NILVARIÉTÉS ISOSPECTRALES

Hubert PESCE

Institut Fourier
Laboratoire des Mathématiques
F-38402 Saint Martin d'Hères Cedex (France)

Abstract. In the first part of this paper, one recalls the history of the isospectral problem and the importance of interactions between spectral geometry and number theory. In the second part, one looks at the case of nilmanifolds and gives more precise results.

Résumé. Dans la première partie de cet article, on rappelle l'historique des problèmes d'isospectralité et l'importance des interactions entre la géométrie spectrale et la théorie des nombres. Dans la deuxième partie, on regarde le cas des nilvariétés et on obtient des résultats plus précis.

M.S.C. Subject Classification Index (1991) : 58G40, 58G25, 22E25.

Cette recherche a été faite en partie dans le cadre du contrat C.E.E. "GADGET" SC1-0105-C au laboratoire associé au C.N.R.S., n° 188.

TABLE DES MATIÈRES

1. UN HISTORIQUE DES PROBLÈMES D'ISOSPECTRALITÉ

On peut peut-être dire que le problème de l'isospectralité tire sa popularité d'un article écrit par M. Kac en 1966 intitulé "Peut-on entendre la forme d'un tambour?" qui posait un problème qui allait mettre 25 ans pour être résolu [Ka]. Précisons la question : supposons que l'on attache une membrane sur la frontière d'un domaine plan D et que l'on la frappe, on sait alors décrire sa vibration : si $u(x,t)$ désigne l'altitude de la membrane au dessus du point x ($x \in D$) à l'instant t, alors u vérifie l'équation des ondes : $\partial_t^2 u + \Delta_x u = 0$. Si l'on cherche les fréquences fondamentales de la vibration, c'est-à-dire si l'on cherche les solutions sous la forme suivante : $u(x,t) = e^{i\omega t}\varphi(x)$, alors on obtient : $\Delta\varphi = \omega^2\varphi$. Autrement dit, ω est une fréquence fondamentale si et seulement si $\lambda = \omega^2$ est une valeur propre du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \lambda\varphi \\ \varphi(x) = 0, \quad \text{si } x \in \partial D. \end{cases}$$

(La condition au bord imposée ici s'appelle la condition de Dirichlet ; si on impose la nullité de la dérivée normale on obtient alors la condition de Neumann.) D'après la théorie elliptique, l'ensemble de ces valeurs propres est discret et s'accumule à l'infini, on l'appelle le spectre du domaine et on le notera $Sp(D) = \{0 < \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 ...\}$. Il est immédiat, d'après la définition, que deux domaines isométriques sont isospectraux (*i.e.* ont même spectre). Le problème posé par M. Kac est donc de savoir si la réciproque est vraie. Plus précisément : *deux domaines isospectraux sont-ils isométriques ?* La réponse à cette question a été fournie en 1991 par C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert. Nous reviendrons là-dessus plus tard.

On peut évidemment se poser la même question dans le cadre des variétés riemanniennes. En effet, si (M,g) est une variété riemannienne fermée (*i.e.* compacte sans bord), l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ opérant sur $C^\infty(M)$ admet un spectre discret que l'on notera $Sp(M,g) = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 ...\}$ et que l'on appelle le spectre de la variété [B-G-M]. Par analogie avec la question posée par M. Kac pour les domaines plans, on est amené à se poser la question suivante : *deux variétés riemanniennes fermées isospectrales sont-elles isométriques ?* Le but de cette partie est de rappeler l'historique de ce problème, en soulignant notamment les interactions avec la théorie des nombres.

On sait que la réponse à la question que l'on vient de se poser est non, et ce depuis 1964. En effet, J. Milnor a exhibé deux tores plats de dimension 16 isospectraux et non isométriques [Mi]. L'idée de Milnor est la suivante : la connaissance du spectre d'une variété est équivalente à la connaissance de sa fonction de partition (la fonction de partition d'une variété (M,g) est définie pour $t > 0$ par : $Z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} = \int_M p(x,x,t)dx$ où p désigne le noyau de la chaleur). Or la fonction de partition d'un tore plat $\Gamma\backslash\mathbf{R}^n$ (muni de la métrique induite par le produit scalaire usuel $< .,. >$ de $\mathbf{R}^n$) se calcule facilement. Pour cela on introduit le réseau dual $\Gamma^* = \{x \in \mathbf{R}^n$ tels que $< x, \gamma > \in \mathbf{Z}$ pour tout $\gamma \in \Gamma\}$; le spectre du tore plat $\Gamma\backslash\mathbf{R}^n$ est l'ensemble des $4\pi^2\|\gamma^*\|^2$ où γ^* parcourt Γ^* [B-G-M]. Autrement dit, la fonction de partition Z_Γ du tore plat $\Gamma\backslash\mathbf{R}^n$ s'exprime facilement à partir de la fonction thêta Θ_{Γ^*} associée au réseau dual : $Z_\Gamma(t) = \Theta_{\Gamma^*}(e^{-4\pi^2 t})$. Donc deux tores plats sont isospectraux si et seulement si les fonctions thêta associées à leur réseau dual sont égales. Or, dans les années quarante, Witt avait démontré, en utilisant la théorie des formes modulaires, que les réseaux classiquement notés D_{16}^+ et $D_8^+ \bigoplus D_8^+$ ont même fonction thêta et sont non isométriques [W]. On en déduit que les tores plats $D_{16}^+\backslash\mathbf{R}^{16}$ et $D_8^+ \bigoplus D_8^+\backslash\mathbf{R}^{16}$ sont isospectraux et non isométriques, c'est le célèbre exemple de Milnor. Quelques années plus tard, Kneser construisit par la même méthode un exemple en dimension 12 [Kn]. Enfin, tout récemment, Conway et Sloane ont construit des exemples de tores plats isospectraux et non isométriques de dimension 4, et ce sans utiliser les fonctions thêta [C-S]. Comme, d'autre part, on sait que deux tores plats de dimension 2 isospectraux sont isométriques [B-G-M], il ne reste plus que le cas de la dimension 3 en suspens (à noter cependant qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isométrie de tores plats isospectraux à un tore donné, et ce en toute dimension).

