ÉQUILINÉARITÉ
ET COURBURE SCALAIRE CONFORME

Philippe DELANOË
Chargé de recherches au C.N.R.S. et membre du réseau européen GADGET

Université de Nice-Sophia Antipolis
Mathématiques, Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 2 (France)
delphi@math.unice.fr

Abstract. On a complete noncompact Riemannian manifold (M, g), I show that the solvability of semi-linear equations like $\Delta u = f(x)F(u)$ is equivalent to that of the linear equation $\Delta v = f(x)$, under some assumptions on u, v, f, F. I call this phenomenon "equilinearity". When M has dimension $n > 2$ and g is scalar-flat non-parabolic, I derive from this a characterization of the set $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$ of functions which are scalar curvature of metrics quasi-isometric to g. In the particular case of euclidean space, my result improves [13] and, combined with Liouville's theorem, it explains the *ad hoc* condition of partial decay at infinity of [13]. Last, I discuss a list of sign incompatibilities between functions in $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$, deduced from well-known properties of the laplacian under three natural geometric assumptions.

Résumé. Sur une variété riemannienne complète non compacte (M, g), je montre que la possibilité de résoudre des équations semi-linéaires de la forme $\Delta u = f(x)F(u)$ équivaut à celle de résoudre l'équation linéaire $\Delta v = f(x)$, moyennant certaines hypothèses sur u et v, f et F. J'appelle ce phénomène "équilinéarité". Lorsque M est de dimension $n > 2$ et g scalaire-plate, non-parabolique, j'en déduis une caractérisation de l'ensemble $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$ des fonctions qui sont courbures scalaires de métriques quasi-isométriques à g. Dans le cas particulier de l'espace euclidien, mon résultat améliore [13] et, combiné au théorème de Liouville, il en explique la condition *ad hoc* d'évanouissement partiel à l'infini. Je discute en annexe une liste d'incompatibilités de signe entre fonctions de $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$, déduites de propriétés connues du laplacien sous trois hypothèses géométriques naturelles.

M.S.C. Subject Classification Index : 53C21, 35J60, 35B99.
Contrat GADGET SC1-0105-C

TABLE DES MATIÈRES

1. INTRODUCTION

Sur toute variété riemannienne (M,g) de dimension $n>2$ (sauf précision tous nos objets seront lisses i.e. de classe C^∞), à chaque fonction positive u est associée la métrique conforme

$$g_u = u^p g\ ,\ p = \frac{4}{n-2}\ ,$$

de courbure scalaire

$$s(g_u) = u^{-p-1}[c_n \Delta u + s(g)u]$$

où $c_n = 4(n-1)/(n-2)$ et Δ désigne le laplacien de g (avec la convention de signe $\Delta = -d^2/dx^2$ sur $\mathbb{R}$). J. L. Kazdan et F. Warner se sont interrogés [11] sur *l'image* $\mathcal{S}$ de l'application $u \mapsto s(g_u)$. Supposant désormais M non compacte et g complète, on imposera à g_u d'être *équivalente* à g (l'ensemble des métriques conformes équivalentes à g s'appelle souvent *classe quasi-isométrique* de g) ; on notera $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ correspondant. Mais on devra parfois considérer le sous-ensemble $\overline{\mathcal{S}}$ (resp. $\underline{\mathcal{S}}$) pour lequel u n'est que bornée (resp. uniformément positive, g_u est alors complète). Bien entendu : $\overline{\underline{\mathcal{S}}} = \overline{\mathcal{S}} \cap \underline{\mathcal{S}}$.

Mon but dans cet exposé est d'obtenir des informations sur $\mathcal{S}$ (et sur les autres sous-ensembles) à partir de résultats ou de techniques connus concernant le laplacien de (M,g). J'étudierai principalement (section 3) le cas où $s(g)=0$ quand (M,g) est non-parabolique par la méthode des solutions supérieure et inférieure [9] (p. 313), mais je donnerai aussi (en annexe) une liste commentée d'incompatibilités de signe entre fonctions de $\mathcal{S}$ ou de ses sous-ensembles, déduites de propriétés connues [4] [10] [14] du laplacien tour à tour sous trois hypothèses coutumières. Pour caractériser $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$ quand $s(g)=0$, l'idée directrice est la suivante : chercher si 0 appartient à $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$ se traduit par un problème *linéaire*, donc inversement partir d'une métrique scalaire-plate pour caractériser les fonctions de $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$ doit équivaloir à un problème linéaire sur le laplacien. Cette idée se révèle fructueuse non seulement pour l'équation géométrique $f \in \overline{\underline{\mathcal{S}}}$, mais encore pour des équations non-linéaires plus générales traitées préalablement dans la section 2. Il s'agit d'équations semi-linéaires de la forme $\Delta u = f(x)F(u)$ dont je montre *l'équivalence*, sous certaines hypothèses, avec l'équation linéaire $\Delta v = f$. Je qualifie donc d'*équilinéaire* une telle famille de problèmes non-linéaires. Si le théorème de Liouville fort (celui bien connu sur $\mathbb{R}^2$) s'applique à (M, g), les résultats sont triviaux, car nécessairement limités à $f \equiv 0$; c'est pourquoi (M, g) est supposée *non-parabolique* dans les sections 2 et 3.

