Sur certains modules gradués associés aux produits symétriques

Michel BRION

Résumé

On étudie certains anneaux et modules gradués qui apparaissent en géométrie algébrique (produits symétriques) et en théorie des représentations (pléthysme). Comme applications, on obtient une description des puissances de Schur des $SL(2,\mathbb{C})$-modules simples ; une action de $GL(2,\mathbb{C})$ dans la représentation régulière du groupe symétrique, qui raffine la graduation bien connue de cette représentation ; et enfin, une confirmation partielle d'une conjecture de Foulkes.

Abstract

We study certain graded modules and rings which appear in algebraic geometry (symmetric products) and in representation theory (plethysm). As applications we obtain a description of Schur powers of simple $SL(2,\mathbb{C})$-modules; an action of $GL(2,\mathbb{C})$ in the regular representation of the symmetric group refining the well-known grading of this representation; and lastly, a partial confirmation of a conjecture by Foulkes.

Introduction

L'objet de cet article est la construction et l'étude de certains anneaux et modules gradués, qui apparaissent en géométrie algébrique (produits symétriques) et en théorie des représentations (pléthysme). Comme applications, on obtient des relations inattendues entre représentations de $GL(2)$ et du groupe symétrique, ainsi qu'une confirmation partielle d'une conjecture de Foulkes.

Plus précisément, fixons un corps de base k algébriquement clos et de caractéristique nulle. Considérons une k-algèbre associative, commutative, graduée, de type fini

$$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n.$$

AMS 1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*): 20G05, 14L30, 20C30

Soit m un entier positif ; on munit l'espace

$$B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^m R_n$$

d'une structure d'algèbre graduée de type fini, où S^m désigne la puissance symétrique m-ième. Soit λ une partition de m, et soit S^λ le foncteur de Schur associé ; on munit

$$B(\lambda) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^\lambda R_n$$

d'une structure de B-module gradué de type fini. Plus généralement, il en est de même de

$$B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r)) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} S^{\lambda(1)} R_{n+a(1)} \otimes \cdots \otimes S^{\lambda(r)} R_{n+a(r)}$$

où $\lambda(1),\ldots,\lambda(r)$ sont des partitions de $m(1),\ldots,m(r)$ avec $m(1) + \cdots + m(r) = m$, et où $a(1),\ldots,a(r)$ sont des entiers.

Les B-modules $B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$ s'interprètent comme des modules de covariants (voir 1.1 et 1.2), ou en termes de produits symétriques de la variété projective associée à R (voir 1.4 et 1.5). En ce qui concerne la propriété de Cohen-Macaulay pour ces modules, on démontre le résultat suivant :

Théorème (1.4) — *Si les singularités de Spec(R) sont rationnelles, alors chaque B-module $B(\lambda)$ est de Cohen-Macaulay. De plus, chaque $B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$ est de Cohen-Macaulay hors de l'idéal maximal homogène de B.*

Dans la seconde partie de ce travail, on se restreint au cas où R est l'algèbre symétrique d'un k-espace vectoriel V de dimension 2. Les $B(\lambda)$ sont alors munis d'une action du groupe $\mathrm{GL}(V) \simeq \mathrm{GL}(2, k)$. Il se trouve que l'algèbre B est isomorphe à l'algèbre symétrique de $S^m V$; le théorème ci-dessus entraîne alors que chaque B-module $B(\lambda)$ est libre. Ce résultat a été obtenu indépendamment par J. Weyman et A. Zelevinsky, voir [W-Z]. On démontre ici le résultat suivant.

Théorème (2.4, 2.6) — *Soit V un espace vectoriel de dimension 2 ; soit λ une partition de m en r parts. Il existe alors un $\mathrm{GL}(V)$-module gradué $M(\lambda)$ tel que :*

$$S^\lambda(S^n V) = \bigoplus_{p=0}^{n} M(\lambda)_p \otimes S^m(S^{n-p} V)$$

pour tout entier $n \geq 0$. De plus :

1. *$M(\lambda)_p$ est nul si $p < r - 1$ ou si $p > m - \lambda_1$ (où λ_1 désigne la plus grande part de λ), et $M(\lambda)_{r-1} \simeq S^\lambda(S^{r-1} V)$.*

2. *Le dual de* $M(\lambda)_p$ *est isomorphe à* $M(\lambda')_{m-p-1} \otimes (\wedge^2 V)^{-m(m-1)/2}$ *où* λ' *désigne la partition conjuguée de* λ.

3. *La dimension de* $M(\lambda)$ *est la dimension de la représentation irréductible du groupe symétrique* S_m *associée à* λ.

Notons $[\lambda]$ cette représentation de S_m ; la construction précédente munit $[\lambda]$ d'une action de $\mathrm{GL}(2,k)$. D'autre part, $[\lambda]$ est munie d'une graduation (en effet, la représentation régulière de S_m se réalise dans le quotient de l'algèbre des polynômes en m variables, par l'idéal engendré par les polynômes symétriques élémentaires, et ce quotient a une graduation naturelle). On montre en 2.4 que cette graduation s'obtient à partir de l'action de $\mathrm{GL}(2,k)$, en considérant les espaces propres des matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{smallmatrix}\right)$.

Le calcul des $M(\lambda)$ à partir de leur définition étant difficile, on obtient en 2.7 et 2.9 des relations de récurrence pour ces modules ; les premières valeurs des $M(\lambda)$ sont données en 2.8. On a ainsi une description assez complète des modules $B(\lambda)$ sur l'algèbre symétrique de $S^m V$.

Quant aux $B(\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r))$, ils sont localement libres hors de l'origine, et définissent donc des fibrés vectoriels $\mathrm{GL}(V)$-linéarisés sur l'espace projectif $\mathbb{P}(S^m V^*)$ de dimension m. L'ensemble de ces fibrés est stable par passage au dual (voir 2.2 pour un énoncé plus précis) ; parmi eux se trouvent les fibrés de formes différentielles, ainsi que des fibrés de rang m construits par Schwarzenberger (voir 2.6). On obtient en 2.3 une caractérisation des B-modules $B(\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r))$ qui sont libres, c'est-à-dire qui définissent un fibré vectoriel scindé. Mais dans le cas général, la structure de ces modules reste mystérieuse.

La troisième partie de cet article est consacrée à une conjecture de H. O. Foulkes, précisée par R. Howe. Ce dernier a construit, pour tout espace vectoriel V de dimension finie et pour tous entiers positifs m et n, une application $\mathrm{GL}(V)$-équivariante

$$h_{m,n} : S^n(S^m V) \to S^m(S^n V).$$

La conjecture affirme que $h_{m,n}$ est injective pour $n \leq m$ et surjective pour $n \geq m$. On obtient ici un résultat partiel, mais effectif :

Théorème (3.3) — *Soit* V *un espace vectoriel de dimension* d *; notons* N *le plus petit entier tel que* $dN \geq \binom{m+d-1}{d-1}$. *Alors l'application* $h_{m,n}$ *est surjective pour* $n \geq (m-1)(d-1)(mN+m-N)$.

La surjectivité de $h_{m,n}$ pour n assez grand était déjà connue (voir [Br1] 1.3), mais sans borne effective sur n ; on la déduit du fait que le m-ième produit symétrique de $\mathbb{P}(V^*)$ s'identifie à la sous-variété de $\mathbb{P}(S^m V^*)$ formée des classes des produits de

m formes linéaires sur V. On renvoie à [Man] et à [Br1] pour d'autres applications des produits symétriques au problème du pléthysme.

Ce travail a été commencé en préparant un exposé à l'université de Chicago, en janvier 1995. Je remercie cette université pour son hospitalité, ainsi que William Fulton, Anthony Iarrobino et Laurent Manivel pour des discussions utiles. Enfin, je remercie tout particulièrement Jerzy Weyman et Andrei Zelevinsky pour m'avoir communiqué leurs résultats (voir [W-Z]) ; ils ont obtenu indépendamment une version du deuxième théorème ci-dessus, ainsi que l'approche géométrique de la conjecture de Foulkes-Howe, suivie dans [Br1] et dans la troisième partie de cet article.

Notations

On rassemble quelques notations et résultats sur les partitions, les représentations du groupe symétrique, et les représentations polynomiales du groupe linéaire ; pour plus de détails, on renvoie à [J-K] et à [Mac].

Une *partition* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ est une suite décroissante finie d'entiers positifs : les *parts* de λ. La somme des parts de λ est notée $|\lambda|$; c'est le *poids* de λ. Si $|\lambda| = m$, on dit que λ est une partition de m et on note $\lambda \vdash m$.

Le *diagramme* de la partition λ est l'ensemble des couples d'entiers (i, j) tels que $1 \leq j \leq \lambda_i$. Les longueurs des lignes du diagramme de λ constituent les parts de λ, tandis que les longueurs des colonnes sont les parts de la partition *conjuguée*, notée λ'. Par exemple, la conjuguée de (m) est $(1, \dots, 1)$ (m fois), notée (1^m).

On note S_m le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, m\}$. Toute partition λ de m définit deux sous-groupes de S_m, à savoir $S_\lambda := S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \cdots$ et $S_{\lambda'} = S_{\lambda'_1} \times S_{\lambda'_2} \times \cdots$. Notons 1 (resp. sgn) la représentation triviale (resp. signature) du groupe S_m. Les représentations induites $\mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_m}(1 \otimes 1 \otimes \cdots)$ et $\mathrm{Ind}_{S_{\lambda'}}^{S_m}(\mathrm{sgn} \otimes \mathrm{sgn} \otimes \cdots)$ ont une unique représentation irréductible en commun ; on la note $[\lambda]$. De plus, toute représentation irréductible de S_m est isomorphe à $[\lambda]$ pour une unique partition λ de m. On a ainsi : $[m] = 1$ et $[1^m] = \mathrm{sgn}$. La représentation duale de $[\lambda]$ est donnée par $[\lambda]^* = [\lambda'] \otimes [1^m]$.