En 1979, M.F. Vignéras construisit de nouveaux exemples de variétés isospectrales et non isométriques particulièrement intéressants [V]. En effet, elle donna des exemples de variétés hyperboliques isospectrales et non isométriques, et ce en dimension deux et trois. Ceci a deux conséquences importantes. Tout d'abord, même en dimension deux, la réponse au problème que l'on se pose est non. D'autre part, en dimension trois, les variétés qu'elle construit ne sont même pas homéomorphes, par le théorème de rigidité de Mostow. On ne peut donc même pas espérer lire la topologie d'une variété dans son spectre (Ikeda a même construit des espaces lenticulaires isospectraux et n'ayant pas le même type d'homotopie [I]). Il est important de noter que les exemples de Vignéras, construits avec des groupes de quaternions, viennent aussi de la théorie des nombres, ce qui a caractérisé à peu près tous les exemples fournis avant 1985.

A partir de cette date, la situation changea radicalement puisque Sunada donna une méthode pour construire des variétés isospectrales et non isométriques, et ce de manière beaucoup plus systématique. Il est cependant intéressant de remarquer que son approche n'est pas sans liens avec la théorie des nombres. Elle est basée sur la similitude qu'il y a entre la théorie de Galois des extensions de corps et celle des revêtements galoisiens, sa méthode apparaît comme un analogue géométrique de méthodes classiques en théorie des nombres. En effet, on peut associer à un corps de nombres k sa fonction zêta de Dedekind ζ_k et un problème classique de théorie des nombres est de savoir si cette fonction détermine le corps de nombres (à isomorphisme près). Il existe une réponse partielle à ce problème (voir [C-F], p. 363) :

Proposition. — *Soient K une extension galoisienne de $\mathbf{Q}$ de degré fini dont le groupe de Galois est G, k_1 et k_2 des sous-corps de K correspondant aux sous-groupes H_1 et H_2 de G. Alors k_1 et k_2 ont même fonction zêta si et seulement si toute classe de conjugaison de G rencontre H_1 et H_2 en un même nombre d'éléments.*

En utilisant la proposition précédente, on peut construire des corps de nombres non isomorphes ayant même fonction zêta. L'idée de Sunada est de donner un analogue de ce résultat dans un contexte géométrique. Or, à toute variété riemannienne (M, g), on peut associer de manière naturelle une fonction zêta en posant, pour

$Re(s) > (dim M)/2$: $\zeta_{(M,g)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} {\lambda_n}^{-s}$, où $Sp(M,g) = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 ...\}$. On obtient ainsi une fonction qui admet un prolongement holomorphe à $\mathbf{C}$ tout entier et on vérifie facilement que deux variétés sont isospectrales si et seulement si elles ont même fonction zêta. En remplaçant "extension de corps" par "revêtement riemannien" on obtient le résultat fondamental de Sunada [S] :

Proposition. — *Soient (M, g) une variété riemannienne fermée, G un groupe fini d'isométries opérant sur (M, g) et H_1 et H_2 deux sous-groupes de G opérant sans point fixe. Si toute classe de conjugaison de G rencontre H_1 et H_2 en un même nombre d'éléments, alors les variétés $H_1 \backslash M$ et $H_2 \backslash M$, munies des métriques induites par g, sont isospectrales.*

La preuve de ce résultat consiste à montrer que les fonctions de partition Z_1 et Z_2 de $M_1 = H_1 \backslash M$ et $M_2 = H_2 \backslash M$ sont les mêmes. Or, un calcul facile donne : $Z_i(t) = \sum_{[h] \in [G]} \frac{\sharp([h] \bigcap H_i)}{\sharp(H_i)} \int_{M_i} p(x, hx, t) dx$ où p désigne le noyau de chaleur de (M, g), $[g]$ la classe de conjugaison de g dans G et $[G]$ l'ensemble de ces classes. Le résultat de Sunada découle donc naturellement de l'hypothèse faite sur le triplet (G, H_1, H_2) et de la formule précédente. Notons que la Proposition précédente s'applique lorsque H_1 et H_2 sont conjugués mais les variétés obtenues sont isométriques. Si l'on veut obtenir des exemples non triviaux, on doit donc choisir des triplets tels que H_1 et H_2 soient non conjugués ; de tels exemples existent (voir [S]). On peut par exemple, en utilisant cette méthode, construire des surfaces de Riemann isospectrales et non isométriques de genre 4 (les exemples donnés par M.F. Vignéras étaient de genre 201601!). Pour l'instant, nous n'avons parlé que du cas des variétés fermées. Or P. Buser a adapté la méthode de Sunada pour construire des surfaces plates à bord isospectrales et non isométriques [Bu] (en fait, comme l'a montré P. Bérard [Bé], la proposition précédente est vraie dans un cadre beaucoup plus général : variétés à bord, variétés d'orbites). Tout récemment, C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert ont montré que les surfaces de P. Buser possèdent une isométrie involutive et, en quotientant ces surfaces par l'action de cette isométrie, ont construit les premiers exemples de domaines plans isospectraux et non isométriques [G-W-W], répondant ainsi par la négative à la question posée par M. Kac : *on ne peut pas entendre la forme d'un tambour.*

