# Le mouvement brownien

## Un essai sur les origines de la théorie mathématique

Jean-Pierre Kahane*

**Résumé**

Vue de loin, l'histoire du mouvement brownien se divise en deux périodes : entre 1900 et 1950, une évolution lente, ponctuée par les travaux d'Einstein, Wiener et Lévy ; depuis 1950, une efflorescence indescriptible. En l'examinant de près, on repère différents thèmes et sources présents dès l'origine. On s'attache ici surtout à la première période, en dégageant cinq sources principales, et en survolant les thèmes correspondants au cours de la seconde période : 1) Einstein, Wiener et le processus de Wiener – 2) Langevin, Doob et les équations différentielles stochastiques – 3) Borel, Steinhaus et les séries de fonctions aléatoires – 4) Bachelier, Kolmogorov, les processus et les diffusions – 5) Pearson, Pólya et les marches au hasard.

**Abstract**

The paper is a historical survey of the mathematical theory of Brownian motion, with a particular emphasis on the period 1900–1950, and only short allusions to recent developments. It is organized along five lines: 1) Einstein, Wiener, and the Wiener process – 2) Langevin, Doob, and stochastic differential equations – 3) Borel, Steinhaus, and random series of functions – 4) Bachelier, Kolmogorov, processes and diffusions – 5) Pearson, Pólya, and random walks.

Si un mathématicien regarde de loin l'histoire du mouvement brownien au cours de ce siècle, il y verra sans doute deux périodes : entre 1900 et 1950,

---

AMS 1991 *Mathematics Subject Classification*: 01A60, 60J65

*Mathématiques; Bât. 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex.

une évolution lente et linéaire, repérable par les pères fondateurs que furent Albert Einstein, Norbert Wiener, Paul Lévy ; et depuis 1950, une efflorescence difficile à maîtriser, avec la poursuite des propriétés fines qui font du mouvement brownien l'un des prototypes de la fractalité, le mouvement brownien sur les variétés, le mouvement brownien à plusieurs paramètres, le mouvement brownien à la source ou au carrefour des études sur les processus gaussiens, les processus à accroissements indépendants, les processus de Markov avec leur lien à la théorie du potentiel, les martingales, les équations différentielles stochastiques, les intégrales de chemins, les superprocessus qui décrivent des particules qui se scindent au cours du temps, etc... La littérature sur le mouvement brownien est facile à inventorier et même à lire dans la première période, et difficile à maîtriser dans la seconde ; Daniel Revuz et Marc Yor, dans leur livre *Continuous martingales and Brownian motion* [Revuz et Yor 1991] font état d'une littérature énorme, dont la bibliographie qu'ils donnent, avec 500 titres, ne fournit qu'une faible idée. Il y a heureusement, sur différents aspects, beaucoup de bons livres qui permettent d'accéder dans cette forêt.

La théorie mathématique du mouvement brownien, mise en place par Norbert Wiener, est à la fois si simple au départ, si belle et si riche qu'elle a conquis une large audience chez les mathématiciens et aussi chez les physiciens. Mais il faut préciser dès maintenant que ce n'est qu'une des idéalisations mathématiques du mouvement réel de particules en suspension dans un liquide, tel qu'il fut observé et décrit par le botaniste anglais Richard Brown en 1828, et, à sa suite, par plusieurs physiciens expérimentateurs au XIX$^{\text{e}}$ siècle. Ce n'est même pas la meilleure idéalisation pour l'application de la théorie d'Einstein à la détermination du nombre d'Avogadro. Wiener, d'ailleurs, fut toujours prudent à cet égard.

J'ai choisi de parler surtout de la première période. Elle est beaucoup moins linéaire qu'il y paraît d'abord. Einstein n'est pas la source unique, ni Wiener le seul canal. Il y a des affluents divers, dont on retrouve parfois la trace dans l'efflorescence contemporaine. J'ai identifié cinq cheminements, que je m'efforcerai de suivre en repérant les croisements et les prolongements dans la période contemporaine. Schématiquement, chaque voie est signalée par un initiateur, un formalisateur et un sujet. Le plan de l'exposé est donc ainsi fait :

1. Einstein, Wiener et le processus de Wiener

1 bis. Définitions et commentaires

2. Langevin, Doob et les équations différentielles stochastiques
3. Borel, Steinhaus et les séries de fonctions aléatoires
4. Bachelier, Kolmogorov, les processus et les diffusions
5. Pearson, Pólya et les marches au hasard

Un appendice contiendra mes excuses pour tout ce que je n'aurai pas dit.

# 1. Einstein, Wiener et le processus de Wiener

En même temps que Smoluchowski, sur lequel je reviendrai, Einstein publie dans *Annalen der Physik* trois articles fondateurs pour la théorie du mouvement brownien, en 1905 et 1906. Je rappelle que les *Annalen der Physik* de 1905 contiennent également les articles d'Einstein sur la relativité et sur l'effet photoélectrique.

Voici le titre et la conclusion du premier article :

> « Ueber die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme gefordete Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen »

(Sur le mouvement, exigé par la théorie cinétique moléculaire de la chaleur, de particules en suspension dans un liquide au repos)

> « Möge es bald einem Forscher gelingen, die hier aufgeworfene, für die Theorie der Wärme wichtige Frage zu entscheiden ! »

(Souhaitons que bientôt un chercheur parvienne à trancher la question ici posée, si importante pour la théorie de la chaleur !)

La question posée est celle de l'*existence* du mouvement indiqué par le titre. Einstein en fait la théorie sous l'hypothèse de l'agitation thermique moléculaire, sans connaître les observations faites sur le mouvement brownien.

Entre le premier et le second article il prend connaissance du mouvement brownien. La question de l'existence est donc réglée. Il montre alors comment des mesures faites sur le mouvement des particules peuvent conduire à une nouvelle détermination des dimensions moléculaires, ce que dit bien le titre du second article : « Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen ».

Enfin le troisième article, « Zur Theorie der Brownschen Bewegung », donne une théorie générale, tenant compte de la gravité, et incluant le mouvement brownien de rotation. Einstein a donné ensuite un exposé synthétique sous la forme d'un petit livre, publié en 1922, et disponible depuis 1926 en traduction anglaise.

La formule principale est

$$\overline{(\Delta x)^2} = \frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi\mu a}\tau$$

où $R$ est la constante des gaz parfaits, $T$ la température absolue, $N$ le nombre d'Avogadro ($\sim 6 \times 10^{23}$), $\mu$ la viscosité, $a$ le rayon de la particule, supposée sphérique, et $\tau$ le temps correspondant au déplacement $\Delta x$. Quant à $\overline{(\Delta x)^2}$, c'est une moyenne, pour un intervalle de temps donné $\tau$, du carré des déplacements, dans une direction donnée, d'un grand nombre de particules. Mais c'est aussi la moyenne, pour une suite d'intervalles de temps consécutifs, du carré des déplacements dans une direction d'une particule individualisée.

Le programme d'Einstein fut réalisé par Jean Perrin, et publié en 1909 dans les *Annales de Chimie et de Physique* sous le titre : « Mouvement brownien et réalité moléculaire. » Perrin obtient par ce moyen $N \simeq 7 \times 10^{23}$, ce qui confirme les estimations obtenues par d'autres procédés. Ce travail devait lui valoir le prix Nobel en 1926. Dans son article de 1909 et dans son livre de 1912 *Les atomes,* Perrin décrit éloquemment l'extrême irrégularité des trajectoires et le fait qu'apparemment elles n'ont de tangente en aucun point. Sa description, dans *Les atomes,* se conclut par une phrase que Wiener se plaisait à citer :

> « C'est un cas où il est vraiment naturel de penser à ces fonctions continues sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées, et que l'on regardait à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque l'expérience peut les suggérer. »

Dans la théorie d'Einstein il apparaît aussi que, pour un $\tau$ donné, les déplacements $\Delta x$ ont une distribution gaussienne, et que cette distribution, fonction du temps et de l'espace, satisfait à l'équation de diffusion de la chaleur. Les mathématiciens, Wiener le premier, ont retenu de l'équation d'Einstein la proportionnalité de $\overline{(\Delta x)^2}$ et de $\tau = \Delta t$, et le fait que les $\Delta x$ sont gaussiens. L'équation, normalisée, s'écrit alors

$$\overline{(\Delta x)^2} = \Delta t$$

ou, en explicitant les valeurs du temps, et en utilisant le symbole $E(\cdot)$ de l'espérance au lieu de surligner pour la valeur moyenne,

$$E\left((X_t - X_s)^2\right) = |t - s|.$$

Aujourd'hui (disons, depuis Wiener, Steinhaus et Kolmogorov) l'espérance nous apparaît comme une intégrale sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $X_t$ signifie $\omega \to X_t(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$, et l'équation d'Einstein signifie que, dans l'espace $L^2(\Omega)$, le point $X_t$ décrit ce que I. Schoenberg a appelé plus tard une hélice, c'est-à-dire une courbe qui glisse isométriquement sur elle-même quand on translate le temps. C'est une très jolie hélice, où le carré de la distance de deux points est la distance des paramètres et où par conséquent, d'après le théorème de Pythagore, trois points quelconques sont toujours les sommets d'un triangle rectangle. Selon Einstein, le processus est gaussien et centré, c'est-à-dire que l'hélice se trouve dans un sous-espace $\mathcal{H}$ de $L^2(\Omega)$ constitué de variables gaussiennes centrées (ce qui signifie $E(\exp uX) = \exp\left(\frac{u^2}{2}EX^2\right)$), et dans un tel espace l'orthogonalité équivaut à l'indépendance. Conformément au sens physique, les accroissements de $X_t$ sur des intervalles disjoints de temps sont des v. a. indépendantes ; on dit que $t \to X_t$ est un processus à accroissements indépendants. Au stade où nous laisse Einstein, seule la réalité physique du mouvement brownien fonde l'existence de l'*hélice brownienne* que je viens de décrire.

Wiener entre en scène bien plus tard, en 1923, avec un article fondamental intitulé « Differential space ». Il connaît la théorie d'Einstein depuis sa visite à Cambridge en 1913 ; il était venu, à 19 ans, étudier la logique avec Bertrand Russell, mais Russell lui avait suggéré d'aller écouter Hardy et de lire Einstein. Dans l'intervalle, il a étudié l'intégrale de Daniell, et s'est intéressé à l'intégration dans des espaces de fonctions. Son idée de base est de construire sur l'espace des fonctions continues réelles sur $\mathbb{R}^+$, $C(\mathbb{R}^+)$, une mesure de probabilité telle que les accroissements sur des intervalles de temps disjoints aient la distribution gaussienne prévue par la théorie d'Einstein. Ces accroissements sont des différences, d'où le titre de *Differential space*.

