Séminaires & Congrès
7, 2003, p. 45–100

ESPACES DE DAMEK-RICCI, GÉOMÉTRIE ET ANALYSE

par

François Rouvière

Résumé. — Introduits comme certains groupes de Lie résolubles munis d'une métrique invariante à gauche, les espaces de Damek-Ricci généralisent les espaces hyperboliques. Ils fournissent une large classe d'exemples de variétés riemanniennes harmoniques qui ne sont pas des espaces symétriques.
En l'absence du groupe compact K des espaces symétriques G/K, l'extension aux espaces de Damek-Ricci des résultats classiques de géométrie et d'analyse harmonique hyperboliques (géodésiques, fonctions sphériques, équations de la chaleur ou des ondes, transformation de Radon) comporte des difficultés nouvelles. On décrit les méthodes qui permettent d'étendre ces résultats.

Abstract **(Damek-Ricci spaces : Geometry and Analysis).** — Generalizing hyperbolic spaces, Damek-Ricci spaces are defined as certain solvable Lie groups equipped with a left-invariant metric. They provide a large class of examples of Riemannian harmonic manifolds which are not symmetric spaces.
Extending to all Damek-Ricci spaces classical results about hyperbolic geometry and harmonic analysis (geodesics, spherical functions, heat or wave equations, Radon transform) entails new difficulties, because of the lack of the compact group K of symmetric spaces G/K. We describe the methods allowing such extensions.

1. Introduction

On sait le rôle important joué en analyse sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, par la fonction $1/r^{n-2}$, où r est la distance à une origine (arbitraire) de l'espace : c'est, à un facteur près, une solution élémentaire radiale de l'opérateur de Laplace $\Delta = \sum_1^n (\partial/\partial x^i)^2$. Pour $n = 3$ notamment, le potentiel $1/r$ est un outil fondamental de la théorie de la gravitation newtonienne, ou de l'électrostatique.

Il est naturel de chercher à étendre ce résultat à une variété riemannienne M de dimension n. Sa métrique définit une notion de distance géodésique $d(x, y)$ entre les

Classification mathématique par sujets **(2000).** — 22E25, 43A80, 43A90, 53B20, 53C22.
Mots clefs. — Variété harmonique, espace de Damek-Ricci, espace hyperbolique, géodésique, fonction sphérique.

points x, y de M, et un opérateur de Laplace-Beltrami L. Étant donnée une origine $m \in M$, l'opérateur L admet-il (au moins localement) une solution élémentaire radiale autour de m, *i.e.* fonction de $d(m, x)$ seul ? Quelques premiers résultats dans ce sens ont été obtenus par H. Ruse en 1930, mais il est vite apparu que la réponse est en général négative pour une variété riemannienne arbitraire. J. Hadamard avait, par ailleurs, donné une construction générale d'une solution élémentaire de L, se comportant au voisinage de m comme $1/d(m, x)^{n-2}$, mais non nécessairement radiale (*cf.* [**SS**]).

On dit que M est une *variété harmonique* si, pour toute origine $m \in M$, le laplacien L admet une solution élémentaire radiale autour de m. Sur une telle variété on peut espérer réduire nombre de problèmes d'analyse, par moyenne sur des sphères, à des questions de fonctions radiales, soit en fin de compte à de l'analyse à une dimension. Il est donc utile de chercher à caractériser les variétés harmoniques.

En 1944, l'article [**L**] d'A. Lichnérowicz apporte plusieurs réponses à cette question, montre que toute variété harmonique est d'Einstein, et esquisse une preuve du fait que toute variété harmonique de dimension au plus 4 est un espace symétrique. Il se termine par les deux phrases (où H_n signifie variété harmonique de dimension n) :

« *Il est intéressant de savoir dans quelle mesure le résultat énoncé relatif aux H_4 peut s'étendre à des espaces H_n quelconques. Je reviendrai sur cette question ultérieurement.* »

Un peu abusivement baptisé « conjecture de Lichnérowicz », ce problème (une variété harmonique est-elle nécessairement un espace symétrique ?) est longtemps resté sans réponse satisfaisante. En 1990, Z. Szabó [**S**] donne une réponse affirmative pour les variétés harmoniques *compactes* simplement connexes et la surprise n'en est que plus grande, en 1992, quand Ewa Damek et Fulvio Ricci(1) [**DR1**] exhibent une large classe de variétés harmoniques (non compactes) qui ne sont pas des espaces symétriques.

À l'origine de cette construction est un article d'A. Kaplan [**Ka**], qui introduit en 1980 la classe des groupes de Lie nilpotents « de type Heisenberg » afin de construire des solutions élémentaires explicites pour leurs sous-laplaciens, qui sont des opérateurs différentiels hypoelliptiques du second ordre. On appelle désormais « *espaces de Damek-Ricci* », ou « *groupes harmoniques NA* », des groupes de Lie obtenus par produit semi-direct d'un groupe nilpotent de type Heisenberg N par une droite A, et munis d'une métrique riemannienne invariante à gauche.

Parmi eux figurent les espaces riemanniens symétriques de rang un et de type non compact, c'est-à-dire les espaces hyperboliques réels, complexes, ou quaternioniques, et l'espace hyperbolique exceptionnel. Ces derniers sont en effet de la forme G/K, où G est un groupe de Lie semi-simple et K un sous-groupe compact maximal, et peuvent être identifiés au sous-groupe résoluble NA d'une décomposition d'Iwasawa

(1)Le « tenseur de Ricci » est dû à Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), connu pour ses travaux sur l'analyse tensorielle et la géométrie différentielle.

$G = NAK$ de G. Mais la classe des espaces de Damek-Ricci comporte bien d'autres exemples que ceux-là, qui ne sont pas des espaces symétriques bien qu'étant tous des variétés harmoniques. Dans la liste ci-dessous (par ordre décroissant) de quelques classes remarquables de variétés riemanniennes :

(1) variétés d'Einstein
(2) variétés harmoniques
(3) espaces de Damek-Ricci
(4) espaces riemanniens symétriques de rang un, de type non compact,

l'inclusion $3 \supset 4$ est stricte. On peut penser que $2 \supset 3$ l'est aussi, mais on n'en connaît pas d'exemple.

Pour d'autres généralisations de la notion d'espace symétrique (espaces faiblement symétriques, espaces de D'Atri, etc.), voir le chapitre 2 de [**BTV**].

L'analyse harmonique sur les espaces de Damek-Ricci connaît, depuis 1992, un développement rapide. Mais, si ses résultats ont de nombreuses analogies formelles avec ceux des espaces hyperboliques, il ne s'agit cependant pas d'une généralisation triviale : le groupe compact K, fréquemment utilisé dans les preuves classiques, fait ici défaut, et la notion de fonction radiale, moins facile à manipuler, doit faire l'objet d'une approche différente [**DR2**]. On parvient néanmoins à des résultats satisfaisants, et assez complets [**ADY, ACDi, DR2, R**]... : formules d'inversion de Fourier et de Plancherel, théorème de Paley-Wiener, résolution explicite de l'équation de la chaleur, de l'équation des ondes... La théorie des espaces de Damek-Ricci est déjà suffisamment riche pour qu'il semble opportun d'en esquisser un bilan (provisoire) ; c'est l'objectif de ces notes, tirées des articles originaux. On s'efforcera d'insister sur le rôle de la géométrie.