Notons que jusqu'au début des années quatre-vingt, tous les exemples connus de variétés isospectrales et non isométriques étaient de nature discrète. Soyons plus précis : les deux principales sources d'exemples de variétés isospectrales étaient les tores plats et les surfaces de Riemann à courbure négative (pour d'autres types d'exemples voir [U] et [I]). Or, dans ces deux cas, il y a "finitude spectrale", c'est-à-dire qu'il existe au plus un nombre fini de classes d'isométrie de surfaces de Riemann (*resp.* de tores plats) deux à deux isospectrales. En particulier, deux structures plates (*resp.* hyperboliques) sur un tore (*resp.* une surface de genre supérieur ou égal à deux) isospectrales et proches sont isométriques. On est donc amené à s'intéresser à une version locale du problème qui nous a occupé jusqu'à présent : le problème des déformations isospectrales.

Le problème est de savoir si l'on peut déformer continuement une variété en gardant un spectre donné. Plus précisément, on appelle déformation isospectrale sur une variété compacte M une famille continue (pour la topologie C^∞) $\{g_t\}_{t\in I}$ de métriques (I est un espace connexe) telle que les variétés (M, g_t) soient deux à deux isospectrales ; si elles sont deux à deux isométriques, alors la déformation est dite triviale. Enfin, une variété (M, g) est dite *spectralement rigide* s'il existe un voisinage de g telle que toute déformation isospectrale contenue dans ce voisinage soit triviale.

Par exemple, d'après ce que nous avons vu, si $\{g_t\}_{t\in I}$ est une déformation isospectrale de métriques plates sur un tore, alors cette déformation est triviale. C'est aussi le cas des déformations isospectrales par des métriques hyperboliques sur les surfaces de genre supérieur ou égal à deux. Ce dernier résultat a été généralisé par V. Guillemin et D. Kazhdan [G-K], puis par Min-Oo [MO] sous la forme suivante :

Proposition. — *Toute variété riemannienne fermée à opérateur de courbure défini négatif (i.e. à courbure de Gauss strictement négative dans le cas des surfaces) est spectralement rigide.*

Notons que cette Proposition est le seul résultat d'ordre général, connu à ce jour, concernant les déformations isospectrales (voir aussi les résultats de Kuwabara [Ku1] et [Ku2]). Alors que ce résultat accréditait plutôt la thèse de la trivialité des déformations isospectrales, C. Gordon et E. Wilson ont construit en 1984 les premiers exemples de déformations isospectrales non triviales. Les variétés qu'ils considèrent sont des nilvariétés.

2. LA GÉOMÉTRIE SPECTRALE DES NILVARIÉTÉS

Le but de cette partie est de faire le point sur les résultats connus à ce jour concernant les problèmes d'isospectralité des nilvariétés et leurs liens avec le spectre des longueurs. L'intérêt des nilvariétés, outre le fait de supporter les seules déformations isospectrales connues à ce jour, est que, autant du point de vue de l'analyse que de la géométrie, on peut mener à bout suffisamment de calculs et en déduire des phénomènes non triviaux. En fait, à peu près tout ce que l'on peut imaginer concernant les problèmes d'isospectralité dans la catégorie des variétés riemanniennes fermées se passe déjà dans la catégorie des nilvariétés. Tout d'abord, on rappelle le cadre et le principe des déformations isospectrales de C. Gordon et E. Wilson. Ensuite, on caractérise, dans le cas des nilvariétes de rang deux, les déformations isospectrales. Enfin, dans une dernière partie, on étudie le lien avec le spectre des longueurs. On obtient notamment une formule sommatoire de Poisson pour les variétés de Heisenberg.

Nous allons tout d'abord rappeler le cadre et le principe des déformations isospectrales de C. Gordon et E. Wilson. Ces déformations sont construites sur des variétés de type $\Gamma\backslash N$ où N est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe et où Γ est un sous-groupe uniforme (*i.e.* discret et cocompact) de N. Mal'cev a montré qu'un tel sous-groupe existe si et seulement s'il existe une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ de N telle que les constantes de structure relatives à cette base soient rationnelles [Ma]. *Par la suite, tous les groupes que nous considérerons seront supposés vérifier cette hypothèse.* Soient N et Γ comme précédemment et $\mathbf{m}$ une métrique invariante à gauche sur N, alors Γ opère par translation à gauche sur N comme un groupe d'isométries de $(N, \mathbf{m})$ et la métrique $\mathbf{m}$ induit une métrique $\overline{\mathbf{m}}$ sur $\Gamma\backslash N$ telle que la projection $(N, \mathbf{m}) \longrightarrow (\Gamma\backslash N, \overline{\mathbf{m}})$ soit un revêtement riemannien. *Par la suite, nous nous* *intéresserons uniquement aux métriques sur* $\Gamma\backslash N$ *provenant d'une métrique invariante à gauche sur* N *et nous identifierons les métriques* $\mathbf{m}$ *et* $\overline{\mathbf{m}}$).

