Problèmes de similarité pour les opérateurs sur l'espace de Hilbert

Gilles Pisier*

Résumé

Deux opérateurs T_1 et T_2 sur un espace de Hilbert H sont dits semblables s'il existe un opérateur inversible S sur H tel que $T_1 = S^{-1}T_2S$. Un problème classique (le « problème de Halmos ») demande de caractériser les opérateurs T semblables à une contraction. Deux autres variantes de ce problème sont apparues : l'une, proposée par Dixmier en 1950 concerne la caractérisation des groupes moyennables, l'autre, due à Kadison en 1955, les représentations de C^*-algèbres. Cet article tente de faire le point sur ces problèmes.

Abstract

Two operators T_1, T_2 on a Hilbert space are called similar if there exists an invertible operator S on H such that $T_1 = S^{-1}T_2S$. A classical problem (the "Halmos problem") asks for a characterization of the operators T which are similar to a contraction. Two important variants have appeared. One proposed by Dixmier in 1950 asks whether the similarity property for all uniformly bounded representations on a group G is equivalent to the amenability of G. The other one, proposed by Kadison in 1995, is about representations of a C^*-algebra. This report attempts to describe the genesis and the present state of these problems.

Cet exposé est consacré à plusieurs problèmes de similarité pour les opérateurs linéaires bornés $T : H \to H$ sur un espace de Hilbert H. On note

AMS 1991 *Mathematics Subject Classification*: 01A60, 17B10, 22E46

*Équipe d'Analyse - URA 754-CNRS Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, Boîte 186, 4 place Jussieu 75252 Paris Cedex 5

$B(H)$ l'algèbre formée de ces opérateurs munie de la norme usuelle et $GL(H)$ le sous-groupe des éléments inversibles.

Définition. — Deux opérateurs T_1, T_2 dans $B(H)$ sont dits « semblables » s'il existe S inversible dans $B(H)$ tel que $S^{-1}T_1S = T_2$.

Comme pour les matrices, cela revient à dire qu'il existe un changement de base (oblique, pas orthonormale) qui transforme T_1 en T_2. Plus généralement, si $(T_1^i)_{i\in I}$ et $(T_2^i)_{i\in I}$ sont deux familles dans $B(H)$, on dit qu'elle sont semblables s'il existe S inversible dans $B(H)$ tel que $S^{-1}T_1^iS = T_2^i$ pour tout i dans I.

En théorie des opérateurs sur l'espace de Hilbert, on appelle *contraction* tout opérateur T tel que

$$\|T\| \leq 1.$$

Le principal problème qui nous intéresse ici est de reconnaître les opérateurs T qui sont semblables à une contraction ou bien les familles d'opérateurs qui sont semblables à une famille de contractions.

Ce problème est apparu sous diverses formes à partir de 1946 d'abord pour des groupes d'opérateurs ou bien pour des semi-groupes, le cas d'un seul opérateur T correspondant aux groupes (ou semi-groupes) engendrés par un unique générateur. Parallèlement, sont apparues des « versions linéarisées » de ces questions pour les sous-algèbres de $B(H)$. Nous proposons ici une présentation rétrospective de ces problèmes (pour la plupart toujours ouverts) en nous attachant à souligner les relations existant entre eux et leur connections avec d'autres théories. De plus, nous introduisons le concept d'application « complètement bornée », qui est l'un des principaux nouveaux outils que les recherches sur ces questions ont contribué à dégager.

La « théorie des opérateurs » sur l'espace de Hilbert est un sujet très vaste, surtout si l'on y ajoute la « théorie des algèbres d'opérateurs » (qui, bien que proche de la précédente, correspond en fait à un groupe de chercheurs très différent). Nous ne ferons qu'effleurer ces théories. Pour la première, nous renvoyons le lecteur au livre classique [Sz.-Nagy et Foias 1970] que l'on peut considérer comme « fondateur » de la théorie contemporaine des opérateurs, celle que l'on trouve développée dans le *Journal of Operator Theory*, créé en Roumanie en 1979. Voir aussi la cinquantaine de volumes de la série *Operator Theory: Advances and applications* et la revue *Integral equations and operator theory* (depuis 1979) publiés par Birkhäuser et dirigés par I. Gohberg à Tel Aviv. Pour les algèbres d'opérateurs, les références classiques sont les livres bien connus de J. Dixmier (*C^*-algèbres* et *algèbres de von Neumann*) eux-mêmes fortement influencés par la série d'articles (*On rings of operators*) publiés par Murray et von Neumann dans *Annals of Mathematics* entre 1936 et 1943. Pour une référence générale plus récente, voir [Kadison et Ringrose 1986] et aussi, dans une autre direction, [Connes 1990].

Le problème de similarité pour les groupes remonte à Sz.-Nagy [1946] et Dixmier [1950]. Pour les opérateurs individuels les références initiales sont [Sz.-Nagy 1959] et [Halmos 1970]. Enfin pour les C^*-algèbres, le problème remonte à Kadison [1955].

Dans le texte qui va suivre, nous traitons d'abord le cas des groupes d'opérateurs plongés dans $B(H)$ (§1), puis le cas d'un opérateur individuel ou d'un semi-groupe (§2) et enfin nous considérons un problème analogue pour les homomorphismes sur une C^*-algèbre (§ 3). Enfin, nous montrons au § 4 comment la théorie récente des applications « complètement bornées » permet d'unifier ces différents problèmes.

Nous renvoyons le lecteur à notre livre récent [Pisier 1995] pour plus de détails.

1. Groupes

Le résultat qui suit est à la racine de toutes les études ultérieures sur les opérateurs semblables.

Théorème 1.1. — [Sz.-Nagy 1946] *Soit T un opérateur inversible dans $B(H)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. T et T^{-1} sont tous deux semblables à une contraction.

ii. T est semblable à un opérateur unitaire.

iii. $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|T^n\| < \infty$.

Remarque 1.2. — Il est important de noter que si T est inversible, dire que T et T^{-1} sont tous deux des contractions revient à dire que T est unitaire (= inversible isométrique).

Preuve.— Les implications (ii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iii) sont triviales. Reste à montrer (iii) $\Rightarrow$ (ii). Supposons (iii). Soit $C = \sup\{\|T^n\| \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Sur H on définit une nouvelle norme hilbertienne comme suit

$$\forall h \in H \ |||h|||^2 = \lim_u \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \|T^k h\|^2$$

où u est un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$ (Sz.-Nagy utilisait ici une « limite de Banach » plus classique !). On a évidemment $\frac{1}{C}\|h\| \leq |||h||| \leq C\|h\|$ et de plus $|||Th||| \le |||h|||$ pour tout h. (Noter que c'est la condition sur les inverses de T qui garantit la non–dégénérescence, c'est-à-dire que $\|h\| \le C|||h|||$. Sans cette condition, on risquerait de trouver $|||h||| \equiv 0$!) □

La généralisation suivante est due à Dixmier (et aussi, indépendamment à Day [1950]) qui s'est rendu compte qu'il s'agissait d'un phénomène dû à la « moyennabilité » de $\mathbb{Z}$ (voir la définition plus loin).

Théorème 1.3. — [Dixmier 1950] *Soit G un groupe localement compact. Soit $\pi : G \to GL(H)$ une représentation continue (pour la topologie forte des opérateurs sur H) et uniformément bornée,* i.e. *telle que*

$$\sup_{t \in G} \|\pi(t)\|_{B(H)} < \infty.$$

On pose

$$|\pi| = \sup_{t \in G} \|\pi(t)\|_{B(H)}.$$

Alors si G est moyennable, il existe $S : H \to H$ inversible avec $\|S\|\,\|S^{-1}\| \le |\pi|^2$ tel que $t \to S^{-1}\pi(t)S$ soit une représentation unitaire. On dit alors que π est « unitarisable ».

La notion de groupe moyennable remonte semble-t-il à von Neumann [1929] dont le nom apparaît de façon fondamentale dans tous les aspects des problèmes considérés dans cet exposé.

Un groupe localement compact G est dit moyennable s'il existe une forme linéaire positive $\phi : L^\infty(G) \to \mathbb{C}$ avec $\|\phi\| = \phi(1) = 1$ qui est invariante à gauche, *i.e.* telle que $\phi(b) = \phi(\delta_t * b)$ pour tout t dans G. Cela inclut à la fois tous les groupes commutatifs (en particulier $\mathbb{Z}$) et tous les groupes compacts. Si G est discret, cela veut dire qu'il admet un analogue des « limites de Banach ». Voir [Pier 1984] pour plus d'informations.

L'article de Dixmier se termine par les deux questions suivantes :

Problème 1.4. — [Dixmier 1950] *Existe-t-il des groupes G admettant une représentation uniformément bornée $\pi : G \to GL(H)$ mais non unitarisable ?*

Problème 1.5. — [Dixmier 1950] *Si oui, la classe de tels groupes est-elle exactement la classe des groupes non moyennables ? (En d'autres termes, le Théorème 1.3. admet-il une réciproque ?)*

Un exemple typique de groupe discret non moyennable est le groupe libre $\mathbf{F}_N$ à $N \ge 2$ générateurs. Plus généralement, tout groupe discret contenant $\mathbf{F}_2$ comme sous-groupe n'est pas moyennable.

Le problème 1.4. a été résolu par Ehrenpreis et Mautner [1955] qui ont montré que $G = SL_2(\mathbb{R})$ est un contre-exemple. Leur travail fut ensuite clarifié et considérablement amplifié par Kunze et Stein [1960]. Ces derniers construisent en fait toute une famille analytique $\{\pi_z \mid 0 < Re\, z < 1\}$ de représentations uniformément bornées qui ne sont unitarisables que si $Re\, z = \frac{1}{2}$ ou bien si $z \in \mathbb{R}$. Pour des extensions ultérieures, voir [Sally 1968].

L'article Kunze et Stein [1960] contient aussi des applications remarquables aux convoluteurs bornés de $L_p(G)$ pour $G = SL_2(\mathbb{R})$. C'est ce qu'on appelle le « phénomène de Kunze-Stein » : pour $f \in L_p(G),\ g \in L_2(G)$ on a $f * g \in L_2(G)$ si $1 \leq p < 2$. Ce dernier résultat n'est pas valable pour $G = \mathbb{R}$. Pour des résultats plus récents sur ce phénomène, voir [Cowling 1978, 1982].