Afin de limiter les connaissances préalables nécessaires, on résume au *chapitre 2* (sans démonstration) les bases de la géométrie riemannienne locale. On pourra donc aborder ce cours avec seulement quelques notions sur les variétés, et sur les groupes et algèbres de Lie. Une certaine familiarité avec les espaces hyperboliques, qui motivent nombre de constructions effectuées ici, est toutefois souhaitable ; on pourra l'acquérir par exemple dans [**H2**] p. 29–72 (espace $H^2(\mathbb{R})$), ou dans [**F**] (espaces $H^n(\mathbb{F})$, où $\mathbb{F}$ est le corps des réels, ou des complexes, ou celui des quaternions). La comparaison détaillée du point de vue classique sur les espaces hyperboliques avec celui, plus général, des espaces de Damek-Ricci est reportée au *chapitre 6* de ces notes.

Au *chapitre 3* on introduit l'importante notion de moyennes sphériques sur une variété riemannienne, qui conduit à diverses caractérisations des variétés harmoniques. Les espaces de Damek-Ricci sont définis au *chapitre 4*, où on détaille ensuite quelques-unes de leurs propriétés géométriques (géodésiques, réalisation comme boule unité). Le *chapitre 5* est consacré à l'analyse harmonique (pour les fonctions radiales d'abord, puis en général), et à quelques-unes de ses applications (transformations intégrales, équation de la chaleur, équation des ondes).

Remerciements. — Ces notes correspondent à un cours de huit heures effectué dans le cadre de l'École d'été « Analyse harmonique et théorie des représentations ». Organisée et financée conjointement par le Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (C.I.M.P.A.) et plusieurs Universités marocaines, cette École s'est déroulée à Kenitra (Maroc) du 19 juillet au 4 août 1999. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ces organismes pour leur invitation, et tout particulièrement aux Professeurs Mohamed Akkouchi et Allal Bakali pour la qualité de l'organisation et la gentillesse de leur accueil à l'Université Ibn Tofail de Kenitra.

2. Rappels de géométrie riemannienne

Dans ce chapitre on notera toujours M (initiale de manifold) une variété différentiable réelle de classe C^∞, connexe, et n sa dimension. Dans les calculs en coordonnées locales, on adopte ici la *convention d'Einstein* : lorsqu'une même lettre apparaît une fois en indice supérieur et une fois en indice inférieur, on doit sommer sur cet indice de 1 à n. Ainsi

$$a_i x^i = \sum_{i=1}^n a_i x^i, \quad g_{ij} dx^i dx^j = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j, \quad \Gamma_{ij}^j = \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j, \text{ etc.}$$

On rappelle ici quelques notions et propriétés fondamentales de géométrie riemannienne locale, en renvoyant à [**BGM**], [**H1**], [**KN**] ou [**W**] (par exemple) pour les démonstrations.

2.1. Champs de vecteurs. — On note $T_m M$ l'espace vectoriel tangent au point $m \in M$. On appelle *champ de vecteurs* sur M la donnée, en chaque point, d'un vecteur tangent $X(m) \in T_m M$ fonction C^∞ de ce point. Dans un système de coordonnées locales de la variété :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto m = \varphi(x), \end{aligned}$$

(où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, et φ est un difféomorphisme de Ω sur un ouvert de M), cela se traduit par la donnée d'un champ de vecteurs $V(x)$ sur Ω (application C^∞ de Ω dans $\mathbb{R}^n$), avec $X(\varphi(x)) = D\varphi(x)V(x)$ en notant $D\varphi$ l'application tangente. En particulier chaque vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, considéré comme champ de vecteurs constant, donne le champ[(2)]

$$E_i(\varphi(x)) = D\varphi(x) e_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) \tag{1}$$

[(2)] De nombreux auteurs notent ∂_i notre champ E_i sur l'ouvert de carte de M. Pour éviter les confusions, on préfère ici réserver la notation ∂_i pour $\partial/\partial x^i$, c'est-à-dire pour le champ de vecteurs (constant) e_i sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

sur l'ouvert $\varphi(\Omega)$ de M. En notant $V(x) = X^i(x)e_i$ la décomposition de V selon la base (e_i) de $\mathbb{R}^n$ on obtient la décomposition correspondante de $X(m)$ selon la base $(E_i(m))$ de T_mM

$$X(\varphi(x)) = X^i(x)E_i(\varphi(x)).$$

À un champ de vecteurs X sur M est associé le système différentiel autonome

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = m,$$

dont la solution (définie pour t suffisamment voisin de 0) est $\gamma(t) = \phi_t(m)$, *flot* du champ de vecteurs.

À un champ de vecteurs est associé enfin l'*opérateur différentiel* du premier ordre sur M

$$Xu(m) = \langle Du(m), X(m)\rangle,$$

où u est une fonction C^∞ sur M, et son application tangente $Du(m)$ est vue comme forme linéaire sur l'espace tangent T_mM. On a ainsi

$$(Xu)(\phi_t(m)) = \frac{d}{dt}u(\phi_t(m)).$$

En coordonnées locales, u se traduit par $u \circ \varphi$ et l'égalité précédente par

$$\begin{aligned}(Xu)(\varphi(x)) &= \langle Du(\varphi(x)), D\varphi(x)V(x)\rangle \\ &= \langle D(u\circ\varphi)(x), V(x)\rangle \\ &= X^i(x)\partial_i(u\circ\varphi)(x),\end{aligned} \tag{2}$$

en notant $\partial_i = \partial/\partial x^i$ pour abréger[(3)]. L'opérateur différentiel X est donc traduit par l'opérateur $X^i(x)\partial_i$ sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

Le *crochet* $[X, Y]$ de deux champs de vecteurs X et Y sur M est défini par

$$[X, Y]u = X(Yu) - Y(Xu), \quad u \in C^\infty(M).$$

C'est encore (l'opérateur différentiel associé à) un champ de vecteurs sur M. On a par exemple, avec les notations de (1),

$$[E_i, E_j] = 0,$$

conséquence immédiate du théorème de Schwarz $[\partial_i, \partial_j] = 0$ sur $\mathbb{R}^n$. Plus généralement, si $X^i(x)\partial_i$ et $Y^j(x)\partial_j$ sont les écritures respectives de X et Y en coordonnées locales, celle de $[X, Y]$ est

$$\left(X^i\partial_iY^j - Y^i\partial_iX^j\right)(x)\partial_j.$$

[(3)]Noter la position des indices, qui permet d'utiliser la convention d'Einstein.