La mesure ainsi construite s'appelle justement *mesure de Wiener* et l'intégrale par rapport à cette mesure *moyenne de Wiener*. Une fois effectuée la construction, Wiener intègre des fonctionnelles diverses. Il vérifie qu'en tout point $t$ donné la probabilité de dérivabilité en $t$ est nulle (ce qui, contrairement à certains commentaires, est encore loin de prouver que la non-dérivabilité partout est presque sûre), puis il établit que la probabilité de vérifier une condition de Hölder d'ordre $\frac{1}{2} - \epsilon$ sur un intervalle donné est égale à 1. Ainsi, la mesure de Wiener est concentrée sur des fonctions höldériennes. Enfin, Wiener donne la loi des coefficients de Fourier. Sur l'intervalle $(0, 2\pi)$, cela permet de développer une fonction nulle en 0 sous la forme

$$X_t = \xi_0 \frac{t}{\sqrt{2\pi}} + \sum_1^\infty \frac{\xi_n(1-\cos nt) + \xi_n' \sin nt}{n\sqrt{\pi}}$$

où $\xi_0$, $\xi_1$, $\xi_1', \cdots$ est une suite de variables gaussiennes normalisées ($E\xi = 0$, $E\xi^2 = 1$) et indépendantes, ce que j'appellerai un échantillon normal.

C'est la *série de Fourier-Wiener*, encore implicite en 1923, explicitée à l'occasion de la collaboration avec Paley et Zygmund en 1933.

Dans une étude écrite en 1964 sur Wiener et l'intégration dans les espaces fonctionnels, Marc Kac met en évidence la profonde originalité de Wiener et, en contre partie, la difficulté qu'eurent les mathématiciens de l'époque à comprendre sa démarche. « Only Paul Lévy in France, who had himself been thinking along similar lines, fully appreciated their significance. »

L'étape suivante est en effet l'œuvre de Paul Lévy sur le mouvement brownien, qui s'étend de 1934 à 1966 et comprend le premier grand ouvrage sur la question, *Processus stochastiques et mouvement brownien,* en 1948. Nous allons à plusieurs reprises rencontrer des théorèmes de Paul Lévy, mais je serai loin de rendre compte de toute la richesse de son apport.

## 1.bis Définitions et commentaires

J'ai parlé au départ de la simplicité du processus de Wiener. Cette simplicité n'est apparue qu'au cours du temps. La présentation qu'en fait Wiener dans son livre avec Paley, *Fourier transforms in the complex domain* [Paley et Wiener 1934] est bien plus accessible que celle de « Differential space », et j'y reviendrai. Voici comment se présente la chose aujourd'hui.

Il s'agit d'abord de construire une hélice ayant la géométrie voulue dans un espace de Hilbert ; dans $L^2(\mathbb{R})$,

$$t \ \to\ 1_{[0,t]} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

fait l'affaire ($[0,t]$ désignant l'intervalle joignant 0 et $t$). Soit $W$ une isométrie linéaire de $L^2(\mathbb{R})$ sur un espace de Hilbert gaussien, $\mathcal{H}$, et

$$X_t = W(1_{[0,t]}).$$

Alors $X_t$ décrit une hélice brownienne. Soit $(u_n)$ une base de $L^2(\mathbb{R})$, et $(\xi_n)$ son image dans $\mathcal{H}$ par $W$ ; c'est un échantillon normal. Dans $L^2(\mathbb{R})$ on peut décomposer $1_{[0,t]}$ suivant la base $(u_n)$ :

$$1_{[0,t]} = \sum a_n(t) u_n \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R})$$

donc

$$X_t = \sum a_n(t)\xi_n \quad \text{dans } \mathcal{H}.$$

Cela donne une version explicite du processus de Wiener sous la forme

$$X_t(\omega) = \sum a_n(t)\xi_n(\omega)$$

et réduit son étude à celle d'une certaine série de fonctions aléatoires. Pratiquement, on se borne souvent à étudier le mouvement brownien sur $\mathbb{R}^+$

ou sur l'intervalle $[0,1]$, en supposant toujours $X_0 = 0$. Alors $(u_n)$ désigne une base dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ ou $L^2([0,1])$. En choisissant la base trigonométrique $(1, \sqrt{2}\cos 2\pi t, \sqrt{2}\sin 2\pi t, \cdots)$ dans $L^2([0,1])$, on obtient la série de Fourier-Wiener. En choisissant la base de Haar, les $a_n(t)$ sont des fonctions triangles portées par des intervalles dyadiques et l'étude de la série est assez facile.

L'opérateur $W$ peut se définir sur $L^2(E)$ pour tout espace mesuré $E$. C'est la définition mathématique du *bruit blanc* sur $E$ [Kakutani 1961]. Etant donné $f \in L^2(E)$, on peut écrire

$$W(f) = \int f\, dW.$$

C'est l'*intégrale de Wiener* sur $E$. Avec cette notation, il est naturel d'écrire $W_t$ pour le processus de Wiener sur $\mathbb{R}$. Mais il est aussi intéressant de considérer le bruit blanc sur $(\mathbb{R}^d, \mu)$, où $\mu$ est une mesure tempérée ; en se restreignant aux $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, le bruit blanc s'identifie alors à une distribution tempérée aléatoire sur $\mathbb{R}^d$. Si $\mu$ est une probabilité, on peut se représenter $W$ comme une limite de mesures discrètes aléatoires de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_1^N \pm \delta_{X_n}$$

où les $X_n$ sont des v. a. dans $\mathbb{R}^d$ indépendantes ayant toutes $\mu$ pour distribution, et les $\pm$ sont choisis au hasard selon la probabilité naturelle, ou aussi bien de mesures de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_1^N (\delta_{X_n} - \mu).$$

La rapidité de la convergence de ces séries vers $W$, testée sur une classe convenable de fonctions $f$, par exemple les fonctions indicatrices de produits d'intervalles, est l'un des problèmes actuels de la statistique.

Il y a d'autres hélices dans $\mathcal{H}$ que l'hélice brownienne, et elles ont toutes des interprétations probabilistes intéressantes. Voici quelques exemples, introduits par I. Schoenberg et J. von Neumann vers 1940. Il sera commode de prendre ici pour $L^2$ et $\mathcal{H}$ des espaces de Hilbert complexes.

Soit $\mu$ une mesure positive sur $\mathbb{R}$ telle que $\int |\sin ut|^2 \mu(du) < \infty$. Alors $t \to e^{iut} - 1$ définit une hélice dans $L^2(\mathbb{R}, \mu(du))$ ; en effet,

$$\| (e^{iut} - 1) - (e^{ius} - 1) \|^2_{L^2(\mathbb{R},\mu)} = \psi(t-s)$$

avec

$$\psi(t) = \int |e^{iut} - 1|^2 \mu(du).$$

C'est la forme générale des « fonctions d'hélice » sur $\mathbb{R}$ ; on les appelle aussi, suivant A. Beurling, fonctions définies négatives ou fonctions de type négatif. En choisissant $\mu$ convenablement, on obtient $\psi(t) = |t|^\alpha$, $0 < \alpha < 2$. Par isométrie de $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ sur $\mathcal{H}$, ici complexifié, on a un processus $(X_t)$ tel que $X_0 = 0$ et

$$\| X_t - X_s \|_{\mathcal{H}}^2 = |t - s|^\alpha.$$

Pour $\alpha = 1$, on retrouve le mouvement brownien. Pour les autres $\alpha$, on dit que $(X_t)$ est un mouvement brownien fractionnaire.

Au lieu de $\mathbb{R}$ comme espace des paramètres, on peut partir de n'importe quel groupe abélien localement compact $G$ ; une hélice est définie par une application de $G$ dans un espace de Hilbert telle que le carré de la distance de deux points de l'hélice soit une fonction (la fonction d'hélice) de la différence des paramètres.

Prenons $G = \mathbb{T}$ et $\ell^2(\mathbb{Z}, \mu_n)$ pour espace de Hilbert, où $\mu_n$ est une suite positive telle que $\sum \mu_n \sin^2 nt < \infty$ pour tout $t$. Alors $t \to e^{2\pi int}$ définit une hélice dont la fonction d'hélice est

$$\psi(t) = \sum \mu_n |e^{2\pi int} - 1|^2.$$

Par isométrie de $\ell^2(\mathbb{Z}, \mu_n)$ dans $\mathcal{H}$, on obtient la forme générale d'un processus gaussien stationnaire 1-périodique, et son expression sous forme de série de Fourier aléatoire

$$X_t = \sum \sqrt{\mu_n}\, \zeta_n(\omega) e^{2\pi int}$$

$(\zeta_n)$ étant ici, par commodité, un échantillon normal complexe.

Prenons enfin $G = \mathbb{R}^d$, $L^2(\mathbb{R}^d, \mu)$ comme espace de Hilbert, et

$$t \to e^{iut} - 1 \left(\in L^2(\mathbb{R}^d, \mu(du))\right)$$

pour paramétrage d'hélice ($u \cdot t = u_1 t_1 + u_2 t_2 + \cdots + u_d t_d$) ; la fonction d'hélice est, comme plus haut,

$$\psi(t) = \int |e^{iu\cdot t} - 1|^2 \mu(du).$$

On peut choisir $\psi(t) = |t|$, distance euclidienne : on obtient le brownien à $d$ paramètres de Paul Lévy. Pour $\psi(t) = |t|^\alpha$, $0 < \alpha < 2$, c'est le brownien fractionnaire d'indice $\alpha$ à $d$ paramètres.

Tous ces processus ont été bien étudiés et sont faciles à simuler. Les derniers, par exemple, ont été utilisés graphiquement par Benoît Mandelbrot pour produire des reliefs artificiels.

Un problème théorique important est de déterminer, en fonction de la géométrie de l'hélice, s'il existe ou non des versions du processus continues presque sûrement. Il a été résolu par R. Dudley [1967] et X. Fernique [1975], et leur solution a servi de base aux travaux ultérieurs de Michael Marcus et de Gilles Pisier, dont je parlerai ensuite.