Dans la suite de l'introduction, je vais présenter l'apport *géométrique* principal de cet article, objet de la section 3.

Le seul critère (suffisant) connu d'appartenance à $\overline{\underline{S}}$, lorsque g est scalaire-plate, est celui de W.-M. Ni [13] sur l'espace euclidien ; rappelons-en l'énoncé.

Théorème [13]. — *Si f est une fonction réelle bornée localement höldérienne sur $\mathbb{R}^n$ et s'il existe un réel $\epsilon > 0$ et un sous-espace vectoriel de dimension $m > 2$ (soit $|\pi|$ la norme de la projection orthogonale sur ce sous-espace) tels que $|\pi|^{2+\varepsilon} f$ soit bornée, alors f appartient à $\overline{\underline{S}}$.*

Cette condition d'évanouissement partiel de f à l'infini relativement à un sous-espace de dimension $m > 2$ est d'un type nouveau dans la littérature. Dans [13], elle permet de construire des solutions supérieure et inférieure, fonctions seulement de π, de l'équation $s(g_u) = f$. J'ai remarqué dans [5] qu'elle est aussi garante de la convergence de l'intégrale sur $\mathbb{R}^n$ exprimant le *potentiel newtonien* de $|f|$. Au détour de cette remarque, l'analyste distinguera la possibilité d'une théorie linéaire elliptique à évanouissement partiel, objet en effet de [6] (section 2). Au début de mon exposé oral, j'ai établi un nouveau principe du maximum, propre à cette théorie (voir [6], p. 17-19 et aussi p. 47). Ici, comme je l'ai fait dans le corps de mon exposé oral, je ne vais plus spécifier le comportement qualitatif de f à l'infini, je ne retiendrai que la convergence de son potentiel newtonien et l'exprimerai sous forme *différentielle*, en requérant l'existence d'une solution *bornée* de l'équation linéaire

$$\Delta u = |f| \ .$$

Ainsi formulée, cette condition a été récemment utilisée dans [3] (Theorem 1) pour résoudre une équation elliptique sous-linéaire dans $\mathbb{R}^n$; pour nous, elle présente le grand avantage de conserver un sens sur toute variété riemannienne complète non compacte, où elle n'a d'intérêt que si la variété est non-parabolique. Elle conduit à une extension quasi-optimale du théorème de Ni à savoir :

Théorème (cf. section 3). — *Sur (M, g) complète non-compacte scalaire-plate, la condition précédente sur f implique $f \in \underline{\overline{S}}$. Elle est nécessaire pour cela dès que $f \geq 0$ (resp. $f \leq 0$).*

En outre, dans le cas particulier de $\mathbb{R}^n$, ce théorème combiné au théorème de Liouville, démontre (cf. Corollaire $2'$) la **nécessité** de l'hypothèse $m > 2$ faite par Ni (sur la dimension du sous-espace), indépendamment de toute hypothèse de décroissance sur $|f|$ à l'infini ! Un résultat analogue vaut d'ailleurs pour des équations semi-linéaires plus générales sur $\mathbb{R}^n$ (cf. Corollaire 2).

2. ÉQUILINÉARITÉ

Dans cette section je vais mettre en évidence une classe de problèmes non-linéaires qui possèdent la propriété d'être simultanément solubles ou insolubles, suivant qu'un problème *linéaire*, indépendant de la non-linéarité particulière choisie dans la classe, est ou non soluble lui-même. Je qualifierai d'*équilinéaire* une telle classe.

Soit (M, g) une variété riemannienne complète non-compacte de dimension finie. Elle est dite *non-parabolique* si son laplacien Δ admet un noyau de Green symétrique positif. C'est une propriété invariante par changement de métriques équivalentes [8]. Elle équivaut à la négation du théorème de Liouville i.e. à l'existence sur (M, g) de fonctions surharmoniques positives non-constantes, comme il ressort d'ailleurs aisément de la Remarque 1 de [12] (p. 1137). Nous aurons besoin de telles fonctions dans cette section et la suivante, c'est pourquoi nous y supposerons (M, g) *non-parabolique.*