2.2. Métrique riemannienne. — C'est la donnée d'une forme quadratique définie positive g_m sur chaque espace tangent T_mM, fonction C^∞ du point m. On note souvent

$$g_m(X,X) = \|X\|_m^2\,, \quad g_m(X,Y) = \langle X,Y\rangle_m$$

la norme et le produit scalaire associés de $X, Y \in T_mM$. En coordonnées locales (x^i), on écrira $X = X^iE_i$, $Y = Y^jE_j$, d'où

$$g_m(X,Y) = g_{ij}(x)X^iY^j \quad \text{avec } m = \varphi(x),\ g_{ij}(x) = g_m(E_i,E_j),$$

les $g_{ij} = g_{ji}$ étant des fonctions numériques C^∞ sur l'ouvert Ω. On note traditionnellement $dx = (dx^1, \ldots, dx^n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, et

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ij}(x)dx^idx^j \\ &= g_{\varphi(x)}(D\varphi(x)dx, D\varphi(x)dx) = \|D\varphi(x)dx\|_{\varphi(x)}^2 \end{aligned}$$

cette expression de la métrique dans la carte φ.

Dans toute la suite on suppose M munie d'une métrique riemannienne g. On dit alors que c'est une *variété riemannienne*.

La *longueur d'un arc* paramétré $t \mapsto \gamma(t)$ de M, avec $a \leqslant t \leqslant b$, est donnée par

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}\, dt.$$

L'expression

$$d(m,p) = \inf_\gamma \ell(\gamma),$$

où la borne inférieure porte sur l'ensemble des arcs joignant les points m et p de M, définit une *distance* sur M.

Une variété riemannienne possède une *mesure canonique* (ou volume) $d\mu$, dont l'expression dans une carte φ est

$$\int_M u\, d\mu = \int_\Omega u(\varphi(x))\sqrt{\det(g_{ij}(x))}\, dx^1 \cdots dx^n$$

pour toute fonction u sur M à support dans l'ouvert de carte $\varphi(\Omega)$.

2.3. Connexion riemannienne. — Sur une variété quelconque, la notion de champ de vecteurs constant n'a, a priori, aucun sens : si, par exemple, les composantes $X^i(x)$ du champ sont constantes dans un certain système de coordonnées locales, il n'y a aucune raison qu'elles le soient encore dans un autre système. La notion de connexion apporte un remède partiel à cette difficulté : c'est l'outil infinitésimal permettant, comme on va voir, de comparer entre eux des vecteurs tangents en deux points différents de la variété M.

Sur une variété riemannienne M il existe une unique application (la *connexion riemannienne*, ou *connexion de Levi-Civita*) qui à deux champs de vecteurs X et Y sur M (de classe C^∞) associe un champ de vecteurs C^∞ sur M noté ∇_XY, telle que

(*i*) $\nabla_XY - \nabla_YX = [X,Y]$

(*ii*) $X(\langle Y,Z\rangle) = \langle \nabla_XY, Z\rangle + \langle Y, \nabla_XZ\rangle$

pour tous champs de vecteurs X, Y, Z. Dans (ii), les produits scalaires $\langle .,. \rangle$ sont évalués en un point m quelconque de M et, au premier membre, l'opérateur différentiel X est appliqué à la fonction numérique $m \mapsto \langle Y(m), Z(m)\rangle_m$ sur M. Une interprétation géométrique de cette condition sera donnée à la fin de 2.4.

La preuve d'existence et d'unicité de la connexion s'obtient facilement, en observant que (i) et (ii) entraînent l'égalité

$$\begin{aligned}(3)\quad 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle [X,Y], Z\rangle + \langle [Z,X], Y\rangle + \langle [Z,Y], X\rangle \\ + X(\langle Y,Z\rangle) + Y(\langle Z,X\rangle) - Z(\langle X,Y\rangle).\end{aligned}$$

Notons comme plus haut E_i les champs de vecteurs associés aux ∂_i dans une carte locale (x^i) sur un ouvert Ω, et définissons les coefficients Γ^i_{jk} par

$$\nabla_{E_j} E_k = \Gamma^i_{jk} E_i.$$

Les Γ^i_{jk} sont des fonctions C^∞ sur Ω, appelées *symboles de Christoffel.* Comme $[E_i, E_j] = 0$ on a $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ d'après (i). Plus généralement, si $X = X^i E_i$ et $Y = Y^j E_j$ on peut alors déduire de (3) les égalités

$$(4)\qquad \nabla_X Y = \left(X^j \partial_j Y^i + \Gamma^i_{jk} X^j Y^k\right) E_i,$$

$$(5)\qquad \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}\right),$$

où g^{il} désigne l'élément à la i-ième ligne et l-ième colonne de la matrice inverse de celle des g_{ij}. La connexion riemannienne est donc entièrement explicitée à l'aide de la métrique.

2.4. Transport parallèle. — Soit $t \mapsto \gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant a$, un arc paramétré d'une variété riemannienne M (munie de sa connexion de Levi-Civita ∇). Un champ de vecteurs Y sur M est dit *parallèle le long de* γ si

$$(6)\qquad \left(\nabla_{\gamma'(t)} Y\right)(\gamma(t)) = 0.$$

Cette définition a bien un sens, bien que le champ de vecteurs tangents $\gamma'(t)$ ne soit a priori défini qu'aux points de l'arc γ. Soit en effet $x(t) = (x^i(t))$ l'écriture de γ dans une carte φ de M, *i.e.* $\gamma(t) = \varphi(x(t))$; l'équation (6) s'écrit, d'après (4),

$$(7)\qquad \frac{d}{dt}(Y^i(x(t)) + \Gamma^i_{jk}(x(t)) \frac{dx^j}{dt}(t) Y^k(x(t)) = 0.$$

Ce système différentiel *linéaire* en les fonctions $Y^i(x(t))$ admet une solution unique pour toute valeur initiale donnée $Y^i(x(0)) = Y^i_o$.

Étant donné un vecteur tangent Y_o à M en $\gamma(0)$, on peut donc définir son *transport parallèle le long de* γ en résolvant le système (7) avec Y_o pour donnée initiale[(4)]. Soit $Y_t = \tau_t Y_o$ la solution. L'application τ_t est un isomorphisme entre les espaces vectoriels tangents à M aux points $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$. On voit ainsi que la connexion de M permet

[(4)]On a supposé ici l'arc γ tout entier contenu dans l'ouvert de carte $\varphi(\Omega)$. Quitte à fractionner l'intervalle en t, on peut toujours se ramener à ce cas.

de comparer des vecteurs tangents en deux points différents, à condition de choisir un arc joignant ces points. Mais le résultat dépendra en général de ce choix (voir § 2.6).

Inversement, on peut retrouver la connexion si on connaît le transport parallèle. Soient en effet X, Y deux champs de vecteurs sur M, $m \in M$, et supposons $X(m) \neq 0$. En notant ϕ_t le flot de X et τ_t le transport parallèle de m à $\phi_t(m)$ le long de l'arc $t \mapsto \phi_t(m)$ (courbe intégrale de X issue de m), on peut montrer ([**H1**] p. 41) que

$$Y(\phi_t(m)) = \tau_t \left(Y(m) + t(\nabla_X Y)(m) + O(t^2)\right), \tag{8}$$

soit encore

$$(\nabla_X Y)(m) = \frac{d}{dt} \left(\tau_t^{-1} \left(Y(\phi_t(m))\right)\right)\Big|_{t=0}.$$

Enfin la propriété (*ii*) de la connexion riemannienne revient à dire que *le transport parallèle préserve le produit scalaire des vecteurs tangents*, *i.e.* réalise une isométrie entre les espaces tangents en deux points de M.