Bien entendu, puisque $SL_2(\mathbb{R})$ est un contre-exemple au problème 1.4., a fortiori $SL_2(\mathbb{R})$ muni de la topologie discrète en est aussi un, et comme tout groupe est un quotient d'un groupe libre, il en résulte que les groupes libres (et plus précisement $\mathbf{F}_N$ pour tout $N \geq 2$) fournissent des contre-exemples. Il était donc naturel de chercher des constructions explicites, aussi simples que possibles, de représentations uniformément bornées et non unitarisables sur $\mathbf{F}_N (N \geq 2)$. C'est l'objet de la série de publications : Mantero et Zappa [1983], Figà-Talamanca et Picardello [1983], Bożejko et Fendler [1991], Pytlik et Szwarc [1986], Bożejko [1987b], Szwarc [1988], Fendler [1990], Wysoczanski [1993].

Pour une autre approche, voir [Valette 1990b,a]. L'analyse harmonique sur le groupe libre est développée dans [Cartier 1973], puis [Figà-Talamanca et Picardello 1983].

Signalons aussi que Jean Dieudonné lui-même s'est intéressé aux groupes moyennables, voir Dieudonné [1960].

Le problème 1.5. reste ouvert en toute généralité. Néanmoins d'après un argument classique d'« induction des représentations » (qui s'étend aisément au cas uniformément borné), tout groupe G contenant $\mathbf{F}_2$ comme sous-groupe admet une représentation uniformément bornée non unitarisable. On a longtemps cru (c'était un problème fameux posé par von Neumann dès 1929) que tout groupe non moyennable contenait $\mathbf{F}_2$ comme sous-groupe (ce qui aurait résolu affirmativement le problème 1.5.). C'est vrai pour les groupes linéaires, d'après un théorème classique de Tits [1972], mais faux en général : en effet Olshanskii [1980] a construit un groupe non moyennable dans lequel tout sous-groupe non trivial est une copie de $\mathbb{Z}$. Son travail est très proche des contre-exemples de Novikov et Adian [1968] sur le problème de Burnside (cf. [Adian 1979]).

Le moins qu'on puisse dire est que ces exemples sont difficiles à comprendre (voir [Paterson 1988] pour une description esquissée).

Plus récemment, Gromov [1987] a construit par une méthode différente des groupes infinis possédant la propriété T de Kazhdan (donc non moyennables en un sens extrême), mais sans sous-groupe libre.

Remarque 1.6. — D'après Vasilescu et Zsido [1974], toute représentation uniformément bornée $\pi : G \to B(H)$ sur un groupe arbitraire, dont l'image est une algèbre de von Neumann *finie* est unitarisable.

Le résultat suivant dû à l'auteur (non encore publié) fournit une réponse partielle au problème 1.5..

Théorème 1.7. — *Soit G un groupe discret. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i. *Le groupe G est moyennable.*

ii. *Pour tout H , pour toute représentation uniformément bornée $\pi : G \to B(H)$ il existe $S : H \to H$ inversible avec $\|S\|\|S^{-1}\| \le |\pi|^2$ tel que $S^{-1}\pi(.)S$ est une représentation unitaire.*

iii. *Il existe une constante K et $\alpha < 3$ tels que pour tout H et toute représentation uniformément bornée $\pi : G \to B(H)$ il existe S inversible avec $\|S^{-1}\|\|S\| \le K|\pi|^\alpha$ tel que $S^{-1}\pi(.)S$ est unitaire.*

Remarque 1.8. — Pour résoudre complètement le problème 1.5. (dans le cas discret) il suffirait de savoir montrer que (iii) $\Rightarrow$ (i) en remplaçant dans (iii) la fonction $t \to Kt^\alpha$ par une fonction quelconque.

On peut formuler une variante du problème 1.5. à l'aide de l'espace des « coefficients » des représentations : soit G un groupe localement compact, on note $B(G)$ l'espace des coefficients des représentations unitaires (continues) de G, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f : G \to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe une représentation unitaire continue $\pi : G \to B(H)$ et ξ, η dans H tel que

$$\forall t \in G \qquad f(t) = \langle \pi(t)\xi, \eta\rangle. \tag{1.1}$$

Noter que si $\xi = \eta$, on obtient une fonction continue de type positif sur G. L'espace $B(G)$ coïncide donc (par polarisation) avec l'ensemble des combinaisons linéaires de telles fonctions, en d'autres termes $f \in B(G)$ si et seulement si f peut s'écrire $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ avec $f_1, \ldots, f_4$ continues de type positif sur G.

On munit l'espace $B(G)$ de la norme

$$\|f\|_{B(G)} = \inf\{\|\xi\| \cdot \|\eta\|\}$$

où l'infimum porte sur toutes les décompositions possibles de la forme (1.1). Comme il est bien connu, $B(G)$ (muni de cette norme) est une algèbre de Banach pour le produit ponctuel des fonctions sur G (qui correspond au produit tensoriel des représentations). Dans le cas de groupes compacts non commutatifs, la thèse d'Eymard [1964] contient une étude détaillée de cet espace, vu comme le dual de la C^*-algèbre du groupe G (*i.e.* celle qui est engendrée par la représentation unitaire « universelle » de G).

Par analogie, on peut introduire l'espace $B_{ub}(G)$ des coefficients des représentations uniformément bornées de G , *i.e.* l'ensemble des f de la forme (1.1) avec π représentation uniformément bornée. Cet espace est encore une algèbre mais n'a pas de norme naturelle. En revanche, si l'on fixe $c \geq 1$, l'ensemble $B_c(G)$ formé des fonctions f de la forme (1.1) avec $|\pi| \leq c$ est un espace de Banach pour la norme $\|f\| = \inf\{\|\xi\|\|\eta\|\}$. Mais alors on a seulement : $f \in B_c(G), g \in B_d(G) \Rightarrow f.g \in B_{cd}(G)$. Si toutes les représentations uniformément bornées sont unitarisables, alors $B(G) = B_{ub}(G)$. Le problème suivant, ouvert en toute généralité, est donc a priori plus difficile que le problème 1.5..

Problème 1.9. — *Si $B(G) = B_{ub}(G)$, est-ce que G est moyennable ?*

Remarque 1.10. — La démonstration de (iii) $\Rightarrow$ (i) dans le théorème 1.7. montre en fait que G est moyennable s'il existe K et $\alpha < 3$ tels que pour tout $c > 1$ assez grand on a l'inégalité $\|f\|_{B(G)} \leq K\ C^{\alpha}\|f\|_{B_c(G)}$ pour tout f dans $B_c(G)$.

La difficulté de ce problème tient au manque d'une description maniable des éléments de $B_{ub}(G)$ (ou bien de $B_c(G)$ pour $c > 1$). En revanche, l'analyse harmonique fournit plusieurs classes naturelles de fonctions sur G, notons une telle classe $F(G)$, telles que $F(G) \supset B_{ub}(G)$ et telles que $F(G) = B(G)$ si et seulement si G est moyennable. Un exemple d'une telle classe est donné par l'ensemble $M_0(G)$ des multiplicateurs dits « de Herz-Schur » de G, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f : G \to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe un Hilbert H et des fonctions bornées $x : G \to H$ et $y : G \to H$ telles que

$$\forall s, t \in G \quad f(st) = \langle x_s, y_t\rangle. \tag{1.2}$$

On le munit de la norme

$$\|f\|_{M_0(G)} = \inf\{\sup_s \|x_s\|_H \ \sup_t \|y_t\|_H\}$$

où l'infimum porte sur toutes les décompositions possibles de f comme en (1.2). On a évidemment $B_{ub}(G) \subset M_0(G) \subset B(G)$. On peut montrer que, si G est discret, l'égalité $B(G) = M_0(G)$ caractérise les groupes moyennables (cf. [Bożejko 1985]). Signalons toutefois que, d'après Haagerup [1985], on a $M_0(G) \neq B_{ub}(G)$ si $G = \mathbf{F}_N$ avec $N \geq 2$.

Pour d'autres illustrations voir [Nebbia 1982] et [Losert 1984]. Bien entendu, là encore, si G contient $\mathbf{F}_2$, on sait que le problème 1.9. a une réponse affirmative. On peut donner (suivant Pytlik et Szwarc [1986]) un exemple particulièrement simple pour $G = \mathbf{F}_\infty$ (groupe libre à une infinité dénombrable de générateurs). Pour $x \in G$, soit $|x|$ la longueur d'un mot (réduit) élément de $\mathbf{F}_\infty$. Soit $W_n = \{x \in \mathbf{F}_\infty \mid |x| = n\}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. On pose

$$\phi_z(x) = z^{|x|},$$

alors $\phi_z \in B_{ub}(G)$, mais $\phi_z \notin B(G)$ si $z \notin \mathbb{R}$. Noter que l'on a

$$\phi_z = \sum_{n \geq 0} z^n 1_{W_n},$$

d'où un exemple encore plus simple

$$1_{W_1} \in B_{ub}(G) \quad \text{mais} \quad 1_{W_1} \notin B(G),$$

et de même pour W_n pour tout $n \geq 2$. En fait, toutes les « fonctions sphériques » sont dans $B_{ub}(G)$ quand $G = \mathbf{F}_n$; voir [Mantero et Zappa 1983] et [Szwarc 1988].

2. Opérateurs individuels. Algèbres uniformes

A la suite du théoreme 1.1., Sz.-Nagy a cherché une caractérisation des opérateurs $T \in B(H)$ semblables à une contraction. Une condition évidemment nécessaire est que T soit à puissances bornées *i.e.* que l'on ait $\sup_{n \geq 1} \|T^n\| < \infty$. Ce qui l'a conduit [Sz.-Nagy 1959] à demander si cette condition est aussi suffisante. La réponse est affirmative si T est compact [Sz.-Nagy 1959] ou bien si $r(T) < 1$ [Rota 1960], mais on sait depuis Foguel [1964] qu'en général la réponse est négative. En effet, ce dernier a donné le premier exemple d'opérateur à puissances bornées non semblable à une contraction. (Pour d'autres exemples voir [Peller 1982] et [Bożejko 1987a]). L'article de Rota [1960] contient aussi une jolie formule pour le rayon spectral $r(T)$ d'un opérateur arbitraire T sur un Hilbert H, comme suit

$$r(T) = \inf\{\|S^{-1} T S\| \mid S \in GL(H)\}.$$

Il résulte de cette formule que, pour tout $\epsilon > 0$, tout opérateur à puissances bornées (donc tel que $r(T) \leq 1$) est semblable à un opérateur de norme $< 1 + \epsilon$. En revanche, la question suivante est apparemment toujours ouverte (cf. [Peller 1982]) : soit $T \in B(H)$ à puissances bornées et soit $\epsilon > 0$, T est-il semblable à un opérateur à puissances bornées par $1 + \epsilon$?