Les déformations isospectrales de C. Gordon et E. Wilson sont du type $(\Gamma\backslash N, \mathbf{m}_t)$, où $\{\mathbf{m}_t\}$ est une famille continue de métriques invariantes à gauche. Leur idée est de choisir $\mathbf{m}_t$ sous la forme suivante : $\mathbf{m}_t = \varphi_t^* \mathbf{m}$ où $\{\varphi_t\}$ est une famille continue d'éléments de $\mathrm{Aut}(N)$, le groupe des automorphismes de N. Les automorphismes qui apparaissent naturellement sont les automorphismes intérieurs. En effet, si φ est un élément de $\mathrm{Inn}(N)$, le groupe des automorphismes intérieurs de N, alors les variétés $(\Gamma\backslash N, \mathbf{m})$ et $(\Gamma\backslash N, \varphi^*\mathbf{m})$ sont isospectrales et ce trivialement, puisque si $\varphi(x) = yxy^{-1}$ pour tout $x \in N$ $(y \in N)$, alors la translation à droite par y^{-1} induit une isométrie entre $(\Gamma\backslash N, \varphi^*\mathbf{m})$ et $(\Gamma\backslash N, \mathbf{m})$. L'idée de C. Gordon et E. Wilson est donc de choisir des automorphismes de N qui ne sont pas intérieurs, mais qui partagent, notamment du point de vue de l'analyse harmonique sur N, beaucoup de propriétés avec les automorphismes intérieurs. Ils ont baptisé ces automorphismes de *presque intérieurs*, ils sont définis comme suit [G-W1] :

1. Définition. — *Soient* N *un groupe de Lie nilpotent et simplement connexe et* Γ *un sous-groupe uniforme de* N*, un élément* φ *de* $\mathrm{Aut}(N)$ *est appelé un automorphisme presque intérieur par rapport à* Γ *si, pour tout* $\gamma \in \Gamma$*, il existe* $x \in N$ *tel que* $\varphi(\gamma) = x\gamma x^{-1}$. *On note* $\mathrm{AIA}(N;\Gamma)$ *l'ensemble des automorphismes presque intérieurs par rapport à* Γ.

On peut maintenant énoncer [G-W1] :

2. Proposition. — *Soient* N *un groupe de Lie nilpotent et simplement connexe et* Γ *un sous-groupe uniforme de* N*, alors :*

a) $\mathrm{AIA}(N;\Gamma)$ *est un groupe de Lie nilpotent et connexe qui contient* $\mathrm{Inn}(N)$ *;*

b) pour toute métrique invariante à gauche $\mathbf{m}$*, les variétés* $(\Gamma\backslash N, \mathbf{m})$ *et* $(\Gamma\backslash N, \varphi^*\mathbf{m})$ *sont isospectrales si* $\varphi \in \mathrm{AIA}(N;\Gamma)$.

Preuve. — La démonstration du point *b)* est basée sur l'utilisation de la théorie des orbites de Kirillov. Tout d'abord, le laplacien de $(\Gamma\backslash N, \mathbf{m})$ peut se mettre sous la forme : $\Delta_{\mathbf{m}} = -\sum_{i=1}^{n} \rho_*(X_i)^2$ où $\{X_i\}_{1\le i\le n}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{n}$ pour la métrique $\mathbf{m}$

et où ρ_* est la différentielle de la représentation régulière ρ de N dans $L^2(\Gamma\backslash N)$ (*i.e.* si $X \in \mathfrak{n}, x \in N$ et $f \in L^2(\Gamma\backslash N)$, alors $(\rho_*(X)f)(x) = (\frac{d}{dt}f(xe^{tX}))_{t=0}$). On voit donc apparaître une représentation unitaire de N. Or la théorie de Kirillov décrit le dual unitaire de N en le mettant en bijection avec les orbites de la représentation coadjointe de N sur $\mathfrak{n}^*$. En écrivant ρ comme une somme de représentations irréductibles et en utilisant cette théorie, on montre que si $\varphi \in \mathrm{AIA}(N;\Gamma)$, alors ρ et $\rho \circ \varphi$ sont unitairement équivalentes, puis on en déduit, en utilisant l'expression du laplacien donnée au début de la preuve, que les laplaciens associés aux métriques $\mathbf{m}$ et $\varphi^*\mathbf{m}$ sont unitairement conjugués, donc isospectraux.

□

Comme nous l'avons vu précédemment, si l'élément φ de $\mathrm{AIA}(N;\Gamma)$ est dans $\mathrm{Inn}(N)$, alors la Proposition précédente est triviale, puisque les variétés obtenues sont isométriques. Pour construire des déformations isospectrales non triviales, on doit donc choisir des groupes N et Γ tels que $\mathrm{AIA}(N;\Gamma)\neq\mathrm{Inn}(N)$ (il en existe, comme on le verra plus tard). Si N et Γ sont de tels groupes, et si l'on choisit un groupe à un paramètre $\{\varphi_t\}_{t\in R}$ de $\mathrm{AIA}(N;\Gamma)$ qui est transverse à $\mathrm{Inn}(N)$, alors $(\Gamma\backslash N, \varphi_t^*\mathbf{m})$ est une déformation isospectrale non triviale, au moins si on se restreint à des valeurs de t petites (il est en effet possible que pour de grandes valeurs de t, on revienne sur la classe d'isométrie de départ [DT-G]). On va maintenant donner des exemples de tels couples.