Plus généralement, étant donné un ensemble $E$ dans $\mathcal{H}$, espace de Hilbert gaussien, existe-t-il ou non une version p. s. continue du processus correspondant ? Le paramétrage de $E$ n'a plus d'importance, seule sa géométrie intervient. Le problème est attribué à Kolmogorov, et il semblait inaccessible dans sa généralité quand Michel Talagrand, en 1990, lui a donné une solution facile à formuler et immédiatement célèbre.

Le processus de Wiener a deux faces. D'un côté c'est un processus gaussien ; c'est la face que nous venons de parcourir à grandes enjambées. De l'autre c'est un processus à accroissements indépendants et stationnaires. Cela veut dire que la loi des accroissements $X_t - X_s$ ne dépend que de $t-s$, et que les accroissements $X_{t_1} - X_{s_1}$, $X_{t_2} - X_{s_2}$, $X_{t_3} - X_{s_3}$, etc... sont indépendants quand les intervalles ouverts $(s_1, t_1)$, $(s_2, t_2)$, $(s_3, t_3)$ etc... sont disjoints. En supposant $X_0 = 0$, la loi du processus est donc bien définie par celle des $X_t$ $(t \in \mathbb{R}^+)$, donc par leur fonction caractéristique, qu'on voit facilement être de la forme
$$E\left(e^{iuX_t}\right) = e^{-t\psi(u)}.$$
Le processus de Wiener correspond à $\psi(u) = \frac{u^2}{2}$. La fonction $\psi$ la plus générale est donnée par la formule de Lévy-Khintchine
$$\psi(u) = au + b\frac{u^2}{2} + \int (e^{iuy} - 1) d\nu_1(y) + \int (e^{iuy} - 1 - iuy) d\nu_2(y)$$
dont les quatre termes font apparaître la dérive déterministe (drift), le processus de Wiener, des processus de Poisson et des processus de Poisson avec dérive. Le livre de Paul Lévy sur l'addition des variables aléatoires [Lévy 1937] en fait une présentation très parlante. Curieusement, dans le cas réel, les fonctions $\psi$ qui apparaissent ici sont les mêmes que dans le cas gaussien (où $\psi(t) = t^2$ correspond à un processus dégénéré) ; ainsi, elles ont été introduites et découvertes indépendamment, pour des sujets différents, par Lévy et Khintchine, par von Neumann et Schoenberg [1941], et par Beurling et Deny [1959].

Le cas $\psi(u) = C\left(\frac{u}{|u|}\right)|u|^\alpha$, $0 < \alpha < 2$, a beaucoup d'analogies et de liens avec le processus de Wiener ; les processus correspondants ont été soigneusement étudiés par Lévy et on les appelle processus de Lévy stables d'indice $\alpha$ ; leurs versions sont p. s. discontinues. Lorsque la mesure $\nu_1$ est portée par

$\mathbb{R}^+$ et que $a = b = 0$, la mesure $\nu_2$ étant nulle, le processus est croissant. Le processus de Lévy croissant d'indice $\frac{1}{2}$ joue un rôle essentiel dans la théorie du mouvement brownien ; l'adhérence de l'ensemble de ses valeurs a même loi que l'ensemble des zéros du brownien. Dans son livre de 1948, Paul Lévy établit ce fait et part de là pour donner une nouvelle et très intéressante construction du mouvement brownien : on met en place l'ensemble des zéros, puis, sur chaque intervalle contigu, une *excursion brownienne* qui part de 0 au début de l'intervalle et y revient à la fin ; si on les normalise en les ramenant à un intervalle de temps unité, ces excursions ont toutes la même loi, elles sont indépendantes entre elles, et indépendantes de l'ensemble des zéros.

## 2. Langevin, Doob et les équations différentielles stochastiques

A le même époque qu'Einstein, en 1906, Marian Smoluchowski publiait, dans le *Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie* et dans *Annalen der Physik,* une théorie du mouvement brownien tout à fait analogue [Smoluchowski 1906a,b]. La seule différence était un facteur $\frac{64}{27}$ dans l'expression de $\overline{(\Delta x)^2}$. En même temps que Jean Perrin en France exploitait la formule d'Einstein, le physicien suédois Theodor Svedberg, futur prix Nobel lui aussi (1926), partait de la formule de Smoluchowski et croyait la valider [Svedberg 1907].

En 1908, Paul Langevin publie une courte note aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences.* Il dit d'abord que l'approche de Smoluchowski, rectification faite, mène à la formule d'Einstein. Puis, en tout petits caractères, il expose lumineusement, suivant sa propre approche, l'ensemble de la théorie. Comme peu de mathématiciens connaissent cette présentation, la voici, en détail.

D'abord, contrairement à l'idéalisation que nous venons de voir, les particules browniennes ont une vitesse, soit, dans la direction $0x$,

$$u = \frac{dx}{dt}.$$

Si leur masse est $m$, leur énergie moyenne est $\frac{1}{2}m\overline{u^2}$. Selon l'hypothèse fondamentale de la mécanique statistique cette énergie moyenne est égale à l'énergie cinétique moyenne d'une molécule, soit $\frac{RT}{2N}$ :

$$m\overline{u^2} = \frac{RT}{N}.$$

Pour une particule sphérique de rayon $a$ et masse $m$, dans un liquide de viscosité $\mu$, l'équation du mouvement est a priori

$$m\frac{du}{dt} = -6\pi a\mu u \ ;$$

la résistance visqueuse arrête le mouvement en un temps très court. Mais il y a des fluctuations dans les chocs moléculaires, qui entretiennent le mouvement. L'équation que propose Langevin est donc

$$\text{(L)} \qquad m\frac{du}{dt} = -6\pi a\mu u + X,$$

en ajoutant que « sur la force complémentaire $X$ nous savons qu'elle est indifféremment positive et négative, et sa grandeur est telle qu'elle maintient l'agitation de la particule. »

De l'équation (L) Langevin tire

$$m\frac{d(xu)}{dt} = mu^2 - 6\pi a\mu xu + xX$$

puis, en prenant les valeurs moyennes et en admettant que $\overline{xX} = 0$,

$$m\frac{d\overline{xu}}{dt} = \frac{RT}{N} - 6a\mu\overline{xu}$$

ce qui donne

$$2\overline{xu}\left(= \frac{d\overline{x^2}}{dt}\right) = \frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi a\mu} + C\exp\left(-\frac{6\pi a\mu}{m}t\right)$$

et, compte tenu des valeurs numériques, la dernière exponentielle est négligeable pour $t \gg 10^{-8}$ sec. ; au bout de ce temps, le régime est pratiquement permanent. Donc, pour $\tau \gg 10^{-8}$ sec.,

$$\overline{x_{t+\tau}^2} - \overline{x_t^2} = \frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi a\mu}\tau.$$

Sous l'une des deux hypothèses, d'accroissements orthogonaux ou d'accroissements stationnaires, on obtient

$$\overline{(x_{t+\tau} - x_t)^2} = \frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi a\mu}\tau,$$

la formule d'Einstein.

Physiquement, la vitesse des particules existe, mais, pour les $\tau$ observables, le mouvement correspond au modèle d'Einstein.

Mathématiquement, il restait à définir une fonction $u(t,\omega)$ et un $X(\omega)$ vérifiant (L).

D'autres physiciens que Langevin se sont intéressés après lui, mais indépendamment semble-t-il, à la distribution des vitesses du mouvement brownien : c'est le cas de Fokker en 1914 et Planck en 1917, puis de G. E. Uhlenbeck et L. S. Ornstein en 1930, qui ont donné respectivement leurs nom à l'équation de Fokker-Planck et au processus d'Ornstein-Uhlenbeck (cf. le livre de N. Wax [1954]). D'autres travaux de physique théorique ont été menés par Francis Perrin, le fils de Jean Perrin, sur le mouvement brownien de rotation [Perrin 1928] et, en suivant l'approche de Langevin, sur le mouvement brownien d'un ellipsoïde [Perrin 1934-36].

La première théorie mathématique de l'équation de Langevin (L) a été donnée par J. L. Doob [1942]. C'est l'un des actes de naissance des équations différentielles stochastiques (l'autre, la même année, vient de K. Itô [1942]). Voici le programme de Doob : « a stochastic differential equation will be introduced in a rigorous way to give a precise meaning to the Langevin differential equation for the velocity function $\frac{dx(s)}{ds}$. »

L'idée de Doob est de prendre pour $X$ le bruit blanc. L'équation de Langevin s'écrit alors

$$dU = -\lambda U + dW,$$

$W$ étant le processus de Wiener, soit

$$U(t)e^{\lambda t} = \int^t e^{\lambda s} dW(s)$$

et l'intégrale de Wiener au second membre donne un autre processus de Wiener avec changement de temps, soit

$$U(t)e^{\lambda t} = \frac{1}{2\lambda} W_1(e^{2\lambda t}) + C^{te}.$$

En choisissant $\lambda = \frac{1}{2}$ et la constante nulle, on a

$$U(t) = e^{-\frac{t}{2}} W_1(e^t)$$

où $W_1$ est un processus de Wiener. On voit facilement que $U(t)$ est un processus gaussien stationnaire ; les mathématiciens l'utilisent souvent sous le nom de processus d'Ornstein-Uhlenbeck comme une sorte de cousin du mouvement brownien. Par exemple, le fait que le changement de $t$ en $-t$ conserve la loi du processus d'Ornstein-Uhlenbeck signifie, pour le processus de Wiener, que $\frac{1}{\sqrt{t}}W(t)$ et $\sqrt{t}\,W(\frac{1}{t})$ ont la même loi, façon de transporter à l'origine ce qu'on sait du comportement à l'infini. Mais l'origine physique est bien différente : $W(t)$ idéalise la trajectoire d'une particule brownienne et $U(t)$ sa vitesse, et les deux idéalisations sont incompatibles.

Il y aurait pour $X$ bien d'autres choix. Si par exemple on prend pour $X$ un processus d'Ornstein-Uhlenbeck $U_0$, l'équation de Langevin prend la forme

$$\frac{dU_1}{dt} = -\lambda U_1 + U_0$$

et elle admet une solution $U_1$ de classe $C^1$. En itérant, on peut obtenir des modèles de mouvement brownien de classe $C^k$ et même de classe $C^\infty$.