Immédiatement après le contre-exemple de Foguel, on s'est rendu compte qu'on pouvait remplacer « être à puissances bornées » par une condition nécessaire plus forte faisant intervenir des polynômes $P(T) = a_0 I_H + a_1 T + \cdots + a_n T^n$ (avec $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$) en T et non plus seulement des monômes. En effet, d'après une célèbre inégalité de von Neumann [1951], toute contraction $T \in B(H)$ vérifie

$$\text{(vN)} \quad \forall P \text{ polynôme } \|P(T)\| \leq \|P\|_\infty = \sup\{|P(z)| \mid z \in D\},$$

où $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Si T est seulement *semblable* à une contraction, *i.e.* si $T = S^{-1}\tilde{T}S$ avec $\|\tilde{T}\| \leq 1$, alors $P(T) = S^{-1}P(\tilde{T})S$ d'où si $C = \|S^{-1}\|\|S\|$

$$\forall P \text{ polynôme } \|P(T)\| \leq C\|P\|_\infty. \tag{2.1}$$

On appelle « polynomialement borné » tout opérateur T vérifiant (2.1) pour une constante C. Comme on vient de le voir, « semblable à une contraction » implique « polynomialement borné ». On sait depuis Lebow [1968] que l'exemple de Foguel n'est pas polynomialement borné, d'où la question suivante posée par Halmos [1970] : tout opérateur polynomialement borné est-il semblable à une contraction ? Ce problème est resté ouvert jusqu'à très récemment. Curieusement, ce n'est que quelques heures avant ma conférence à Nice que je me suis convaincu que ma dernière tentative était concluante : pour tout $C > 1$, il existe un opérateur T vérifiant (2.1) mais non semblable à une contraction (voir [Pisier 1997]). Plus précisement, ce dernier article contient aussi une version fini-dimensionnelle qui s'énonce comme suit. Il existe une constante $\delta > 0$ pour laquelle la propriété suivante a lieu : pour tout n et tout $\epsilon > 0$, il existe $T_n \in B(\ell_n^2)$ (*i.e.* T_n est si l'on veut une matrice n x n agissant sur l'espace de Hilbert de dimension n, noté ici ℓ_n^2) verifiant

$$\forall P \text{ polynôme } \|P(T_n)\| \leq (1+\epsilon)\|P\|_\infty$$

mais tel que

$$\delta\epsilon\sqrt{\log(n+1)} \leq \inf\{\|S\|\|S^{-1}\| \mid \|S^{-1}\, T\, S\| \leq 1\}.$$

Cette minoration est motivée par la majoration suivante due à Bourgain [1986] qui est valable pour tout n, pour tout T dans $B(\ell_n^2)$

$$\inf\{\|S^{-1}\|\|S\| \ ; \ \|S^{-1}\ T\ S\| \leq 1\} \leq K(1+\epsilon)^4 \log(n+1)$$

où K est une constante numérique (indépendante de n ou de T). Bien entendu, en prenant la somme directe sur n des opérateurs T_n, on obtient une réponse négative à la question précédente de Halmos. En revanche, la question suivante (analogue à celle de Peller déjà mentionnée) reste ouverte : soit $\epsilon > 0$, un opérateur polynomialement borné de constante arbitraire est-il semblable à un opérateur polynomialement borné de constante $\leq 1+\epsilon$?

L'inégalité de von Neumann (vN) a suscité de nombreux travaux. On ignore toujours si sa validité caractérise les algèbres de Banach à unité plongeables (comme sous-algèbres de Banach) dans $B(H)$. Voir à ce sujet [Dixon 1995] et les références qui s'y trouvent.

Dans une autre direction, il est naturel de chercher à étendre (vN) au cas de polynômes à plusieurs variables, d'où la question suivante : soit $n \geq 2$ et soient $T_1, \ldots, T_n$, n contractions commutant deux-à-deux (*i.e.* $T_iT_j = T_jT_i \ \forall i \neq j$), est-il vrai que pour tout polynôme $P(z_1, \ldots, z_n)$ on a

$$\text{(2.2)} \qquad \|P(T_1, \ldots, T_n)\| \leq \sup\{|P(z_1, \ldots, z_n)| \ \mid \ z_1, \ldots, z_n \in D\} \ ?$$

D'après Ando [1963], la réponse est « oui » si $n = 2$, le cas $n = 3$ est resté ouvert jusqu'à Varopoulos [1974] (suivi de Crabb et Davie [1975]) qui montre que c'est « non » pour $n > 2$. Dans le contre-exemple de l'appendice de [Varopoulos 1974] le polynôme est homogène de degré 2 et $\dim(H) = 5$; dans celui de [Crabb et Davie 1975] (particulièrement simple) le degré est 3 et $\dim(H) = 8$. Signalons un problème fort embarrassant qui reste ouvert : existe-t-il une constante C_n telle que dans la situation de (2.2) on ait pour tout polynôme P à n variables

$$\|P(T_1, \ldots, T_n)\| \leq C_n \sup\{|P(z_1, \ldots, z_n)| \ \mid \ z_i \in D\} \ ?$$

Varopoulos [1974] a établi que $C_3 > 1$, mais on ignore en fait si $C_3 < \infty$ ou bien si $C_n < \infty$ pour un $n > 2$! En revanche, il résulte de $C_3 > 1$ que $C_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, car on a $C_{n+m} \geq C_n C_m$ pour tous n, m.

En fait, l'inégalité de von Neumann peut être vue comme conséquence d'un théorème fondamental de dilatation dû à Sz.-Nagy [1953] :

Théorème 2.1. — *Pour toute contraction T sur H, il existe un Hilbert $\widehat{H}$ contenant H comme sous-espace et un opérateur* unitaire

$$U : \widehat{H} \to \widehat{H} \quad \textit{tel que} \quad T^n = P_H U^n{}_{|H}$$

pour tout $n \geq 1$, *donc aussi* $P(T) = P_H P(U)_{|H}$ *pour tout polynôme* P. *On dit alors que* U *est une « dilatation » de* T.

Noter que (vN) en est un corollaire immédiat, puisque la théorie spectrale (noter que U est unitaire donc normal) nous assure que

$$\|P(U\| = \sup\{|P(z)| \ \mid \ z \in \sigma(U)\} \leq \|P\|_\infty.$$

On a donc $\|P(T)\| \leq \|P(U)\| \leq \|P\|_\infty$. Ando [1963] démontre une extension de ce théorème : pour deux contractions qui commutent, il construit $\widehat{H} \supset H$ et deux unitaires U_1, U_2 qui commutent sur $\widehat{H}$ et qui sont des dilatations respectivement de T_1 et T_2. Bien entendu, là-encore, (2.2) pour $n = 2$ en résulte. Les contre-exemples pour $n > 2$ montrent que le théorème de dilatation d'Ando n'est plus valable pour n contractions qui commutent si $n > 2$. Plus précisement, Parrott [1970] a construit explicitement trois contractions (T_1, T_2, T_3) dans $B(H)$, commutant entre elles *et vérifiant l'inégalité de von Neumann*, mais néanmoins n'admettant pas de dilatation en trois unitaires qui commutent. Cet exemple a joué un rôle important dans la théorie par la suite.

Ces théorèmes de dilatation nous rapprochent d'un autre thème classique en théorie des opérateurs, celui des sous-espaces invariants. En général, dans les résultats de dilatation comme ci-dessus, le sous-espace $H \subset \widehat{H}$ n'est pas invariant pour l'opérateur U (ou pour U_1, U_2), mais néanmoins la correspondance $P \to P_H P(U)_{|H}$ est un homomorphisme d'algèbre. Il est donc naturel de se demander quels sont les sous-espaces $H \subset \widehat{H}$ qui possèdent cette propriété. Le résultat suivant de Sarason [1965] donne une réponse très complète et très élégante à cette interrogation.

Théorème 2.2. — *Soit* $\mathcal{H}$ *un Hilbert. Soit* A *une algèbre unifère et soit* $\pi : A \to B(\mathcal{H})$ *un homomorphisme d'algèbre. Les propriétés suivantes d'un sous-espace fermé* $H \subset \mathcal{H}$ *sont équivalentes.*

i. L'application $a \to P_H \pi(a)_{|H}$ *est un homomorphisme de* A *dans* $B(H)$.

ii. Il existe deux sous-espaces $H_2 \subset H_1 \subset \mathcal{H}$ *invariants par* $\pi(A)$ *(*i.e. *tels que* $\pi(a)H_i \subset H_i \ \forall a \in A$*) tels que* $H = H_1 \ominus H_2$ *(i.e.* $H = H_1 \cap (H_2)^\perp$*).*

Les sous-espaces H vérifiant les conditions précédentes sont appelés « semi-invariants ». Il est important de souligner que l'énoncé précédent appliqué dans la situation du Théorème 2.1. (avec pour A l'algèbre des polynômes) nous dit que toute contraction $T \in B(H)$ peut s'écrire $P_{H_1} \ominus H_2 U_{|H_1 \ominus H_2}$ avec H_1, H_2 invariants pour U. Par conséquent, les sous-espaces invariants de T

sont tous de la forme $H_3 \ominus H_2$ avec H_3 U-invariant tel que $H_2 \subset H_3 \subset H_1$. Cela donne une connexion remarquable avec le problème classique des sous-espaces invariants, qui est bien sûr toujours ouvert : tout opérateur T de $B(H)$ possède-t-il un sous-espace fermé invariant non trivial ? En effet, ce problème se ramène évidemment au cas des contractions. Par ailleurs, le cas des opérateurs unitaires ou normaux ne pose aucun problème, puisque la théorie spectrale classique s'applique. On sait donc bien sûr que tout unitaire U dans $B(H)$ admet des sous-espaces invariants non triviaux, mais on ignore si étant donnés deux sous-espaces (fermés) invariants $H_2 \subset H_1$ avec $H_1 \neq H_2$, il en existe un troisième H_3 vérifiant $H_2 \subsetneqq H_3 \subsetneqq H_1$. En effet, cela impliquerait (d'après les théorèmes 2.1. et 2.2.) que

$$T = P_{H_1 \ominus H_2} U_{|H_1 \ominus H_2}$$

(donc une contraction arbitraire) admet un sous-espace invariant non trivial.

Remarque 2.3. — Von Neumann [1951] a introduit les ensembles spectraux pour un opérateur $T \in B(H)$. Il s'agit des compacts $K \subset \mathbb{C}$ contenant le spectre de T et tels que pour toute fonction rationnelle R à pôles hors de K on a

$$\|R(T)\| \leq \sup_{z \in K} |R(z)|.$$

Plusieurs questions considérées ci-dessus s'étendent dans ce cadre. Voir [Sz.-Nagy 1958], [Paulsen 1986] pour plus d'informations.