Soit F une fonction réelle localement höldérienne définie sur $]0, \infty[$ et f une fonction réelle localement höldérienne sur M. Considérons les couples (λ, u) formés d'un réel positif λ et d'une fonction positive u qui vérifient (au sens classique) l'équation

$$\Delta u = \lambda f F(u) \; . \tag{1}$$

Etablissons d'abord un résultat très général, qui donne comme condition nécessaire sur f pour l'existence d'une solution *supérieure au sens faible* (notion précisée ci-après dans l'énoncé) uniformément positive de (1), celle d'une solution positive classique de l'équation linéaire

$$\Delta u = f \ . \tag{2}$$

Proposition 1. — *Supposons F positive non-décroissante (resp. négative non-croissante) sur $]0,\infty[$ et f non-négative (resp. non-positive). Alors s'il existe un réel $\lambda > 0$ et une fonction u continue sur M uniformément positive, $g(du,du)$ étant localement intégrable sur M dans la métrique g, tels que pour toute fonction lisse à support compact non-négative v*

$$\int_M [g(du,dv) - \lambda f F(u)v]\, d\mu \geq 0$$

(où $d\mu$ désigne la mesure de Lebesgue canonique de g), l'équation (2) possède nécessairement une solution positive pourvue de dérivées secondes localement höldériennes.

Preuve. Soit u une solution faible de $\Delta u \geq \lambda f F(u)$ pour $\lambda > 0$, avec $\inf_M(u) = \alpha > 0$. Si $F > 0$ (resp. $F < 0$), les fonctions $u/\lambda F(\alpha)$ et $\alpha/\lambda F(\alpha)$ sont respectivement solution supérieure (resp. inférieure) et inférieure (resp. supérieure) au sens faible de l'équation $\Delta u = f$, la solution inférieure étant dominée par la solution supérieure. Le vérifier à la main est immédiat. Le résultat suit donc d'un procédé itératif classique (appliquer le théorème C.4 de [9] en y prenant $w = \alpha/\lambda F(\alpha)$) qui fournit une solution de (2), comprise entre $u/\lambda F(\alpha)$ et $\alpha/\lambda F(\alpha)$, et possédant la régularité annoncée.

Il existe une condition nécessaire analogue pour l'existence d'une solution *inférieure* faible de l'équation (1) :

Proposition 2. — *Supposons F positive non-décroissante (resp. négative non-croissante) sur $]0,\infty[$ et f non-positive (resp. non-négative). Alors s'il existe un réel $\lambda > 0$ et une fonction u continue sur M uniformément positive et bornée, $g(du,du)$ étant localement intégrable sur M dans la métrique g, tels que pour toute fonction lisse à support compact non-négative v,*

$$\int_M [g(du,dv) - \lambda f F(u)v]\, d\mu \leq 0$$

l'équation (2) possède nécessairement une solution bornée pourvue de dérivées secondes localement höldériennes.

Preuve. Soit (λ, u) vérifiant l'hypothèse de la Proposition 2. Posons $\alpha = \inf_M(u), \beta = \sup_M(u)$, et notons que $\Delta u \leq \lambda f F(\alpha) \leq \Delta\beta$ (la première inégalité ayant lieu au sens faible). On obtient donc par itération ([9], Theorem C.4, avec $w = \beta$) une solution classique v de l'équation $\Delta v = \lambda F(\alpha) f$ comprise entre u et β. Dès lors, $v/\lambda F(\alpha)$ est bien solution bornée de (2) avec la régularité annoncée.

Remarque 1. — Dans ces propositions, l'hypothèse sur *le signe* de fF écarte la possibilité pour u d'être constante sauf à avoir $f \equiv 0$. Si l'on pouvait échanger les hypothèses (sur f et F) de ces propositions, on pourrait prendre u et f *constantes* (avec F quelconque) et affirmer ainsi à coup sûr l'existence d'une solution v minorée (resp. majorée) de l'équation $\Delta v = 1$ (resp. $\Delta v = -1$). Or il est fréquent pour une variété (M, g) d'être telle que l'existence d'une solution majorée (resp. minorée) de l'équation $\Delta v = f$ implique $\sup_M(f) \geq 0$ (resp. $\inf_M(f) \leq 0$), ce qui limite *a priori* les bons candidats f. Il en est ainsi par exemple si la croissance du volume des boules géodésiques sur (M, g) est au plus exponentiellement quadratique [10], *a fortiori* si (M, g) satisfait un principe du maximum généralisé (cf. [2], p. 98).