3. Exemples. — Les groupes nilpotents apparaissent de manière naturelle dans la théorie des groupes de Lie semi-simples, via la décomposition d'Iwasawa, et donc dans la théorie des espaces symétriques. Soit $\mathbb{H}^n_k$ un espace hyperbolique où $k = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{O}$ et $n \geq 2$ sauf si $k = \mathbf{O}$ où $n = 2$; notons G^n_k la composante neutre du groupe d'isométries de $\mathbb{H}^n_k$, c'est un groupe de Lie semi-simple de rang un dont on notera N^n_k la partie nilpotente de la décomposition d'Iwasawa (d'un point de vue géométrique, N^n_k s'identifie naturellement à une horosphère de $\mathbb{H}^n_k$). Les groupes ainsi obtenus sont des groupes bien connus :

- $k = \mathbf{R}$: dans ce cas $N^n_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^{n-1}$; les nilvariétés obtenues sont des tores plats ;
- $k = \mathbf{C}$: dans ce cas $N^n_{\mathbf{R}} = H_{n-1}$, le groupe de Heisenberg de dimension $2n-1$;

par la suite, on notera H_n le groupe obtenu en munissant $\mathbf{R}^{2n+1}$ de la loi de groupe suivante $(x,y,z)(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z'+ < x, y' >)$ où $x, y, x', y' \in \mathbf{R}^n$ et $z, z' \in \mathbf{R}$, et on appellera variété de Heisenberg toute nilvariété obtenue avec le groupe de Heisenberg.

• $k = \mathbf{H}, \mathbf{O}$: les groupes obtenus sont souvent appelés groupe de Heisenberg “quaternionniens” ou “de Cayley”, ils rentrent dans la catégorie des groupes de type H qui ont été introduits par Kaplan [Kap] (nous reviendrons plus tard sur les nilvariétés ainsi obtenues) ; pour tous ces groupes, on peut décrire facilement les automorphismes presque intérieurs et on trouve que $\dim \mathrm{AIA}(N_k^n; \Gamma) = (\dim_{\mathbf{R}} k - 1) \dim \mathrm{Inn}(N_k^n)$ et ce pour tout sous-groupe uniforme Γ [P2] et on peut donc construire des déformations isospectrales non triviales, en utilisant la proposition précédente, sur des nilvariétés du type $\Gamma \backslash N_k^n$ si et seulement si $k = \mathbf{H}, \mathbf{O}$.

On retrouvera plus tard cette coupure entre, d'un côté, **R** et **C**, et de l'autre, **H** et **O**.

On vient de voir que, dans le cas des tores plats, on ne peut pas construire de déformations isospectrales non triviales en utilisant la méthode de C. Gordon et E. Wilson, or on sait que, dans ce cas, il y a “finitude spectrale”, donc, a fortiori, de telles déformations n'existent pas. On peut donc penser que, s'il existe des déformations isospectrales sur une nilvariété, elles sont forcément comme celles que nous venons de décrire. On va voir que c'est le cas, au moins pour les nilvariétés de rang deux.

Par la suite, on dira qu'un groupe N est nilpotent de rang deux si son groupe dérivé N' est inclus dans son centre $Z(N)$ et qu'une nilvariété est de rang deux si elle est de la forme $\Gamma \backslash N$ où N est un groupe de Lie simplement connexe et nilpotent de rang deux. On peut maintenant énoncer :

4. Proposition. — *Soient N un groupe de Lie simplement connexe et nilpotent de rang deux, Γ un sous-groupe uniforme de N et $\{\mathbf{m}_t\}_{t \in I}$ une famille continue de métriques invariantes à gauche (I est un espace connexe). Si les variétés $(\Gamma \backslash N, \mathbf{m}_t)$ sont deux à deux isospectrales, alors il existe une famille continue $\{\varphi_t\}_{t \in I}$ d'éléments de $\mathrm{AIA}(N; \Gamma)$ et une métrique $\mathbf{m}$ invariante à gauche sur N telles que pour tout $t \in I$ on ait : $\mathbf{m}_t = \varphi_t^* \mathbf{m}$.*

Il existe deux preuves de ce résultat. L'idée de la première est de raisonner par récurrence sur la dimension [O]. Si dim$N = 1$, alors le résultat est trivial puisque la nilvariété est alors un cercle. Si dim$N > 1$, on choisit un sous-groupe rationnel M du centre $Z(N)$. Alors, la projection Γ_M de Γ dans N/M est un sous-groupe uniforme de N/M et la projection $\Gamma\backslash N \longrightarrow \Gamma_M\backslash N/M$ est une submersion. On construit alors une famille continue $\{\mathbf{n}_t\}_{t\in I}$ de métriques invariantes à gauche sur N/M telle que la projection $(\Gamma\backslash N, \mathbf{m}_t) \longrightarrow (\Gamma_M\backslash N/M, \mathbf{n}_t)$ soit une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques. Comme le spectre de $(\Gamma_M\backslash N/M, \mathbf{n}_t)$ est contenu dans celui de $(\Gamma\backslash N, \mathbf{m}_t)$ [BB-B], on en déduit, par continuité des valeurs propres, que les variétés $(\Gamma_M\backslash N/M, \mathbf{n}_t)$ sont deux à deux isospectrales et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. La deuxième preuve est basée sur un calcul explicite du spectre des variétés considérées [P1]. On fait ce calcul en utilisant l'expression du laplacien donnée dans la preuve de la Proposition 2 et la méthode des orbites de Kirillov. En effet, pour les groupes nilpotents de rang deux, celle-ci prend un caractère vraiment explicite et on est amené à calculer des spectres d'opérateurs différentiels classiques (oscillateur harmonique) dont les fonctions propres sont les fonctions d'Hermite.

