0 s'écrit

$$K(\varepsilon, f) = \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2 + \cdots + \varepsilon^n K_n + O(\varepsilon^{n+1})$$

où $K_i = K_i(a_1, \ldots, a_i)$ est un polynôme réel en $\mathrm{Re}(a_1), \mathrm{Im}(a_1), \ldots, \mathrm{Re}(a_i), \mathrm{Im}(a_i)$. Soit t un réel > 0 et g la fonction définie par $g(z) = \frac{1}{t} f(tz) : g'(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n \cdot z^n = f'(tz)$, d'où

$$\begin{aligned} K(\varepsilon, ta_1, t^2 a_2, \ldots,) = K(\varepsilon, g) = K(t\varepsilon, f) = \\ = t\varepsilon K_1(a_1) + t^2\varepsilon^2 K_2(a_1, a_2) + \cdots + t^n \varepsilon^n K_n(a_1, \ldots, a_n) + O(\varepsilon^{n+1}) \end{aligned}$$

et donc $K_i(ta_1, \ldots, t^i a_i) = t^i K_i(a_1, \ldots, a_i)$.

Comme l'hexagone de sommets $1, \omega, \ldots, \omega^5$ est symétrique par rapport à 0, on a $K(-\varepsilon, f) = K(\varepsilon, f^\sigma) = K(\varepsilon, f)$ où f^σ désigne la fonction $f^\sigma(z) = f(-z)$, ce qui implique que les termes d'ordre impair dans le développement de $K(\varepsilon, f)$ sont nuls, et donc que

$$K(\varepsilon, f) = \varepsilon^2 K_2(a_1, a_2) + O(\varepsilon^4) \ .$$

Le polynôme K_2 s'écrit $K_2(a_1, a_2) = \sum_{k=0}^{d} P_k(a_1) \cdot a_2$, où $P_k(a_1) \cdot a_2$ est un polynôme réel homogène de degré k en $\mathrm{Re}(a_2), \mathrm{Im}(a_2)$, dont les coefficients sont des polynômes en $\mathrm{Re}(a_1),\ \mathrm{Im}(a_1)$. La relation $K_2(ta_1,\ t^2 a_2) = t^2 K_2(a_1, a_2)$ s'écrit

$$\sum_{k=0}^{d} t^{2k} P_k(ta_1) \cdot a_2 = \sum_{k=0}^{d} t^2 P_k(a_1) \cdot a_2 \ .$$

Pour $k \geq 2$, on a $\forall t > 0,\ P_k(a_1) \cdot a_2 = t^{2(k-1)} P_k(ta_1) \cdot a_2$, donc $P_k(a_1) \cdot a_2 = 0$. Pour $k = 1$, on a $P_1(ta_1) = P_1(a_1)$, donc $P_1(a_1)$ est une forme linéaire indépendante de a_1, notée L. Pour $k = 0$, on a $P_0(ta_1) = t^2 P_0(a_1)$, donc P_0 est une forme quadratique, notée Q. Finalement, K_2 s'écrit $K_2(a_1, a_2) = Q(a_1) + L(a_2)$.

Notons h l'application $h(z) = f(\omega z)$. L'invariance de l'hexagone par rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ implique $K(\varepsilon, h) = K(\varepsilon, f)$, donc $K(\varepsilon, \omega a_1, \omega^2 a_2, \ldots,) = K(\varepsilon, a_1, a_2, \ldots,)$. On en déduit d'une part que $L(\omega^2 a_2) = L(a_2)$, c'est-à-dire que $L = 0$, et d'autre part que $Q(\omega a_1) = Q(a_1)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante c (ne dépendant pas de f) telle que $Q(a_1) = c|a_1|^2 = K_2(a_1, a_2)$. Or, pour la fonction $F(z) = \frac{1}{a_1} e^{a_1 z}$, on a $0 = K(\varepsilon, F) = K(\varepsilon, a_1, \frac{a_1^2}{2!}, \ldots,)$, donc $c = 0$ et donc $K(\varepsilon, f) = O(\varepsilon^4)$. Ceci prouve le lemme 1.

Remarque. Les arguments développés ci-dessus permettent de déterminer le coefficient de ε^4.

Le point de départ est le fait suivant.