Passons au phénomène nouveau d'équilinéarité, principal objet de ce paragraphe ; il s'agit de l'équivalence décrite dans le

Théorème 1. — *Supposons que F et f vérifient les hypotèses des propositions 1 ou 2. Alors l'existence d'un réel $\lambda > 0$ et d'une fonction u de classe* C^2 *uniformément positive et bornée telle que (λ, u) soit une solution de (1) équivaut à celle d'une solution bornée de classe* C^2 *de l'équation (2).*

Preuve. La nécessité de l'existence d'une solution bornée de l'équation (2) découle des propositions 1 et 2. Montrons que c'est aussi une condition *suffisante*. Soit v une solution bornée de l'équation (2). Deux hypothèses sont à considérer, selon que Ff est non-négatif ou non-positif. Posons

$$z = F(1)v \ , \ \lambda = \frac{1}{1 + \mathrm{osc}_M z}, w = \lambda(1 + z - \inf_M z) \ ,$$

et notons que $\lambda \leq w \leq 1$. Si Ff est non-négatif, on vérifie aussitôt les inégalités $\Delta w \geq \lambda f F(w)$ et $\Delta\lambda \leq \lambda f F(\lambda)$, et l'on obtient par itération [9] (Theorem C.4) une solution (λ, u) de (1) avec $\lambda \leq u \leq w$. Si Ff est non-positif, on a $\Delta w \leq \lambda f F(w)$ et $\Delta 1 \geq \lambda f F(1)$, et l'on obtient de même une solution (λ, u) de (1) avec cette fois $w \leq u \leq 1$.

Remarque 2. — Si (u, λ) vérifie (1) avec F homogène de degré q, pour un réel non-négatif q différent de 1, alors (v, μ) le fait aussi, où $v = (\lambda/\mu)^{1/(q-1)}u$. On utilisera cette remarque avec $n > 2$, $s(g) = 0$, $q = p + 1$, $\mu = 1/C_n$, dans la section 2. L'utilisant ici avec $\mu = 1$ et $0 < q < 1$ fait apparaître le théorème 1 de [3], démontré sur l'espace euclidien avec $f \geq 0$ et $F(u) = u^q$, comme un cas très particulier du précédent ; on voit notamment que la sous-linéarité exigée sur F dans [3] n'est pas nécessaire.

Remarque 3. — L'équivalence décrite dans le théorème 1 est surprenante car le critère "f est telle que (2) admet une solution classique bornée" est *indépendant du choix de la non-linéarité F.* C'est pourquoi "équilinéaire" me paraît bien qualifier la classe des problèmes traduits par l'équation (1) assortie des conditions du théorème. L'équilinéarité est rendue possible par ces conditions ; qu'on remplace seulement la condition "u uniformément positive" par "u positive" et elle disparaît. En effet sur $\mathbb{R}^n, n > 2$, prenons $\lambda = f = 1$ et $F(u) = u^q$. D'après [7], l'équation (1) n'admet alors pas de solution positive classique pour $q \in \,]1, p + 1[$, où $p = 4/(n - 2)$, mais elle admet de telles solutions, *nulles à l'infini*, pour $q = p + 1$ (celles-ci s'obtiennent géométriquement à partir de la projection stéréographique habituelle). En outre, l'équation (2) avec $f = 1$ n'admet pas ici de solution minorée (cf. Remarque 1).

Soit G le plus petit noyau de Green symétrique *positif* du laplacien, dont l'existence est acquise puisqu'on a supposé (M, g) non-parabolique ; on dispose alors d'un critère garantissant l'existence d'une solution *bornée* de l'équation (2), critère *nécessaire* dès que f ne change pas de signe d'après un argument comme celui de [3] (Appendix 1).

Proposition 3. — *Si f est telle que l'intégrale sur M dans la métrique g de la fonction $y \mapsto G(x, y)|f(y)|$ possède une borne supérieure essentielle sur M finie, alors* *l'équation $\Delta v = f$ admet une solution bornée (unique à une fonction harmonique bornée près).*

Preuve. Soit $d\mu$ la mesure de Lebesgue sur M définie par g, et Γ l'opérateur de convolution par G dans la mesure $d\mu$. Par hypothèse $\Gamma(|f|) \in L^\infty(M, d\mu)$, donc aussi $\Gamma(f) \in L^\infty(M, d\mu)$ puisque $G > 0$. Pour toute fonction h lisse à support compact, considérons

$$I(h) := \int_M \Gamma(f)\Delta h d\mu = \int_M \left[\int_M G(x,y)f(y)d\mu(y)\right] \Delta h(x)\, d\mu(x)\ .$$

L'hypothèse permet de vérifier l'intégrabilité sur $M \times M$ de

$$(x,y) \mapsto G(x,y)\, f(y)\, \Delta h(x)\ ,$$

requise pour pouvoir permuter dans $I(h)$ l'ordre des intégrations *via* le théorème de Fubini, car elle permet d'écrire, en vertu du théorème de Fubini-Tonelli (G étant positif)

$$\int_{M\times M} |G(x,y)f(y)\Delta h(x)|\, d\mu \otimes d\mu = \int_M \Gamma(|f|)|\Delta h|\, d\mu < \infty\ .$$

Ainsi $I(h) = \int_M [\int_M G(x,y)\, \Delta h(x)\, d\mu(x)]\, f(y)\, d\mu(y)$ et par définition de G, ceci n'est autre que $\int_M hf d\mu$. Autrement dit $\Gamma(f)$ vérifie *au sens des distributions* l'équation $\Delta v = f$. Par régularité elliptique locale (cf. [2], section 3.54), $\Gamma(f)$ est donc lisse et solution *classique* (de plus, bornée) de cette équation.