Soit V un k-espace vectoriel. Le groupe S_m opère dans la m-ième puissance tensorielle $V^{\otimes m}$ par permutation des copies de V. Pour toute partition λ de m, on désigne par $S^\lambda V$ l'espace des applications S_m-équivariantes de $[\lambda]$ dans $V^{\otimes m}$:

$$S^\lambda V = \mathrm{Hom}^{S_m}([\lambda], V^{\otimes m}).$$

Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ opère dans $V^{\otimes m}$ en commutant à l'action de S_m ; il opère donc dans $S^\lambda V$. Si la dimension de V est finie, alors chaque $S^\lambda V$ est un $\mathrm{GL}(V)$-module polynomial simple, et ce module est nul si et seulement si $\lambda'_1 > \dim(V)$. Tout

$\mathrm{GL}(V)$-module polynomial simple est isomorphe à $S^\lambda V$ pour une unique partition λ, avec $\lambda'_1 \leq \dim(V)$. On a par exemple $S^{(m)}V = S^m V$ (la m-ième puissance symétrique de V) et $S^{(1^m)}V = \wedge^m V$ (la m-ième puissance extérieure de V). La construction de $S^\lambda V$ définit le *foncteur de Schur* S^λ.

1 Construction d'algèbres et de modules gradués

1.1 Le groupe Γ_m et ses représentations

On note T_m l'ensemble des $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in (k^*)^m$ tels que $x_1 x_2 \cdots x_m = 1$. C'est un sous-groupe fermé de $(k^*)^m$, isomorphe à $(k^*)^{m-1}$. L'action de S_m dans $(k^*)^m$ par permutation des indices, laisse stable T_m. On note Γ_m le produit semi-direct de T_m par S_m ; c'est un groupe algébrique réductif.

Soient $\lambda(1), \ldots, \lambda(r)$ des partitions de poids respectifs $m(1), \ldots, m(r)$ tels que $m(1) + \cdots + m(r) = m$. Soient $a(1), \ldots, a(r)$ des entiers deux à deux distincts. On pose

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = (a(1), \ldots, a(1), \ldots, a(r), \ldots, a(r))$$

où chaque $a(i)$ est répété $m(i)$ fois. On définit un caractère $\chi_{a(1),\ldots,a(r)} : T_m \to k^*$ par

$$\chi_{a(1),\ldots,a(r)}(x_1, \ldots, x_m) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}.$$

Le groupe S_m opère dans le groupe des caractères de T_m et le groupe d'isotropie de $\chi_{a(1),\ldots,a(r)}$ est $S_{m(1)} \times \cdots \times S_{m(r)}$. On étend $\chi_{a(1),\ldots,a(r)}$ en un caractère du sous-groupe d'indice fini $T_m \cdot (S_{m(1)} \times \cdots \times S_{m(r)})$ de Γ_m, par le caractère trivial de $S_{m(1)} \times \cdots \times S_{m(r)}$. Alors $\chi_{a(1),\ldots,a(r)} \otimes [\lambda(1)] \otimes \cdots \otimes [\lambda(r)]$ est une représentation irréductible de $T_m \cdot (S_{m(1)} \times \cdots \times S_{m(r)})$. On note

$$[\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r)]$$

la représentation de Γ_m induite de $\chi_{a(1),\ldots,a(r)} \otimes [\lambda(1)] \otimes \cdots \otimes [\lambda(r)]$. On a :

$$\dim[\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r)) = \frac{m!}{m(1)! \cdots m(r)!} \dim[\lambda(1)] \cdots \dim[\lambda(r)].$$

Proposition 1.1 — 1. $[\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r)]$ *est irréductible.*

2. $[\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r)]$ *est isomorphe à* $[\mu(1), b(1); \ldots; \mu(s), b(s)]$ *si et seulement si :* $r = s$ *et il existe* $\sigma \in S_r$ *telle que* $\lambda(1) = \mu(\sigma(1))$, $\ldots$, $\lambda(r) = \mu(\sigma(r))$ *et* $a(1) - b(\sigma(1)) = \cdots = a(r) - b(\sigma(r))$.

3. *Toute représentation algébrique irréductible de* Γ_m *est isomorphe à l'une des* $[\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r)]$.

Démonstration. Le groupe des caractères (algébriques) $X^*(T_m)$ est isomorphe au quotient de $\mathbb{Z}^m$ par $\mathbb{Z}$ plongé diagonalement ; l'action de S_m dans $X^*(T_m)$ provient de l'action dans $\mathbb{Z}^m$ par permutations. Ainsi, tout caractère de T_m est dans l'orbite par S_m d'un $\chi_{a(1),\dots,a(r)}$. De plus, $\chi_{a(1),\dots,a(r)}$ et $\chi_{b(1),\dots,b(s)}$ sont dans la même orbite de S_m si et seulement si : $r = s$ et il existe $\sigma \in S_r$ telle que $a(1) - b(\sigma(1)) = \cdots = a(r) - b(\sigma(r))$. Enfin, on a déjà observé que le groupe d'isotropie de $\chi_{a(1),\dots,a(r)}$ est $S_{m(1)} \times \cdots \times S_{m(r)}$. Les assertions résultent donc de la proposition 25 de [Se] ; en effet, la preuve de cette proposition s'adapte immédiatement aux groupes algébriques. □

1.2 Construction des modules gradués $B(\lambda(1), a(1); \dots ; \lambda(r), a(r))$

On considère une k-algèbre graduée de type fini

$$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$$

et une entier positif m. On note

$$A = R^{\otimes m}$$

le produit tensoriel de m copies de R ; c'est une k-algèbre de type fini, graduée par

$$A_n = \bigoplus_{n_1+\cdots+n_m=n} R_{n_1} \otimes \cdots \otimes R_{n_m}.$$

La graduation définit une opération du groupe k^* dans R, d'où une opération de $(k^*)^m$ dans $R^{\otimes m} = A$. D'autre part, le groupe S_m opère dans A par permutation des copies de R. On en déduit une action dans A du produit semi-direct de $(k^*)^m$ par S_m. En particulier, Γ_m opère dans A en préservant la graduation.

Proposition 1.2 — *On a des isomorphismes*

$$\mathrm{Hom}^{\Gamma_m}([\lambda(1), a(1); \dots ; \lambda(r), a(r)], A) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S^{\lambda(1)} R_{n+a(1)} \otimes \cdots \otimes S^{\lambda(r)} R_{n+a(r)}.$$

Démonstration. Par réciprocité de Frobenius, on a un isomorphisme entre

$$\mathrm{Hom}^{\Gamma_m}([\lambda(1), a(1); \dots ; \lambda(r), a(r)], A)$$

et

$$\mathrm{Hom}^{T_m\cdot(S_{m(1)}\times\cdots\times S_{m(r)})}(\chi_{a(1),\dots,a(r)} \otimes [\lambda(1)] \otimes \cdots \otimes [\lambda(r)], A).$$

Mais ce dernier est isomorphe à

$$\mathrm{Hom}^{S_{m(1)}\times\cdots\times S_{m(r)}}([\lambda(1)] \otimes \cdots \otimes [\lambda(r)], \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_{n+a(1)}^{\otimes m(1)} \otimes \cdots \otimes R_{n+a(r)}^{\otimes m(r)})$$

c'est-à-dire à

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S^{\lambda(1)}R_{n+a(1)} \otimes \cdots \otimes S^{\lambda(r)}R_{n+a(r)}.$$

□

Corollaire-Définition 1.3 — 1. *L'espace*

$$B := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S^m R_n$$

est une sous-algèbre graduée de type fini de A.

2. *L'espace*

$$B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r)) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S^{\lambda(1)}R_{n+a(1)} \otimes \cdots \otimes S^{\lambda(r)}R_{n+a(r)}$$

est un B-module gradué de type fini. En particulier, pour toute partition λ de m, on a un B-module gradué de type fini

$$B(\lambda) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^{\lambda}R_n.$$

3. *On a un isomorphisme de $B-\Gamma_m$-modules*

$$A \simeq \bigoplus B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r)) \otimes [\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r)]$$

où la somme porte sur les classes des suites $(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$ modulo la relation d'équivalence définie en 1.1 (ii).

4. *Si R est intègre, alors B est intègre et chaque $B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$ est sans torsion comme B-module.*

5. *Si R est intègre de dimension (de Krull) au moins 2, et si $R_n \neq 0$ pour tout n assez grand, alors le rang du B-module $B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$ est égal à*

$$\frac{m!}{m(1)! \cdots m(r)!} \dim[\lambda(1)] \cdots \dim[\lambda(r)].$$

Démonstration. L'algèbre des invariants du groupe réductif Γ_m dans A n'est autre que B, et $B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$ est le module de covariants associé à la représentation irréductible $[\lambda(1), a(1); \ldots , ; \lambda(r), a(r)]$ de Γ_m. Les assertions (i), (ii) et (iii) résultent donc de 1.1 et de [P-V]. Pour l'assertion (iv), si R est intègre, alors A l'est aussi. Enfin, sous les hypothèses de (v), on voit facilement que l'orbite générique de Γ_m dans *Spec*(A) est fermée, et que le stabilisateur générique est trivial. Ceci entraîne que le rang de $B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$ est la dimension de $[\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r)]$; voir par exemple [Br2] 1.2 Corollaire. □

Remarque. Les constructions précédentes s'étendent aux R-modules gradués ; ces généralisations ne seront pas considérées ici.

1.3 Propriétés de Cohen-Macaulay des modules $B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$

On rappelle que les singularités d'une variété affine V sont dites *rationnelles* si V est normale et s'il existe une résolution des singularités $\pi : \tilde{V} \to V$ telle que $H^i(\tilde{V}, \mathcal{O}_{\tilde{V}}) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Cela entraîne que V est de Cohen-Macaulay.