Remarque 2.4. — La notion de « dilatation » (ou bien son inverse la « compression ») s'étend naturellement aux homomorphismes d'algèbres : Soit $\widehat{A}$ une algèbre arbitraire et $A \subset \widehat{A}$ une sous-algèbre. Considérons un homomorphisme $\pi : A \to B(H)$. On dit qu'un homomorphisme $\widehat{\pi} : \widehat{A} \to B(\widehat{H})$ est une dilatation de π s'il existe un plongement (isométrique) de H dans $\widehat{H}$ tel que

$$\forall a \in A \quad \pi(a) = P_H \widehat{\pi}(a)_{|H}.$$

On dit aussi alors que π est la compression de $\widehat{\pi}$ de π sur H. D'après ce qui précède H est nécessairement semi-invariant pour $\widehat{\pi}(A)$.

La plupart des questions précédentes peuvent être étudiées dans le cadre des « algèbres uniformes ». On appelle ainsi toute sous-algèbre unitale fermée de l'algèbre $C(K)$ des fonctions continues sur un compact K. En général on suppose que A sépare les points de K, on dit alors que A est « propre » si $A \neq C(K)$. Par exemple, l'algèbre du disque est une algèbre uniforme propre dans $C(\partial D)$.

Les questions que nous venons d'aborder conduisent naturellement à envisager pour une algèbre uniforme $A \subset C(K)$ la propriété suivante : pour tout homomorphisme unital borné $u : A \to B(H)$, il existe S dans $GL(H)$ tel que $a \to S^{-1}u(a)S$ est de norme 1. Cette propriété est vérifiée si $A = C(K)$ par exemple parce que A est une C^*-algèbre nucléaire (voir le paragraphe suivant). Curieusement, jusqu'à très récemment, on ne connaissait aucun exemple d'algèbre uniforme propre soit possédant cette propriété, soit ne la possédant pas ! La réponse négative à la question de Halmos permet maintenant d'affirmer que l'algèbre du disque ne possède pas cette propriété, il en est donc de même pour le polydisque et il devient concevable qu'aucune algèbre uniforme propre ne la possède.

Signalons que les théorèmes de dilatation mettent en évidence la sous-classe des algèbres uniformes $A \subset C(K)$ possédant la propriété suivante : tout homomorphisme contractant $u : A \to B(H)$ admet une dilatation $\widehat{u} : C(K) \to B(\widehat{H})$ (cf. Remarque 2.4.) qui est encore un homomorphisme contractant.

D'après ce qui précède, $A(D)$ et $A(D^2)$ possèdent cette propriété mais pas $A(D^n)$ pour $n > 2$. Les domaines du plan complexe $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, pour lesquels l'algèbre uniforme $A(\Omega)$ (formée des fonctions analytiques continues sur $\overline{\Omega}$) possède cette propriété, ne sont pas bien compris. Nous renvoyons au livre [Douglas et Paulsen 1989] pour une étude approfondie de ce genre de questions, en liaison avec la topologie algébrique.

3. C^*-algèbres

Rappelons que toute C^*-algèbre A peut être réalisée comme une sous-algèbre involutive fermée de $B(H)$. Si A est unitale, on peut réaliser A avec $I_H \in A$. Les morphismes adaptés aux C^*-algèbres sont appelés des représentations (C^*-représentations si l'on veut préciser). Une représentation $\pi : A_1 \to A_2$ entre deux C^*-algèbres est donc une application linéaire telle que

$$\forall x, y \in A \quad \pi(xy) = \pi(x)\pi(y) \text{ et } \pi(x^*) = \pi(x)^*.$$

Une particularité des C^*-algèbres est que la structure d'algèbre détermine la norme. Si A est une C^*-algèbre, elle n'admet qu'une seule norme pour laquelle elle est une C^*-algèbre. Autrement dit : toute représentation injective (entre C^*-algèbres) est automatiquement isométrique et, plus généralement, toute représentation $\pi : A_1 \to A_2$ a nécessairement une norme $\|\pi\|$ au plus égale à 1. On peut aussi décrire les C^*-algèbres en termes de groupes. Soit $U(H)$ (resp. $\mathcal{U}(A)$) l'ensemble des éléments unitaires de $B(H)$ (resp. A). Soit $G \subset U(H)$

un sous-groupe, alors le sous-espace fermé engendré par G dans $B(H)$ est une C^*-algèbre à unité et toute sous-C^*-algèbre de $B(H)$ contenant l'unité est de cette forme. De plus, d'après un théorème de Russo et Dye [1966], si A est unitale, la boule unité fermée de A est l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{U}(A)$.

Supposons A réalisée dans $B(H)$ et posons $G = \mathcal{U}(A) \subset U(H)$. Alors, les représentations $\pi : A \to B(\mathcal{H})$ sont exactement les représentations unitaires de G dans $B(\mathcal{H})$ qui s'étendent en une application sur le sous-espace linéairement engendré par le groupe G dans $B(H)$. De plus, le théorème de Russo-Dye nous permet d'écrire

$$\|\pi\| = |\pi_{|G}|.$$

En résumé, se donner une représentation de C^*-algèbre A revient à se donner une représentation unitaire de $\mathcal{U}(A)$ respectant les relations linéaires.

Soient A_1, A_2 deux C^*-algèbres. Convenons d'appeler *homomorphisme* toute application linéaire $u : A_1 \to A_2$ telle que

$$u(xy) = u(x)u(y) \quad \forall x, y \in A_1$$

(autrement dit, il s'agit des morphismes d'algèbres). Le problème de similarité pour les C^*-algèbres a été posé dès 1955 par Kadison. Il s'agit du problème suivant :

Problème 3.1. — *Soit A une C^*-algèbre à unité. Soit $u : A \to B(H)$ un homomorphisme borné tel que $u(1) = 1$. Existe-t-il $S : H \to H$ inversible tel que l'homomorphisme $\widetilde{u}(a) = S^{-1}u(a)S$ soit une C^*-représentation ?*

S'il existe un tel S, nous dirons suivant le terminologie de Kadison que u est « orthogonalisable ».

Remarques 3.2.

i. Dire que u est « orthogonalisable » revient à dire que la restriction de u à $\mathcal{U}(A)$ est « unitarisable » au sens du §1.

ii. D'autre part, comme les unitaires sont exactement les contractions inversibles d'inverse contractant, un homomorphisme $u : A \to B(H)$ tel que $u(1) = 1$ est une représentation (resp. est orthogonalisable) si et seulement si la famille $\{u(a) \mid a \in A \ \|a\| \leq 1\}$ est formée de contractions (resp. est semblable à une famille de contractions).

iii. Tout homomorphisme borné $u : A \to B(H)$ s'étend avec la même norme en un homomorphisme borné (et continu pour la topologie *-faible) sur l'algèbre de von Neumann engendrée par A (donc aussi sur le bidual de A). On peut donc se restreindre dans le problème 3.1. au cas des algèbres de von Neumann.

Le problème 3.1. est toujours ouvert en toute généralité mais on a de nombreux résultats partiels dus principalement à E. Christensen et U. Haagerup, comme suit :

i. La réponse est oui si A est nucléaire (« nucléaire » est l'équivalent C^*-algébrique de « moyennable ». On dit que A est nucléaire si pour toute C^*-algèbre B, il existe une unique norme de C^*-algèbre sur $A \otimes B$).

ii. La réponse est oui si $A = B(H)$ (mais, d'après [Wassermann 1976], $B(H)$ n'est pas nucléaire) ou plus généralement si A ne possède aucun état tracial.

iii. La réponse est oui pour tout A mais à condition que u admette un vecteur cyclique, *i.e.* un vecteur $\xi \in H$ tel que $\overline{u(A)\xi} = H$. (Il suffit en fait que A admette un nombre fini de vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_n$ tels que

$$\overline{u(A)\xi_1 + \ldots + u(A)\xi_n} = H.)$$

(i) est dû indépendamment à J. Bunce [1981] et E. Christensen [1981], (ii) et (iii) sont dus à Haagerup [1983], mais [Christensen 1981] contient un résultat très voisin de (iii) démontré indépendamment. Dans ces derniers résultats, l'inégalité dite « de Grothendieck non-commutative » due à l'auteur [Pisier 1978] joue un rôle important.

Le problème 3.1. semble être un « point névralgique », en effet de très nombreux problèmes soulevés dans des contextes différents se sont revélés en fait équivalents au problème 3.1. Nous illustrons cela par plusieurs exemples dans le reste de cette section.

On peut formuler un problème très proche du problème 3.1. en termes de dérivations. Soit $A \subset B(H)$ une sous-algèbre. Rappelons qu'une dérivation $\delta : A \to B(H)$ est une application linéaire telle que $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ pour tous a, b dans A. Par exemple, pour $T \in B(H)$, la formule $\delta_T(a) = aT - Ta$ définit une dérivation de A dans $B(H)$. Les dérivations de cette forme sont appelées *intérieures.*

Problème 3.3. — *Soit $A \subset B(H)$ une sous C^*–algèbre. Toute dérivation (continue) $\delta : A \to B(H)$ est-elle intérieure ?*

Ce problème reste lui-aussi ouvert en toute généralité. Noter toutefois que la réponse est affirmative pour les dérivations qui prennent leurs valeurs dans A (*i.e.* pour $\delta : A \to A$) (cf. [Kadison 1966]). Signalons aussi que la continuité des dérivations est « automatique ».

Les références classiques sur ce problème sont [Kaplansky 1953], [Kadison et Ringrose 1971], [Kadison 1966], [Sakai 1966] et les travaux plus récents d'E. Christensen [1978, 1982a,b].

Il est important d'observer que $\delta : A \to B(H)$ est une dérivation (bornée) si et seulement si $u_\delta : A \to B(H \oplus H)$ défini par

$$u_\delta(a) = \begin{pmatrix} a & \delta(a) \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

est un homomorphisme (borné).

Cette observation permet de montrer que si la réponse est « oui » pour A dans le problème 3.1., il est de même dans le problème 3.3. Mais en fait Kirchberg [1996] a donné récemment une démonstration (assez simple) du fait que ces deux problèmes sont essentiellement équivalents.

Plus précisément, étant donnée une C^*-algèbre A, tout homomorphisme borné $u : A \to B(H)$ (H Hilbert arbitraire) est « orthogonalisable » si et seulement si pour toute représentation $\pi : A \to B(H)$ (H arbitraire) toute π-dérivation bornée $\delta : A \to B(H)$ (*i.e.* $\delta(ab) = \pi(a)\delta(b) + \delta(a)\pi(b)\ \forall a, b \in A$) est intérieure (*i.e.* $\exists\, T \in B(H)$ tel que $\delta(a) = \pi(a)T - T\pi(a)$.