Remarque 4. — Sur l'espace euclidien de dimension $n > 2$, on s'assure aisément que le critère de la Proposition 3 est vérifié dès que f est bornée et admet un sous-espace de dimension $m > 2$ (notons π la projection orthogonale sur ce sous-espace) tel que $|f| \geq |\pi|^{-2}\delta(|\pi|)$ où δ est une fonction positive continue sur $[0, \infty[$ non croissante qui vérifie : $\int_0^\infty [\delta(t)/t]\, dt < \infty$. Le Corollaire 2 ci-après (grossièrement utilisé avec $F \equiv 1$) montre par contre que si $m \leq 2$ et si $f = f \circ \pi$, alors le critère de la Proposition 3 ne peut être rempli que par $f \equiv 0$.

Le théorème 1 implique un résultat d'existence en l'absence de toute hypothèse de *signe* sur f.

Corollaire 1. — *Soit f localement höldérienne sur M, telle qu'il existe une solution bornée de l'équation*

$$\Delta v = |f| \tag{3}$$

et soit F vérifiant l'hypothèse du théorème 1. Supposons en outre F homogène de degré $q \geq 0$, alors il existe un réel $\lambda > 0$ tel que l'équation (1) possède une infinité dénombrable de solutions uniformément positives et bornées, pourvues de dérivées secondes localement höldériennes.

Preuve. Si $v \in L^\infty(M, d\mu)$ vérifie (3) au sens des distributions, $|f|$ étant localement höldérienne elle-même, v admet des dérivées secondes localement höldériennes (par régularité elliptique locale, cf. [2], section 3.54), donc v est solution *classique* de (3).

Reprenons la preuve du théorème 1 successivement avec v et $-v$. Les deux conduisent *au même réel* $\lambda = 1/(1 + \operatorname{osc}_M z)$, où $z = F(1)v$, puis selon le signe de F, l'un ou l'autre fournit une solution uniformément positive et bornée de chacune des quatre équations

$$\Delta\phi^\pm = \pm\lambda|f||F(\phi^\pm)| \; .$$

Il y a donc deux couples (ϕ^+, ϕ^-), l'un pour $F > 0$, l'autre pour $F < 0$. Pour chacun d'entre eux, fixons $\delta \in]0, 1[$ tel que : $\delta\phi^- \leq \phi^+$. Si $q \leq 1$ posons $u^+ = \phi^+/\delta$, de sorte que $\Delta u^+ \geq \lambda f F(u^+)$, et $u^- = \phi^-$; si $q \geq 1$ posons $u^- = \delta\phi^-$, de sorte que $\Delta u^- \leq \lambda f F(u^-)$, et $u^+ = \phi^+$. Dans chaque cas on peut construire par itération [10] (Theorem C.4) une solution de l'équation (1) comprise entre u^- et u^+, ayant la régularité annoncée.

Finalement l'existence d'une *infinité* (dénombrable) de solutions de (1) uniformément positives et bornées, s'établit en remarquant que, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, le couple $(\alpha u^-, \alpha u^+)$ si $q \geq 1$, ou le couple $(u^-/\alpha, u^+/\alpha)$ si $q \leq 1$, convient dans l'argument précédent, puis en prenant pour α le plus grand $t \in]0, 1[$ tel que $tu^+ \leq u^-$ et en obtenant ainsi une solution de (1) comprise entre αu^- et αu^+, ou entre u^-/α et u^+/α, donc *distincte* de la précédente (dès que $f \neq 0$, mais si $f \equiv 0$ le Corollaire 1 est trivial). Puis on répète ce procédé.

En le combinant au théorème de Liouville, on déduit aussi du théorème 1 un résultat d'inexistence sur l'espace euclidien.