On pourrait aussi renoncer à un modèle gaussien, en prenant pour $X$ une distribution (au sens de Schwartz) aléatoire soumise à la seule condition $E(xX) = 0$. Un modèle poissonien serait sans doute plus près de la réalité physique.

Des équations du type de Langevin se trouvent maintenant un peu partout en physique et en mathématiques. Voici, par exemple, la *dynamique de Langevin* telle qu'elle apparaît dans les méthodes de détermination de minimum absolu pour une fonction différentiable $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (on doit se représenter $k$ comme très grand, et c'est une question d'analyse numérique importante et difficile). Une méthode de descente ordinaire ferait tomber dans un trou local. La méthode, empruntée aux chimistes et dite de *recuit simulé* (*simulated annealing*), est une descente bruitée [Geman et Hwang 1986], suivant le processus $x(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, solution de l'équation différentielle stochastique

$$dx(t) = -g(x(t))dt + \epsilon(t)dW$$

où $dW$ est le bruit blanc sur $\mathbb{R}^k$ muni de la mesure de Lebesgue, et $\epsilon(t)$ une fonction qu'on souhaite faire tendre vers 0 aussi vite que possible. On peut choisir $\epsilon(t) = O\left(\frac{1}{\log t}\right)$ (R. Azencott [1992]).

Les problèmes physiques continuent à alimenter les recherches actuelles sur le mouvement brownien, et l'intuition des physiciens conduit à des problèmes mathématiques sérieux. Pour en avoir une idée, je renvoie à l'étude de Hans Föllmer [1984] et à l'exposé de B. Duplantier [1989] à la Journée SMF de 1989.

## 3. Borel, Steinhaus et les séries de fonctions aléatoires

En 1896, alors que le prolongement analytique des séries de Taylor était un sujet à l'ordre du jour, Émile Borel publia une note aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* au contenu provocateur : en général pour une série de Taylor, dit-il, le cercle de convergence est une coupure [Borel 1896]. En 1897, à l'invitation de Mittag-Leffler, il donna une ébauche de démonstration dans *Acta Mathematica*. De façon remarquable, cette ébauche contient déjà le théorème de Borel-Cantelli. Mais les concepts fondamentaux qui permettraient de transformer les intuitions en énoncés et l'ébauche en démonstration, c'est-à-dire la probabilité totalement additive et l'indépendance, font encore défaut. C'est en 1898 que Borel introduit la mesure totalement additive, et en 1909 ce qu'il appelle probabilités dénombrables. À lire la notice de Borel de 1912, on a l'impression que cet énoncé provocateur sur les séries de Taylor a été le déclencheur de ses recherches ultérieures en probabilités. Mais ce n'est qu'en 1929 qu'un sens clair lui a été donné, par Hugo Steinhaus [1930], avec une vraie démonstration. Avant d'en venir là, bien des étapes furent nécessaires. Voici les principales.

En 1902, c'est l'apparition, dans sa thèse, de la mesure de Lebesgue et en 1906, dans ses *Leçons sur les séries trigonométriques*, la définition et les propriétés de l'intégrale comme on la connaît aujourd'hui ; il s'agit uniquement de fonctions réelles d'une variable réelle, définies sur un intervalle.

En 1922, Rademacher introduit son système de fonctions à valeurs $\pm 1$, définies sur l'intervalle $[0,1]$ à l'exception des points dyadiques par

$$r_n(t) = (-1)^{t_n} \quad \text{si} \quad t = 0, t_1 t_2 \cdots$$

en écriture dyadique. C'est un système orthonormal dans $L^2([0,1])$, et aussi le prototype d'un système de fonctions indépendantes. Rademacher montre que, sous l'hypothèse $\sum a_n^2 < \infty$, la série $\sum a_n r_n(t)$ converge presque partout.

En 1925, Khintchine et Kolmogorov donnent la réciproque : si $\sum a_n^2 = \infty$, la série $\sum a_n r_n(t)$ diverge p. p.. C'est le début des travaux sur les séries de variables aléatoires indépendantes.

Dans l'intervalle, en 1923, Steinhaus réduit la théorie des probabilités dénombrables à celle de la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Les variables aléatoires s'interprètent comme fonctions mesurables sur cet intervalle.

En 1929, Steinhaus donne son modèle d'une suite de variables aléatoires indépendantes. Au point $t = 0, t_1 t_2 t_3 \cdots$ il associe la suite

$$\omega_1 \;=\; 0, t_1 t_3 t_5 \cdots$$

$$\begin{aligned} \omega_2 &= 0, t_2 t_6 t_{10} \cdots \\ \omega_3 &= 0, t_4 t_{12} t_{20} \cdots \\ \cdots \end{aligned}$$

Ce sont des v. a. indépendantes, toutes distribuées sur $[0,1]$ selon la mesure de Lebesgue. Dans ce cadre il établit ce qui sera plus tard la loi du zéro-un de Kolmogorov : une propriété asymptotique de la suite $(\omega_n)$ a nécessairement pour probabilité 0 ou 1. Enfin il montre que pour une série de Taylor aléatoire de la forme

$$\sum_1^\infty c_n e^{2\pi i \omega_n} z^n \qquad \left(\overline{\lim}\, c_n^{1/n} = 1\right)$$

le cercle de convergence $|z| = 1$ est une coupure ; c'est la première fois qu'est mise en forme l'intuition de Borel de 1896.

L'intérêt de l'approche de Steinhaus va bien au-delà. En fait, un modèle universel pour une suite de variables aléatoires indépendantes est constitué par $(f_n(\omega_n))$ , où les $f_n$ sont des fonctions mesurables définies sur $[0,1]$. Avant l'axiomatique de Kolmogorov, il y a là un fondement solide pour toute la théorie des probabilités.

Après Steinhaus, l'étude des séries de fonctions aléatoires fait un nouveau bond avec Paley et Zygmund [1930, 1932]. Paley et Zygmund se posent la question d'étendre le théorème de Borel-Steinhaus aux séries de Taylor

$$\sum_1^\infty c_n r_n(t) z^n \qquad \left(= \sum_1^\infty \pm c_n z^n\right)$$

et, plus généralement, d'étudier des séries de fonctions de la forme $\sum \pm f_n$ ou $\sum e^{2\pi i \omega_n} f_n$. A côté des séries de Taylor, ils étudient des séries de Fourier aléatoires du type de Rademacher ou de Steinhaus :

$$\text{(R)} \ : \ \sum_{-\infty}^{\infty} \pm c_n e^{int}, \qquad\qquad \text{(S)} \ : \ \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i \omega_n} e^{int}$$

(j'écris des exponentielles imaginaires pour abréger l'écriture ; ils préfèrent écrire des développements en cosinus et sinus). Si $\sum |c_n|^2 = \infty$, il s'avère que p.s. (R) et (S) ne sont pas des séries de Fourier-Lebesgue. Au contraire, si $\sum |c_n|^2 < \infty$, elles représentent des fonctions aléatoires qui appartiennent p. s. à $L^p([0,2\pi])$ pour tout $p < \infty$. A quelle condition sur la suite $(c_n)$ représentent-elles p. s. des fonctions bornées, continues ? Paley et Zygmund donnent des conditions nécessaires et des conditions suffisantes, et leurs recherches seront poursuivies par Salem et Zygmund, Kahane, et Pierre Billard ;

l'état de la question en 1968 se trouve dans mon livre *Some Random Series of Functions* (paraphrase du titre de la série d'articles de Paley et Zygmund).

En 1933 les trajectoires de Wiener et de Paley et Zygmund se rencontrent. On reconnaît la main de Wiener dans l'introduction à leur article commun. Il explique comment, indépendamment de la considération des séries (R) et (S) et de leur usage pour des contre-exemples, il a été amené par le mouvement brownien à des séries trigonométriques gaussiennes, que j'écrirai

$$(\mathrm{G})\ :\ \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \zeta_n e^{int}$$

où $(\zeta_n)$ est un échantillon normal complexe. Il pose la question d'un traitement commun aux séries (R), (S) et (G), et l'article étend en effet aux séries (G) des théorèmes obtenus par Paley et Zygmund pour les séries (R) et (S). Le sujet devait être reconsidéré par Kahane et par Billard dans les années 1950 et 1960. Mais ce n'est qu'en 1978, à la suite des travaux de Dudley et de Fernique sur les processus gaussiens, qu'il allait être complètement élucidé par Marcus et Pisier : chaque propriété telle que convergence ou sommabilité dans un $L^p$, convergence uniforme, convergence ponctuelle en tout point, convergence ponctuelle presque partout, appartenance à un $L^p$ ou continuité de la fonction représentée, a la même probabilité, 0 ou 1, pour les séries (R), (S) et (G) ayant les mêmes coefficients $c_n$. Connaissant (par Dudley-Fernique) des conditions sur (G) pour la continuité, on a donc des conditions nécessaires et suffisantes pour la continuité des fonctions représentées par (R) ou (G). Les travaux de Marcus et Pisier, exposés dans leur livre de 1981, concluent donc ce programme de Wiener. Mais ils sont prolongés de façon vigoureuse par les études actuelles sur probabilités et espaces de Banach, qu'on trouve dans le livre de Michel Ledoux et Michel Talagrand [1991].

De sa fréquentation de Paley et Zygmund, Wiener retient la simplicité de l'approche probabiliste de Steinhaus. Jusqu'alors, il a déduit la loi des coefficients de la série de Fourier-Wiener de sa construction de la mesure de Wiener sur l'espace des fonctions continues d'une variable réelle. A partir de 1933, il part comme Steinhaus de l'intervalle $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue, il transporte cette mesure sur $[0,1]^{\mathbb{N}}$ au moyen de la transformation de Steinhaus, il définit des échantillons normaux comme fonctions des coordonnées $\omega_n$, et il transporte enfin la mesure sur les fonctions continues au moyen de la série de Fourier-Wiener. Le point de vue est complètement inversé. Dans le livre de 1934 de Paley et Wiener les deux derniers chapitres sont consacrés au processus de Wiener introduit de cette manière, et désigné comme *fundamental random function*.

Or, tandis que Wiener adoptait le point de vue de Steinhaus, Kolmogorov était en train d'adopter et de systématiser le point de vue de Wiener. Ainsi, au moment même où Wiener était acquis au modèle probabiliste constitué par l'intervalle réel $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue, Kolmogorov donnait son axiomatique et établissait ses théorèmes de prolongement pour la construction d'espaces de probabilités adaptés aux processus à étudier. A cet égard, les *Grundbegriffe* ont enterré Paley-Wiener, mais Paley-Wiener reste une référence clé pour le mouvement brownien.