Théorème 1.4 — *Si les singularités de Spec(R) sont rationnelles, alors chaque B-module $B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$ est de Cohen-Macaulay en dehors de l'idéal maximal homogène de B. De plus, chaque B-module $B(\lambda)$ est de Cohen-Macaulay.*

Démonstration. On pose $V = Spec(R)$. La graduation de R définit une action de k^* dans V, avec un unique point fixe noté 0. Le groupe réductif Γ_m opère dans V^m et le quotient

$$q : V^m \to V^m//\Gamma_m$$

est défini par l'inclusion $k[V^m//\Gamma_m] = B \subset A = k[V^m]$. Puisque les singularités de V sont rationnelles, il en est de même de celles de V^m, et donc de $V^m//\Gamma_m$ d'après [Bo]. En particulier, l'anneau B est de Cohen-Macaulay.

Soit $x = (v_1, \ldots , v_m) \in V^m$. A l'aide du critère de Hilbert-Mumford, il est facile de vérifier que $q(x) \neq 0$ si et seulement si $v_i \neq 0$ pour tout i. Dans ce cas, l'orbite $\Gamma_m \cdot x$ est fermée dans V^m, et le groupe d'isotropie $\Gamma_{m,x}$ est fini. D'après le théorème du slice étale, il existe alors une sous-variété affine $S \subset V^m$, stable par $\Gamma_{m,x}$ et contenant x, telles que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_m \times_{\Gamma_{m,x}} S \arrow[r] \arrow[d] & V^m \arrow[d] \\
S/\Gamma_{m,x} \arrow[r] & V^m//\Gamma_m
\end{tikzcd}$$

est cartésien, et que ses flèches horizontales sont étales. Il en résulte que les singularités de S et de $S/\Gamma_{m,x}$ sont rationnelles. En particulier, les anneaux $k[S]$ et $k[S]^{\Gamma_{m,x}}$ sont de Cohen-Macaulay. Puisque le groupe $\Gamma_{m,x}$ est fini, on en déduit que le $k[S]^{\Gamma_{m,x}}$-module $\mathrm{Hom}^{\Gamma_{m,x}}(M, k[S])$ est de Cohen-Macaulay pour tout $\Gamma_{m,x}$-module M. D'autre part, comme le diagramme ci-dessus est cartésien, les modules sur $k[S]^{\Gamma_{m,x}}$

$$k[S]^{\Gamma_{m,x}} \otimes_B B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$$

et

$$\mathrm{Hom}^{\Gamma_{m,x}}([\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r)], k[S])$$

sont isomorphes en x. Par suite, le B-module $B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$ est de Cohen-Macaulay en $q(x)$. Ceci démontre la première assertion.

Pour la seconde assertion, on observe que les singularités de $V^m//T_m$ sont rationnelles (toujours d'après [Bo]) et donc que l'anneau

$$k[V^m]^{T_m} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n^{\otimes m}$$

est de Cohen-Macaulay. Cet anneau est isomorphe à

$$\bigoplus_{\lambda \vdash m} B(\lambda) \otimes [\lambda]$$

comme $B - S_m$-module, et B est de Cohen-Macaulay. Ceci entraîne, comme précédemment, que chaque $B(\lambda)$ est de Cohen-Macaulay. □

1.4 Produits symétriques

Soit X une variété projective irréductible ; soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible ample sur X. Le groupe S_m opère dans X^m (produit de m copies de X) par permutation des copies. On note $\mathscr{L}^{\boxtimes m}$ le produit tensoriel extérieur de m copies de $\mathscr{L}$; c'est un faisceau inversible ample sur X^m.

Proposition 1.5 — 1. *Le quotient $\pi : X^m \to X^m/S_m$ existe et $X^m/S_m := X^{(m)}$ est une variété projective irréductible (c'est le m-ième produit symétrique de X).*

2. *Il existe un unique faisceau inversible ample $\mathscr{L}^{(m)}$ sur $X^{(m)}$ tel que $\mathscr{L}^{\boxtimes m} = \pi^*\mathscr{L}^{(m)}$. De plus, $\mathscr{L}^{(m)}$ est ample et $(\mathscr{L}^{(m)})^{\otimes n} = (\mathscr{L}^{\otimes n})^{(m)}$ pour tout entier $n \geq 0$.*

3. *Si $X = \mathbb{P}(V)$ est l'espace projectif asocié à un k-espace vectoriel V, et si $\mathscr{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$, alors $X^{(m)}$ est l'image du morphisme « produit »*

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{P}(V)^m &\to \mathbb{P}(S^m V) \\ (\overline{v_1}, \dots, \overline{v_m}) &\to \overline{v_1 \cdots v_m}. \end{aligned}$$

De plus, $\mathscr{L}^{(m)}$ est la restriction à $X^{(m)}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^m V)}(1)$.

Démonstration. (i) Plus généralement, le quotient d'une variété projective par un groupe fini existe, et c'est une variété projective.
(ii) D'après [K-K-V] Proposition 4.2, l'existence de $\mathscr{L}^{(m)}$ équivaut à la condition suivante : pour tout $x \in X^m$, le groupe d'isotropie de x dans S_m opère trivialement dans la fibre $(L^{\boxtimes m})_x$. On peut supposer que $x = (x_1, \dots, x_1, \dots, x_r, \dots, x_r)$ où chaque x_i est répété $m(i)$ fois. Alors le groupe $(S_m)_x = S_{m(1)} \times \cdots \times S_{m(r)}$ opère trivialement dans la fibre $(\mathscr{L}^{\boxtimes m})_x = (\mathscr{L}_{x_1})^{\otimes m(1)} \otimes \cdots \otimes (\mathscr{L}_{x_r})^{\otimes m(r)}$.

De la formule de projection résulte que $\mathcal{L}^{(m)} = (\pi_* \mathcal{L}^{\boxtimes m})^{S_m}$, d'où l'unicité de $\mathcal{L}^{(m)}$. Puisque π est fini et que $\mathcal{L}^{\boxtimes m}$ est ample, $\mathcal{L}^{(m)}$ est ample aussi. Enfin,

$$\pi^*((\mathcal{L}^{(m)})^{\otimes n}) = (\pi^* \mathcal{L}^{(m)})^{\otimes n} = (\mathcal{L}^{\boxtimes m})^{\otimes n} = (\mathcal{L}^{\otimes n})^{\boxtimes m}$$

d'où $(\mathcal{L}^{(m)})^{\otimes n} = (\mathcal{L}^{\otimes n})^{(m)}$ par unicité.
(iii) Pour l'assertion sur $X^{(m)}$, voir [G-K-Z]. L'assertion sur $\mathcal{L}^{(m)}$ résulte de ce que

$$p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^m V)}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)^{\boxtimes m}.$$

□

1.5 Produits symétriques et modules $B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$

Avec les notations de 1.4, on pose

$$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}).$$

C'est une k-algèbre graduée de type fini, et on a $X = Proj(R)$. Pour tout R-module gradué M, on note $\tilde{M}$ le faisceau sur X associé à M. Même si R n'est pas nécessairement engendré par ses éléments de degré un, la correspondance entre M et $\tilde{M}$ a de bonnes propriétés, voir [G-W] §5.

Soient $m(1), \ldots , m(r)$ des entiers positifs de somme m. L'application

$$\pi : X^m \to X^{(m)}$$

est invariante par $S_{m(1)} \times \cdots \times S_{m(r)}$. Par suite, π se factorise en

$$(\pi_1, \ldots , \pi_r) : X^{m(1)} \times \cdots \times X^{m(r)} \to X^{(m(1))} \times \cdots \times X^{(m(r))}$$

suivie de

$$p : X^{(m(1))} \times \cdots \times X^{(m(r))} \to X^{(m)}.$$

Pour toute partition λ de m, on pose

$$\mathcal{B}(\lambda) := \mathrm{Hom}^{S_m}([\lambda], \pi_* \mathcal{O}_{X^m}).$$

C'est un faisceau cohérent sur $X^{(m)}$, et on a : $\mathcal{B}((m)) = (\pi_* \mathcal{O}_{X^m})^{S_m} = \mathcal{O}_{X^{(m)}}$.

Proposition 1.6 — 1. *L'algèbre B est égale à*

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(X^{(m)}, (\mathcal{L}^{(m)})^{\otimes n}).$$

2. *On a :* $Proj(B) = X^{(m)}$.
3. *Le faisceau sur* $X^{(m)}$ *associé au* B*-module* $B(\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r))$ *est*

$$p_*(\mathcal{B}(\lambda(1)) \otimes (\mathcal{L}^{(m(1))})^{\otimes a(1)} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{B}(\lambda(r)) \otimes (\mathcal{L}^{(m(r))})^{\otimes a(r)}).$$

Démonstration. Observons que

$$\begin{aligned}\Gamma(X^{(m)}, (\mathcal{L}^{(m)})^{\otimes n}) &= \Gamma(X^{(m)}, (\mathcal{L}^{\otimes n})^{(m)}) = \Gamma(X^{(m)}, (\pi_*\mathcal{L}^{\otimes n})^{\boxtimes m})^{S_m} \\ &= \Gamma(X^m, (\mathcal{L}^{\otimes n})^{\boxtimes m})^{S_m} = ((\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})^{\otimes m})^{S_m} = S^m\Gamma(X, L^{\otimes n}).\end{aligned}$$

Ceci implique la première assertion ; la seconde assertion en résulte. Pour la troisième, choisissons n_0 tel que $\mathcal{L}^{\otimes n_0}$ est très ample. Soit $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n_0}) = R_{n_0}$ une section non nulle ; d'où

$$\sigma^m \in S^m\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes nn_0}) = \Gamma(X^{(m)}, (\mathcal{L}^{(m)})^{\otimes nn_0}).$$