Corollaire 2. — *Considérons l'équation (1) sur l'espace euclidien standard à $n > 2$ dimensions, F et f vérifiant les hypothèses du théorème 1 ; supposons en outre f non identiquement nulle et factorisable à travers une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension 2. Alors l'équation (1) n'admet pas de solution uniformément positive et bornée.*

Preuve. Par l'absurde. D'après le théorème 1, il existe v bornée solution de $\Delta v = f$. Pour tout y pris dans le *noyau* de la projection $f(x+y) \equiv f(x)$, donc la fonction $w(x) = v(x+y) - v(x)$ est harmonique. Etant bornée, elle est *constante* (Liouville) et $w = w(0)$. Dès lors, $t \in \mathbb{R} \mapsto z(t) = v(x+ty)$ vérifie $z(t+\varepsilon) - z(t) \equiv v(\varepsilon y) - v(0)$. Donc la dérivée $z'(t)$ est constante, en fait *nulle*, puisque z (comme v) est *bornée*. Ainsi $v(x+y) \equiv v(x)$, autrement dit v se factorise aussi à travers la projection. La fonction v est maintenant bornée et surharmonique ou sousharmonique sur $\mathbb{R}^2$, selon que $F \geq 0$ ou $F \leq 0$. Elle est donc constante, d'après le théorème de Liouville *fort* (celui en dimension 2). Mais alors $f \equiv 0$, contredisant l'hypothèse.

3. ÉTUDE DE $\overline{\underline{S}}$ SUR VARIÉTÉ NON-PARABOLIQUE SCALAIRE-PLATE

Compte-tenu du début de la Remarque 2, donnons avec les notations de l'introduction et en supposant (M,g) *non-parabolique*, la traduction géométrique des énoncés précédents, obtenue pour : $\lambda = 1/c_n$, $F(u) = u^{p+1}$. Ici donc, tous les objets sont à nouveau *lisses* y compris les solutions des équations (par régularité elliptique).

Proposition 1′. — *Supposons $s(g) \leq 0$ et soit $f \in \underline{S}$. Si $f \geq 0$, alors l'équation (2) admet une solution positive.*

Proposition 2′. — *Supposons $s(g) \geq 0$ et soit $f \in \overline{\underline{S}}$. Si $f \leq 0$, alors l'équation (2) admet une solution bornée.*

Théorème 1′. — *Supposons $s(g) = 0$. Soit f une fonction réelle vérifiant sur M l'une des deux conditions : $f \geq 0$ ou $f \leq 0$. Alors $f \in \overline{\underline{\mathcal{S}}}$ si et seulement si l'équation (2) possède une solution bornée.*

Corollaire 1′. — *Supposons $s(g) = 0$. Soit f une fonction telle que l'équation (3) ait une solution bornée. Alors $f \in \overline{\underline{\mathcal{S}}}$.*

Corollaire 2′. — *Prenons pour (M, g) l'espace euclidien standard. Alors aucune fonction non-négative (resp. non-positive), non identiquement nulle et factorisable à travers une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension 2, ne peut appartenir à $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$.*

Remarques 5.

(a) - Le théorème 1′ (joint à la Propositon 3) constitue le résultat géométrique le plus complet de cet article. Des *exemples* non-triviaux de variétés scalaire-plates non-paraboliques sont construits dans [6bis] (Theorem 2).

(b) - La fonction f du Corollaire 1′ est courbure scalaire d'une *infinité* (au moins dénombrable) de métriques conformes équivalentes à g (cf. Corollaire 1).

(c) - Le Corollaire 1′ (joint à la remarque précédente) étend le principal résultat de [13], démontré sur l'espace euclidien. Il l'affine aussi, compte-tenu de la Remarque 4.

(d) - Le Corollaire 2′ démontre la *nécessité* de la condition $m \geq 3$ sur la dimension du scindage considéré dans [13] (Theorem 1.4, p. 494).

Qu'on me permette d'inclure ici un résultat digressif, tant il est immédiat et lie encore l'ensemble $\mathcal{S}$ au laplacien Δ.

Proposition 4. — *Supposons $s(g) \leq 0$ et soient deux fonctions harmoniques positives $h \leq k$. Alors toute fonction f comprise entre $s(g)h^{-p}$ et $s(g)k^{-p}$ appartient à $\mathcal{S}$. Si h (resp. k) est minorée (resp. majorée) par une constante positive, alors $f \in \underline{\mathcal{S}}$ (resp. $\overline{\mathcal{S}}$).*

Preuve. On vérifie en effet que h (resp. k) est solution inférieure (resp. supérieure) de l'équation $s(g_u) = f$ et on applique le procédé d'itération habituel. □

La Proposition 4 est typiquement utilisable sur les variétés simplement connexes à courbure pincée entre deux constantes négatives ; les fonctions harmoniques h et k y sont en effet déterminées par des données de Dirichlet à l'infini, $h' \leq k'$, fonctions continues positives sur la sphère de l'infini [1]. Dans ce cas, le principe du maximum montre que $f \in \underline{\overline{\mathcal{S}}}$.