2.5. Géodésiques. — Un arc γ de la variété riemannienne M est dit une *géodésique* si son champ de vecteurs tangents γ' est parallèle le long de γ, c'est-à-dire[(5)]

$$\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0.$$

D'après (7) cela se traduit en coordonnées locales (x^i) par le système d'équations différentielles non linéaires du second ordre

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0. \tag{9}$$

Ce sont aussi les équations d'Euler du calcul des variations pour rechercher les extrémales de la longueur $\ell(\gamma)$ (§ 2.2) et les géodésiques, définies comme des lignes « aussi droites que possible », peuvent aussi être caractérisées (au moins localement) comme plus courts chemins entre les points de M.

Soit m un point fixé de M. Il existe un voisinage ouvert convexe $\mathscr{V}$ de 0 dans l'espace tangent T_mM tel que, pour tout $X \in \mathscr{V}$, le système différentiel

$$\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0, \quad \gamma(0) = m, \ \gamma'(0) = X$$

admette une solution maximale unique, notée provisoirement $\gamma_X(t)$, et définie au moins pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ (géodésique issue de m et de direction X). On note[(6)]

$$\operatorname{Exp}_m X = \gamma_X(1).$$

On a alors

$$d(m, \operatorname{Exp}_m X) = \|X\|_m. \tag{10}$$

[(5)] Cette équation a un sens bien que le champ de vecteurs $\gamma'(t)$ ne soit défini que le long de la courbe $\gamma(t)$, comme le montre l'écriture (9) en coordonnées locales.

[(6)] Si G est un groupe de Lie muni d'une structure riemannienne, l'application Exp (qui donne les géodésiques) est en général distincte de l'application exponentielle exp du groupe (qui donne les sous-groupes à un paramètre). Voir [**H1**] p. 148.

L'application Exp_m est un difféomorphisme C^∞ de $\mathscr{V}$ sur un voisinage de m dans M (*application exponentielle* de M en m), et son application tangente $D\,\mathrm{Exp}_m(0)$ à l'origine est l'identité de l'espace T_mM. Enfin, par homogénéité du problème et unicité de sa solution,

$$\mathrm{Exp}_m\, tX = \gamma_X(t),$$

ce qui permet d'abandonner la notation γ_X.

Il résulte de (10) que la fonction

$$x \longmapsto d(m,x)^2, \quad \text{resp. } x \longmapsto d(m,x),$$

est de classe C^∞ sur un voisinage, resp. un voisinage pointé, de m dans M.

Soit $E_1, \dots, E_n$ une base de l'espace tangent T_mM. L'application

$$(x^1, \dots, x^n) \longmapsto \mathrm{Exp}_m(x^i E_i)$$

est donc une carte locale de M au voisinage de m. Dans un tel système de *coordonnées géodésiques* les équations $x^i(t) = tu^i$, où $(u^i) \in \mathbb{R}^n$ est donné, définissent donc une géodésique d'origine m, d'où

$$\Gamma^i_{jk}(tu)u^j u^k = 0$$

d'après (9). On peut déduire de là, à l'aide de (5), les relations

$$\Gamma^i_{jk}(0) = 0, \quad \partial_i g_{jk}(0) = 0, \quad \text{et} \quad g_{jk}(x)x^j = g_{jk}(0)x^j \tag{11}$$

pour tout x voisin de 0 dans $\mathbb{R}^n$.

Coordonnées géodésiques polaires. — Pour l'analyse radiale autour de m sur M, nous utiliserons une légère variante des coordonnées géodésiques. Soit S_m la sphère unité $\|X\|_m = 1$ de T_mM. L'application

$$(r, X) \longmapsto \mathrm{Exp}_m\, rX$$

est, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, un difféomorphisme de $]0,\varepsilon[\times S_m$ sur un voisinage pointé de m dans M. Si $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^{n-1}) \mapsto X(\theta)$ est un système de coordonnées sur un ouvert de S_m (coordonnées sphériques euclidiennes), l'application

$$(r, \theta) \longmapsto \mathrm{Exp}_m\, rX(\theta)$$

est alors un difféomorphisme entre un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ et un ouvert de M, appelé système de *coordonnées géodésiques polaires.* La métrique s'écrit dans ces coordonnées

$$ds^2 = dr^2 + g_{\alpha\beta}(r,\theta)\, d\theta^\alpha d\theta^\beta, \tag{12}$$

avec sommation de 1 à $n-1$ seulement sur les indices grecs α, β. En effet les courbes θ constant sont des géodésiques issues de m, et le coefficient de dr^2 est 1 à cause de (10) ; l'absence de termes en $drd\theta^\alpha$ vient de l'orthogonalité des sphères r constant avec les géodésiques issues de leur centre.

2.6. Courbure riemannienne. — On a vu que le transport parallèle τ d'un point à un autre de M se définit en choisissant un chemin γ qui joint ces deux points. Mais τ dépend en général du choix de γ. En d'autres termes, si γ est un chemin fermé d'origine et d'extrémité $m \in M$, le transport le long de γ d'un vecteur tangent en m ne redonne pas en général le vecteur de départ.

Pour évaluer la différence, considérons le cas simple suivant. Soient (x^i) un système de coordonnées locales au voisinage de m, et E_i les champs de vecteurs associés définis au § 2.1. Prenons pour γ l'image dans M du bord du carré $0 \leqslant x^1 \leqslant \varepsilon$, $0 \leqslant x^2 \leqslant \varepsilon$, $x^3 = \cdots = x^n = 0$ de $\mathbb{R}^n$. Si Z est un champ de vecteurs quelconque sur M, un calcul élémentaire basé sur (8) donne ([**H1**] p. 544), lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$\begin{aligned}\tau Z(m) - Z(m) &= \varepsilon^2 \left\{ (\nabla_{E_2}\nabla_{E_1} Z)(m) - (\nabla_{E_1}\nabla_{E_2} Z)(m) \right\} + O(\varepsilon^3) \\ &= -\varepsilon^2 R(E_1, E_2) Z(m) + O(\varepsilon^3)\end{aligned}$$

en notant

$$R(E_1, E_2) = \nabla_{E_1}\nabla_{E_2} - \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}.$$

En général les ∇_{E_i} ne commutent pas, bien que les champs E_i commutent entre eux ($[E_1, E_2] = 0$).

Plus généralement, si

$$X = X^i E_i, \quad Y = Y^j E_j, \quad Z = Z^k E_k$$

sont trois champs de vecteurs arbitraires, le calcul de $(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) Z$ conduit à introduire l'expression

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}. \tag{13}$$

L'application $Z \mapsto R(X, Y)Z$ ainsi définie entre champs de vecteurs est appelée *tenseur de courbure de M*. Son expression en coordonnées locales se déduit de (4) : on a

$$R(X, Y)Z = R^i_{jkl} X^k Y^l Z^j E_i,$$

avec

$$R^i_{jkl} = \partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{jk} + \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{km} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{lm}. \tag{14}$$

D'après (5) les R^i_{jkl} s'expriment donc à l'aide des dérivées partielles d'ordre $\leqslant 2$ des coefficients g_{ij} de la métrique.