Notons $X^{(m)}_{\sigma^m}$ l'ouvert de $X^{(m)}$ où σ^m ne s'annule pas ; alors $X^{(m)}_{\sigma^m} = (X_\sigma)^{(m)}$. Les $X^{(m)}_{\sigma^m}$ forment donc un recouvrement affine de $X^{(m)}$. De plus, l'espace des sections sur $X^{(m)}_{\sigma^m}$ du faisceau associé à $B(\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r))$ est donné par

$$\begin{aligned}&\bigcup_{n\geq 0} B(\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r))_n (\sigma^m)^{-n} \\ &\qquad = \bigcup_{n\geq 0} S^{\lambda(1)}(R_{nn_0+a(1)}\sigma^{-n}) \otimes \cdots \otimes S^{\lambda(r)}(R_{nn_0+a(r)}\sigma^{-n}) \\ &\qquad\qquad = S^{\lambda(1)}(\bigcup_{n\geq 0} R_{nn_0+a(1)}\sigma^{-n}) \otimes \cdots \otimes S^{\lambda(r)}(\bigcup_{n\geq 0} R_{nn_0+a(r)}\sigma^{-n}).\end{aligned}$$

On conclut en observant que

$$\bigcup_{n\geq 0} R_{nn_0+a_i}\sigma^{-n} = \Gamma(X_\sigma, \mathcal{L}^{\otimes a_i})$$

ce qui implique, comme au début de la preuve, que

$$S^{\lambda(i)}(\bigcup_{n\geq 0} R_{nn_0+a_i}\sigma^{-n}) = \Gamma(X^{(m(i))}_\sigma, \mathcal{B}(\lambda(i)) \otimes (\mathcal{L}^{(m(i))})^{\otimes a_i}).$$

□

2 Applications aux représentations de GL(2) et du groupe symétrique

2.1 Les faisceaux inversibles $\mathcal{B}(\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r))$ sur l'espace projectif de dimension m.

Soit V un k-espace vectoriel de dimension 2. Soit $R = S^\bullet(V)$ l'algèbre symétrique de V. Alors $X = Proj(R) = \mathbb{P}(V^*)$ est une droite projective. Il résulte (par exemple) de la proposition 1.5 (iii), que le m-ième produit symétrique $X^{(m)}$ est isomorphe à $\mathbb{P}(S^m V^*)$; c'est un espace projectif de dimension m. De plus, si $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(1)$, alors $\mathcal{L}^{(m)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^m V^*)}(1)$.

Le groupe $\mathrm{GL}(V) \simeq \mathrm{GL}(2,k)$ opère dans R et donc dans A en commutant à l'action de S_m. Ce groupe opère donc dans B et dans les B-modules $B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$. En termes géométriques, $\mathrm{GL}(V)$ opère de façon naturelle dans $\mathbb{P}(S^m V^*)$, et les faisceaux $\mathcal{B}(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$ sont $\mathrm{GL}(V)$-linéarisés. Pour garder à l'esprit cette action de $\mathrm{GL}(V)$, on conservera les notations pesantes $\mathbb{P}(V^*)$, $\mathbb{P}(S^m V^*)$, ... au lieu de $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^m$, ...

Proposition 2.1 — 1. *On a un isomorphisme canonique d'algèbres graduées*

$$S^\bullet(S^m V) \to B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^m(S^n V).$$

2. *Chaque faisceau* $\mathcal{B}(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$ *est localement libre, de rang*

$$\frac{m!}{m(1)! \cdots m(r)!} \dim[\lambda(1)] \cdots \dim[\lambda(r)].$$

Démonstration. (i) Par définition, on a :

$$B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^m R_n = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^m(S^n V).$$

D'autre part, d'après la proposition 1.6 (i), on a :

$$B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(\mathbb{P}(S^m V^*), \mathcal{O}(n)) = S^\bullet(S^m V).$$

(ii) D'après le théorème 1.4, le B-module $B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$ est de Cohen-Macaulay hors de l'origine. Puisque B est une algèbre de polynômes, ce module est localement libre hors de l'origine. Enfin, puisque l'algèbre B est engendrée par B_1, le faisceau associé sur $\mathrm{Proj}(B)$ est localement libre. L'assertion sur le rang résulte du corollaire 1.3 (v). □

Corollaire 2.2 (loi de réciprocité de Hermite) — *Pour tous entiers positifs m et n, on a un isomorphisme* $\mathrm{GL}(V)$*-équivariant*

$$S^m(S^n V) \simeq S^n(S^m V).$$

2.2 Dualité entre les $\mathcal{B}(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$

On désigne par $\mathcal{B}(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))^*$ le dual du faisceau localement libre $\mathcal{B}(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$ sur $\mathbb{P}(S^m V^*)$. On rappelle que λ' désigne la conjuguée d'une partition λ.

Proposition 2.3 — *Le faisceau* $\mathrm{GL}(V)$*-linéarisé* $\mathcal{B}(\lambda(1), a(1); \dots; \lambda(r), a(r))^*$ *est isomorphe à*

$$\mathcal{B}(\lambda(1)', m-1-a(1); \dots; \lambda(r)', m-1-a(r)) \otimes (\wedge^2 V)^{-m(m-1)/2}.$$

Démonstration. D'après le théorème de dualité locale appliqué au morphisme fini $\pi : \mathbb{P}(V^*)^m \to \mathbb{P}(S^m V^*)$, on a un isomorphisme canonique

$$(*) \qquad \mathcal{H}om_{\mathbb{P}(S^m V^*)}(\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)^m}, \omega_{\mathbb{P}(S^m V^*)}) \simeq \pi_* \omega_{\mathbb{P}(V^*)^m}$$

où ω_X désigne le faisceau des formes différentielles de degré maximal sur une variété lisse X. En particulier, l'isomorphisme $(*)$ est $\mathrm{GL}(V) \times S_m$-équivariant. Rappelons que pour tout espace vectoriel W de dimension d, on a un isomorphisme de faisceaux $\mathrm{GL}(W)$-linéarisés

$$\omega_{\mathbb{P}(W^*)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W^*)}(-d) \otimes \wedge^d W.$$

On en déduit que

$$\omega_{\mathbb{P}(S^m V^*)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^m V^*)}(-m-1) \otimes (\wedge^2 V)^{m(m+1)/2}$$

comme faisceaux $\mathrm{GL}(V)$-linéarisés. De plus, on a :

$$\omega_{\mathbb{P}(V^*)^m} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-2)^{\boxtimes m} \otimes (\wedge^2 V)^m \otimes [1^m]$$

et donc :

$$\pi_* \omega_{\mathbb{P}(V^*)^m} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^m V^*)}(-2) \otimes (\wedge^2 V)^m \otimes [1^m]$$

comme faisceau $\mathrm{GL}(V) \times S_m$-linéarisé. En substituant dans $(*)$ et en considérant les composantes isotypiques de type $[\lambda]$, on obtient donc

$$\mathcal{H}om_{\mathbb{P}(S^m V^*)}(\mathcal{B}(\lambda), \mathcal{O}(-m-1) \otimes (\wedge^2 V)^{m(m+1)/2}) = \mathcal{O}(-2) \otimes \mathcal{B}(\lambda') \otimes (\wedge^2 V)^m$$

grâce à l'isomorphisme $\mathrm{Hom}([\lambda], [1^m]) \simeq [\lambda']$. On en déduit que $\mathcal{B}(\lambda)^*$ est isomorphe à $\mathcal{B}(\lambda') \otimes \mathcal{O}(m-1) \otimes (\wedge^2 V)^{-m(m-1)/2}$.

Appliquons maintenant le théorème de dualité locale au morphisme fini

$$p : \mathbb{P}(S^{m(1)} V^*) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{m(r)} V^*) \to \mathbb{P}(S^m V^*)$$

défini en 1.5. On obtient un isomorphisme entre

$$\mathcal{H}om(p_*(\mathcal{B}(\lambda(1)) \otimes \mathcal{O}(a(1)) \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{B}(\lambda(r)) \otimes \mathcal{O}(a(r)), \omega_{\mathbb{P}(S^m V^*)})$$

et

$$p_* \mathcal{H}om(\mathcal{B}(\lambda(1)) \otimes \mathcal{O}(a(1)) \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{B}(\lambda(r)) \otimes \mathcal{O}(a(r)), \omega_{\mathbb{P}(S^{m(1)} V^*) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{m(r)} V^*)}.$$

En utilisant 1.5 ainsi que la première partie de la preuve, on a donc un isomorphisme entre

$$\mathcal{B}(\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r))^* \otimes \mathcal{O}(-m-1)$$

et

$$p_*(\mathcal{B}(\lambda(1)') \otimes \mathcal{O}(-a(1)-2) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{B}(\lambda(r)') \otimes \mathcal{O}(-a(r)-2)).$$

On conclut en appliquant encore une fois la proposition 1.6. □

2.3 Un critère pour que $B(\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r))$ soit libre

On rappelle que le B-module $B(\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r))$ est sans torsion, et que B est une algèbre de polynômes ; par suite, ce B-module est libre si et seulement s'il est de Cohen-Macaulay. On pourrait tester cette dernière propriété grâce à la théorie de Van den Bergh, qui a caractérisé les modules de covariants qui sont de Cohen-Macaulay [V]. Dans le cas présent, il est plus simple d'utiliser des arguments ad hoc, qui conduisent au résultat suivant.

Théorème 2.4 **—** 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Le B-module $B(\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r))$ est libre.*

(b) *Pour tout sous-ensemble I de $\{1, 2, \ldots, r\}$, non vide et de complémentaire non vide, il existe $i \in I$ et $j \notin I$ tels que $\lambda(i)'_1 + \lambda(j)_1 > a_i - a_j$.*

2. *Sous l'une de ces hypothèses, le degré minimal des générateurs du B-module gradué $B(\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r))$ est $\max_{1\le i\le r}(\lambda(i)'_1 - a_i - 1)$, et leur degré maximal est $\min_{1\le i\le r}(m - \lambda(i)_1 - a_i)$).*

En particulier, le B-module $B(\lambda)$ est libre, et ses générateurs ont des degrés compris entre $\lambda'_1 - 1$ et $m - \lambda_1$.