4. ANNEXE : CAS D'INCOMPATIBILITÉS DE SIGNE DANS $\underline{\overline{\mathcal{S}}}$

Nous allons décrire trois situations où la variété complète non compacte (M, g), de dimension $n > 2$, est telle qu'aucun intervalle réel non vide, de la forme $]a, b[$ avec $a \leq 0 \leq b$, ne peut séparer les images de deux fonctions arbitraires de $\underline{\overline{\mathcal{S}}}$ (nous dirons alors que $\underline{\overline{\mathcal{S}}}$ n'admet pas de *lacune* en zéro). Chaque fois *le laplacien* est à la base de la démonstration.

Remarque 6. — Un sous-ensemble de $\mathcal{S}$ qui n'admet pas de lacune en zéro ne peut contenir plus d'une constante normalisée -1 , 0 ou 1. On dira alors que le problème de Yamabe est *sélectif* dans ce sous-ensemble, comme il l'est dans $\mathcal{S}$ lorsque M est compacte. On connaît plusieurs contre-exemples à la sélectivité du problème de Yamabe dans $\mathcal{S}$ quand M n'est pas compacte, à commencer par l'espace euclidien ; pour retrouver la sélectivité, il faut restreindre $\mathcal{S}$.

4.1. Première valeur propre nulle.

Soit λ_1 la borne inférieure des premières valeurs propres de Dirichlet du laplacien Δ sur tous les domaines bornés de M. Posons $\sigma(u) := s(g_u)u^p$; pour tout réel $t > 0$, $\sigma(tu) = \sigma(u)$.

Lemme 1. — *Pour toute fonction positive* u,

$$\inf_M [\sigma(u) - s(g)] \leq c_n \lambda_1 \ .$$

Preuve. D'une part

$$\sigma(u) - s(g) = c_n \frac{\Delta u}{u} \ , \tag{4}$$

d'autre part d'après [4] (Corollary 1, p. 345),

$$\inf_M \frac{\Delta u}{u} \leq \lambda_1 \ ;$$

donc le lemme est acquis.

Remarque 7. — Toute fonction propre positive associée à λ_1 (voir [4], Theorem 7, p. 351) réalise l'égalité au Lemme 1.

L'annulation de λ_1 est une condition invariante par tout changement de métriques *équivalentes* (elle se produit par exemple lorsque le volume des boules géodésiques est à croissance *polynomiale*, voir [4]). La proposition suivante est donc immédiate à partir du Lemme 1.

Proposition 5. — *Supposons* $\lambda_1 = 0$. *Si* $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$ *contient une fonction non positive (resp. uniformément négative), alors* $\underline{\mathcal{S}}$ *(resp.* $\mathcal{S}$*) ne peut contenir de fonction uniformément positive (resp. non-négative). En particulier,* $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$ *n'admet pas de lacune en* 0.

Remarque 8. — L'annulation de λ_1 est nécessaire dans cette proposition. En effet, sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n(-1)$ où λ_1 est non nulle, on a $0 \in \mathcal{S}$. En outre, $\underline{\mathcal{S}}$ ne peut être remplacé par $\mathcal{S}$ dans le théorème, car sur l'espace euclidien $1 \in \mathcal{S}$.

4.2. Croissance du volume au plus exponentiellement quadratique.

Fixant un point arbitraire $0 \in M$ et notant $V(r)$ le volume de la boule géodésique de centre 0 de rayon r dans (M, g), nous supposerons *finie* la limite supérieure quand $r \uparrow \infty$ de

$$r^{-2} \log[V(r)] \ .$$

Cette hypothèse est évidemment invariante par tout changement de métriques *équivalentes.*

Lemme 2. — *Pour toute fonction* u *uniformément positive,*

$$\inf_M \left[\sigma(u) - s(g)\right] \leq 0 \ .$$

Preuve. Si l'ensemble $\{x \in M \ , \ \Delta u(x) \leq 0\}$ est non vide, le lemme est immédiat d'après (4). Supposons donc $\Delta u > 0$. Soit $\epsilon > 0$ la borne inférieure de u sur M.

Toujours d'après (4), nous avons $\sigma(u) - s(g) \leq (c_n/\epsilon)\Delta u$, et le lemme s'ensuit encore car l'hypothèse sur la croissance du volume implique que la borne inférieure de Δu sur M est *nulle* (voir [10], Theorem 2.3 appliqué ici à $-u$).

Remarque 9. — Le Lemme 2 n'est plus vrai si l'on suppose seulement u positive, comme le montre à nouveau l'exemple de l'espace hyperbolique (avec $u > 0$ telle que $\sigma(u) = 0$).

Du Lemme 2 on déduit immédiatement le résultat suivant.