Fait. — Il existe une forme linéaire L sur $\mathbb{R}^2$, un polynôme à quatre variables M homogène de degré 1 en les deux premières, de degré 1 en les deux autres, un polynôme à quatre variables P homogène de degré 2 en les deux premières, de degré 1 en les deux autres, une forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^2$, et un polynôme R à deux variables homogène de degré 4 tels que

$$K_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = L(a_4) + M(a_1, a_3) + P(a_1, a_2) + Q(a_2) + R(a_1) \ .$$

En effet, comme précédemment, il suffit d'écrire K_4 sous la forme $K_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{k=0}^{d} P_k(a_1, a_2, a_3) \cdot a_4$ et d'exploiter l'identité $K_4(ta_1, t^2a_2, t^3a_3, t^4a^4) = t^4K_4(a_1, a_2, a_3, a_4)$. On en déduit que P_k est nul pour $k \geq 2$, que $P_1(a_1, a_2, a_3)$ est une forme linéaire L indépendante de (a_1, a_2, a_3), et que $P_0(ta_1, t^2a_2, t^3a_3) = t^4P_0(a_1, a_2, a_3)$; on écrit alors à nouveau P_0 sous la forme $P_0(a_1, a_2, a_3) = \sum_{k=0}^{d} Q_k(a_1, a_2) \cdot a_3$. Le reste est laissé au lecteur.

L'invariance de l'hexagone par rotation implique $L(\omega^4a_4) = L(a_4)$, et donc $L = 0$. Elle implique aussi $M(a_1, a_3) = M(\omega a_1, \omega^3a_3) = M(\omega^2a_1, \omega^6a_3) = M(\omega^2a_1, a_3)$, donc la forme linéaire $a_1 \mapsto M(a_1, a_3)$ est invariante par multiplication par ω^2, donc nulle, et ce quel que soit a_3, d'où $M(a_1, a_3) = 0$. De même, $P(\omega a_1, \omega^2a_2) = P(a_1, a_2)$, de sorte qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 indépendantes de f telles que

$$P(a_1, a_2) = c_1 \operatorname{Re}(a_1^2\,\bar{a}_2) + c_2 \operatorname{Im}(a_1^2\,\bar{a}_2)\ .$$

Enfin, $R(\omega a_1) = R(a_1)$ et $Q(\omega^2a_2) = Q(a_2)$, donc il existe deux autres constantes c_3 et c_4 telles que $R(a_1) = c_3|a_1|^4$ et $Q(a_2) = c_4|a_2|^2$. Finalement, K_4 est de la forme

$$K_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = c_1 \operatorname{Re}(a_1^2\,\bar{a}_2) + c_2 \operatorname{Im}(a_1^2\,\bar{a}_2) + c_3|a_1|^4 + c_4|a_2|^2\ .$$

Comme dans la preuve du lemme, on considère la fonction F donnée par $F(z) = \frac{1}{a_1}e^{a_1z}$: $F'(z) = e^{a_1z} = 1 + a_1z + \frac{a_1^2}{2}z^2 + \ldots$ et $K(\varepsilon, F) = 0$, donc $c_1\frac{|a_1|^4}{2} + c_3|a_1|^4 + c_4|\frac{a_1^2}{2}|^2 = 0$, donc $c_4 = -2c_1 - 4c_3$. Comme $a_1 = f''(0)$ et $a_2 = \frac{f'''(0)}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}K(\varepsilon, f) = \Big[&\lambda(\operatorname{Re} f''(0)^2\overline{f'''(0)} - |f'''(0)|^2) + \mu \operatorname{Im} f''(0)^2\overline{f'''(0)} \\ &+\nu(|f''(0)|^4 - |f'''(0)|^2)\Big]\,\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6)\ ,\end{aligned}$$

les constantes λ, μ et ν ne dépendant pas de f.

Avec les notations de la section V, on a le

Corollaire 1. — *Si* $\tilde{u}_N = \big\{\log\frac{1}{2N}|f'(s)|\ s \in S_N\big\}$, *alors* $K_s(\tilde{u}_N) = O\big(\frac{1}{N^4}\big)$ *quand* $N \to +\infty$, *pour* $s \in I_N$.