Le *tenseur de Ricci*(7), défini par

$$\rho(X, Y) = \mathrm{tr}\,(Z \mapsto R(Z, X)Y)$$

pour tous champs de vecteurs X, Y sur M, vérifie $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$. En coordonnées locales on a

$$\rho(X, Y) = \rho_{ij} X^i Y^j, \quad \text{avec } \rho_{ij} = R^k_{jki}.$$

(7) Voir note 1.

Les relations entre courbure et métrique sont particulièrement simples *à l'origine d'un système de coordonnées géodésiques* (§ 2.5). Notons

$$R_{ijkl} = g_{im} R^m_{jkl}.$$

On peut alors vérifier, en manipulant les relations (11) et (14), que

$$\begin{aligned}\partial_i \partial_j g_{kl}(0) &= \partial_k \partial_l g_{ij}(0)\\ R_{ijkl}(0) &= \partial_j \partial_k g_{il}(0) - \partial_i \partial_k g_{jl}(0)\\ -3\,\partial_i \partial_j g_{kl}(0) &= R_{ikjl}(0) + R_{jkil}(0),\end{aligned}$$

d'où le développement limité, valable en coordonnées géodésiques,

$$g_{kl}(x) = g_{kl}(0) - \frac{1}{3} R_{ikjl}(0) x^i x^j + O(|x|^3) \tag{15}$$

qui met en évidence l'influence de la courbure sur la géométrie de M au voisinage de m. Passons au déterminant : l'égalité classique

$$\det(I + A) = 1 + \operatorname{tr} A + O(\|A\|^2)$$

(différentielle en I de la fonction det) conduit à

$$\det\left(g_{kl}(x)\right) = \det\left(g_{kl}(0)\right) \Big(1 - \frac{1}{3} \rho_{ij}(0) x^i x^j + O(|x|^3\Big). \tag{16}$$

2.7. Laplacien. — Sur une variété riemannienne on a une notion de *gradient* : si u est une fonction C^∞ sur M, le produit scalaire $\langle .,. \rangle_m$ donné par la métrique permet d'identifier la forme linéaire $Du(m)$ sur l'espace tangent $T_m M$ à un vecteur de cet espace lui-même, noté $\operatorname{grad} u(m)$. On peut aussi définir la *divergence* au point m d'un champ de vecteurs X sur M comme la trace de l'endomorphisme $Y \mapsto (\nabla_Y X)(m)$ de l'espace tangent ; ce nombre traduit la variation du volume riemannien entraîné par le flot de X.

L'opérateur de Laplace-Beltrami (ou *laplacien*) de M est l'opérateur différentiel linéaire du second ordre sur M défini par

$$Lu = \operatorname{div} \operatorname{grad} u.$$

En coordonnées locales (x^i) (quelconques), son expression est

$$Lu = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\, \partial_j \Big(\sqrt{\det g}\, g^{jk} \partial_k u \Big) = g^{jk} \left(\partial_j \partial_k u - \Gamma^i_{jk} \partial_i u \right), \tag{17}$$

où $\det g$ est le déterminant de la matrice (g_{ij}), et (g^{jk}) est la matrice inverse. Le laplacien d'une variété riemannienne est donc un *opérateur elliptique.* C'est un opérateur *symétrique* : si u et v sont deux fonctions C^∞ sur M, l'une au moins à support compact, on a

$$\int_M Lu \cdot v \, d\mu = \int_M u \cdot Lv \, d\mu$$

où $d\mu$ est la mesure riemannienne. On renvoie à [**H2**] p. 242–247 pour plus de détails sur le laplacien.

Notons encore l'expression suivante de L, où $X_1, \ldots, X_n$ sont des champs de vecteurs sur M qui forment, en chaque point, une base orthonormale de l'espace tangent :

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i^2 u - (\nabla_{X_i} X_i)\, u \right). \tag{18}$$

En effet $Lu = \sum \langle X_i, \nabla_{X_i}(\operatorname{grad} u)\rangle$ par définition de la divergence, et l'égalité résulte de la propriété (*ii*) de la connexion (§ 2.3).

Exemple. — En coordonnées géodésiques la fonction

$$u(x) = \frac{r^2}{2} = \frac{1}{2} g_{ij}(x) x^i x^j = \frac{1}{2} g_{ij}(0) x^i x^j$$

(*cf.* (10) et (11)) donne

$$\partial_k u(x) = g_{ik}(0) x^i = g_{ik}(x) x^i,$$

d'où

$$\begin{aligned} Lu(x) &= \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}}\, \partial_j \Big(\sqrt{\det g(x)}\, g^{jk}(x) \partial_k u(x) \Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}}\, \partial_j \Big(\sqrt{\det g(x)}\, x^j \Big) \\ &= n + \frac{1}{2} x^j \partial_j \ln \det g(x), \end{aligned}$$

avec $n = \dim M$. Par (16) on en déduit le développement limité

$$L\Big(\frac{r^2}{2}\Big) = n - \frac{1}{3} \rho_{ij}(0) x^i x^j + O(|x|^3). \tag{19}$$

3. Variétés harmoniques

3.1. Partie radiale du laplacien. — Soient toujours (M, g) une variété riemannienne de classe C^∞, L son laplacien et m un point de M. Une fonction u, de classe C^k au voisinage de m, est dite *radiale autour de* m s'il existe une fonction f sur un intervalle $]0, \varepsilon[$ telle que $u(x) = f(r)$ (en notant r la distance $d(m, x)$). Si X est un vecteur unitaire tangent en m, on a donc $u(\operatorname{Exp}_m rX) = f(r)$, et f est de classe C^k.

Soient $(r, \theta^1, \ldots, \theta^{n-1}) = (r, \theta)$ des *coordonnées géodésiques polaires* au voisinage de m, où r parcourt un intervalle $]0, \varepsilon[$ et θ un ouvert ω de $\mathbb{R}^{n-1}$ (§ 2.5). Dans la suite on écrira, par abus, $u(x) = u(r, \theta)$, et $u(x) = u(r)$ si u est radiale. D'après (12) la matrice de la forme quadratique riemannienne, resp. sa matrice inverse, dans ces coordonnées est de la forme

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (g_{\alpha\beta}) \end{pmatrix}, \quad \text{resp. } (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (g^{\alpha\beta}) \end{pmatrix},$$

avec $1 \leqslant i,j \leqslant n$ et $1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant n-1$, en affectant comme toujours des indices supérieurs à la matrice inverse. On a

$$\det(g_{ij}) = \det(g_{\alpha\beta}), \text{ noté } g(r,\theta),$$

et la mesure riemannienne est

$$drd\sigma = \sqrt{g(r,\theta)}drd\theta^1 \cdots d\theta^{n-1},$$

où

$$d\sigma = \sqrt{g(r,\theta)}d\theta^1 \cdots d\theta^{n-1}$$

est la mesure sur la sphère riemannienne $S_m(r)$ de centre m et de rayon r.