Démonstration. Commençons par le cas d'une seule partition λ. D'après le théorème 1.3, le B-module $B(\lambda)$ est libre. En outre, on a : $B(\lambda)_n = S^\lambda(S^n V)$ et ce dernier est nul si et seulement si $n + 1 = \dim(S^n V) < \lambda'_1$. Par suite, le degré minimal d'un générateur de $B(\lambda)$ est $\lambda'_1 - 1$. Enfin, grâce à la proposition 2.2, on a

$$\mathcal{B}(\lambda)^* \simeq \mathcal{B}(\lambda') \otimes \mathcal{O}(m-1) \otimes (\wedge^2 V)^{-m(m-1)/2}$$

ce qui entraîne que le degré maximal d'un générateur de $B(\lambda)$ est $m - 1 - (\lambda''_1 - 1) = m - \lambda_1$.

Dans le cas général, rappelons que le B-module $B(\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r))$ est libre si et seulement s'il est de Cohen-Macaulay. D'après [G-W] (5.1.6) et la proposition 1.5, cette dernière condition équivaut à l'annulation du groupe

$$H^\ell(\mathbb{P}(S^m V^*), \mathcal{B}(\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r)))$$

pour tout (ℓ, n) tel que $1 \leq \ell \leq m-1$ et $n \in \mathbb{Z}$. Mais grâce à la proposition 1.4, ce groupe est isomorphe à

$$H^{\ell}\left(\prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}(S^{m(i)}V^*), \boxtimes_{i=1}^{r} \mathcal{B}(\lambda(i)) \otimes \mathcal{O}(n+a(i))\right).$$

D'après la formule de Künneth, l'annulation cherchée a lieu si et seulement si : pour tout sous-ensemble I de $\{1, \dots, r\}$, non vide et de complémentaire non vide, il existe $i \in I$ et $j \notin I$ tels que l'un des groupes

$$H^0(\mathbb{P}(S^{m(i)}V^*), \mathcal{B}(\lambda(i)) \otimes \mathcal{O}(n+a(i))), \;\; H^{m(j)}(\mathbb{P}(S^{m(j)}V^*), \mathcal{B}(\lambda(j)) \otimes \mathcal{O}(n+a(j)))$$

s'annule. Mais on sait que chaque $\mathcal{B}(\lambda)$ est une somme de faisceaux $\mathcal{O}(-a)$ avec $\lambda'_1 - 1 \leq a \leq m - \lambda_1$, les valeurs extrêmes étant atteintes. L'annulation de l'un des groupes ci-dessus équivaut donc à : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $n+a(i)-\lambda(i)'_1+1 \leq -1$ ou $n+a(j)-(m(j)-\lambda(j)_1) \geq -m(j)$. Ceci équivaut encore à : $a_i - \lambda(i)'_1 + 1 \leq a_j - \lambda(j)$, ce qui termine la démonstration. □

Exemple. Soient λ, μ des partitions telles que $|\lambda| + |\mu| = m$; soient a, b des entiers distincts. Le B-module $B(\lambda, a; \mu, b)$ est libre si et seulement si : $a - b < \lambda'_1 + \mu_1$ et $b - a < \lambda_1 + \mu'_1$.

2.4 Générateurs de $B(\lambda)$ et représentations de S_m

D'après 2.3, il existe un $\mathrm{GL}(V)$-module gradué $M(\lambda)$ tel que $B(\lambda) \simeq B \otimes M(\lambda)$ comme $B-\mathrm{GL}(V)$-modules gradués. Plus concrètement, on a des isomorphismes de $\mathrm{GL}(V)$-modules

$$S^{\lambda}(S^n V) \simeq \bigoplus_{p=\lambda'_1-1}^{m-\lambda_1} M(\lambda)_p \otimes S^m(S^{n-p}V).$$

En fait, l'action de $\mathrm{GL}(V)$ détermine la graduation de $M(\lambda)$, car l'homothétie de rapport t dans $\mathrm{GL}(V)$ opère dans $M(\lambda)_n \subset S^{\lambda}(S^n V)$ par multiplication par t^{mn}.

D'après 2.1, la dimension de $M(\lambda)$ est la dimension de $[\lambda]$. On va montrer un résultat plus précis. Rappelons que l'espace $[\lambda]$ est muni d'une graduation de la façon suivante : le groupe S_m opère dans l'algèbre de polynômes $k[x_1, \dots, x_m]$ par permutation des variables. L'idéal I engendré par les fonctions symétriques élémentaires, est stable par S_m, et le quotient $H = k[x_1, \dots, x_m]/I$ est isomorphe à la représentation régulière de S_m. Puisque I est homogène, le S_m-module H est gradué, ce qui définit un graduation sur chaque $[\lambda] \simeq \mathrm{Hom}^{S_m}([\lambda], H)$. La dimension de l'espace vectoriel $[\lambda]_n$ est le coefficient de t^n dans le polynôme de Kostka-Foulkes $K_{\lambda',(1^m)}(t)$, voir [G-P].

Proposition 2.5 — *Pour tout choix d'une base de $V \simeq k^2$, on a un isomorphisme de $M(\lambda)$ avec $[\lambda]$, qui identifie $[\lambda]_n$ avec l'espace propre de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(V) \simeq \mathrm{GL}(2,k)$$

associé à la valeur propre t^n.

Démonstration. Soit (v,w) la base fixée de V . On a un élément non nul v^m de $S^mV = B_1$. Notons $B(\lambda)_{v^m}$ l'ensemble des éléments de degré 0 dans le localisé $B(\lambda)[1/v^m]$. On a des isomorphismes

$$B(\lambda)_{v^m} = \bigcup_{n\geq 0} S^\lambda(S^nV)(v^m)^{-n} = S^\lambda \left(\bigcup_{n\geq 0} (S^nV)v^{-n} \right) = S^\lambda k[x]$$

où on pose $x = wv^{-1}$. De plus, on a

$$S^\lambda k[x] = \mathrm{Hom}^{S_m}([\lambda], k[x]^{\otimes m}) = \mathrm{Hom}^{S_m}([\lambda], k[x_1, \ldots, x_m]).$$

En particulier, B_{v^m} s'identifie à $k[x_1, \ldots, x_m]^{S_m}$. Ces identifications transforment l'action du groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \middle| \, t \in k^* \right\}$$

(qui fixe v) en l'action de k^* par multiplication simultanée de $x_1, \ldots, x_m$. Puisque $B(\lambda) \simeq B \otimes M(\lambda)$ comme $B - \mathrm{GL}(V)$-modules, on en déduit un isomorphisme

$$M(\lambda) \simeq \mathrm{Hom}^{S_m}([\lambda], H)$$

qui implique notre assertion.

En termes moins précis, la graduation de H provient d'une action de $\mathrm{GL}(2,k)$; celle-ci sera étudiée en 2.5 et 2.7 ci-dessous. De même, chaque fois que le B-module $B(\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r))$ est libre, on peut définir une action de $\mathrm{GL}(2,k)$ sur le sous-espace de H formé des invariants de $S_{m(1)} \times \cdots \times S_{m(r)}$, et cette action raffine la graduation de ce sous-espace. Il serait intéressant d'avoir des constructions plus directes de ces actions. □

2.5 Quelques propriétés des $M(\lambda)$

On conserve les notations de 2.4.

Proposition 2.6 — 1. *Le dual du $\mathrm{GL}(V)$-module $M(\lambda)_n$ est donné par :*

$$M(\lambda)_n^* \simeq M(\lambda')_{m-n-1} \otimes (\wedge^2 V)^{-m(m-1)/2}.$$

2. *L'espace de degré minimal de* $M(\lambda)$ *est*

$$M(\lambda)_{\lambda'_1-1} = S^{\lambda}(S^{\lambda'_1-1}V)$$

et l'espace de degré maximal est

$$M(\lambda)_{m-\lambda_1} = S^{\lambda'}(S^{\lambda_1-1}V^*) \otimes (\wedge^2 V)^{m(m-1)/2}.$$

Démonstration. (i) est conséquence de l'isomorphisme (cas particulier de la proposition 2.2) : $\mathcal{B}(\lambda)^* \simeq \mathcal{B}(\lambda') \otimes \mathcal{O}(m-1) \otimes (\wedge^2 V)^{-m(m-1)/2}$.

(ii) L'espace de degré minimal de $M(\lambda)$ coïncide avec celui de $B(\lambda)$, c'est-à-dire avec $S^{\lambda}(S^{\lambda'_1-1}V)$. L'assertion sur l'espace de degré maximal en résulte par dualité. □

Corollaire 2.7 — *L'espace* $M(\lambda)$ *est concentré en un seul degré si et seulement si la partition* λ *est une équerre :* $\lambda = (a+1, 1^b)$*. Alors* $M(\lambda) = S^a(S^bV) \otimes (\wedge^2 V)^{b(b+1)/2}$ *(en degré* b*).*

En particulier, $M(1^m) = (\wedge^2 V)^{m(m-1)/2}$ d'où un isomorphisme de $\mathrm{GL}(V)$-modules

$$\wedge^m(S^nV) \simeq S^m(S^{n-m+1}V) \otimes (\wedge^2 V)^{m(m-1)/2}.$$

Ce résultat est dû à Murnaghan, voir [Mu] p. 113.

2.6 Structure de $B(1, a; m-1, b)$

On va décrire les B-modules $B(1, a; m-1, b)$, ou (ce qui revient au même) les faisceaux $\mathcal{B}(1, a; m-1, b)$, avec $a \neq b$. Puisque $\mathcal{B}(1, a; m-1, b)$ est isomorphe à $\mathcal{B}(1, a-b; m-1, 0) \otimes \mathcal{O}(b)$, on peut supposer que $b = 0 \neq a$.