Compte tenu du fait que $\operatorname{Card} I_N = O(N^2)$, on en déduit que $\|d_IF(\tilde{u}_N)\|_2 = \sqrt{\sum_{s\in I_N} K_s(\tilde{u}_N)^2} = O\big(\frac{1}{N^3}\big)$. En notant $\bar{u}_N = \{\log r_N^s,\ s \in S_N\}$, et sachant que $d_IF(\bar{u}_N) = 0$ et que $\bar{u}_N^s = \tilde{u}_N^s$, $\forall s \in B_N$, il vient

$$\|\Delta_N(\bar{u}_N - \tilde{u}_N)\|_2 = \|d_{II}F(\bar{u}_N) \cdot (\bar{u}_N - \tilde{u}_N)\|_2 \sim \|d_IF(\bar{u}_N) - d_IF(\tilde{u}_N)\|_2 = O\Big(\frac{1}{N^3}\Big)\ .$$

2. Minoration de la première valeur propre d'un laplacien discret.

Il reste donc à évaluer $\|\Delta_N^{-1}\|_2$. On rappelle que Δ_N est l'application de $\mathbb{R}^{I_N}$ dans lui-même qui à toute fonction $\varphi \in \mathbb{R}^{I_N}$, prolongée par 0 sur B_N, associe la fonction $\Delta_N\varphi$ définie par $\forall s \in I_N$, $\Delta_N\varphi(s) = \sum_{\substack{s' \in S_N \\ d_c(s',s) \le 1}} \frac{\partial K_s[\bar{u}_N]}{\partial u_N^{s'}} \cdot \varphi(s')$.

L'application Δ_N est un endomorphisme symétrique défini positif de $\mathbb{R}^{I_N}$. On note $0 < \lambda_1^{(N)} \le \lambda_2^{(N)} \le \cdots \le \lambda_n^{(N)}$ ses valeurs propres. On a $\lambda_n^{(N)} = \|\Delta_N\|_2$, $\frac{1}{\lambda_1^{(N)}} = \|\Delta_N^{-1}\|_2$ et $\lambda_1^{(N)} = \min\Big\{\langle \Delta_N\varphi|\varphi\rangle / \|\varphi\|^2,\ \varphi \in \mathbb{R}^{I_N},\ \varphi \ne 0\Big\}$. On a le

Lemme 2. — *Il existe une constante c ne dépendant que de f telle que $\lambda_1^{(N)} \ge \frac{c}{N^2}$.*

Du lemme 2 il résulte que $\|\bar{u}_N - \tilde{u}_N\|_2 \le \|\Delta_N^{-1}\|_2 \cdot \|\Delta_N(\bar{u}_N - \tilde{u}_N)\|_2 = O(N^2 \times \frac{1}{N^3}) = O(\frac{1}{N})$; il existe donc une constante M (ne dépendant que de f) telle que $\sqrt{\sum_{s\in I_N} |\bar{u}_N^s - \tilde{u}_N^s|^2} \le \frac{M}{N}$. On en déduit que $|\bar{u}_N^s - \tilde{u}_N^s| \le \frac{M}{N}$, et donc que $r_N^s = \frac{|f'(s)|}{2N} + O(\frac{1}{N^2})$, la majoration étant uniforme sur $\mathcal{H}$.

Preuve du lemme 2. L'idée est de comparer Δ_N au laplacien discret à coefficients constants sur un réseau périodique contenant S_N pour lequel les valeurs propres sont connues explicitement.

Soit $\widetilde{\Delta}_N$ le laplacien discret à coefficients constants sur $\mathbb{R}^{I_N}$ défini pour $\varphi \in \mathbb{R}^{I_N}$, par $\widetilde{\Delta}_N\varphi(s) = \varphi(s) - \frac{1}{6}\sum_{s'\sim s}\varphi(s')$ (avec toujours la convention $\varphi = 0$ sur B_N). On a

$$\langle \Delta_N\varphi|\varphi\rangle = \sum_{s\in I_N} \Delta_N\varphi(s)\cdot\varphi(s) = -\frac{1}{2}\sum_{s'\sim s}\frac{\partial K_s}{\partial u_N^{s'}}\big(\varphi(s) - \varphi(s')\big)^2$$

et

$$\langle \widetilde{\Delta}_N\varphi|\varphi\rangle = \frac{1}{12}\sum_{s'\sim s}\big(\varphi(s) - \varphi(s')\big)^2 .$$

Le corollaire 2 de la section V fournit une constante c telle que $-\frac{\partial K_s}{\partial u_N^{s'}} \ge c > 0$ si $s' \sim s$, de sorte que $\langle \Delta_N\varphi|\varphi\rangle \ge 6c\langle \widetilde{\Delta}_N\varphi|\varphi\rangle$, d'où $\lambda_1^{(N)} \ge 6c\tilde{\lambda}_1^{(N)}$, en notant $\tilde{\lambda}_1^{(N)}$ la première valeur propre de $\widetilde{\Delta}_N$.