Dans la suite on supposera toujours l'ouvert ω choisi tel qu'une intégrale sur la sphère se calcule en intégrant en θ sur ω entier ; c'est le cas si les $\operatorname{Exp}_m rX(\theta)$ (notations du § 2.5) décrivent, lorsque θ parcourt ω, le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle sur la sphère.

Le laplacien s'écrit alors, d'après (17), pour toute fonction u,

$$Lu = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_r(\sqrt{g}\,\partial_r u) + \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_\alpha(\sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}\partial_\beta u),$$

avec $\partial_\alpha = \partial/\partial\theta^\alpha$ (et sommation en α,β). La deuxième partie de cette expression est le laplacien associé à la métrique $ds^2 = g_{\alpha\beta}(r,\theta)\,d\theta^\alpha d\theta^\beta$, *i.e.* celui de la sphère $S_m(r)$. Ces termes disparaissent lorsque u est radiale, *i.e.* indépendante de θ. L'exemple $u(x) = r$ donne immédiatement

$$Lr = \frac{\partial_r\sqrt{g(r,\theta)}}{\sqrt{g(r,\theta)}},$$

d'où la généralisation suivante de l'écriture classique du laplacien en coordonnées sphériques sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1. — *En coordonnées géodésiques polaires autour de m on a, pour toute fonction u et pour $r > 0$ assez petit,*

$$Lu = \partial_r^2 u + Lr \cdot \partial_r u + L_{S(r)}u,$$

où

$$Lr = \frac{\partial_r\sqrt{g(r,\theta)}}{\sqrt{g(r,\theta)}}$$

est la fonction (non nécessairement radiale) obtenue en calculant le laplacien de $u(x) = r$ et $L_{S(r)}$ est le laplacien de la sphère $S_m(r)$ de centre m et de rayon r.

Si u est radiale autour de m on a $L_{S(r)}u = 0$, et le laplacien se réduit alors à sa partie radiale $\partial_r^2 + Lr \cdot \partial_r$.

3.2. Moyennes sphériques et variétés harmoniques. — Si u est une fonction continue sur un voisinage de m dans M, on définit ses *moyennes sphériques* autour de m

$$M_m u(r) = \frac{1}{\sigma_m(r)} \int_{S_m(r)} u \, d\sigma,$$

pour $r > 0$ assez petit, où $\sigma_m(r)$ est la mesure (« aire ») de la sphère $S_m(r)$ de centre m et de rayon r dans M, pour la mesure riemannienne $d\sigma$ (induite par la métrique de M). On dit que u vérifie la *propriété de moyenne* autour de m si

$$M_m u(r) = u(m)$$

pour tout $r > 0$ assez petit. Dans la suite on omettra les indices m lorsqu'aucune confusion n'en résulte.

En coordonnées géodésiques polaires autour de m on a, d'après 3.1,

$$Mu(r) = \frac{1}{\sigma(r)} \int_\omega u(r,\theta) \sqrt{g(r,\theta)} \, d\theta.$$

On note parfois $Mu(x)$ la moyenne de u, considérée comme fonction radiale de x au voisinage de m, avec $r = d(m,x)$. Le lemme suivant sera utile au chapitre 5.

Lemme 2. — *Soient u et v deux fonctions continues sur la variété M, l'une au moins étant à support compact contenu dans un voisinage du point m sur lequel on peut utiliser les coordonnées géodésiques polaires. Alors*

$$\int_M Mu(x) \cdot v(x) \, d\mu(x) = \int_M u(x) \cdot Mv(x) \, d\mu(x),$$

où $d\mu$ est la mesure riemannienne de M.

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned}\int_M Mu \cdot v \, d\mu &= \int_{\mathbb{R}_+ \times \omega} Mu(r) v(r,\theta') \sqrt{g(r,\theta')} \, dr d\theta' \\ &= \int_{\mathbb{R}_+ \times \omega \times \omega} u(r,\theta) v(r,\theta') \sqrt{g(r,\theta)} \sqrt{g(r,\theta')} \frac{1}{\sigma(r)} dr d\theta d\theta',\end{aligned}$$

expression symétrique en u et v. □

Lemme 3. — *Soit u une fonction de classe C^2 au voisinage de m. Pour $r > 0$ assez petit on a*

$$\sigma(r)(Mu)'(r) = \int_{S(r)} (u - Mu(r)) \, Lr \, d\sigma + \int_{B(r)} Lu \, d\mu,$$

où $(.)'$ est la dérivation par rapport à r, $B(r)$ est la boule de centre m et de rayon r, et $d\mu$ la mesure riemannienne de M.

Dans l'écriture Lr la notation r désigne la fonction $x \mapsto d(m,x)$. Partout ailleurs dans les calculs elle désigne une valeur donnée du rayon.

Démonstration. — En coordonnées géodésiques polaires (r,θ) au voisinage de m on a

$$\sigma(r)Mu(r) = \int_{S(r)} u\,d\sigma = \int_{\omega} u(r,\theta)\sqrt{g(r,\theta)}\,d\theta.$$

En dérivant sous le signe somme il vient

$$\begin{aligned}(\sigma(r)Mu(r))' &= \int_{\omega} u\partial_r\sqrt{g}\,d\theta + \int_{\omega}\partial_r u\sqrt{g}\,d\theta\\ &= \int_{S(r)} u\,Lr\,d\sigma + \int_{S(r)}\partial_r u\,d\sigma,\end{aligned}$$

compte tenu de l'égalité

$$\partial_r\sqrt{g} = Lr\cdot\sqrt{g}$$

de la Proposition 1. Pour $u=1$ on obtient en particulier

$$\sigma'(r) = \int_{S(r)} Lr\,d\sigma, \tag{1}$$

d'où

$$\sigma(r)(Mu)'(r) = \int_{S(r)} (u - Mu(r))\,Lr\,d\sigma + \int_{S(r)}\partial_r u\,d\sigma.$$

Comme $\partial_r u$ est la dérivée normale de u sur la sphère $S(r)$, le lemme en résulte par application de la formule de Stokes. □

Théorème 4 **([RWW, S, W])**. — *Soient m un point d'une variété riemannienne M de classe C^∞, et L son laplacien. Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe, sur un voisinage pointé de m dans M, une fonction harmonique radiale autour de m, non constante.

(ii) La fonction Lr est radiale autour de m.

(iii) Le laplacien de toute fonction radiale autour de m est une fonction radiale autour de m.

(iv) Toute fonction harmonique au voisinage de m a la propriété de moyenne autour de m.

(v) Le laplacien commute aux moyennes sphériques de centre m (et de rayon assez petit).

Lorsqu'elles sont vérifiées on a $Lr = \sigma'(r)/\sigma(r)$ où $\sigma(r)$ est la mesure de la sphère $S_m(r)$ et, en coordonnées géodésiques polaires, $\sqrt{g(r,\theta)} = \sigma(r)\tau(\theta)$ où τ est indépendant de r.

On dit alors que la variété M est *harmonique au point m* ; on dit que M est une *variété harmonique* si elle l'est en chacun de ses points.

Démonstration. — L'équivalence de *(ii)* et *(iii)* est claire d'après la Proposition 1.