Une des conséquences du résultat précédent est que si $\Gamma\backslash N$ est une nilvariété de rang deux telle que $\mathrm{AIA}(N;\Gamma) = \mathrm{Inn}(N)$, alors les déformations isospectrales par des métriques invariantes à gauche sur $\Gamma\backslash N$ sont triviales. On a vu que c'est le cas pour les variétés de Heisenberg. On peut donc, dans ce cas, revenir au problème initial de l'isospectralité. On obtient alors [P2] :

5. Proposition. — *Il existe au plus un nombre fini de classes d'isométrie de variétés de Heisenberg, munies de métriques invariantes à gauche, isospectrales à une variété de Heisenberg donnée.*

6. Remarques. a) Contrairement à ce qui se passe pour les tores, il existe une infinité de topologies possibles pour les variétés de Heisenberg. Le résultat précédent contient le fait qu'il n'existe qu'un nombre fini de variétés de Heisenberg qui admettent une métrique invariante à gauche isospectrale à une variété donnée.

b) On peut montrer que deux variétés de Heisenberg de dimension trois isospectrales sont isométriques. Ceci n'est plus vrai en dimension supérieure ou égale à cinq.

En effet, il existe alors des variétés de Heisenberg munies de métriques invariantes à gauche isospectrales et non isométriques et même non homéomorphes [G-W2].

La proposition précédente est obtenue en utilisant des critères de compacité et la finitude spectrale des tores plats. Si on veut obtenir des résultats plus fins, on est donc obligé d'aborder le problème de l'isospectralité des variétés de Heisenberg d'une manière différente. L'idée est de relier le spectre du laplacien au spectre des longueurs. On appelle spectre des longueurs d'une variété riemannienne (M, g) l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques de (M, g), une longueur l étant comptée avec une multiplicité (éventuellement infinie) égale au nombre de géodésiques périodiques de longueur l (modulo l'action de S^1), on le notera $L - Sp(M, g)$ et on dira que deux variétés sont $L-$isospectrales si elles ont le même spectre des longueurs. Il existe de profondes relations entre le spectre des longueurs et le spectre du laplacien. On sait, depuis les travaux de Y. Colin de Verdière [CdV], que génériquement le spectre du laplacien détermine le spectre des longueurs. On retrouve, dans le cadre des nilvariétés, cette relation entre le spectre des longueurs et le spectre du laplacien. En effet, les déformations isospectrales que nous avons considérées jusqu'à présent le sont aussi pour le spectre des longueurs [G1] :

7. Proposition. — *Soient N un groupe de Lie nilpotent et simplement connexe et Γ un sous-groupe uniforme de N, alors pour toute métrique invariante à gauche $\mathbf{m}$, les variétés $(\Gamma\backslash N, \mathbf{m})$ et $(\Gamma\backslash N, \varphi^*\mathbf{m})$ sont $L-$isospectrales si $\varphi \in \mathrm{AIA}(N; \Gamma)$.*

Remarquons que la preuve de cette proposition n'utilise pas le fait que N est nilpotent et simplement connexe alors que cette hypothèse est fondamentale dans la preuve de la proposition analogue pour le spectre du laplacien. Grâce à cette proposition, on peut construire des déformations $L-$isospectrales non triviales. Compte-tenu des relations que nous avons observées jusqu'à présent entre le spectre du laplacien et le spectre des longueurs, il est naturel de se poser la même question que pour le spectre du laplacien : les déformations $L-$isospectrales par des métriques invariantes à gauche sur sur les nilvariétés sont-elles toutes comme celles décrites précédemment ? On a la même réponse que pour le spectre du laplacien [P3] :

8. Proposition. — *Soient N un groupe de Lie simplement connexe et nilpotent de rang deux, Γ un sous-groupe uniforme de N et $\{\mathbf{m}_t\}_{t\in I}$ une famille con-*

tinue de métriques invariantes à gauche (I est un espace connexe). Si les variétés $(\Gamma\backslash N, \mathbf{m}_t)$ sont deux à deux $L-$isospectrales, alors il existe une famille continue $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ d'éléments de $\mathrm{AIA}(N;\Gamma)$ *et une métrique* $\mathbf{m}$ *invariante à gauche sur N telles que pour tout $t \in I$ on ait : $\mathbf{m}_t = \varphi_t^*\mathbf{m}$.*

9. Remarque. — $\mathrm{AIA}(N;\Gamma)$, qui est l'espace des paramètres des déformations de C. Gordon et E. Wilson, est non compact. Cependant l'espace des paramètres qui donnent lieu à des variétés non isométriques est lui compact [DT-G]. On pense que les ensembles isospectraux sont compacts, mais ceci n'a été prouvé qu'en dimension deux [O-P-S] (pour des résultats en dimension supérieure, voir [B-P-P]).