Le problème 3.3. peut aussi être formulé dans le langage de la cohomologie de Hochschild adaptée aux algèbres de Banach. La théorie de Hochschild, publiée dans les années 1945-1947 est à l'origine purement algébrique (voir [Hochschild 1945]) mais les modifications à faire dans un contexte topologique sont assez évidentes. Nous nous bornerons à un très bref aperçu. Soit A une algèbre de Banach et soit $\mathcal{X}$ un A-bimodule de Banach. En fait pour le présent exposé l'exemple principal est celui d'une sous-algèbre fermée A de l'espace $B(H)$. Alors $\mathcal{X} = B(H)$ lui-même peut-être vu comme A-bimodule.

On notera $L^n(A, \mathcal{X})$ (ou simplement L^n) l'espace des formes n-linéaires bornées $f : A^n \to \mathcal{X}$, ce sont les « n-cochaînes ». On définit un « cobord » $\delta : L^n \to L^{n+1}$ par la formule suivante, pour f dans L^n et $a_0, \ldots, a_n$ dans A

$$\begin{aligned} \delta f(a_0, \ldots, a_n) = {} & a_0 \quad f(a_1, \ldots, a_n) \\ & + \quad \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} f(a_0, \ldots, a_j a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n) \\ & + \quad (-1)^{n+1} f(a_0, \ldots, a_{n-1}) a_n \end{aligned}$$

$(T \in B(H), x \in A)$.

Pour $n = 0$, on pose $L^0 = \mathcal{X}$ et $\delta T(a) = aT - Ta$ $(T \in \mathcal{X}, a \in A)$.

On vérifie aisément que l'on a une cohomologie, *i.e.* que $\delta\delta = 0$. Pour $n = 1, 2, \ldots$, l'image de $\delta : L^{n-1} \to L^n$ est notée $B^n(A, \mathcal{X})$ (ou simplement B^n). Ce sont les « n-cobords ». On note $Z^n(A, \mathcal{X})$ (ou Z^n) le noyau de l'application $\delta : L^n \to L^{n+1}$. C'est l'ensemble des « n-cocycles ». Enfin, on note $H^n(A, \mathcal{X})$ le quotient B^n/Z^n. C'est le « n-ième groupe de cohomologie », qui en fait ici est un espace de Banach. Il est facile de vérifier que Z^1 est formé des dérivations bornées de A dans $\mathcal{X}$ et B^1 des dérivations intérieures, *i.e.* de la forme $f(a) = xa - ax$ pour un $x \in \mathcal{X}$. Le problème 3.3. peut alors être reformulé comme suit

Problème 3.4. — *Soit $A \subset B(H)$ une C^*-algèbre dans $B(H)$. A-t-on*

$$H^1(A, B(H)) = \{0\} \ ?$$

L'origine de toutes ces questions sur les dérivations se trouve semble-t-il dans [Kaplansky 1953]. Après de premiers travaux dus à Kamowitz [1962] et Guichardet [1966], ce sont principalement B.E. Johnson, R. Kadison et J. Ringrose qui ont développé la cohomologie des algèbres de Banach de 1968 à 1972. Voir en particulier le mémoire de Barry Johnson [1972] et le livre [Pier 1988] sur la moyennabilité des algèbres de Banach.

Entre temps, Sakai [1966] (complétant le travail de Kadison [1966]) a montré que pour toute algèbre de von Neumann $M \subset B(H)$ on a $H^1(M, M) = \{0\}$, d'où il résulte aussi que (pour toute C^*-algèbre A) toute dérivation $\delta : A \to B(H)$ prenant ses valeurs dans A est intérieure. L'extension du théorème de Sakai aux dimensions supérieures a résisté depuis lors : on ignore si $H^n(M, M) = \{0\}$ pour $n \geq 2$. En revanche, la version « complètement bornée » de cette conjecture (due à Kadison-Ringrose) est connue grâce aux nombreux travaux de E. Christensen et A. Sinclair dans les années 80, pour lesquels nous renvoyons au livre de A. Sinclair et R. Smith [1995]. Voir aussi le « survey » tout récent de Ringrose [1996]. Signalons en passant que le langage cohomologique s'adapte aussi aux problèmes discutés dans le premier paragraphe sur les représentations des groupes. Pour une plus vaste présentation des théories cohomologiques, voir aussi le livre de Helemskii [1989].

Parmi les problèmes en vogue à une certaine époque (voir par exemple [Foias 1972], [Fillmore et Williams 1971] et [Voiculescu 1972]) et qui se sont revélés équivalents au problème 3.1., on peut citer le « problème des images invariantes », attribué souvent à Dixmier, dont la thèse [Dixmier 1949] est consacrée à un sujet voisin. En réponse à une demande d'information de ma part, Dixmier m'a écrit qu'il avait posé ce problème, pour A algèbre de von Neumann, dans une lettre adressée à von Neumann vers 1950. Ce problème se pose comme suit : soit H un Hilbert, on dit qu'un sous-espace vectoriel $V \subset H$ est une image d'opérateurs s'il est l'image d'un opérateur borné sur H, *i.e.* il existe T dans $B(H)$ tel que $T(H) = V$ (Foias [1972] les appelle « parafermés »). On peut alors énoncer le « problème des images invariantes » (toujours ouvert) comme suit.

Problème 3.5. — *Soit $V \subset H$ une image d'opérateurs et soit $A \subset B(H)$ une C^*-sous-algèbre unitale. Supposons que V est invariant par A,* i.e. *que $aV \subset V$ pour tout a dans A. Existe-t-il un opérateur $\widetilde{T}$ dans A' (= le commutant de A) tel que $\widetilde{T}(H) = V$?*

Remarque 3.6. — Bien sûr, si $\widetilde{T} \in A'$ et $V = \widetilde{T}(H)$ alors V est invariant par A, la question est donc de savoir si la réciproque est vraie. Soulignons que V n'est **pas** supposé fermé (sinon c'est évident car le projecteur orthogonal P_V est dans A' si V est un invariant par A).

Suivant une idée de Foias [1972] nous allons voir qu'une réponse affirmative au problème 3.1. en entraîne une aussi pour le problème 3.5. En effet, soit $T \in B(H)$ tel que $T(H) = V$. Posons $K = Ker(T)^{\perp}$. Noter que $T(K) = V$. Soit $a \in A$ et $k \in K$.

Puisque $aT(K) \subset T(K)$, il existe un unique $\widehat{k}$ dans K tel que $aTk = T\widehat{k}$. Le théorème du graphe fermé montre que la correspondance $k \to \widehat{k}$ définit un opérateur linéaire borné que l'on note $u(a)$. On vérifie aisément que $a \to u(a) \in B(K)$ est un homomorphisme unital et une nouvelle application du théorème du graphe fermé montre que $a \to u(a)$ est borné. On notera que l'on a (soulignons que T^{-1} est non borné) $\forall a \in A \quad u(a) = T^{-1}aT$.

Supposons que u est semblable à une représentation, *i.e.* il existe $S : K \to K$ inversible borné tel que $S^{-1}u(.)S$ soit une représentation. On a donc $T^{-1}aT = S^{-1}\pi(a)S$, donc si $x = TS^{-1} : K \to H$ on a $x\pi(a) = ax$ pour tout a dans A. Mais comme A est une C^*-algèbre et $\pi(a^*) = \pi(a)^*$, on a $x\pi(a)^* = x\pi(a^*) = a^*x$ d'où en prenant les adjoint $\pi(a)x^* = x^*a$ soit finalement $x\pi(a)x^* = xx^*a$ mais aussi $x\pi(a)x^* = (x\pi(a))x^* = (ax)x^* = axx^*$. L'opérateur $\widetilde{T} = xx^* : H \to H$ est donc dans le commutant A' et il est clair que $\widetilde{T}(H) = x(H) = T(H)$. On a donc montré que « oui » au problème 3.1. entraîne « oui » au problème 3.5. En réalité l'inverse est aussi vrai et les deux problèmes sont en fait équivalents (voir Mathes [1989] pour plus de détails et d'autres références).

En effet, supposons inversement que l'on sache répondre « oui » au problème 3.5. pour une C^*-algèbre A. Soit alors $u : A \to B(H)$ un homomorphisme borné de la forme $u(a) = T^{-1}aT$ avec T borné injectif d'image

$V = T(H)$. Soit alors $\widetilde{T} \in A'$ comme dans le problème 3.5. Comme la projection sur $(Ker\ \widetilde{T})^\perp$ est dans A', on peut se ramener à $\widetilde{T}$ injectif. On a alors $u(a) = T^{-1}aT = T^{-1}(\widetilde{T}a\widetilde{T}^{-1})T$ mais $\widetilde{T}^{-1}T : H \to H$ et $T^{-1}\widetilde{T} : H \to H$ sont bornés par le théorème du graphe fermé, donc u est « orthogonalisable ».

Reste à montrer que l'on peut effectivement se restreindre à des homomorphismes u de cette forme dans le problème 3.1. Montrons–le.

Soit $u : A \to B(H)$ un homomorphisme unital borné. Supposons H séparable pour simplifier, soit (ξ_n) une suite dense, et soit $H_n \subset H$ défini par

$$H_n = \overline{u(A)\xi_1 + \ldots + u(A)\xi_n}.$$

L'homomorphisme $u_n : A \to B(H_n)$ défini par $u_n(a) = u(a)_{|H_n}$ admet évidemment $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ comme sous-ensemble fini cyclique, donc d'après Haagerup [1983], u_n est orthogonalisable. D'où $S_n : H_n \to H_n$ borné inversible et une représentation $\pi_n : A \to B(H_n)$ tels que $u_n(.) = S_n^{-1}\pi_n(.)S_n$. On peut supposer $\|S_n\| = 1$. Soit $\widehat{H}$ la somme directe $H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots$ et soient $\widehat{S} : \widehat{H} \to \widehat{H}, \widehat{\pi} : A \to B(\widehat{H})$ et $\widehat{u} : A \to B(\widehat{H})$ définis par $\widehat{S} = \oplus\ S_n, \widehat{\pi}(a) = \oplus\ \pi_n(a)$ et $\widehat{u}(a) = \oplus\ u_n(a)$. On a $\|\widehat{S}\| = 1$, $\widehat{S}$ est injectif et d'image dense et $\widehat{u}(.) = \widehat{S}^{-1}\widehat{\pi}(.)\widehat{S}$. D'après ce qui précède, $\widehat{u}$ est orthogonalisable. On en déduit alors que tout ultraproduit des u_n et donc finalement u lui-même est orthogonalisable. On peut aussi utiliser le théorème 4.2. ci-dessous, il suffit alors d'observer que

$$\|u\|_{cb} = \sup \|u_n\|_{cb} = \|\widehat{u}\|_{cb} < \infty.$$

On notera que l'on peut supposer sans restreindre la généralité dans le problème 3.5. que A est une algèbre de von Neumann, puisque c'était déjà le cas pour le problème 3.1., par passage au bidual. Voir Ong [1981] pour plus de détails sur ce point.