Dans l'article de Paley–Wiener–Zygmund [1933] se trouve la première démonstration de la non-dérivabilité partout du processus de Wiener, et elle se trouve reproduite, longue citation de Jean Perrin à l'appui, dans le livre de Paley et Wiener [1934]. De plus, en 1934, Wiener sait que p. s. le processus $X(\cdot)$ vérifie pour tout $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\text{uniformément} \quad X(t+h) - X(t) = O\left(|h|^{\frac{1}{2}-\epsilon}\right) \quad (t \in [0, a], \quad h \to 0) \\ &\text{pour tout } t \quad X(t+h) - X(t) = \Omega\left(|h|^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right) \quad (h \to 0) \end{aligned}$$

($\Omega$ signifie le contraire de $o$).

Voici ce qu'on sait de plus aujourd'hui en fait de propriétés presque sûres : le module de continuité est en $O\left(\sqrt{|h| \log \frac{1}{|h|}}\right)$, et la non–dérivabilité forte en $\Omega(\sqrt{|h|})$. Plus précisément, on a

$$\text{uniformément} \qquad \limsup_{h \to 0} \frac{|X(t+h) - X(t)|}{\sqrt{2|h| \log \frac{1}{|h|}}} \leq 1 \qquad \text{[Lévy 1937]}$$

$$\text{pour tout } t \qquad \limsup_{h \to 0} \frac{|X(t+h) - X(t)|}{\sqrt{|h|}} \geq c > 0 \qquad \text{[Dvoretzky 1963].}$$

De plus, on a en chaque point $t$ fixé, donc (Fubini) presque partout

$$\limsup_{h \searrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{\sqrt{2\, h \log \log \frac{1}{h}}} = 1 \ ;$$

c'est la loi du logarithme itéré de Khintchine 1927 pour $h \to \infty$, traduite par P. Lévy au voisinage de $t$ en 1940. Ces résultats sont essentiellement inaméliorables. Il existe des points *rapides*, où

$$\limsup_{h \to 0} \frac{|X(t+h) - X(t)|}{\sqrt{2|h| \log \frac{1}{|h|}}} > 0 \qquad \text{[Orey et Taylor 1974]}$$

et des points *lents*, où

$$\limsup_{h \to 0} \frac{|X(t+h) - X(t)|}{\sqrt{|h|}} < \infty \qquad \text{[Kahane 1974].}$$

Naturellement, les points rapides et les points lents constituent un ensemble de mesure nulle, puisque presque partout on a la loi du logarithme itéré à gauche et à droite.

Ce comportement erratique constitue l'un des charmes des trajectoires du mouvement brownien. L'hélice brownienne, en regard, a une majestueuse régularité : son équation de définition,

$$\|X_{t+h} - X_t\|^2_{\mathcal{H}} = \quad |h|$$

signifie qu'elle est uniformément hölderienne d'ordre $\frac{1}{2}$. L'hélice brownienne donne donc une première idée, grossière, du comportement (presque sûr) des trajectoires, et l'étude fine fait apparaître des différences. Il en est de même avec la dimension de Hausdorff : l'hélice a pour dimension 2, et la mesure 2-dimensionnelle sur l'hélice coïncide avec le temps qu'on y passe. Dans un espace de dimension $\geq 2$, le mouvement brownien (dont les composantes sont par définition des mouvements browniens linéaires indépendants) a des trajectoires de dimension 2 mais de mesure 2-dimensionnelle nulle [Lévy 1948], et c'est un exercice de virtuosité que de découvrir la fonction déterminante, $h(x)$, selon laquelle la mesure de Hausdorff des trajectoires browniennes planes est finie et non nulle [Taylor 1964] ; on trouve $h(x) = x^2 \log \frac{1}{x} \log\log\log \frac{1}{x}$.

Il en est encore de même avec la variation quadratique. On a identiquement

$$\sum \|X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\|^2_{\mathcal{H}} = \sum |t_{i+1} - t_i| = b - a$$

pour toute décomposition d'un intervalle $[a, b]$ au moyen des points $t_i$ ($a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$), donc la variation quadratique sur l'hélice coïncide avec la variation du paramètre. Pour les trajectoires, il est également vrai que, pour une suite de partages emboités de $[a, b]$ dont le pas tend vers 0, on a p.s.

$$\lim \sum |X(t_{i+1}) - X(t_i)|^2 = b - a$$

(Wiener [1923] ; Paul Lévy [1948]), mais il est faux que cela ait lieu pour une trajectoire donnée ; en fait, la limite supérieure est infinie. On peut chercher pour quelles fonctions $h(x)$ il est presque sûr que, pour toute suite de partages de $[a, b]$ dont le pas tend vers 0, on ait

$$\limsup \sum h\left(|X(t_{i+1}) - X(t_i)|\right) < \infty \ ;$$

la meilleure fonction $h(x)$ est $x^2/\log\log \frac{1}{x}$ [Taylor 1972].

Dans les espaces euclidiens $\mathbb{R}^d$ il n'y a pas d'hélice brownienne mais seulement des quasi-hélices vérifiant

$$1 - \epsilon_d \leq \| X_{t+h} - X_t \|^2 /|h| \leq 1 + \epsilon_d.$$

Elles sont faciles à construire par un procédé automatique, et leurs projections planes ressemblent au mouvement brownien plan. C'est un des très nombreux cas où un automate convenable imite le hasard ([Assouad 1980], [Kahane 1981]).

La méthode de Paul Lévy pour évaluer le module de continuité du brownien est au moins aussi importante que le résultat. Elle consiste à déterminer la loi de $X\left(t + \frac{h}{2}\right)$ lorsque $X(t)$ et $X(t+h)$ sont connus. La méthode lui a servi pour d'autres processus à accroissements indépendants, et c'est la clé pour certaines simulations numériques [Bouleau et Lepingle 1994].

Je reviens à Borel pour terminer cette section. Son idée est qu'un phénomène inhabituel, tel que le non-prolongement d'une série de Taylor, peut apparaître comme général dans un cadre convenable. Cette idée a été exploitée dans des cadres variés : ensembliste, et à cet égard Cantor, sur les nombres transcendants, avait montré la voie ; topologique, avec l'utilisation de la théorie de Baire, et cela a été une spécialité polonaise des années 1920 ; et, naturellement, probabiliste comme y pensait Borel. Il peut être très difficile de construire certains objets, tandis qu'une mesure de probabilité convenable les fait apparaître en masse. Paley et Zygmund ont été les initiateurs de cette méthode, et mes livres de 1968 et 1985 en donnent beaucoup d'aspects ; le prototype est la réciproque du théorème de Riesz-Fischer : si la suite des amplitudes $r_n$ n'est pas de carré sommable, peut-on choisir les phases $\varphi_n$ de sorte que la série $\sum r_n \cos(nt + \varphi_n)$ ne soit pas une série de Fourier-Lebesgue, et comment ? Réponse : oui, au hasard. Pour certains usages, il s'impose de penser au mouvement brownien. Je me borne à un exemple. D. Menšov a montré que toute fonction continue sur $\mathbb{T}$ est égale, sauf sur un ensemble de mesure arbitrairement petite, à une fonction de la classe $U(\mathbb{T})$, c'est-à-dire dont la série de Fourier est uniformément convergente. Peut-on remplacer $U(\mathbb{T})$ par $A(\mathbb{T})$, la classe des fonctions dont la série de Fourier est absolument convergente ? La réponse est négative, comme l'a montré Y. Katznelson, même si on impose à la fonction donnée d'être hölderienne (A. M. Olevskii). Le meilleur contre-exemple connu est le mouvement brownien : sur aucun ensemble de mesure positive la fonction de Wiener n'est égale à une fonction de la classe $A(\mathbb{T})$ [Hruščev *et al.* 1981].

## 4. Bachelier, Kolmogorov, les processus et les diffusions

En 1900, Louis Bachelier soutint une thèse de doctorat sur la théorie de la spéculation où l'on retrouve aujourd'hui les ingrédients principaux de la théorie du mouvement brownien. Bachelier, dans le monde mathématique, était un outsider. Orphelin à 15 ans, commis de commerce, petit opérateur à la Bourse de Paris, il avait fait des études dans des conditions difficiles. Il avait suivi, à la Sorbonne, les leçons d'Henri Poincaré, alors chargé du cours de probabilités. Il reconnaît dans sa thèse le caractère aléatoire de la fluctuation des cours en Bourse et se propose d'en faire une théorie en vue des prévisions à opérer pour les marchés à terme.

Bachelier manipule avec audace des probabilités conditionnelles (qu'il appelle *connexes)* et des probabilités composées. Après avoir centré son processus de fluctuation, il désigne par $p_{x,t}dx$ la probabilité pour que, partant de 0, il se trouve au temps $t$ dans l'intervalle $(x, x+dx)$, et il établit (p. 19) que

$$p_{z,t_1+t_2} = \int p_{x,t_1} p_{z-x,t_2} dx,$$

ce qui est la formule de base des processus de Markov (dont l'introduction par Markov pour des chaînes, c'est-à-dire des processus à temps discret, date de 1907). Puis il montre que

$$p = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi x^2}{t}}$$

est une solution, et qu'elle satisfait l'équation de la chaleur. Cela l'autorise à parler du *rayonnement* ou de la *diffusion* de la probabilité (p. 30). Il en tire des règles pratiques : la loi des écarts de prime (p. 33), et la loi de la fonction que Paul Lévy désignera par $M(t) \left(= \sup_{s\leq t} X(s)\right)$, ainsi formulée :

> « la probabilité pour qu'un cours soit atteint ou dépassé à l'époque $t$ est la moitié de la probabilité pour que ce cours soit atteint ou dépassé dans l'intervalle de temps $t$. » (p. 59)

Cependant Bachelier fut méconnu. Son histoire est excellemment racontée par Benoît Mandelbrot dans *The Fractal Geometry of Nature.* C'est Kolmogorov en 1931, dans un article des *Mathematische Annalen,* qui sortit son nom de l'oubli. L'article est consacré aux processus de Markov à temps continu, dont le processus du mouvement brownien est un exemple. La loi dans l'avenir ne dépend que de l'état présent, donc la loi du processus est donnée par les probabilités de transition que, plus explicitement que Bachelier, Kolmogorov désigne par $P(t_0, x, t, y)$ (on part de $x$ au temps $t_0$, on se trouve en $y$ au temps $t$). Kolmogorov fait une étude analytique de la loi du processus, en étudiant les équations différentielles ou intégro–différentielles vérifiées par les probabilités de transition ; comme il le remarque lui-même [Kolmogorov, *Papers* II, p. 521, note], la théorie est développée en termes classiques et sans utiliser les espaces de trajectoires. Il se réfère à Bachelier comme initiateur : Bachelier, dit-il, fut le premier à faire une étude systématique du cas où la probabilité $P(t_0, x, t, y)$ dépend continûment de $t$.