On va maintenant étudier le cas des variétés de Heisenberg. Pour cela on utilise une technique classique qui consiste à obtenir une formule de trace. De telles formules existent pour les tores plats (formule de Poisson [B-G-M]) et pour les espaces localement symétriques de rang un (formule des traces de Selberg [Ga]) et se sont avérées être des outils efficaces pour attaquer les problèmes d'isospectralité. On trouve, dans le cas des variétés de Heisenberg, la formule générique obtenue dans [CdV] (voir la Remarque 11). L'intérêt est que la formule que l'on obtient est plus explicite et prend en compte la géométrie particulière de ces variétés. En utilisant la formule sommatoire de Poisson pour les tores plats et les calculs explicites de spectres faits dans [G-W2,G1], on obtient [P4] :

10. Proposition. — *Soit $(\Gamma\backslash H_n, \mathbf{m})$ une variété de Heisenberg munie d'une métrique invariante à gauche $\mathbf{m}$. Notons $\{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...\}$ son spectre du laplacien et $\{0 = l_0 < l_1 < l_2 < ...\}$ l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques comptées sans multiplicité, alors il existe une famille $\{\varphi_p\}_{p\geq 1}$ de fonctions holomorphes sur le demi-plan $\mathbf{C}^+ = \{z \in \mathbf{C}$ tels que $Re(z) > 0\}$ telle que pour tout $z \in \mathbf{C}^+$ on ait : $\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-\lambda_p z} = \sum_{p=0}^{+\infty} \varphi_p(z) e^{-l_p^2/4z}$. De plus, les fonctions φ_p peuvent être calculées explicitement.*

11. Remarques.

• L'hypothèse générique faite dans [CdV] est que la fonctionnelle énergie, définie sur l'espace des lacets absolument continus, est non dégénérée au sens de Morse-Bott.

On vérifie qu'il existe des métriques $\mathbf{m}$ invariantes à gauche pour lesquelles cette hypothèse n'est pas vérifiée.

• Toutes les longueurs des géodésiques périodiques d'une variété de Heisenberg munie d'une métrique invariante à gauche ont une multiplicité infinie. C'est pour cela que, dans la formule précédente, on ne considère pas les multiplicités.

Remarquons que les variétés de Heisenberg ont une structure géométrique particulière. En effet, si $(\Gamma\backslash H_n, \mathbf{m})$ est une telle variété et si l'on note $\mathcal{L}$ la projection de Γ sur le quotient de H_n par son centre Z_n, on peut alors construire une métrique $\mathbf{n}$ invariante à gauche sur H_n/Z_n telle que la projection $(\Gamma\backslash H_n, \mathbf{m}) \longrightarrow (\mathcal{L}\backslash H_n/Z_n, \mathbf{n})$ soit une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques. En particulier, on a les notions de courbe horizontale, verticale et transverse. En utilisant le fait que les fonctions φ_p n'ont pas la même singularité en 0 suivant la nature géométrique des géodésiques périodiques de longueur l_p, on obtient

12. Proposition. — *Si deux variétés de Heisenberg ont même spectre du laplacien, alors elles ont même ensemble de longueurs des géodésiques horizontales (*resp. *verticales, transverses). En particulier, elles ont même spectre des longueurs.*

On peut aussi utiliser la formule de trace pour étudier les problèmes d'isospectralité. On peut ainsi montrer que tous les exemples de variétés de Heisenberg isospectrales sont ceux construits dans [G-W2] et redémontrer de manière simple le fait que deux variétés de Heisenberg de dimension trois isospectrales sont isométriques. Une autre conséquence de cette formule est le résultat suivant :

13. Corollaire. — *Deux variétés de Heisenberg isospectrales sont localement isométriques.*

Revenons sur les exemples de nilvariétés issus des espaces hyperboliques. On avait déjà remarqué une différence de comportement, du point de vue du problème de l'isospectralité des nilvariétés du type $(\Gamma\backslash N_k^n, \mathbf{m})$ suivant les valeurs de k. Si $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ il y a finitude spectrale (*i.e.* le spectre détermine un nombre fini de classes d'isométrie de telles variétés) alors que si $k = \mathbf{H}$ ou $\mathbf{O}$, il existe des déformations isopectrales non triviales. Or cette différence de comportement s'observe aussi pour un autre problème : celui de savoir si deux variétés isospectrales sont localement isométriques. D'après ce que l'on vient de voir, ceci est vrai si les deux variétés sont des variétés de Heisenberg munies de métriques invariantes à gauche ; comme ceci est trivialement vrai pour les tores plats, on a le même comportement pour les nilvariétés du type $(\Gamma\backslash N_k^n, \mathbf{m})$ si $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Or tout récemment, C. Gordon a construit les premiers exemples de variétés isospectrales et non localement isométriques [G2] et ces exemples sont du type $(\Gamma\backslash N_k^n, \mathbf{m})$ où $k = \mathbf{H}$ ou $\mathbf{O}$. On observe donc la même différence de comportement. Notons que cette différence existe aussi au niveau de l'espace hyperbolique puisque le groupe G_k^n est un groupe de Kazhdan si et seulement si $k = \mathbf{H}$ ou $\mathbf{O}$. Il serait intéressant de comprendre si ces deux phénomènes sont liés et, de manière plus générale, de bien comprendre le lien entre la géométrie de l'espace hyperbolique et celle du groupe nilpotent correspondant.

BIBLIOGRAPHIE

[Bé] Bérard P., *Transplantation et isospectralité I*, Math. Ann. **292** (1992), 547–560.