Proposition 2.8 — 1. *Si* $1 \leq a \leq m-2$*, alors on a un isomorphisme de faisceaux* $\mathrm{GL}(V)$*-linéarisés*

$$\mathcal{B}(1, a; m-1, 0) \simeq (\mathcal{O} \otimes S^aV) \oplus (\mathcal{O}(-1) \otimes S^{(m-1,a+1)}V).$$

De plus, $\mathcal{B}(1, m-1; m-1, 0) \simeq \mathcal{O} \otimes S^{m-1}V$*, et* $\mathcal{B}(1, -1; m-1, 0) \simeq \mathcal{O}(-1) \otimes S^{m-1}V$*.*

2. *Si* $a \geq m$*, alors on a une suite exacte de faisceaux* $\mathrm{GL}(V)$*-linéarisés :*

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \otimes S^{(a,m)}V \to \mathcal{O} \otimes S^aV \to \mathcal{B}(1, a; m-1, 0) \to 0$$

où l'application $\mathcal{O}(-1) \otimes S^{(a,m)}V \to \mathcal{O} \otimes S^aV$ *provient de l'inclusion*

$$S^{(a,m)}V \subset S^mV \otimes S^aV = \Gamma(\mathbb{P}(S^mV^*), \mathcal{O}(1)) \otimes S^aV.$$

3. *Si $a \leq -2$, alors on a une suite exacte de faisceaux* $\mathrm{GL}(V)$*-linéarisés :*

$$0 \to \mathcal{B}(1,a;m-1,0) \to \mathcal{O}(-1) \otimes S^{(m,a+2)}V \to \mathcal{O} \otimes S^{(0,a+2)}V \to 0$$

où l'application $\mathcal{O}(-1) \otimes S^{(m,a+2)}V \to \mathcal{O} \otimes S^{(0,a+2)}V$ *provient de l'inclusion*

$$S^{(m,a+2)}V \subset S^m V \otimes S^{(0,a+2)}V.$$

Démonstration. D'après le théorème 2.4, le B-module $B(1,a;m-1,0)$ est libre si et seulement si $-1 \leq a \leq m-1$. Les degrés de ses générateurs sont alors 0 et 1 si $a \leq m-2$ (resp. 0 si $a = m-1$; 1 si $a = -1$). Mais $B(1,a;m-1,0)_0 = S^a V$ et $B(1,a;m-1,0)_1 = S^{a+1}V \otimes S^{m-1}V$. L'espace des générateurs de degré 1 de $B(1,a;m-1,0)$ est donc le conoyau d'une application $\mathrm{GL}(V)$-équivariante et injective

$$S^a V \otimes S^m V \to S^{a+1} V \otimes S^{m-1} V.$$

D'après la formule de Clebsch-Gordan, ce conoyau est $S^{(m-1,a+1)}V$ si $1 \leq a \leq m-2$ (resp. 0 si $a = m-1$; $S^m V$ si $a = -1$).
(ii) Soit $p : \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(S^{m-1}V^*) \to \mathbb{P}(S^m V^*)$ le morphisme défini par le produit $V^* \times S^{m-1}V^* \to S^m V^*$. D'après la proposition 1.5, on a :

$$\mathcal{B}(1,a;m-1,0) \simeq p_*(\mathcal{O}(a) \boxtimes \mathcal{O}).$$

Comme dans la preuve du théorème 2.4, on en déduit l'annulation de

$$H^\ell(\mathbb{P}(S^m V^*), \mathcal{B}(1,a;m-1,0) \otimes \mathcal{O}(n))$$

dans les cas suivants : $\ell \notin \{0, m-1, m\}$ et n arbitraire ; $\ell = m-1$ et $n \geq -m+1$; $\ell = m$ et $n \geq -m$. D'après [E-G], cela signifie qu'il existe une résolution minimale

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \otimes V_1 \to \mathcal{O} \otimes V_0 \to \mathcal{B}(1,a;m-1,0) \to 0$$

où V_0 et V_1 sont des k-espaces vectoriels de dimension finie. Il en résulte que $V_0 = B(1,a;m-1,0)_1 = S^a V$. De plus, V_1 est le noyau de l'application surjective

$$V_0 \otimes \Gamma(\mathbb{P}(S^m V^*), \mathcal{O}(1)) \to B(1,a;m-1,0)_1$$

c'est-à-dire de $S^a V \otimes S^m V \to S^{a+1}V \otimes S^{m-1}V$. Ainsi, $V_1 = S^{(a,m)}V$.
(iii) se déduit de (ii) par dualité, grâce à la proposition 2.3. □

Remarques. Le faisceau localement libre $\mathcal{B}(1,a;m-1,0)$ définit un fibré vectoriel de rang m sur l'espace projectif de dimension m. Pour $a \geq m$, on retrouve ainsi des fibrés construits par Schwarzenberger [Sc] ; ceci résulte de l'énoncé (ii) ci-dessus, combiné avec la proposition 6.3 de [D-K].

Pour $a = -2$, on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathcal{B}(1, -2; m-1, 0) \to \mathcal{O}(-1) \otimes S^m V \to \mathcal{O} \to 0$$

et on en déduit que $\mathcal{B}(1, -2; m-1, 0)$ est isomorphe au faisceau $\Omega^1_{\mathbb{P}(S^m V^*)}$ des formes différentielles de degré 1 sur $\mathbb{P}(S^m V^*)$. Plus généralement, on peut montrer que

$$\mathcal{B}(p, -p-1; m-p, 0) \simeq \Omega^p_{\mathbb{P}(S^m V^*)}$$

pour $0 \leq p \leq m$.

2.7 Une relation de récurrence pour les $M(\lambda)$

On revient aux notations de 2.4.

Proposition 2.9 — *Soit μ une partition de $m-1$; soit $n \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. On a un isomorphisme de* $\mathrm{GL}(V)$*-modules*

$$\bigoplus_{\lambda \in \mu \otimes (1)} M(\lambda)_n \simeq (S^n V \otimes M(\mu)_n) \oplus (S^{(m-1,n)} V \otimes M(\mu)_{n-1})$$

où $\mu \otimes (1)$ est l'ensemble des partitions de m dont le diagramme s'obtient en ajoutant une case au diagramme de μ.

Démonstration. On identifie S_{m-1} au sous-groupe de S_m qui fixe 1. On rappelle la décomposition

$$\mathrm{Ind}_{S_{m-1}}^{S_m}[\mu] \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mu \otimes (1)} [\lambda].$$

Factorisons le morphisme

$$\pi : \mathbb{P}(V^*)^m \to \mathbb{P}(S^m V^*)$$

(quotient par S_m) par

$$q : \mathbb{P}(V^*)^m \to \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(S^{m-1} V^*)$$

(quotient par S_{m-1}) suivi du “produit”

$$p : \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(S^{m-1} V^*) \to \mathbb{P}(S^m V^*).$$

Alors

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\lambda \in \mu \otimes (1)} \mathcal{B}(\lambda) &= \mathrm{Hom}^{S_m}\Big(\bigoplus_{\lambda \in \mu \otimes (1)} [\lambda], \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^m V^*)}\Big) \\ &= \mathrm{Hom}^{S_m}(\mathrm{Ind}_{S_{m-1}}^{S_m}[\mu], \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^m V^*)}) = \mathrm{Hom}^{S_{m-1}}([\mu], \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^m V^*)}) \\ &= p_* \mathrm{Hom}^{S_{m-1}}([\mu], q_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^m V^*)}) = p_*(\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{B}(\mu)). \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\mathcal{B}(\mu) = \bigoplus_{n=0}^{m-2} \mathcal{O}(-n) \otimes M(\mu)_n$$

et aussi, pour $0 \leq n \leq m-2$:

$$p_*(\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O}(-n)) = \mathcal{B}(1,0;m-1,-n) = \mathcal{B}(1,n;m-1,0) \otimes \mathcal{O}(-n).$$

Mais ce dernier est égal à

$$(\mathcal{O}(-n) \otimes S^n V) \oplus (\mathcal{O}(-n-1) \otimes S^{(m-1,n+1)} V)$$

grâce à la proposition 2.8 (i). La formule annoncée s'en déduit aussitôt. $\square$

2.8 Les premières valeurs des $M(\lambda)$

À l'aide de 2.5 et de 2.7, on obtient les valeurs ci-dessous des $M(\lambda)$ pour $|\lambda| \leq 7$. Pour abréger, on pose $S^{(a,b)}V = (a,b)$.

$M(2) = (0)$, $M(1,1) = (1,1)$.

$M(3) = (0)$, $M(2,1) = (2,1)$, $M(1,1,1) = (3,3)$.

$M(4) = (0)$, $M(3,1) = (3,1)$, $M(2,2) = (2,2) + (4,4)$, $M(2,1,1) = (5,3)$,
$M(1,1,1,1) = (6,6)$.

$M(5) = (0)$, $M(4,1) = (4,1)$, $M(3,2) = (3,2) + (6,4)$,
$M(3,1,1) = (7,3) + (5,5)$, $M(2,2,1) = (6,4) + (8,7)$, $M(2,1,1,1) = (9,6)$,
$M(1,1,1,1,1) = (10,10)$.

$M(6) = (0)$, $M(5,1) = (5,1)$, $M(4,2) = (4,2) + (8,4) + (6,6)$,
$M(3,3) = (3,3) + (7,5) + (9,9)$, $M(4,1,1) = (9,3) + (7,5)$,
$M(3,2,1) = (8,4) + (7,5) + (11,7) + (10,8)$, $M(2,2,2) = (6,6) + (10,8) + (12,12)$,
$M(3,1,1,1) = (12,6) + (10,8)$, $M(2,2,1,1) = (11,7) + (9,9) + (13,11)$,
$M(2,1,1,1) = (14,10)$, $M(1,1,1,1,1,1) = (15,15)$.