(*ii*) *entraîne* (*i*). Si Lr est fonction de r seul, la résolution de l'équation différentielle en la variable r

$$\begin{cases} u''(r) + Lr \cdot u'(r) = 0 \\ u(r_o) = \alpha, \ u'(r_o) = \beta, \end{cases}$$

où r_o, α et $\beta \neq 0$ sont donnés, fournit une fonction $u(r)$, harmonique radiale autour de m, non constante.

(*i*) *entraîne* (*ii*). Soient à nouveau (r, θ) des coordonnées géodésiques polaires au voisinage de m. L'hypothèse (*i*) donne une solution non constante de l'équation différentielle

$$u''(r) + (Lr)(r, \theta) \cdot u'(r) = 0$$

sur un intervalle $0 < r < \varepsilon$. La dérivée $u'(r)$ ne peut s'annuler en aucun point de cet intervalle, sinon u serait constante par unicité de la solution. On en déduit

$$(Lr)(r, \theta) = -\frac{u''(r)}{u'(r)},$$

fonction de r seul.

(*ii*) *entraîne* (*iv*). On a $\int_{S(r)} (u - Mu(r))\, Lr\, d\sigma = 0$ si Lr est constante sur les sphères de centre m. Si de plus u est harmonique, le Lemme 3 donne $(Mu)'(r) = 0$ et la moyenne sphérique $Mu(r)$ est indépendante de r, nécessairement égale à $u(m)$ comme on le voit en faisant $r \to 0$.

(*iv*) *entraîne* (*ii*). Soit u une fonction harmonique. La propriété de moyenne et le Lemme 3 donnent

$$\int_{S(r)} u\, Lr\, d\sigma = Mu(r) \int_{S(r)} Lr\, d\sigma,$$

ce qui s'écrit aussi

$$\int_{S(r)} u\, v\, d\sigma = 0, \quad \text{avec } v = Lr - M(Lr)(r).$$

Or il existe, pour chaque $r > 0$ fixé, une fonction harmonique u dont la restriction à la sphère $S(r)$ coïncide avec v ; cette fonction s'obtient en résolvant le problème de Dirichlet pour le laplacien. Par suite $\int_{S(r)} v^2\, d\sigma = 0$, et v est identiquement nulle sur $S(r)$. La fonction Lr est donc constante sur chaque sphère de centre m (de rayon assez petit), d'où (*ii*).

(*ii*) *entraîne* (*v*). Si Lr est radiale on a $\sigma'(r) = Lr \cdot \sigma(r)$ d'après (1), soit encore

$$Lr = \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} = \frac{\partial_r \sqrt{g(r, \theta)}}{\sqrt{g(r, \theta)}}$$

(Proposition 1), et le quotient $\sqrt{g(r, \theta)}/\sigma(r)$ est donc indépendant de r, ce qui justifie la dernière assertion du théorème. En notant $\tau(\theta)$ ce quotient il vient, pour toute fonction u,

$$Mu(r) = \frac{1}{\sigma(r)} \int_\omega u(r, \theta) \sqrt{g(r, \theta)} d\theta = \int_\omega u(r, \theta) \tau(\theta) d\theta\,;$$

par suite l'opérateur de moyenne commute à ∂_r, et bien sûr à la multiplication par la fonction radiale Lr. Comme la moyenne sur $S(r)$ de $L_{S(r)}u$ est nulle on en déduit, grâce à la Proposition 1,

$$MLu(r) = \left(\partial_r^2 + Lr \cdot \partial_r\right) Mu(r) = LMu(r).$$

(v) *entraîne* (ii). La commutation de L aux moyennes sphériques, appliquée à la fonction radiale $u = r$, donne

$$MLr = LMr = Lr$$

et Lr est une fonction radiale. □

Remarque

(1) Sur une variété harmonique, les fonctions harmoniques sont même *caractérisées* par la propriété de moyenne (au voisinage de chaque point). En effet, si Lr est une fonction radiale, l'égalité du Lemme 3 (au point m) se réduit à

$$\sigma_m(r)\partial_r M_m u(r) = \int_{B_m(r)} Lu\, d\mu,$$

pour toute fonction u de classe C^2 sur M. Si de plus u vérifie la propriété de moyenne, l'intégrale de droite est donc nulle pour tout m et tout r assez petit, d'où $Lu = 0$ partout.

On trouvera dans [**W**] § 6.11 une étude plus détaillée de la propriété de moyenne, en liaison avec un développement de $Mu(r)$ selon les puissances de r.

(2) Si M est harmonique on voit, en reprenant la preuve de (ii) entraîne (i), que la fonction

$$u(r) = a \int_r^b \frac{dt}{\sigma(t)}$$

(où a et b sont des constantes) est harmonique radiale. Comme $\sigma(r) \sim \sigma_o r^{n-1}$ lorsque r tend vers 0, où $\sigma_o = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ est la mesure euclidienne de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, on a $u(r) \sim 1/r^{n-2}$ en prenant $a = (n-2)\sigma_o$, ce qui donne une *solution élémentaire radiale du laplacien.*

Une variété riemannienne est dite *variété d'Einstein* si

$$\rho = \lambda g,$$

où g est le tenseur métrique, ρ le tenseur de Ricci et λ une constante.

Une variété riemannienne M est dite *isotrope* si, pour tout $m \in M$ et tous vecteurs unitaires X, Y tangents en m à M, il existe une isométrie de M qui conserve m et transforme X en Y (on considère là bien sûr la transformation linéaire de l'espace tangent donnée par la différentielle en m de l'isométrie). Les variétés riemanniennes connexes et isotropes ont été classées ([**Wo**] p. 295). Ce sont :

– les espaces euclidiens

– les espaces symétriques de type non compact et de rang un, *i.e.* les espaces hyperboliques $H^n(\mathbb{F})$ (où $\mathbb{F}$ est le corps des réels, des complexes, ou des quaternions) ou l'espace hyperbolique exceptionnel $H^2(\mathbb{O})$ construit sur les octaves de Cayley

– les espaces symétriques de type compact et de rang un, *i.e.* les sphères ou les espaces projectifs $P^n(\mathbb{F})$ ou l'espace projectif exceptionnel $P^2(\mathbb{O})$.

Théorème 5. — *Soit une variété riemannienne de classe C^∞.*

(i) *Si elle est isotrope, elle est harmonique.*

(ii) *Si elle est harmonique de dimension au moins* 3*, elle est d'Einstein.*

Démonstration

(i) Notons K le groupe des isométries de M qui conservent un point donné m. Pour $x \in M$ et $k \in K$ on a $d(m, k \cdot x) = d(m, x)$, et toute fonction radiale est K-invariante. La réciproque est vraie si M est isotrope : si $X \in T_m M$ est un vecteur unitaire donné, tout point x de M assez voisin de m peut alors s'écrire

$$x = \operatorname{Exp}_m r(k \cdot X) = k \cdot \operatorname{Exp}_m rX, \quad \text{avec } r = d(m, x).$$

Si u est une fonction K-invariante on a donc

$$u(x) = u\left(\operatorname{Exp}_m rX\right),$$

fonction de r seul, et u est radiale autour de m.