Une autre version du problème 3.1. est apparue dans les travaux de W. Arveson sur les « algèbres à chaînes ». Il s'agit d'une classe de sous-algèbres *non autoadjointes* de $B(H)$, dont l'exemple le plus simple est l'algèbre des matrices triangulaires supérieures dans l'algèbre M_n des matrices $n \times n$ ou bien dans $B(\ell_2)$. Plus précisement, on appelle « chaîne » sur un Hilbert H une famille C de sous-espaces fermés de H totalement ordonnée pour l'inclusion et telle que pour toute sous-famille $(E_i)_{i\in I}$ de C on a

$$\bigcap_{i\in I} E_i \in C \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcup_{i\in I} E_i} \in C.$$

Etant donnée une telle « chaîne », on lui associe la sous-algèbre $A(C) \subset B(H)$ formée des opérateurs T de $B(H)$ tels que

$$\forall i \in I \quad T(E_i) \subset E_i.$$

Ces algèbres seront appelées ici « algèbres à chaînes » (il n'y a apparemment pas de terme français dans la littérature, les anglo-saxons disent « nest algebras »). Par exemple, l'algèbre des matrices triangulaires supérieures dans M_n correspond à la chaîne formée des sous-espaces E_i engendrés par les i premiers vecteurs de la base canonique ($i = 1, \ldots, n$) dans l'espace ℓ_n^2. Ces algèbres ont été introduites par Ringrose [1961] à la suite des travaux de Kadison et Singer [1960] sur les « algèbres triangulaires ». Voir Davidson [1988] pour un exposé complet de ce sujet. Le résultat le plus frappant de la théorie est une formule de distance due à Arveson [1975], comme suit : soit $A \subset B(H)$ une sous-algèbre, on note $Lat(A)$ l'ensemble des sous-espaces fermés $E \subset H$ qui sont invariants par A (*i.e.* $aE \subset E \; \forall a \in A$). Soit alors T dans $B(H)$. On note $d(T, A)$ la distance (normique) de T à A. Il est facile de voir que pour tout sous-espace A-invariant E on a

$$\|(1 - P_E)T\, P_E\| \leq d(T, A),$$

d'où l'on tire

$$\forall\, T \in B(H) \quad \sup\{\|(1 - P_E)T\, P_E\| \mid E \in Lat(A)\} \leq d(T, A).$$

Le fondement de la théorie d'Arveson [1975] est le fait que si A est une algèbre à chaînes, on a *égalité* dans la formule précédente.

Cela a conduit à étudier cette formule de distance pour des classes plus générales d'algèbres. On appelle « réflexive » une sous-algèbre $A \subset B(H)$ telle que

$$(T(E) \subset E \quad \forall E \in Lat(A)) \Rightarrow T \in A.$$

On appelle « hyper-réflexive » une sous-algèbre $A \subset B(H)$ pour laquelle il existe une constante K telle que

$$\forall T \in B(H) \quad d(T, A) \leq K \sup\{\|(1 - P_E)T\, P_E\| \quad | \quad E \in Lat(A)\}.$$

Comme on vient de le voir, ceci est vrai avec $K = 1$ pour toute algèbre à chaîne. Bien que cela n'ait pas été clair dès le départ, il y a des algèbres réflexives qui ne sont pas hyper-réflexives (voir [Kraus et Larson 1985]). Le théorème du bicommutant de von Neumann (qui assure que $M = (M')'$) nous garantit évidemment que toute algèbre de von Neumann M est réflexive. Mais est-elle hyper-réflexive ?

C'est un problème ouvert, équivalent au problème 3.1. Explicitement :

Problème 3.7. — *Toute algèbre de von Neumann M est-elle hyper-réflexive ? Plus précisement, supposons $M \subset B(H)$, existe-t-il une constante K telle* *que, pour tout T dans $B(H)$ on a*

$$\sup\{\|(1-P)TP\| \quad | \quad P \in M'\} \leq K\ d(T, M) \quad ?$$

Essentiellement, la réponse est affirmative (d'après les travaux de Christensen [1978, 1982a,b]) pour la même classe d'algèbres que pour le problème 3.3.

Les problèmes 3.1. et 3.3. sont aussi intimement liés à des problèmes de perturbation des algèbres de von Neumann posés dans [Kadison et Kastler 1972] : soient M, N deux algèbres de von Neumann, notons $d(M, N)$ leur distance de Hausdorff et supposons $d(M, N) < \epsilon$ (cela signifie que tout point de la boule unité de M est à distance $< \epsilon$ d'un point de la boule unité de N, et vice versa). Si $\epsilon > 0$ est est assez petit, existe-t-il un unitaire U dans $B(H)$ tel que $\|U - I\|$ est $o(\epsilon)$ et tel que $U^*MU = N$? Une réponse positive aux problèmes 3.1. et 3.3. permettrait (d'après les travaux de Christensen [1977a,b, 1980]) de progresser sur ce problème qui reste lui-aussi ouvert.

4. Applications complètement bornées

Comme nous allons le voir, la théorie récente des applications complètement bornées permet de traiter dans un cadre commun tous les problèmes précédents.

Soit $A \subset B(\mathcal{H})$ un sous-espace vectoriel et soit $u : A \to B(H)$ une application linéaire. On note $M_n(B(H))$ (resp. $M_n(A)$) l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $B(H)$ (resp. dans A), muni de la norme induite par l'espace $B(H \oplus \ldots \oplus H)$ (resp. $B(\mathcal{H} \oplus \ldots \oplus \mathcal{H})$). On note $u_n\ :\ M_n(A) \to M_n(B(H))$, l'application définie par

$$u_n((a_{ij})) = (u(a_{ij})).$$

(Si l'on pose $M_n(A) = M_n \otimes A$, alors $u_n = I_{M_n} \otimes u$).

Définition. — Dans la situation précédente, on dit que $u : A \to B(H)$ est complètement bornée (c.b. en abrégé) si

$$\sup_{n \geq 1} \{\|u_n\|\, ;\, u_n : M_n(A) \to M_n(B(H))\} < \infty,$$

et l'on pose

$$\|u\|_{cb} = \sup_{n \geq 1} \|u_n\|.$$

Par exemple, toute C^*-représentation $\pi : A \to B(H)$ est c.b. et $\|\pi\|_{cb} = \|\pi\| \leq 1$. En général, on a $\|u\| \leq \|u\|_{cb}$ et il existe des applications bornées mais pas c.b. (par exemple la transposition des matrices de $B(\ell_2)$ dans lui-même est isométrique mais pas c.b.).

Dans la situation précédente, on dit que u est complètement positive (c.p. en abrégé) si $u_n : A \to B(H)$ est complètement positive pour tout n, c'est-à-dire si

$$a \in M_n(A) \cap M_n(B(\mathcal{H}))_+ \qquad \text{entraîne} \qquad u_n(a) \in M_n(B(H))_+$$

(rappelons que pour une C^*-algèbre M, $M_+ = \{x \in M | x = x^* \text{ et } x \geq 0\}$). Bien entendu, cette notion n'est utile que si $M_n(A) \cap M_n(B(\mathcal{H}))_+$ n'est pas trop petit, par exemple si A est une sous-C^*-algèbre, ou bien si A est un « système d'opérateurs » (ce qui veut dire $I \in A$ et $a \in A \Rightarrow a^* \in A$).

La notion d'application c.p. sur une C^*-algèbre remonte à [Stinespring 1955]. Elle est devenue omniprésente dans la théorie des algèbres d'opérateurs à la suite des travaux fondamentaux d'Arveson [1969] sur les systèmes d'opérateurs. La notion d'application c.b. est apparue déjà dans [Arveson 1969] mais ce dernier ne considère pratiquement que des contractions complètes (on appelle ainsi toute application u vérifiant $||u||_{cb} \leq 1$). Cette notion s'est rapidement développée à partir de 1980 après la découverte d'un théorème remarquable de factorisation dû indépendamment à Wittstock [1981], Haagerup [1980], Paulsen [1982], qui s'énonce comme suit :

Théorème 4.1. — *Soit $A \subset B(\mathcal{H})$ un sous-espace vectoriel de $B(H)$ et soit $u : A \to B(H)$ une application linéaire. Fixons une constante $C \geq 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. L'application u est c.b et $\|u\|_{cb} \leq C$.

ii. Il existe une représentation $\pi : B(\mathcal{H}) \to B(\widehat{H})$ et des opérateurs $V_1 : H \to \widehat{H}$ et $V_2 : H \to \widehat{H}$ avec $\|V_1\| \, \|V_2\| \leq C$ tels que

$$\forall a \in A \quad u(a) = V_1^* \pi(a) V_2 \, .$$

Voir les livres Paulsen [1986] ou Pisier [1995] pour plus de détails. C'est à travers le résultat suivant dû à Paulsen [1984b] (et à Haagerup [1983] pour une C^*-algèbre A) que les applications complètement bornées permettent d'unifier les problèmes de similarité qui précèdent.

Théorème 4.2. — *Soit $A \subset B(\mathcal{H})$ une sous-algèbre fermée contenant l'unité de $B(\mathcal{H})$. Soit $u : A \to B(H)$ un homomorphisme avec $u(1) = 1$ et soit C une constante. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i. *L'application u est c.b. et $\|u\|_{cb} \leq C$.*

ii. *Il existe $S : H \to H$ inversible satisfaisant $\|S^{-1}\|\|S\| \leq C$ tel que l'homomorphisme $\widetilde{u}$ défini par $\widetilde{u}(a) = S^{-1}u(a)S \quad \forall a \in A$ vérifie*

$$\|\widetilde{u}\|_{cb} \leq 1.$$

iii. *Il existe un Hilbert $\widehat{H}$, une représentation $\pi : B(\mathcal{H}) \to B(\widehat{H})$, un sous-espace $E \subset \widehat{H}$ et un isomorphisme $S : H \to E$ vérifiant $\|S\|\|S^{-1}\| \leq C$ et tel que*

$$u(a) = S^{-1}[P_E\ \pi(a)_{|E}]S. \tag{4.1}$$

Démonstration esquissée. Les implications (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) sont évidentes. Supposons (i). Le théorème 4.1. permet d'écrire

$$u(a) = V_1^*\pi(a)V_2 \quad \text{avec} \quad \|V_1\|\|V_2\| \leq C \quad \text{et} \quad V_1^*V_2 = 1.$$

Soit alors $E_1 \subset \widehat{H}$ le sous-espace fermé engendré par $\pi(A)V_2(H)$ et soit $E_2 \subset E_1$ le noyau V_1^* restreint à E_1. On pose $E = E_1 \ominus E_2$ et $Sh = P_EV_2h$ pour tout h dans H. On peut alors vérifier que S est inversible et $S^{-1}x = V_1^*x$ si $x \in E$, d'où $\|S\|\ \|S^{-1}\| \leq \|V_2\|\ \|V_1\| \leq C$. Enfin on vérifie aisément (4.1).