Comme Bachelier l'avait reconnu dès le départ avec le mouvement brownien, les processus de Markov ont un rapport étroit avec des équations de diffusion. Le sujet est très actuel en géométrie des variétés riemanniennes. Le laplacien, l'équation de la chaleur et le mouvement brownien sur les variétés sont des sujets intimement liés ; j'y reviendrai rapidement dans la dernière section.

L'article de Kolmogorov de 1931 est un travail d'analyse. En 1933, avec les *Grundbegriffe*, il donne le cadre conceptuel universellement adopté depuis lors pour les espaces de trajectoires. Son fameux théorème de prolongement d'une probabilité simplement additive sur une algèbre à la $\sigma$-algèbre engendrée est essentiellement un outil pour construire un espace de probabilité correspondant à la donnée d'un processus. Comme je l'ai déjà dit c'est une vaste systématisation de la première approche de Wiener. Cependant Kolmogorov ne reprend pas l'étude des processus de Markov à partir du point de vue probabiliste qu'il a dégagé. Cette étude probabiliste des processus de Markov allait être l'œuvre de jeunesse de Kiyosi Itô.

Le deuxième article d'Itô dans ses *Papers* (p. 42) est la traduction en anglais d'un article en japonais de 1942. Le contenu de cet article n'a pas attendu cette traduction tardive pour être connu. Mais sa lecture, après un demi-siècle, est un régal. On y trouve à l'état naissant et parfaitement exposés, dans le cadre d'une étude probabiliste des processus de Markov : 1) la notion de différentielle d'un processus de Markov et son application au mouvement brownien ; 2) la définition de l'intégrale d'Itô ; 3) à l'aide de cette intégrale, des théorèmes d'existence de solutions pour des équations différentielles stochastiques.

Je me bornerai à évoquer l'intégrale d'Itô. L'intégrale de Wiener, nous l'avons vu, est l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport au bruit blanc ; le temps n'y joue pas de rôle. Dans l'intégrale d'Itô, le temps est essentiel, et on peut intégrer des fonctions aléatoires. Itô considère un mouvement brownien $X_t$ sur $\mathbb{R}^+$ et un processus $Y_t$ qui n'est fonction que des $X_\tau$,

$0 \leq \tau \leq t$. Il définit

$$\int_0^t Y_\tau dX_\tau$$

comme une limite de sommes de Riemann où les $Y$ se trouvent décalés à gauche des accroissements de $X$ :

$$\sum_1^n Y_{\tau_{i-1}} \left( X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right) \quad (0 = t_0 = \tau_0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 \cdots < t_n = t).$$

L'espérance de ces sommes est toujours nulle, donc aussi l'espérance de l'intégrale. Cela explique des formules en apparence paradoxales, et très utiles :

$$\int_0^t X_\tau dX_\tau = \frac{1}{2} X_t^2 - \frac{1}{2} t$$

$$\int_0^t a(X_\tau) dX_\tau = \int_0^{X_t} a(\lambda) d\lambda - \int_0^t \frac{1}{2} a'(x_\tau) d\tau$$

$$A(X_t) = A(0) + \int_0^t A'(X_\tau) dX_\tau + \frac{1}{2} \int_0^t A''(X_\tau) d\tau.$$

Il obtient alors une foule de processus comme solutions d'équations différentielles stochastiques du type

$$Y_t = c + \int_0^t a(\tau, Y_\tau) d\tau + \int_0^t b(\tau, Y_\tau) dX_\tau.$$

Parmi les applications actuelles de l'intégrale d'Itô, et les motivations pour étudier certaines fonctionnelles du mouvement brownien, il faut mentionner les mathématiques financières. Le point de départ est un modèle de Black et Scholes [1973] pour la fixation des prix d'options d'achats ou de ventes à des dates et prix donnés, et pour les protocoles de gestion des avoirs financiers par les banques qui correspondent à ces *produits dérivés.* Les méthodes probabilistes de la finance ont fait l'objet d'un exposé de Hans Föllmer au Congrès International de Zurich en 1994 ; malheureusement le texte de cet exposé ne figure pas dans les *Proceedings.* Un *séminaire Bachelier,* dirigé par Nicole El Karoui, et consacré aux mathématiques financières, se tient à l'Institut Henri Poincaré, et des cours sont disponibles sur le sujet. Ma référence préférée est à la fois un cours et un pamphlet, par Nicolas Bouleau en 1995, intitulé *La finance, ingéniérie ou hystérie ?* Il est sérieux et clair comme exposé, et percutant dans sa partie critique ; c'est le germe d'un livre, à paraître chez Odile Jacob [Bouleau 1998].

Ainsi l'intégrale et les processus d'Itô, lointains descendants de la théorie de la spéculation de Bachelier, retournent à la spéculation financière. Ils méritent à tous égards d'être intégrés dans la culture générale des mathématiciens.

## 5. Pearson, Pólya et les marches au hasard

Les marches au hasard remontent au début du calcul des probabilités ; l'évolution du gain d'un joueur au jeu de pile ou face en donne une image. Pour les marches au hasard isotropes dans le plan, au cours d'une suite de temps discrets, on se réfère aux *random flights* de Pearson [1905], même si l'origine semble appartenir à Lord Rayleigh, dans un article de 1880 dont le titre est très clair : « Composition of $n$ isoperiodic vibrations of unit amplitude and of phases distributed at random » . L'histoire du sujet au début du siècle est décrite dans l'article de S. Chandrasekhar en 1943, « Stochastic problems in physics and astronomy », dont l'essentiel est consacré au mouvement brownien (cf. [Wax 1954]).

Chandrasekhar ne cite pas Georges Pólya. Pourtant, pour les mathématiciens, Pólya est le premier théoricien des marches au hasard. C'est lui qui, en 1921, pose et traite pour les marches au hasard sur $\mathbb{Z}^d$ les questions essentielles : la récurrence, la transience, l'existence de points multiples. On connaît sa boutade : « dans le plan, tous les chemins mènent à Rome », c'est-à-dire que la promenade sur $\mathbb{Z}^2$ est récurrente, tous les points sont de multiplicité infinie. Au contraire la promenade dans $\mathbb{Z}^3$ est transiente, et tous les points sont de multiplicité finie.

Les marches au hasard ont des avatars multiples et une forte relation à la théorie du potentiel ; j'en dirai un mot tout à l'heure. Regardons d'abord comment se présentent récurrence, transience et points multiples pour le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$.

Sur $\mathbb{R}$, le mouvement brownien passe une infinité de fois non dénombrable en chaque point, et le *temps local* mesure le temps passé en chaque point. On peut définir le temps local, pour le brownien comme pour d'autres processus, par sa dérivée, la mesure aléatoire $\delta(X-a)$ ; c'est le procédé utilisé dans mes livres. Sa loi est simple et remarquable, et Paul Lévy a montré comment construire le mouvement brownien $X(t)$ en partant de l'ensemble $X^{-1}(0)$, dont on connaît bien la loi, et en mettant en place sur les intervalles contigus ce qu'on appelle des *excursions browniennes ;* la référence de base est son livre de 1948.

Dans $\mathbb{R}^2$ le mouvement brownien revient sans cesse au voisinage de chaque point, ce qui est une forme de récurrence, mais, comme je l'ai déjà dit, il ne visite que les points d'une aire nulle ; il ne revient jamais exactement à son point de départ [Lévy 1948]. Par contre, il y a des points qu'il visite une infinité non dénombrable de fois [Dvoretzky *et al.* 1958]. Paul Lévy considérait ce résultat comme « l'un des plus surprenants théorèmes de l'analyse moderne » (2e édition de *Processus stochastiques et mouvement brownien* [1965, p. 325]).

Dans $\mathbb{R}^3$ le mouvement brownien s'en va à l'infini : il est transient. Cependant il a des points doubles [Dvoretzky *et al.* 1950], et il n'a pas de point triple [Dvoretzky *et al.* 1957].

Dans $\mathbb{R}^4$ le mouvement brownien est transient et n'a pas de point double, et naturellement il en est de même en dimension supérieure [Dvoretzky *et al.* 1950].

Tous ces résultats, sur les points multiples du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, dépendent d'un fait très important établi par Kakutani dès 1944 : la capacité newtonienne d'un borélien $E$ de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ est nulle si et seulement s'il est presque sûr que le mouvement brownien partant d'un point à distance positive de $E$ ne rencontre jamais $E$ [Kakutani 1944a]. Il est facile de voir que l'image par le brownien d'un intervalle réel $I$ est de capacité positive dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ et de capacité nulle dans $\mathbb{R}^4$, et il en résulte que pour deux intervalles rationnels disjoints $I$ et $J$ les images $X(I)$ et $X(J)$ sont presque sûrement disjointes dans $\mathbb{R}^4$, et se rencontrent avec probabilité positive dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Cela établit les résultats sur les points doubles [Dvoretzky *et al.* 1950]. Le cas des points triples dans $\mathbb{R}^3$ se traite de façon analogue. Les points de multiplicité $c$ nécessitent plus de travail, et on y est revenu récemment.

Le rôle des marches au hasard et du mouvement brownien en théorie du potentiel avait été reconnu, avant Kakutani, par Courant, Friedrichs et Lewy dans un article de 1928. En effet, pour un ouvert dans $\mathbb{R}^d$, le mesure harmonique d'une portion de frontière par rapport à un point intérieur s'interprète comme la probabilité pour que le mouvement brownien issu de ce point s'échappe de l'ouvert à travers cette portion de frontière. Le résultat analogue sur des graphes est encore plus facile à voir et faisait peut-être partie du folklore. Mais Kakutani faisait de cette observation simple un usage merveilleux ; je l'ai vu, au tableau noir devant un certain ensemble de Cantor, se demander s'il était de capacité positive ou non en s'identifiant mentalement à une particule brownienne et en cherchant à passer au travers.