[BB-B] Bérard-Bergery L., Bourguignon J.P., *Laplacians and Riemannian submersions with totally geodesics fibers*, Illinois J. Math. **26** (1982),181–200.

[B-G-M] Berger M., Gauduchon M., Mazet E., *Le spectre d'une variété riemannienne*, Springer Lecture Notes in Math. **194** (1971).

[B-P-P] Brooks R., Perry P., Petersen P., *Compactness and finiteness theorems for isospectral manifolds*, J. Reine Angew. Math. **426** (1992), 67–89.

[Bu] Buser P., *Cayley graphs and planar isospectral domains*, Proc. Taniguchi Symp. "Geometry and Analysis on manifolds" 1987, Lecture Notes in Math. Springer **1339** (1988), 64–77.

[C-F] Cassel J.W.S., Frölich A. (ed.), *Algebraic Number Theory*, Academic Pess, London and New York (1967).

[CdV] Colin de Verdière Y., *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II*, Compositio Math. **27** (1973), 159–184.

[C-S] Conway J.H., Sloane N.J.A., *Four-dimensional Lattices with the same Theta series*, Duke Math. J. **66** (1992), 93–96.

[DT-G] DeTurck D., Gordon C.S., *Isospectral deformations II : Trace formulas, metrics and potentials*, Comm. Pure Appl. Math. **40** (1987), 367–387.

[Ga] Gangolli R., *The length spectrum of some compact manifolds of negative curvature*, J. Differential Geom. **12** (1977), 403–424.

[G1] Gordon C.S., *The Laplace spectrum versus the length spectra of Riemannian manifolds*, in *Nonlinear Problems in Geometry* (D.M. DeTurck ed.) Contempory Math. **51** (1986), 63–80.

[G2] Gordon C.S., *Isospectral closed riemannian manifolds which are not locally isometric*, J. Differential Geom. **37** (1993), 639–650.

[G-W1] Gordon C.S., Wilson E., *Isospectral deformations of compact Solvmanifolds*, J. Differential Geom. **19** (1984), 245–256.

[G-W2] Gordon C.S., Wilson E., *The spectrum of the Laplacian on Riemannian Heisenberg Manifolds*, Michigan Math. J. **110** (1992), 1–22.

[G-W-W] Gordon C.S., Webb D., Wolpert S., *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Inventiones Math. **27** (1992), 134–138.

[G-K] Guillemin V., Kazhdan D., *Some inverse spectral results for negatively curved n-manifolds*, Proc. Symp. Pure Math., Geometry of the Laplace Operator, Amer. Math. Soc. **36** (1980), 153–180.

[I] Ikeda A., *Isospectral problem for spherical space forms*, in *Spectra of Riemannian Manifolds* ed. by M. Berger, S. Murakami and T. Ochai, Kaigai Publications (1983), 57–63.

[Ka] Kac M., *Can one hear the shape of a drum?*, Amer. Math. Monthly **73** (1966), 1–23.

[Kap] Kaplan A., *Riemannian nilmanifolds attached to Clifford modules*, Geom. Dedicata **11** (1981), 127–136.

[Kn] Kneser M., *Lineare Relationen zwischen Darstellungszahlen quadratischer Formen*, Math. Ann. **168** (1967), 31–39.

[Ku1] Kuwabara R., *On isospectral deformations of Riemannian metrics*, Compositio Math. **40** (1980), 319–324.

[Ku2] Kuwabara R., *On isospectral deformations of Riemannian metrics II*, Compositio Math. **47** (1982), 195–205.

[Ma] Mal'cev A.I., *On a class of homogenous space*, Trans. Amer. Math. Soc. **9** (serie one) (1962), 276–307.

[Mi] Milnor J., *Eigenvalues of the Laplace Operator on certain manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sc. **51** (1964), 542.

[MO] Min-Oo M., *Spectral rigidity for manifolds with negative curvature operator*, in *Nonlinear Problems in Geometry* (D.M. DeTurck ed.) Contempory Math. **51** (1986), 99–103.

[O] Ouyang H, *On spectral rigidity of deformations on two-step Riemannian nilmanifolds*, Thèse de l'université de Washington (1991).

[O-P-S] Osgood B., Phillips R., Sarnak P., *Compact isospectral set of Riemann surfaces*, J. Funct. Anal. **80** (1988), 212–234.

[P1] Pesce H., *Calcul du spectre d'une nilvariété de rang deux et applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **339** (1993), 433–461.

[P2] Pesce H, *Déformations isospectrales sur certaines nilvariétés et finitude spectrale des variétés de Heisenberg*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **25** (1992), 515–538.

[P3] Pesce H., *Déformations L-isospectrales sur les nilvariétés de rang deux*, C. R. Acad. Sci. **315** (1992), 821–823.

[P4] Pesce H., *Une formule de Poisson pour les variétés de Heisenberg*, Duke Math. J. **73** (1994), 79–95.

[S] Sunada T., *Riemannian coverings and isospectral manifolds*, Ann. Math. **121** (1985), 169–186.

[U] Urakawa H., *Bounded domains which are isospectral but not congruent*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Paris **15** (1982), 441–456.

[V] Vignéras M.F., *Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques*, Ann. Math. **112** (1980), 21–32.

[W] Witt E., *Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades*, Abh. Sem. Univ. Hamburg **14** (1941), 289–322.