Remarque 4.3. — Le sous-espace E apparaissant dans (iii) ci-dessus est nécessairement semi-invariant pour $\pi(A)$, d'après le théorème 2.2.

Le théorème 4.2. peut s'appliquer dans chacune des situations précédentes. Revenons tout d'abord au §1.

Soit G un groupe discret. Notons $\mathbb{C}[G]$ l'algèbre du groupe et $C^*(G)$ la C^*-algèbre (pleine) du groupe G , c'est-à-dire la C^*-algèbre engendrée par la représentation universelle de G . On a une inclusion naturelle $\mathbb{C}[G] \subset C^*(G)$ (à image dense). On a alors :

Corollaire 4.4. — *Une représentation uniformément bornée $\pi : G \to B(H)$ est unitarisable si et seulement si elle s'étend en une application complètement bornée sur $C^*(G)$.*

Considérons maintenant le §2. Soit $T \in B(H)$ un opérateur polynomialement borné. Alors d'après le théorème 4.2., T est semblable à une contraction si et seulement si l'homomorphisme $\rho_T : P \to P(T)$ est complètement borné sur l'algèbre du disque $A(D)$ (*i.e.* la complétion des polynômes pour la norme $\| \quad \|_\infty$). Donnons-en un énoncé plus précis :

Corollaire 4.5. — *Soit $T \in B(H)$ et soit C une constante. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. Il existe un opérateur S inversible sur H tel que

$$\|S^{-1}TS\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \|S^{-1}\| \, \|S\| \leq C.$$

ii. $\|\rho_T\|_{cb} \leq C$.

iii. Pour tout n et tout polynôme $P(z) = \sum_0^N a_h z^h$ à coefficients dans M_n on a

$$\| \sum_0^N a_h \otimes T^h \|_{M_n(B(H))} \leq C \sup_{|z|=1} \|P(z)\|_{M_n}.$$

On peut aussi donner des énoncés analogues pour des k-uplets d'opérateurs $(T_1, \ldots, T_k)$ commutant entre eux ou bien pour des algèbres uniformes $A(\Omega)$ avec Ω domaine de $\mathbb{C}^n$ à la place de $A(D)$.

Passons maintenant aux problèmes considérés au §3. Appliqué à une C^*-algèbre, le théorème 4.2. nous donne :

Corollaire 4.6. — *Le problème 3.1. est équivalent au suivant : est-il vrai que pour tout homomorphisme unital $u : A \to B(H)$ sur une C^*-algèbre à unité, « borné » implique automatiquement « complètement borné ».*

Quant aux dérivations, Christensen [1977b] montre qu'une dérivation $\delta : A \to B(H)$ est complètement bornée si et seulement si elle est intérieure. Le problème 3.3. revient donc à montrer que, pour une dérivation, on a encore : borné $\Rightarrow$ *c.b.* Plus précisement, si A est une algèbre de von Neumann on peut écrire (cf. [Christensen 1977b])

$$\|\delta\|_{cb} = 2 \inf\{\|x\| \mid x \in B(H), \quad \delta(a) = ax - xa \quad \forall a \in A\}.$$

Si $\delta(a) = ax - xa$, l'inégalité

$$\|\delta\|_{cb} \leq 2\|x\| \quad (\text{donc} \quad \|\delta\|_{cb} \leq 2 \inf \|x\|)$$

est évidente, c'est l'inverse qui est non trivial.

Dans le langage cohomologique, on peut bien sûr introduire l'analogue *c.b.* de $H^1(A, B(H))$ que l'on note $H^1_{cb}(A, B(H))$, mais les remarques précédentes montrent que

$$H^1_{cb}(A, B(H)) = \{0\}$$

pour toute C^*-algèbre A. Signalons qu'il existe une notion d'application *multilinéaire* c.b. (voir [Christensen et Sinclair 1989]) qui permet de définir aussi $H^n_{cb}(A, B(H))$, et [Christensen *et al.* 1987] ont montré que ce groupe est toujours réduit à $\{0\}$. Voir [Sinclair et Smith 1995] pour un exposé détaillé.

Le problème des images invariantes de Dixmier (problème 3.5.) se prête aussi à une reformulation en termes *c.b.* En effet, soit $V \subset H$ une image d'opérateur invariante par une C^*-algèbre $A \subset B(H)$. Posons $\widehat{H} = H \oplus H \oplus \dots$ (somme directe infinie) et soit $\widetilde{A} \subset B(\widetilde{H})$ l'ampliation de A, c'est-à-dire avec l'identification

$$\widetilde{H} = H \bigotimes_2 \ell_2, \quad \text{que} \quad \widetilde{A} = \{a \otimes I \mid a \in A\}.$$

Supposons $V = T(H)$ avec $T \in B(H)$ et posons $\widetilde{V} = (T \otimes I)(\widetilde{H})$. Supposons V invariant par A. Alors il existe $\widetilde{T}$ dans A' tel que $\widetilde{T}(H) = T(H)$ si et seulement si $\widetilde{V}$ est un sous-espace vectoriel invariant pour la C^*-algèbre $\widehat{A} \subset B(H \otimes_2 \ell_2)$ engendrée par les opérateurs de la forme $a \otimes t$ avec $a \in A$ et t compact de ℓ_2 dans ℓ_2. Pour ce dernier énoncé, voir [Paulsen 1982].

Bibliographie

Adian (S.I.)

[1979] *The Burnside problem and identities in groups*, Springer, 1979.

Ando (T.)

[1963] On a pair of commutative contractions, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 24 (1963), p. 88–90.

Arveson (W.)

[1969] Subalgebras of C^*-algebras, *Acta Math.*, 123 (1969), p. 141–224; Part II, *Acta Math.*, 128 (1972) p. 271–308.

[1975] Interpolation problems in nest algebras, *J. Funct. Anal.*, 20 (1975), p. 208–233.

Bourgain (J.)

[1986] On the similarity problem for polynomially bounded operators on Hilbert space, V, *Israel J. Math.*, 54 (1986), p. 227–241.

Bożejko (M.)

[1985] Positive definite bounded matrices and a characterization of amenable groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 95 (1985), p. 357–360.

[1987a] Littlewood functions, Hankel multipliers and power bounded operators on a Hilbert space, *Colloq. Math.*, 51 (1987), p. 35–42.

[1987b] Uniformly bounded representations of free groups, *J. Reine Angew. Math.*, 377 (1987), p. 170–186.

Bożejko (M.) et Fendler (G.)

[1991] Herz-Schur multipliers and uniformly bounded representations of discrete groups, *Arch. Math.*, 57 (1991), p. 290–298.

Bunce (J.W.)

[1981] The similarity problem for representations of C^*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 81 (1981), p. 409–414.

Cartier (P.)

[1973] Harmonic analysis on trees, dans *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, Providence : AMS (Proc. Sympos. Pure Math. vol. 26), 1973, p. 419–424.

Christensen (E.)

[1977a] Perturbation of operator algebras, *Invent. Math.*, 43 (1977), p. 1–13.

[1977b] Perturbation of operator algebras, II, *Indiana Univ. Math. J.*, 26 (1977), p. 891–904.

[1978] Extensions of derivations, *J. Funct. Anal.*, 27 (1978), p. 234–247.

[1980] Near inclusions of C^*-algebras, *Acta Math.*, 144 (1980), p. 249–265.

[1981] On non self adjoint representations of operator algebras, *Amer. J. Math.*, 103 (1981), p. 817–834.

[1982a] Extensions of derivations, II., *Math. Scand.*, 50 (1982), p. 111–122.

[1982b] Derivations and their relation to perturbation of operator algebras, dans *Operator algebras and applications*, Providence : AMS (Proc. Sympos. Pure Math. vol. 38-2), 1982, p. 261–273.

Christensen (E.), Effros (E.) et Sinclair (A.)

[1987] Completely bounded multilinear maps and C^*-algebraic cohomology, *Invent. Math.*, 90 (1987), p. 279–296.

Christensen (E.) et Sinclair (A.)

[1989] A survey of completely bounded operators, *Bull. London Math. Soc.*, 21 (1989), p. 417–448.

CONNES (A.)

[1990] *Géométrie non commutative*. Paris : Inter Editions, 1990. Trad. angl. San Diego : Academic Press, 1994.

CONWAY (J.)

[1991] *The theory of subnormal operators*, Providence : AMS (Math. Surveys, vol. 26), 1991.

COWLING (M.)

[1978] The Kunze-Stein phenomenon, *Ann. of Math.*, 107 (1978), p. 209–234.

[1982] Unitary and uniformly bounded representations of some simple Lie groups, *CIME Course 1980*, Napoli : Liguori, (1982), p. 49–128.

CRABB (M.) et DAVIE (A.)

[1975] von Neumann's inequality for Hilbert space operators, *Bull. London Math. Soc.*, 7 (1975), p. 49–50.

DAVIDSON (K.)

[1988] *Nest Algebras*, Harlow : Longman (Pitman Research Notes in Math., vol. 191), 1988.

DAY (M.)

[1950] Means for the bounded functions and ergodicity of the bounded representations of semi-groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 69 (1950), p. 276–291.

DIEUDONNÉ, (J.)

[1960] Sur le produit de composition (II), *J. Math. Pures Appl.*, 39 (1960), p. 275–292.

DIXMIER (J.)

[1949] Etude sur les variétés et les opérateurs de Julia, *Bul. Soc. Math. France*, 77 (1949), p. 11–101.

[1950] Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 12 (1950), p. 213–227.

DIXON (P.)

[1995] Banach algebras satisfying the non-unital von Neumann inequality, *Bull. London Math. Soc.*, 27 (1995), p. 359–262.

DOUGLAS (V.) et PAULSEN (V.)

[1989] *Hilbert modules over function algebras*, Harlow : Longman (Pitman Research Notes in Math., vol. 217), 1989.

EHRENPREIS (L.) et MAUTNER (F.)

[1955] Uniformly bounded representations of groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 41 (1955), p. 231–233.

EYMARD (P.)

[1964] L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, *Bull. Soc. Math. France*, 92 (1964), p. 181–236.