Dans la tradition de Kakutani, le plus beau résultat de ces dernières années est sans doute le théorème de N. G. Makarov [1989] : pour un domaine de Jordan dans le plan, la mesure harmonique est concentrée sur un borélien de dimension 1. Donc, si la dimension de la courbe frontière est proche de 2, une trajectoire brownienne issue de l'intérieur s'arrête presque sûrement sur une très petite partie de cette courbe, de dimension 1.

On imagine bien comment le mouvement brownien sur des variétés riemanniennes permet d'interpréter des objets abstraits comme la frontière de Martin. L'étude du comportement asymptotique du mouvement brownien a commencé avec Dynkin dans les années 1950 et c'est un sujet très étudié aujourd'hui. Pour les surfaces à courbure négative constante, complètes et sans bord, les trajectoires convergent vers des points frontière en un temps infini ; si la courbure croît rapidement, la convergence a lieu en un temps fini ; la discussion a été faite par Azencott dans les années 1970. Toute la littérature sur les frontières de Furstenberg, les espaces de Poisson, les fonctions harmoniques bornées, est plus ou moins liée au mouvement brownien.

La récurrence et la transience de marches sur des groupes selon d'autres probabilités de transition que l'équiprobabilité des points les plus voisins sont encore très liées aux diffusions et au potentiel. Je me contente d'évoquer les travaux d'Yves Guivarc'h et de Nicolas Varopoulos. Voici un résultat de Varopoulos [1985] qui complète bien les théorèmes de Pólya : un groupe dénombrable sans torsion ne porte une marche récurrente que si c'est $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^2$.

Enfin, le mouvement brownien est présent implicitement dans beaucoup de travaux contemporains d'analyse ou de géométrie sur des groupes. Un exemple remarquable est le livre de Varopoulos, Saloff-Coste et Coulhon, qui est une monographie de recherche sans rapport apparent au mouvement brownien ; mais on découvre à la fin du livre, p. 141, que « the problem of transience and recurrence of Brownian motion on covering manifolds was the original motivation for the theory developed in this book. »

Les marches au hasard sur les graphes et les groupes constituent un domaine de recherche en plein essor. L'article d'exposition de Woess en 1994, qui prétend se borner au survol de sujets choisis dans ce domaine, comporte 264 références !

## Appendice

Ayant parcouru les quelques chemins que j'avais définis au départ je crois avoir balayé de façon à peu près correcte la période 1900-1950 et montré quelques-unes des ramifications qui s'ensuivent. Cependant je n'ai pas touché aux plus grands sujets des années 1980 et 90 : martingales et mouvement brownien, mouvement brownien plan, lois explicites de processus liés au brownien. Cela n'aurait pas été très difficile à partir d'une sixième source, qui se situe au milieu du siècle : Paul Lévy. Comme il n'est pas question d'allonger cet article, je me contente de présenter au lecteur mes excuses et quelques suggestions de lecture.

La Bible est le livre de Paul Lévy de 1948 et sa réédition de 1965. Il est déjà question du mouvement brownien dans son livre de 1937. Le volume V de ses *Œuvres* contient le reste de ce qu'il a écrit sur le mouvement brownien. On peut lire comme un roman le fascicule 126 du *Mémorial des sciences mathématiques* (1954) et les conférences de Rome (1962).

Le livre de Nelson [1967] est riche d'informations historiques et de vues personnelles. On peut en dire autant du livre récent de Chung [1995].

J'ai cité dès le début le livre de Revuz et Yor [1991], qui traite des martingales continues et du mouvement brownien. Les martingales ont un rapport étroit avec l'analyse classique, en particulier avec l'étude des fonctions analytiques dans le disque unité. Le livre de R. Durrett, sur le mouvement brownien et les martingales en analyse, fait excellemment le point en 1984 ; il faut le compléter aujourd'hui par l'ouvrage de Richard Bass [1995] sur les techniques probabilistes de l'analyse. Le mouvement brownien plan a été étudié par Lévy dès 1940, et son théorème sur l'invariance des trajectoires par représentation conforme a été publié en 1947. Le sujet est en plein développement. La meilleure référence est le cours de Jean-François Le Gall à Saint-Flour en 1990, à compléter par les travaux de son élève Wendelin Werner [1995]. La géométrie de la courbe brownienne fait l'objet d'un exposé de Gérard Ben Arous [1990] au séminaire Bourbaki. On trouve une liste de problèmes et de références dans l'article de B. Duplantier, G. F. Lawler, J.-F. Le Gall et T. J. Lyons du *Bulletin des sciences mathématiques* [1993].

Les lois explicites de processus liés au mouvement brownien commencent aussi avec Paul Lévy. C'est une spécialité de Marc Yor, et son livre de 1992 est sans doute le meilleur moyen de s'initier au sujet avec en complément son cours de Caracas 1995. Il serait imprudent de ma part de citer d'autres noms, mais c'est à regret ; les recherches de lois explicites se mènent activement en plusieurs parties du monde et en plusieurs villes en France, et pas seulement à Paris.

Reste qu'à Paris se tient régulièrement, depuis des années, un séminaire sur l'étude fine du mouvement brownien. Les annales de ce séminaire constituent une pièce maîtresse pour l'histoire contemporaine du mouvement brownien.

Si le lecteur de cet article est mis en appétit, ou s'il se sent frustré, ce qui peut être la même chose, je lui recommande de changer complètement de point de vue, et de se plonger dans l'histoire contemporaine du mouvement brownien. Marc Yor rédige actuellement (juin 1996) une étude sur ce sujet, qui sera bientôt disponible, et paraîtra dans l'ouvrage collectif sur le développement des mathématiques depuis 1950 dont l'initiateur est Jean-Paul Pier. Dans l'aller et retour entre le passé et le présent, qui est le propre de toute histoire, l'efflorescence et la qualité des travaux actuels sur le mouvement brownien sont les stimulants principaux pour la recherche des sources et des cheminements. L'article à venir de Marc Yor est donc, pour une bonne part, la justification de celui-ci.

# Bibliographie


ASSOUAD (P.)

[1980] Plongements lipschitziens dans $\mathbb{R}^n$ et courbes de von Koch, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 290 (1980), p. 591–594.

AZENCOTT (R.)

[1973] Diffusion sur les variétés différentiables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 276 (1973), p. 363–365.

[1992] Sequential simulated annealing : speed of convergence and acceleration techniques, dans *Simulated Annealing* (éd. par R. Azencott), New York : Wiley, 1992, p. 1–10.

BACHELIER (L.)

[1900] Théorie de la spéculation (Thèse), *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, (III) 17 (1900), p. 21-86.

BASS (R.)

[1995] *Probabilistic techniques in analysis*, Basel-Heidelberg-New York : Springer, 1995.

BEN AROUS (G.)

[1990] Géométrie de la courbe brownienne, *Sém. Bourbaki*, exp. n° 730 (1990).

BEURLING (A.) et DENY (J.)

[1959] Dirichlet spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 45 (1959), p. 208–215.

BILLARD (P.)

[1963] Séries de Fourier aléatoirement bornées, continues, uniformément convergentes, *Studia Math.*, 22 (1963), p. 309–329 ; *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, (III) 82 (1963), p. 131-179.

BLACK (F.) et SCHOLES (M.)

[1973] The pricing of options and corporate liabilities, *J. of Political Economy*, 81 (1973), p. 635–654.

BOREL (É.)

[*Œuvres*] *Œuvres*, tomes I à IV, CNRS, 1972.

[1896] Sur les séries de Taylor, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 123 (1896), p. 1051–1052 ; *Œuvres* II, p. 647–648.

BOULEAU (N.)

[1998] *Martingales et marchés financiers*, Paris : Odile Jacob, 1998.

BOULEAU (N.) et LEPINGLE (D.)

[1994] *Numerical methods for stochastic processes*, New York : Wiley, 1994.

CHANDRASEKAR (S.)

[1943] Stochastic problems in physics and astronomy, *Rev. Modern Phys.*, 15 (1943), p. 1-89 ; réimpr. dans [Wax 1954, p. 3–91].

CHUNG (K.L.)

[1995] *Green, Brown and probability.* Singapour : World Scientific, 1995.

COURANT (R.), FRIEEDRICHS (K.) et LEWY (K.)

[1928] Ueber die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, *Math. Ann.*, 1000 (1928), p. 37–74.

DOOB (J.L.)

[1942] The Brownian motion and stochastic equations, *Ann. of Math.*, 43 (1942), p. 351–369 ; réimpr. dans [Wax 1954, p. 319–337].

DUDLEY (R.)

[1967] The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes, *J. Funct. Anal.*, 1 (1967), p. 290–330.

DUPLANTIER (B.)

[1989] Le mouvement brownien en physique, les polymères et leur relation avec les phénomènes critiques, dans *Journées de la Société Mathématique de France, 28 janvier 1989, trois exposés sur le mouvement brownien*, (P. Le Gall : introduction, Ben Arous : grandes déviations et noyau de la chaleur, Duplantier : *supra*).

DUPLANTIER (B.), LAWLER (G.F.), LE GALL (J.F.) et LYONS (T.J.)

[1993] The geometry of the Brownian curve, *Bull. Sci. Math.*, 117 (1993), p. 91–106.

DVORETZKY (A.)

[1963] On the oscillation of the Brownian motion process, *Israel J. Math.*, 1 (1963), p. 212–214.

DVORETZKY (A.), ERDÖS (P.) et KAKUTANI (S.)

[1950] Double points of paths of Brownian motion in $n$-space, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 12 (1950), p. 75–81 ; *Papers* II de Kakutani, p. 102–108.

[1958] Points of multiplicity $c$ of plane Brownian motion paths, *Bull. Res. Council Israel*, sect. F 7 (1958), p. 175–180 ; *Papers* II de Kakutani, p. 124–129.

[1961] Non increase everywhere of the Brownian motion process, dans *Proc. 4th Berkeley Symp., 1960*, vol. 2, Univ. Calif. Press, 1961, p. 103–116 ; *Papers* II de Kakutani, p. 130–143.

DVORETZKY (A.), ERDÖS (P.), KAKUTANI (S.) et TAYLOR (S.J.)

[1957] Triple points of Brownian paths in 3-space, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 53 (1957), p. 856–862 ; *Papers* II de Kakutani, p. 117–123.

Dynkin (E.B.)