$M(7) = (0)$, $M(6,1) = (6,1)$, $M(5,2) = (5,2) + (10,4) + (8,6)$,
$M(5,1,1) = (11,3) + (9,5) + (7,7)$, $M(4,3) = (4,3) + (9,5) + (8,6) + (7,7) + (12,9)$,
$M(4,2,1) = (10,4) + (9,5) + (8,6) + (14,7) + (13,8) + (12,9) + (11,10)$,
$M(3,3,1) = (9,5) + (7,7) + (13,8) + (12,9) + (11,10) + (16,12) + (14,14)$,
$M(4,1,1,1) = (19,9) + (17,12) + (16,13)$,
$M(3,2,2) = (7,7) + (9,5) + (11,10) + (12,9) + (13,8) + (14,14) + (16,12)$,
$M(3,2,1,1) = (11,10) + (12,9) + (13,8) + (14,7) + (15,13) + (16,12) + (17,11)$,

$M(2,2,2,1) = (12,9) + (14,14) + (15,13) + (16,12) + (18,17)$,
$M(3,1,1,1,1) = (14,14) + (16,12) + (18,10)$,
$M(2,2,1,1,1) = (15,13) + (17,11) + (19,16)$,
$M(2,1,1,1,1,1) = (20,15)$, $M(1,1,1,1,1,1,1) = (21,21)$.
Remarque. Dans tous ces exemples, les multiplicités des $\mathrm{GL}(V)$-modules $M(\lambda)$ sont au plus 1, mais ce résultat n'est pas vrai en général. En effet $M(a+1,1^b) = S^a(S^bV) \otimes (\wedge^2 V)^{b(b+1)/2}$ a des multiplicités arbitrairement grandes.

2.9 Une autre relation de récurrence pour les $M(\lambda)$

L'identité établie en 2.7, et la description des $M(\lambda)$ lorsque λ est une équerre (corollaire 2.7) ne suffisent pas à déterminer les $M(\lambda)$ si $|\lambda| \geq 8$. C'est pourquoi on va obtenir une autre relation de récurrence, plus compliquée, mais qui permet le calcul de tous les $M(\lambda)$.

Rappelons que le caractère d'un $\mathrm{GL}(V)$-module M (rationnel, de dimension finie) est la trace dans M d'un élément diagonalisable de $\mathrm{GL}(V)$ avec valeurs propres x et y. Ce caractère, noté $\operatorname{car} M$, est une fonction symétrique de x et y. On va exprimer $\operatorname{car} M(\lambda)$ en fonction des $\operatorname{car} M(\mu)$ avec $|\mu| < |\lambda|$. Pour tout entier $j \geq 0$, on note $\lambda/(j)$ l'ensemble des partitions de la forme $(\lambda_1 - j_1, \lambda_2 - j_2, \dots)$ avec $j_1 + j_2 + \cdots = j$ et $0 \leq j_\ell \leq \lambda_\ell - \lambda_{\ell+1}$ pour tout ℓ. On pose :

$$M(\lambda/(j)) := \bigoplus_{\mu \in \lambda/(j)} M(\mu).$$

Proposition 2.10 — *Soit λ une partition de m en au moins deux parts. On a :*

$$\operatorname{car} M(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} x^{m-j} y^j \prod_{i=1}^{j-1} (1 - x^{m-i} y^i) \sum_p y^{pj} \operatorname{car} M(\lambda/(j))_p.$$

Démonstration. On observe d'abord que

$$\operatorname{car} S^{n+1} V = x \operatorname{car} S^n V + y^{n+1}.$$

A l'aide de [Mac] 1.5, on en déduit que

$$\operatorname{car} S^\lambda(S^{n+1}V) = \sum_{j=0}^{m} x^{m-j} y^{(n+1)j} \operatorname{car} S^{\lambda/(j)}(S^n V).$$

On a donc :

$$\sum_{p=0}^{n+1} \operatorname{car} M(\lambda)_p \operatorname{car} S^{n+1-p}(S^m V)$$
$$= \sum_{j=0}^{m} x^{m-j} y^{(n+1)j} \sum_{p=0}^{n} \operatorname{car} M(\lambda/(j))_p \operatorname{car} S^{n-p}(S^{m-j} V).$$

En sommant ces identités pour tous les $n \geq 0$, et grâce au fait que

$$\sum_{n\geq 0} \operatorname{car} S^n(S^m V) = \prod_{i=0}^{m} (1 - x^{m-i}y^i)^{-1} ,$$

on obtient :

$$- \operatorname{car} M(\lambda)_0 + \operatorname{car} M(\lambda) \prod_{i=0}^{m} (1 - x^{m-i}y^i)^{-1}$$
$$= \sum_{j=0}^{m} x^{m-j}y^j \prod_{i=j}^{m} (1 - x^{m-i}y^i)^{-1} \sum_{p\geq 0} y^{pj} \operatorname{car} M(\lambda/(j))_p.$$

L'identité annoncée s'en déduit aussitôt. □

Exemple. Lorsque $\lambda = (1^m)$, l'ensemble $\lambda/(1)$ se réduit à (1^{m-1}), et $\lambda/(j)$ est vide pour tout $j \geq 2$. Il en résulte que

$$\operatorname{car} M(1^m) = x^{m-1}y \sum_{p\geq 0} y^p \operatorname{car} M(1^{m-1})_p.$$

Par récurrence sur p, on en déduit l'égalité

$$\operatorname{car} M(1^m) = (xy)^{m(m-1)/2}.$$

On retrouve ainsi le fait que $M(1^m)$ est isomorphe à $(\wedge^2 V)^{m(m-1)/2}$, voir 2.5.

3 Sur une conjecture de Foulkes

3.1 La conjecture de Foulkes-Howe

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie $d \geq 2$; soit $R = S^\bullet(V)$ l'algèbre symétrique de V. Alors $X = Proj(R) = \mathbb{P}(V^*)$ est un espace projectif de dimension $d-1$, et d'après la proposition 1.5, le m-ième produit symétrique $X^{(m)}$ s'identifie à l'image du morphisme « produit » $p : \mathbb{P}(V^*)^m \to \mathbb{P}(S^m V^*)$. Le groupe $\mathrm{GL}(V)$ opère dans X et dans $X^{(m)}$, ainsi que dans l'algèbre graduée

$$B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(X^{(m)}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^m V^*)}(n)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^m(S^n V)$$

et plus généralement dans le B-module gradué

$$B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r)) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S^{\lambda(1)}(S^{n+a(1)}V) \otimes \cdots \otimes S^{\lambda(r)}(S^{n+a(r)}V).$$

D'après 1.3, chaque B-module $B(\lambda(1),a(1);\ldots;\lambda(r),a(r))$ est de Cohen-Macaulay hors de l'idéal maximal homogène. De plus, chaque $B(\lambda)$ est de Cohen-Macaulay.

Puisque l'espace de degré 1 de B est S^mV, on a un homomorphisme canonique d'algèbres graduées

$$h_m : S^\bullet(S^mV) \to B$$

qui induit des applications $\mathrm{GL}(V)$-équivariantes

$$h_{m,n} : S^n(S^mV) \to S^m(S^nV).$$

Une conjecture de R. Howe [H] affirme que $h_{m,n}$ est injectif pour $n \leq m$, et surjectif pour $n \geq m$. Ceci précise une conjecture antérieure de H. O. Foulkes [F]. La conjecture de Howe est facile à vérifier pour $m = 2$; le cas de $m = 3$ est traité dans [W-Z]. En général, on sait qu'il existe un entier $n_0 = n_0(m,d)$ tel que $h_{m,n}$ est surjectif pour $n \geq n_0$; voir [Br1] 1.3. On va retrouver ce résultat et obtenir une valeur effective de n_0, en commençant par établir l'énoncé suivant.

Proposition 3.1 — *Pour toute partition λ de m, le $S^\bullet(S^mV)$-module gradué $B(\lambda)$ est engendré en degré au plus $(m-1)(d-1)$.*

Démonstration. On pose

$$C := \bigoplus_{n=0}^{\infty} (S^nV)^{\otimes m} \subset \bigoplus_{n_1,\ldots,n_m} S^{n_1}V \otimes \cdots \otimes S^{n_m}V = S^\bullet(V^m).$$

Avec les notations de 1.2, on a : $C = S^\bullet(V^m)^{T_m}$ et $B = C^{S_m}$. Plus généralement, on a : $B(\lambda) = \mathrm{Hom}^{S_m}([\lambda], C)$. Il suffit donc de montrer que le $S^\bullet(S^mV)$-module C est engendré en degré au plus $(m-1)(d-1)$.

Observons que $\mathit{Proj}(C) = \mathbb{P}(V^*)^m$ et que $\mathit{Proj}(S^\bullet(S^mV)) = \mathbb{P}(S^mV^*)$. Le morphisme $p : \mathbb{P}(V^*)^m \to \mathbb{P}(S^mV^*)$ est fini, et on a :

$$C = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(\mathbb{P}(V^*)^m, \mathcal{O}(n)^{\boxtimes m}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(\mathbb{P}(S^mV^*), (p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)^m})(n)).$$

Autrement dit, C est le module gradué sur $S^\bullet(S^mV)$ associé au faisceau cohérent $p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)^m}$ sur $\mathbb{P}(S^mV^*)$. Il en résulte que le $S^\bullet(S^mV)$-module gradué C est engendré en degré au plus r, lorsque r vérifie :

$$H^\ell(\mathbb{P}(S^mV^*), (p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)^m})(n-\ell)) = 0$$

pour $\ell \geq 1$ et $n \geq r$ (voir [E-G]). Mais on a :

$$H^\ell(\mathbb{P}(S^mV^*), (p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)^m})(n-\ell) = H^\ell(\mathbb{P}(V^*)^m, \mathcal{O}(n-\ell)^{\boxtimes m})$$

et ce dernier s'annule pour $\ell \geq 1$ et $n \geq (m-1)(d-1)$, d'après la formule de Künneth. $\square$

3.2 Un énoncé auxiliaire

On conserve les notations de 3.1, et on note C le conoyau de

$$h_m : S^\bullet(S^m V) \to B.$$

C'est un module gradué sur $S^\bullet(S^m V)$.