FENDLER (G.)

[1990] A uniformly bounded representation associated to a free set in a discrete group, *Colloq. Math.*, 59 (1990), p. 223–229.

FIGÀ-TALAMANCA (A.) et PICARDELLO (M.)

[1983] *Harmonic analysis on free groups*. New York : Marcel Dekker, 1983.

FILLMORE (P.A.) et WILLIAMS (J.P.)

[1971] On operator ranges, *Adv. Math.*, 7 (1971), p. 254–281.

FOGUEL (S.)

[1964] A counterexample to a problem of Sz.-Nagy, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15 (1964), p. 788–790.

FOIAS (C.)

[1972] Invariant paraclosed subspaces, *Indiana Univ. Math. J.*, 21 (1972), p. 887–906.

GROMOV (M.)

[1987] Hyperbolic groups, dans *Essays in group theory* (éd. par S. Gersten), Springer, p. 75–263.

GUICHARDET (A.)

[1966] Sur l'homologie et la cohomologie des algèbres de Banach, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 262 (1966), p. 38–41.

HAAGERUP (U.)

[1980] Decomposition of completely bounded maps on operator algebras, manuscript.

[1983] Solution of the similarity problem for cyclic representations of C^*-algebras, *Ann. of Math.*, 118 (1983), p. 215–240.

[1985] $M_0A(G)$ functions which are not coefficients of uniformly bounded representations, manuscript.

HALMOS (P.)

[1970] Ten problems in Hilbert space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76 (1970), p. 887–933.

HELEMSKII (A.Y.)

[1989] *The homology of Banach and topological algebras*, Dordrecht : Kluwer, 1989.

HOCHSCHILD (G.)

[1945] On the cohomology groups of an associative algebra, *Ann. of Math.*, 46 (1945), p. 58–67.

JOHNSON (B.E.)

[1972] *Cohomology in Banach algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 127, Providence : AMS, 1972.

KADISON (R.)

[1955] On the orthogonalization of operator representations, *Amer. J. Math.*, 77 (1955), p. 600–620.

[1966] Derivations of operator algebras, *Ann. of Math.*, 83 (1966), p. 280–293.

KADISON (R.) et KASTLER (D.)

[1972] Perturbations of von Neumann algebras, *Amer. J. Math.*, 94 (1972), p. 38–54.

KADISON (R.) et RINGROSE (J.)

[1971] Cohomology of operator algebras, *Acta Math.*, 126 (1971), p. 227–243.

[1986] *Fundamentals of the theory of operators algebras, Vol. II Advanced Theory*, Orlando : Academic Press, 1986.

KADISON (R.) et SINGER (I.)

[1960] Triangular operator algebras, *Amer. J. Math.*, 82 (1960), p. 227–259.

KAMOWITZ (H.)

[1962] Cohomology groups of commutative Banach algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 102 (1962), p. 352–372.

KAPLANSKY (I.)

[1953] Modules over operator algebras, *Amer. J. Math.*, 75 (1953), p. 839–853.

KIRCHBERG (E.)

[1996] The derivation and the similarity problem are equivalent, *J. Operator Theory*, 36 (1996), p. 59–62.

KRAUS (J.) et LARSON (D.)

[1985] Some applications of a technique for constructing reflexive operator algebras, *J. Operator Theory*, 13 (1985), p. 227–236.

KUNZE (R.A.) et STEIN (E.)

[1960] Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 real unimodular group, *Amer. J. Math.*, 82 (1960), p. 1–62 ; Part II, *Amer. J. Math.*, 83 (1961), p. 723–786.

LEBOW (A.)

[1968] A power bounded operator which is not polynomially bounded, *Michigan Math. J.*, 15 (1968), p. 397–399.

LOSERT (V.)

[1984] Properties of the Fourier algebra that are equivalent to amenability, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 92 (1984), p. 347–354.

MANTERO (A.M.) et ZAPPA (A.)

[1983] The Poisson transform on free groups and uniformly bounded representations, *J. Funct. Anal.*, 51 (1983), p. 372–399.

MATHES (B.)

[1989] Operator ranges and completely bounded homomorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 107 (1989), p. 155–164.

NEBBIA (C.)

[1982] Multipliers and asymptotic behaviour of the Fourier algebra of nonamenable groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 84 (1982), p. 549–554.

VON NEUMANN (J.)

[1929] Zur allgemeinen Theorie des Masses, *Fund. Math.*, 13 (1929), p. 73–116.

[1951] Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachr.*, 4 (1951), p. 49–131.

NOVIKOV (P.S.) et ADIAN (S.I.)

[1968] Infinite periodic groups I, II, III., *Izvest. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 32 (1968), p. 212–244, 251–524, 709–731.

OLSHANSKII (A.Y.)

[1980] On the problem of an invariant mean on a group, *Russian Math. Surveys*, 35 (1980), p. 180–181.

ONG (S.C.)

[1981] Operator topologies and invariant operator ranges, *Canad. Math. Bull.*, 24 (1981), p. 181–186.

PARROTT (S.)

[1970] Unitary dilations for commuting contractions, *Pacific J. Math.*, 34 (1970), p. 481–490.

PATERSON (A.)

[1988] *Amenability*, Providence : A.M.S. (Math. Surveys, vol. 29), 1988.

PAULSEN (V.)

[1982] Completely bounded maps on C^*-algebras and invariant operator ranges, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 86 (1982), p. 91–96.

[1984a] Every completely polynomially bounded operator is similar to a contraction, *J. Funct. Anal.*, 55 (1984), p. 1–17.

[1984b] Completely bounded homomorphisms of operator algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 92 (1984), p. 225–228.

[1986] *Completely bounded maps and dilations*, Harlow : Longman (Pitman Research Notes in Math. vol. 146), 1986.

PELLER (V.)

[1982] Estimates of functions of power bounded operators on Hilbert space, *J. Operator Theory*, 7 (1982), p. 341–372.

PHILLIPS (J.)

[1982] Invariant of C^*–algebras stable under perturbations, dans *Operator algebras and applications*, Providence : AMS (Proc. Sympos. Pure Math. vol. 38-2), 1982, p. 275–279.

PIER (J. P.)

[1984] *Amenable locally compact groups*, New York : Wiley, 1984.

[1988] *Amenable Banach algebras*, Harlow : Longman (Pitman Research Notes in Math. vol. 172), 1988.

PISIER (G.)

[1978] Grothendieck's theorem for noncommutative C^*-algebras with an appendix on Grothendieck's constants, *J. Funct. Anal.*, 29 (1978), p. 397–415.

[1995] *Similarity problems and completely bounded maps*, vol. 1680 des Lecture Notes, Springer, 1995.

[1997] A polynomially bounded operator on Hilbert space which is not similar to a contraction, *J. Amer. Math. Soc.*, 10 (1997), p. 351–369.

PYTLIK (T.) et SZWARC (R.)

[1986] An analytic family of uniformly bounded representations of free groups, *Acta Math.*, 157 (1986), p. 287–309.

RINGROSE (J.)

[1961] Algebraic isomorphisms between ordered bases, *Amer. J. Math.*, 83 (1961), p. 463–478.

[1982] Cohomology theory for operator algebras, dans *Operator algebras and applications*, Providence : AMS (Proc. Sympos. Pure Math. vol. 38-2), 1982, p. 229–252.

[1996] The cohomology of operator algebras : a survey, *Bull. London Math. Soc.*, 28 (1996), p. 225–241.

Rota (G.)

[1960] On models for linear operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, 13 (1960), p. 468–472.

Russo (B.) et Dye (H.)

[1966] A note on unitary operators in C^*-algebras, *Duke Math. J.*, 33 (1966), p. 413–416.

Sakai (S.)

[1966] Derivations of W^*-algebras, *Ann. of Math.*, 83 (1966), p. 273–279.

Sally (P.J.)

[1968] Unitary and uniformly bounded representations of the two by two unimodular group over local fields, *Amer. J. Math.*, 90 (1968), p. 406–443.

Sarason (D.)

[1965] On spectral sets having connected complement, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 26 (1965), p. 289–299.

[1967] Generalized interpolation in H^∞, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 127 (1967), p. 179–203.

Sinclair (A.) et Smith (R.)

[1995] *Hochschild cohomology of von Neumann algebras*. LMS Lecture Note Series, vol. 203, Cambridge Univ. Press, 1995.

Stinespring (W.)

[1955] Positive functions on C^*-algebras, *Proc. Amer. Math.Soc.*, 6 (1955), p. 211–216.

Sz.-Nagy (B.)

[1946] On uniformly bounded linear transformations on Hilbert space, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 11 (1946), p. 152–157.

[1953] Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 15 (1953), p. 87–92.

[1958] Spectral sets and normal dilations of operators, dans *Proc. Intern. Congr. Math., Edinburgh, 1958*, Cambridge Univ. Press, p. 412–422.

[1959] Completely continuous operators with uniformly bounded iterates, *Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. Sci.*, 4 (1959), p. 89–92.

Sz.-Nagy (B.) et Foias (C.)

[1970] *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*. Budapest : Akademiai Kiadó, 1970.

Szwarc

[1988] An analytic family of irreducible representations of the free group, *Ann. Inst. Fourier*, 38 (1988), p. 87–100.

TITS (J.)

[1972] Free subgroups in linear groups, *J. Algebra*, 20 (1972), p. 250–272.

VALETTE (A.)

[1990a] Cocycles d'arbres et représentations uniformément bornées, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 310 (1990), p. 703–708.

[1990b] Les représentations uniformément bornées associées à un arbre réel, *Bull. Soc. Math. Belg.*, 42 (1990), p. 747–760.

VAROPOULOS (N.)

[1974] On an inequality of von Neumann and an application of the metric theory of tensor products to operators theory, *J. Funct. Anal.*, 16 (1974), p. 83–100.

VASILESCU (F.H.) et ZSIDO (L.)

[1974] Uniformly bounded groups in finite W^*-algebras, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 36 (1974), p. 189–192.

VOICULESCU (D.)

[1972] Sur les sous-espaces parafermés invariants d'une algèbre de von Neumann, *Bull. Sci. Math.*, 96 (1972), p. 161–168.

WASSERMANN (S.)

[1976] On tensor products of certain group C^*-algebras, *J. Funct. Anal.*, 23 (1976), p. 239–245.

WITTSTOCK (G.)

[1981] Ein operatorwertiger Hahn-Banach Satz, *J. Funct. Anal.*, 40 (1981), p. 127–150.

WYSOCZANSKI (J.)

[1993] An analytic family of uniformly bounded representations of a free product of discrete groups, *Pacific J. Math.*, 157 (1993), p. 373–385.