Proposition 6. — *Si $\overline{\mathcal{S}}$ contient une fonction non-positive (resp. uniformément négative), alors $\underline{\mathcal{S}}$ ne contient pas de fonction uniformément positive (resp. non-négative). En particulier $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$ n'admet pas de lacune en* 0.

4.3. Courbure de Ricci minorée.

Supposons l'existence d'une constante $k > 0$ telle que

$$\mathrm{Ricci}(g) \geq -kg\ .$$

Sous cette hypothèse, qui n'est pas invariante par changement de métriques conformes équivalentes, $V(r)$ est à croissance au plus *exponentielle* (résultat classique, immédiat à partir du théorème 1.53 – (γ) de [2]) et la Proposition 6 a lieu ; elle peut être alors complétée par la

Proposition 7. — *Si $\overline{\mathcal{S}}$ (resp. $\mathcal{S}$) contient une fonction non positive (resp. uniformément négative), alors $s(g)$ ne peut être uniformément positive (resp. non-négative).*

Preuve. Raisonnons par l'absurde. Si $s(g) \geq \epsilon > 0$ et $s(g_u) \leq 0$ alors

$$c_n \Delta u + \epsilon u \leq 0\ . \tag{5}$$

D'après le principe de Hopf, u ne peut donc atteindre de maximum local. Etant par hypothèse majorée, u admet donc une suite maximisante non bornée dans M. D'après le principe du maximum généralisé de [14] (corollary 1, p. 207), la limite inférieure de

Δu, prise sur cette suite quand elle tend à l'infini, est *non-négative* et (5) implique une contradiction.

Si maintenant $s(g) \geq 0$ et $s(g_u) \leq -\epsilon < 0$, alors

$$\Delta u \leq -(\epsilon/c_n)u^{p+1} ,$$

et la positivité de u contredit [4] (Theorem 8, p. 353).

Addendum. Durant la soumission de ce texte, est paru l'article [Z. ZHAO, On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic equations. A probabilistic potential theory approach, *Duke Math. J.* **69-2** (1993), 247–258] sur l'existence de solutions positives et bornées d'équations de la forme $\Delta u = f(x)F(u)$ posées dans des domaines *non bornés* de l'espace euclidien (avec condition de Dirichlet $u = 0$), moyennant une condition (Green-tightness), sur la fonction $f(x)$, *plus forte* (voir sa Proposition 3, p. 250) que celle, pour nous suffisante, (qu'il nomme Green-boundedness) de la Proposition 3 présente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.T. ANDERSON, *The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature*, J. Differential Geom. **18** (1983), 701–721.

[2] TH. AUBIN, *Nonlinear Analysis on Manifolds, Monge-Ampère Equations*, Springer-Verlag, New-York, Grundlehren math. Wiss. **252** (1982).

[3] H. BRÉZIS, S. KAMIN, *Sublinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^n$, Manuscripta Math. **74** (1992), 87–106.

[4] S.Y. CHENG, S.T. YAU, *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Commun. Pure Appl. Math. **XXVIII** (1975), 333–354.

[5] P. DELANOË, *About the splitting* $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}, 2 < n \leq N$, *in a theorem of Wei-Ming Ni*, Commun. Partial Diff. Eq. **14** (1989), 1127–1146.

[6] P. Delanoë, *Partial decay on simple manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **10** (1992), 3–61.

[6bis] P. Delanoë, *Generalized stereographic projections with prescribed scalar curvature*, Contemporary Math., Amer. Math. Soc. **127** (1992), 17–25.

[7] B. Gidas, J. Spruck, *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **XXXIV** (1981), 525–598.

[8] A.A. Grigor'yan, *On the existence of positive fundamental solutions of the Laplace equation on Riemannian manifolds*, Mat. Sbornik **128** (1985), English translation : *Math USSR Sbornik* **56–2** (1987), 349–358.

[9] D. Hulin, M. Troyanov, *Prescribing curvature on open surfaces*, Math. Ann. **293** (1992), 277–315.

[10] L. Karp, *Differential inequalities on complete Riemannian manifolds and applications*, Math. Ann. **272** (1985), 449–459.

[11] J. Kazdan, F. Warner, *Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure*, J. Differential Geom. **10** (1975), 113–134.

[12] P. Li, L.F. Tam, *Symmetric Green's functions on complete manifolds*, Amer. J. Math. **109** (1987), 1129–1154.

[13] W.M. Ni, *On the elliptic equation $\Delta u + K(x)u^{(n+2)/(n-2)} = 0$, its generalizations, and applications in geometry*, Indiana Univ. Math. J. **31** (1982), 439–529.

[14] S.T. Yau, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Commun. Pure Appl. Math. **XXVIII** (1975), 201–228.