Proposition 3.2 — *Chaque élément de C_n est tué par $(v^m)^{n(m-1)} \in S^{n(m-1)}(S^m V)$, où $v \in V$ est arbitraire.*

Démonstration. Choisissons $v \in V$ non nul. Soit $(v_1, \dots, v_d)$ une base de V telle que $v_d = v$. On pose $x_i = v_i v^{-1}$ et $x = (x_1, \dots, x_{d-1})$. On note B_{v^m} l'espace des éléments de degré 0 dans le localisé $B[1/v^m]$, et on définit de même $S^\bullet(S^m V)_{v^m}$. Alors

$$\begin{aligned} B_{v^m} = \bigcup_{n \geq 0} S^m(S^n V)(v^m)^{-n} = S^m(\bigcup_{n\geq 0} (S^n V) v^{-n}) &= S^m k[x_1, \dots, x_{d-1}] \\ &= (k[x]^{\otimes m})^{S_m} = k(x(1), \dots, x(m)]^{S_m} \end{aligned}$$

où on pose $x = (x_1, \dots, x_{d-1})$ et $x(i) = (x(i)_1, \dots, x(i)_{d-1})$ pour $1 \leq i \leq m$; le groupe S_m opère dans les variables $x(i)_j$ par permutation des indices i. De plus, la filtration croissante de B_{v^m} par les $S^m(S^n V)(v^m)^{-n}$ s'identifie à la filtration de $k[x(1), \dots, x(m)]^{S_m}$ par le maximum des degrés partiels par rapport aux ensembles de variables $x(1), \dots, x(m)$.

On a de même

$$S^\bullet(S^m V) = \bigcup_{n\geq 0} S^n(S^m V)(v^m)^{-n} = S^\bullet(S^m V/kv^m) = S^\bullet(\bigoplus_{i=1}^m k[x]_i).$$

La filtration croissante de $S^\bullet(S^m V)$ par les $S^n(S^m V)(v^m)^{-n}$ s'identifie à celle de $S^\bullet(\bigoplus_{i=1}^m k[x]_i)$ définie par le degré de cette algèbre symétrique.

L'homomorphisme gradué h_m induit un homomorphisme d'algèbres filtrées

$$h_{m,v^m} : S^\bullet(\bigoplus_{i=1}^m k[x]_i) \to k[x(1), \dots, x(m)]^{S_m}.$$

Celui-ci est uniquement défini par l'application

$$\bigoplus_{i=1}^m k[x]_i \to k[x(1), \dots, x(m)]^{S_m}$$

qui envoie le monôme $x_1^{a_1} \cdots x_{d-1}^{a_{d-1}}$ de degré au plus m, sur le coefficient de $t_1^{a_1} \cdots t_{d-1}^{a_{d-1}}$ dans le développement de

$$\prod_{i=1}^m (1 + x(i)_1 t_1 + \cdots + x(i)_{d-1} t_{d-1}).$$

Ces coefficients sont les fonctions symétriques élémentaires de $x(1), \ldots, x(m)$; ils engendrent l'algèbre $k[x(1), \ldots, x(m)]$ d'après [G-K-Z]. L'homomorphisme h_{m,v^m} est donc surjectif.

De plus, si $f \in k[x(1), \ldots, x(m)]^{S_m}$ a tous ses degrés partiels majorés par n, alors f est de degré total au plus mn par rapport à l'ensemble des variables $x(1), \ldots, x(m)$. Il en résulte que f est un polynôme de degré au plus mn en les fonctions symétriques élémentaires. Autrement dit, h_{m,v^m} induit une surjection

$$S^{mn}(S^m V)(v^m)^{-mn} \to S^m(S^n V)(v^m)^{-n}.$$

Cela signifie que $(v^m)^{mn-n} C_n = 0$. □

Remarque. Lorsque $d = 2$, chaque ensemble $x(i)$ $(1 \leq i \leq m)$ consiste en une seule variable. On sait alors que tout $f \in k[x(1), \ldots, x(m)]^{S_m}$ de degré partiel n, est un polynôme de degré n en les fonctions symétriques élémentaires. De plus, ces dernières sont algébriquement indépendantes. Il en résulte que h_{m,v^m} est un isomorphisme, et donc que h_m est un isomorphisme. On retrouve ainsi la « loi de réciprocité de Hermite » (2.1 (ii)).

3.3 Un résultat partiel mais effectif

On conserve les notations de 3.1.

Théorème 3.3 — *Le morphisme*

$$h_{m,n} : S^n(S^m V) \to S^m(S^n V)$$

est surjectif lorsque

$$n \geq (m-1)(d-1)(mN + m - N)$$

où $d = \dim(V)$, et où N est le plus petit entier tel que $dN \geq \binom{m+d-1}{d-1}$.

Démonstration. On utilise les notations de 3.1 et de 3.2. Il s'agit de montrer que $C_n = 0$ si $n \geq (m-1)(d-1)(mN+m-N)$. D'après la proposition 3.1, le $S^\bullet(S^m V)$-module C_n est engendré en degré au plus $(m-1)(d-1)$. Il suffit donc de montrer que C_n est tué par $S^{n(m-1)(N+1)}(S^m V)$ pour tout $n \geq 0$. Pour cela, on utilise la solution récente du problème de Waring pour les polynômes, voir [I] Theorem 2. Posons

$$g(d,m) = \begin{cases} N & \text{si } m > 2 \text{ et } (d,m) \notin \{(3,4),(4,4),(5,3),(5,4)\} \\ N+1 & \text{si } (d,m) \in \{(3,4),(4,4),(5,3),(5,4)\} \\ d & \text{si } m = 2. \end{cases}$$

Pour tout f dans un ouvert de Zariski non vide $U \subset S^m V$, il existe $v_1, \ldots, v_{g(d,m)}$ dans V tels que

$$f = \sum_{i=1}^{g(d,m)} v_i^m.$$

D'après la proposition 3.2, chaque $(v_i^m)^{n(m-1)}$ tue C_n. On en déduit que C_n est tué par $f^{n(m-1)g(d,m)}$ pour tout $f \in U$, et donc pour tout $f \in S^m V$. Puisque chaque élément de $S^{n(m-1)g(d,m)}(S^m V)$ est somme de puissances d'éléments de $S^m V$, on a :

$$S^{n(m-1)g(d,m)} C_n = 0$$

ce qui implique notre assertion. □

Références

[Bo] J.-F. Boutot : *Singularités rationnelles et quotients par les groupes réductifs*, Invent. math. **88** (1987), 65-68.

[Br1] M. Brion : *Stable properties of plethysm : on two conjectures of Foulkes*, Manuscripta Math. **80** (1993), 347-371.

[Br2] ———— : *Sur les modules de covariants*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **26** (1993), 1-21.

[D-K] I. Dolgachev et M. Kapranov : *Arrangements of hyperplanes and vector bundles on* $\mathbb{P}^n$, Duke Math. J. **71** (1993), 633-664.

[E-G] D. Eisenbud et S. Goto : *Linear free resolutions and minimal multiplicities*, J. Algebra **88** (1984), 89-133.

[F] H. Foulkes : *Concomitants of the quintic and of the sextic up to degree four in the coefficients of the ground form*, J. London Math. Soc. **25** (1950), 205-209.

[G-K-Z] I. Gelfand, M. Kapranov, A. Zelevinsky : *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*, Birkhäuser, Boston 1994.

[G-P] A. Garsia et C. Procesi : *On certain graded* S_n*-modules and the q-Kostka polynomials*, Adv. Math. **94** (1992), 82-138.

[G-W] S. Goto et K. Watanabe : *On graded rings I*, J. Math. Soc. Japan **30** (1978), 179-213.

[H] R. Howe : $(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_m)$*-duality and symmetric plethysm*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **97** (1987), 85-109.

[I] A. Iarrobino : *Inverse system of a symbolic power II : the Waring problem for forms*, J. Algebra **174** (1995), 1091-1110.

[J-K] G. James et A. Kerber : *The representation theory of the symmetric group*, Addison Wesley, Reading 1981.

[K-K-V] F. Knop, H. Kraft et T. Vust : *The Picard group of a G-variety*, dans : Algebraic transformation groups and invariant theory, 77-88, Birkhäuser, Basel 1989.

[Mac] I. G. Macdonald : *Symmetric functions and Hall polynomials*, Clarendon Press, Oxford 1995.

[Man] L. Manivel : *Gaussian Maps and Plethysm*, *in* Proceedings of the EUROPROJ Conference (Catania 1993), Marcel Dekker, to appear.

[Mu] F. Murnaghan : *The unitary and rotation groups*, Spartan Books, Washington 1962.

[P-V] V. L. Popov et E. B. Vinberg : *Invariant theory*, Encyclopaedia Math. Sci. **55**, 123-284, Springer-Verlag, Berlin 1994.

[Sc] R. Schwarzenberger : *Vector bundles on the projective plane*, Proc. London Math. Soc. **11** (1961), 623-640.

[Se] J.-P. Serre : *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris 1971.

[V] M. Van den Bergh : *Cohen-Macaulayness of modules of covariants*, Invent. math. **106** (1991), 389-410.

[W-Z] J. Weyman : *Remarks on the variety of decomposable polynomials*, working notes based in part on joint work with A. Zelevinsky, Boston, 1994.