Pour minorer la première valeur propre $\tilde{\lambda}_1^N$ du laplacien de Dirichlet d'ordre N dans l'hexagone unité, on peut d'abord la minorer par le principe du minimax par celle du même problème pour le plus petit triangle équilatéral contenant l'hexagone

$\mathcal{H}$. Le groupe Γ engendré par les symétries par rapport aux côtés de ce triangle contient un réseau L d'indice 6 par rapport à Γ. Les fonctions nulles au bord du triangle équilatéral se prolongent en des fonctions impaires par rapport aux symétries qui engendrent Γ qui sont donc périodiques par rapport à L. On peut ainsi minorer $\tilde{\lambda}_1^N$ par la première valeur propre non nulle pour les fonctions L-périodiques qui se calcule explicitement, une base de fonctions propres étant donnée par les restrictions d'exponentielles complexes. On en déduit la minoration du lemme 2.

VII. FIN DE LA PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL

La fin de la preuve résulte des 3 lemmes suivants.

Lemme 1. — *Si $U\mathcal{H}$ est l'ensemble des vecteurs unitaires tangents à $\mathcal{H}$, la suite des $f'_N : U\mathcal{H} \to T(\mathbf{C})$ est équicontinue.*

Lemme 2. — *Pour tout z et tout $N \geq 1$, il existe une similitude directe $s_N(z)$ de rapport $|f'(z)|$ telle que*

$$\|f'_N(z) - s_N(z)\| = O(\frac{1}{N}) \ ,$$

uniformément en z.

Lemme 3. — *Quand $N \to \infty$, $(f_N(0), f'_N(0))$ tend vers $(f(0), f'(0))$.*

Preuve du lemme 1. Ce lemme résulte du fait que les $f'_N(z)$ sont constantes à l'intérieur des triangles de $\mathcal{T}_N$ et ont un saut de $O(1/N)$ aux frontières de ceux-ci (proposition 1 de VI). Si $|z - z'| \leq \varepsilon$, on a $d_c^N(z, z') = O(N\varepsilon)$ et donc

$$\|f'_N(z) - f'_N(z')\| = O(\frac{1}{N}.N\varepsilon) \ ,$$

ce qui prouve l'équicontinuité.

Preuve du lemme 2. Ce lemme résulte de la proposition 1 de VI, en particulier de l'estimation sur les rayons $r_N(z)$.

Preuve du lemme 3. Ce lemme résulte de la condition de normalisation (iii) imposée aux f_N et du lemme 2.

Fin de la preuve du théorème. Des lemmes 1 et 3 et du théorème d'Ascoli, il suit que la suite des f_N est relativement compacte pour la topologie C^1. Soit donc (f_{N_k}) une sous-suite convergente pour la topologie C^1 vers une application F. Du lemme 2, il résulte que F est holomorphe avec, pour tout z,

$$|F'(z)| = |f'(z)| \ ,$$

et du lemme 3 que

$$(F(0), F'(0)) = (f(0), f'(0)) \ .$$

On en déduit $F = f$. Donc f est le seul point d'accumulation de la suite (f_N), ce qui suffit pour conclure.

BIBLIOGRAPHIE

[C-R] I. Carter, B. Rodin, *An inverse problem for circle packing and conformal mapping*, Trans. Amer. Math. Soc. **334** (1992), 861–875.

[CV] Y. Colin de Verdière, *Un principe variationnel pour les empilements de cercles*, Inventiones Math. **104** (1991), 655–669.

[H-R] Z.X. He, B. Rodin, *Convergence of Circle Packings of Finite Valence to Riemann Mapping*, Commun. Anal. Geom. **1** (1993), 31–41.

[M] F. MATHÉUS, *Empilements de cercles et représentations conformes : une nouvelle preuve du théorème de Rodin-Sullivan* , à paraître dans *L'Enseignement Mathématique.*

[R-S] B. Rodin, D. Sullivan, *The Convergence of Circle Packings to the Riemann Mapping*, J. Differential Geom. **26** (1987), 349–360.

[St 1] K. Stephenson, *Circle packings in the approximation of conformal mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. (Research Announcements) **23** (1990), 407–415.

[St 2] K. Stephenson, *Thurston's Conjecture on Circle Packings in the Non Hexagonal Case*, Preprint, Univ. Tennessee (Knoxville), (1991).

[Th] W. Thurston, *The finite Riemann Mapping Theorem*, Invited talk, An international Symposium at Purdue University on the occasion of the proof of the Bieberbach Conjecture (March 1985).

[Tr] M. Troyanov, *Les surfaces euclidiennes à singularités coniques*, Ens. Math. **32** (1986), 79–94.