[1960] Markov processes and analysis problems connected with them, *Uspehi Mat. Nauk*, 15 (1960), p. 3–24.

[1963] Processus de Markov et problèmes d'analyse (en russe), dans *Proc. Int. Congr. Math. Stockholm 1962*, Uppsala, 1963, p. 36–58.

Einstein (A.)

[1905] Ueber die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme gefordete Bewegung..., *Annalen der Physik*, 17 (1905), p. 549–560.

[1906a] Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen, *Ann. Physik*, 19 (1906), p. 289–306.

[1906b] Zur Theorie der Brownschen Bewegung, *Ann. Physik*, 19 (1906), p. 371–381.

[1922] *Untersuchungen über die Theorie der « Brownschen Bewegung »,* vol. 199 of *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften*, Leipzig Akadem. Verlagsgesellschaft, 1922. Traduction anglaise : *Investigations on the theory of Brownian movement*, New York : Dutton 1926, réimprimé par Dover, 1956.

Fernique (X.)

[1975] Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes, dans *École d'été de probabilités de Saint-Flour IV, 1974*, Lecture Notes in Math., vol. 480, Springer, 1975, p. 1–96.

Föllmer (H.)

[1984] Von der brownschen Bewegung zum brownschen Blatt, dans *Perspectives in mathematics* (éd. par J. Jäger, J. Moser et R. Remmert), Basel : Birkhäuser, 1984.

Geman (S.) et Hwang (C.)

[1986] Diffusions for global optimization, *SIAM J. Control Optim.*, 24 (1986), p. 1031–1043.

Guivarc'h (Y.)

[1980] Quelques propriétés asymptotiques des produits de matrices aléatoires, dans *École d'été de probabilités de Saint-Flour VIII (1978)* (éd. par P.L. Hennequin), vol. 774 des Lecture Notes in Math., Berlin-Heidelberg : Springer, 1980, p. 177–250.

Hruščev (S.V.), Kahane (J.P.) et Katznelson (Y.)

[1981] Mouvement brownien et séries de Fourier absolument convergentes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 292 (1981), p. 389–391.

Itô (K.)

[*Papers*] *Selected papers*, New York : Springer, 1987.

[1942] Differential equations determining a Markov process (translation from the Japanese) ; *Papers*, p. 42-75.

KAC (M.)

[1964] Wiener and integration in function spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1964), p. 52–68.

KAHANE (J.P.)

[1968] *Some random series of functions*. Heath et Cambridge University Press, 2e éd., 1968.

[1974] Sur l'irrégularité locale du mouvement brownien, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 278 (1974), p. 331–333.

[1981] Hélices et quasi-hélices, *Adv. Math.*, 78 (1981), p. 417–433, [volume L. Schwartz].

KAKUTANI (S.)

[*Papers*] *Selected papers*, 2 vol., Boston-Basel-Stuttgart : Birkhäuser, 1986.

[1944a] On Brownian motions in $n$-space, *Proc. Imp. Acad. Japan*, 20 (1944), p. 648–652 ; *Papers* II, p. 88–92.

[1944b] Two dimensional Brownian motion and harmonic functions, *Proc. Imp. Acad. Japan*, 20 (1944), p. 706–714 ; *Papers* II, p. 93–101.

[1961] Spectral analysis of stationary Gaussian processes, dans *Proc. 4th Berkeley Symp. 1960*, Univ. Calif. Press, 1961, p. 239–247 ; *Papers* II, p. 77–85.

KHINTCHINE (A.)

[1927] Über das Gesetz der grossen Zahlen, *Math. Ann.*, 96 (1927), p. 152–168.

KHINTCHINE (A.) et KOLMOGOROV (A.)

[1925] Ueber Konvergenz von Reihen deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, *Mat. Sbornik*, 32 (1925), p. 668–677.

KOLMOGOROV (A.)

[*Papers*] *Selected papers*, Birkhäuser, 1986.

[1931] Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Ann.*, 104 (1931), p. 415–458 ; *Papers* II, p. 62–108.

[1933] *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin : Springer, 1933.

LANGEVIN (P.)

[1908] Sur la théorie du mouvement brownien, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 146 (1908), p. 530–532.

LE GALL (J.F.)

[1992] Some properties of planar Brownian motion, dans *École d'été de probabilités de Saint-Flour XX, 1990* (éd. par P.L. Hennequin), vol. 1527 des *Lecture Notes in Math.*, Berlin-Heidelberg : Springer, 1992, p. 111–236.

LEBESGUE (H.)

[*Œuvres*] *Œuvres scientifiques*, vol. I à V. Genève : L'Enseignement mathématique, 1972-1973.

[1902] *Intégrale, longueur, aire*, thèse ; *Œuvres* I, p. 203–331.

[1906] *Leçons sur les séries trigonométriques*. Paris : Gauthier-Villars, 1906.

LEDOUX (M.) et TALAGRAND (M.)

[1991] *Probability in Banach space*, Berlin-Heidelberg : Springer, 1991.

LÉVY (P.)

[*Œuvres*] *Œuvres*, vol. I à VI. Paris : Gauthier-Villars, 1973.

[1937] *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Paris : Gauthier-Villars, 1937. 2e édition 1954.

[1948] *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Paris : Gauthier-Villars, 1948. 2e édition, 1965.

MAKAROV (N.)

[1989] Probability methods in conformal mappings, *Leningrad Math. J.*, 1 (1990), p. 1–56 ; traduction de *Algebra i Analiz*, 1 (1989), p. 3–59.

MANDELBROT (B.)

[1982] *The fractal geometry of nature*, San Francisco : Freeman, éd. rév. 1982.

MARCUS (M.) et PISIER (G.)

[1981] *Random Fourier series with applications to harmonic analysis*. Princeton University Press, 1981.

NELSON (E.)

[1967] *Dynamical theories of Brownian motion*. Princeton University Press, 1967.

VON NEUMANN (J.) et SCHOENBERG (I.J.)

[1941] Fourier integrals and metric geometry, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 50 (1941), p. 226–251.

OREY (S.) et TAYLOR (S.J.)

[1974] How often on a Brownian path does the law of iterated logarithm fail ?, *Proc. London Math. Soc.*, 28-3 (1974), p. 174–192.

PALEY (R.E.A.C.) et WIENER (N.)

[1934] *Fourier transforms in the complex domain*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 19, New York, 1934.

PALEY (R.E.A.C.), WIENER (N.) et ZYGMUND (A.)

[1933] Notes on random functions, *Math. Z.*, 37 (1933), p. 647–668.

PALEY (R.E.A.C.) et ZYGMUND (A.)

[1930] On some series of functions, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 26 (1930), p. 337–357, 458–474.

[1932] On some series of functions, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 28 (1932), p. 190–205.

PERRIN (F.)

[1928] *Etude mathématique du mouvement brownien de rotation*, thèse, Paris.

[1934-36] Mouvement brownien d'un ellipsoïde I, II., *J. Phys. Radium*, 5 (1934), p. 497–511 ; *Ibid.*, 7 (1936), p. 1–11.

PERRIN (J.)

[1909] Mouvement brownien et réalité moléculaire, *Ann. Chim. Phys.*, 18 (1909), p. 1–114.

[1912] *Les atomes*, Paris : Felix Alcan, 1912.

RADEMACHER (H.)

[1922] Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Ann.*, 87 (1922), p. 112–138.

REVUZ (D.) et YOR (M.)

[1991] *Continuous martingales and Brownian motion.* Berlin-Heidelberg : Springer, 1991 ; 2e édition 1994.

SALEM (R.) et ZYGMUND (A.)

[1954] Some properties of trigonometric series whose terms have random signs, *Acta Math.*, 91 (1954), p. 245–301.

SCHOENBERG (I.J.)

[1938] Metric spaces and positive definite functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 44 (1938), p. 522–536.

SMOLUCHOWSKI (M.)

[1906a] Essai d'une théorie du mouvement brownien et de milieux troubles, *Bull. Acad. Sci. Cracovie*, (1906), p. 577–602.

[1906b] Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen, *Ann. Physik*, 21 (1906), p. 756–780.

SREDNIAWA (B.)

[1991] Collaboration of Marian Smoluckowski and Theodor Svedberg in the investigations of Brownian motion and density fluctuations (Krakóv, preprint).

STEINHAUS (H.)

[1923] Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure, *Fund. Math.*, 4 (1923), p. 286–310.

[1930] Ueber die Wahrscheinlickeit dafür, dass der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürlich Grenze ist, *Math. Z.*, 31 (1930), p. 408–416.

Svedberg (T.)

[1907] Studien zur Lehre von den kolloidalen Lösungen, *Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis*, IV (1907), p. 1–160.

Taylor (S.J.)

[1964] The exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 60 (1964), p. 253–258.

[1972] Exact asymptotic estimates of Brownian path variation, *Duke Math. J.*, 39 (1972), p. 219–241.

Varopoulos (N.)

[1985] Random walks on groups. Applications to Fuchsian groups, *Ark. Mat.*, 23 (1985), p. 171–176.

Varopoulos (N.T.), Saloff-Coste (L.) et Coulhon (T.)

[1992] *Analysis and geometry on groups.* Cambridge Univ. Press, 1992.

Wax (N.)

[1954] *Selected papers on noise and stochastic processes*, New York : Dover, 1954. Contains papers of Chandrasekhar, Uhlenbeck et Ornstein, Wang et Uhlenbeck, Rice, Kac, Doob.

Werner (W.)

[1995] Sur l'ensemble des points autour desquels le mouvement brownien tourne beaucoup, *Probab. Theory Related Fields*, 99 (1995), p. 11–142.

Wiener (N.)

[*Papers*] *Selected papers*, Cambridge, Mass. : M.I.T. Press, 1964.

[*Works*] *Collected works*, vol. I à IV. Cambridge, Mass. : M.I.T. Press, 1985.

[1923] Differential space, *J. Math. Phys.*, 2 (1923), p. 131–174.

Woess (W.)

[1994] Random walks on infinite graphs and groups - a survey of selected topics, *Bull. London Math. Soc.*, 26 (1994), p. 1–60.

Yor (M.)

[1992] *Some aspects of Brownian motion. Part I : Some special functionals*, Lectures in mathematics, ETH Zürich, Basel : Birkhäuser, 1992.

[1995] *Local times and excursions for Brownian motion, a concise introduction*, Lecciones en Matemáticas. Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, 1995.