Le laplacien L de M est invariant par toute isométrie. Si u est radiale, donc K-invariante, la fonction Lu est K-invariante, donc radiale.

(ii) Le tenseur de Ricci et le laplacien sont notamment liés par l'égalité (19) de 2.7

$$L\Big(\frac{r^2}{2}\Big) = n - \frac{1}{3}\rho_{ij}(0)x^i x^j + O(|x|^3),$$

valable en coordonnées géodésiques (x^i) au voisinage d'un point m de M pris pour origine. Si M est harmonique en m cette expression est radiale autour de m ; les termes d'ordre deux sont donc proportionnels à $r^2 = g_{ij}(0)x^i x^j$, d'où

$$\rho_{ij}(0) = \lambda g_{ij}(0), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Si M est harmonique on a donc $\rho(m) = \lambda(m)g(m)$ en tout point m ; le facteur λ est alors nécessairement constant sur M si $\dim M \geqslant 3$: voir une preuve dans [**KN**] vol. I, p. 292, à l'aide des identités de Bianchi sur la courbure. □

Peut-on classer les variétés harmoniques ? En existe-t-il de non isotropes ? Pour un aperçu rapide sur cette question (soulevée par A. Lichnérowicz), voir § 1 ci-dessus. Le principal outil développé pour l'aborder est la recherche de conditions nécessaires sur la courbure, que doit satisfaire toute variété harmonique. Le Théorème 5 (ii) ne donne que la première de ces conditions, les suivantes s'obtiendraient en poussant au-delà de l'ordre deux le développement limité de $L(r^2/2)$, ou mieux en faisant appel à la notion de champ de Jacobi (voir [**Be**] p. 160 sq., [**W**] p. 228 sq.).

4. Géométrie des espaces de Damek-Ricci

Pour motiver les constructions qui vont suivre, rappelons brièvement la structure des *espaces riemanniens symétriques de type non compact*. Objet de nombreux travaux, ces espaces sont maintenant bien connus ([**H1**][**H2**][**H3**]). Ce sont les espaces homogènes $M = G/K$, où G est un groupe de Lie semi-simple réel (connexe, non compact et de centre fini) et K un sous-groupe compact maximal. Le groupe G agit naturellement sur M, et K est le stabilisateur de l'origine $o = K$ (classe de l'élément neutre). Une métrique riemannienne G-invariante sur M s'obtient en prenant un produit scalaire euclidien K-invariant sur l'espace tangent T_oM (il en existe grâce à la compacité de K), et en le transportant en tout point de M par l'action transitive de G ; la cohérence de cette définition est assurée par la K-invariance du produit scalaire initial.

Par la théorie des groupes semi-simples, le groupe G admet par ailleurs une décomposition d'Iwasawa $G = NAK$, où N est un sous-groupe nilpotent, A un sous-groupe abélien, et $NA = S$ un sous-groupe résoluble de G ; la dimension de A est le *rang* de M (ou de G). L'application $\varphi : x = na \mapsto xK = naK$ est donc un difféomorphisme de S sur $M = G/K$, qui transforme la translation à gauche de S définie par un élément $x \in S$ en l'action naturelle sur M de l'élément $x \in G$. En transportant par φ^{-1} la métrique de M on munit donc le groupe S d'une structure riemannienne invariante par les translations à gauche, et l'étude de M comme variété riemannienne pourra ainsi s'effectuer en oubliant G et K. Ceci ouvre la voie à une généralisation que l'on va détailler lorsque $\dim A = 1$; voir [**CDKR2**] pour une exploitation systématique de ce point de vue, et le chapitre 6 ci-dessous pour une comparaison détaillée avec le point de vue classique sur G/K.

4.1. Groupes et algèbres de type Heisenberg. — Soit $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie, *nilpotente* d'ordre deux[8], de centre $\mathfrak{z}$. On a donc $[X, X'] \in \mathfrak{z}$ et $[X, Z] = 0$ pour tous $X, X' \in \mathfrak{n}$ et tout $Z \in \mathfrak{z}$. On suppose de plus $\mathfrak{n}$ munie d'un produit scalaire euclidien $\langle ., . \rangle$, et on note $\mathfrak{v}$ l'orthogonal de $\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{n}$. Ainsi

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}, \quad [\mathfrak{v}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{z}, \quad [\mathfrak{v}, \mathfrak{z}] = 0 \quad \text{et } [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] = 0.$$

Pour $Z \in \mathfrak{z}$ soit $J_Z : \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$ l'application linéaire définie par

$$\langle J_Z V, V' \rangle = \langle Z, [V, V'] \rangle, \tag{1}$$

pour tous $V, V' \in \mathfrak{v}$. On suppose enfin que, pour tous $Z \in \mathfrak{z}$, $V \in \mathfrak{v}$,

$$J_Z^2 V = - \|Z\|^2 V, \tag{2}$$

où $\|.\|$ est la norme définie par le produit scalaire. On dit alors que $\mathfrak{n}$ est une *algèbre de type Heisenberg*. Dans la suite on notera $p = \dim \mathfrak{v}$ et $q = \dim \mathfrak{z} \geqslant 1$.

---

[8] C'est-à-dire $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \neq 0$ et $[\mathfrak{n}, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]] = 0$.

L'exemple fondamental est l'algèbre de Heisenberg proprement dite, formée des matrices

$$(v,w,z)=\begin{pmatrix} 0 & v_1 & \cdots & v_k & z \\ & & & & w_1 \\ & & (0) & & \vdots \\ & & & & w_k \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad v,w\in\mathbb{R}^k,\ z\in\mathbb{R},$$

avec pour crochet de Lie le commutateur des matrices, et le produit scalaire canonique de l'espace $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}$. On a ici $p=2k$, $q=1$, et

$$J_{(0,0,z)}(v,w,0)=z(-w,v,0).$$

Il y a bien d'autres exemples. En général, la condition (2) montre que p est toujours pair, car J_Z définit, pour Z unitaire, une structure complexe sur $\mathfrak{v}$. De plus (2) revient à dire que l'application $Z\mapsto J_Z$ définit une représentation de l'algèbre de Clifford de $\mathfrak{z}$ sur l'espace $\mathfrak{v}$. On peut déduire de là ([**BTV**] p. 22, [**Ka**] p. 150) que, pour $q\geqslant 1$, il existe une algèbre de type Heisenberg $\mathfrak{n}=\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{z}$ avec $\dim\mathfrak{v}=p$, $\dim\mathfrak{z}=q$, si et seulement si p,q sont les valeurs du tableau suivant, où $a\geqslant 0$ et $b\geqslant 1$ sont des entiers arbitraires :

q	$8a+1$	$8a+2$	$8a+3$	$8a+4$	$8a+5$	$8a+6$	$8a+7$	$8a+8$
p	$2^{4a+1}b$	$2^{4a+2}b$	$2^{4a+2}b$	$2^{4a+3}b$	$2^{4a+3}b$	$2^{4a+3}b$	$2^{4a+3}b$	$2^{4a+4}b$

Noter que p est toujours multiple de 4, sauf peut-être si $q=1$.

De (1) et (2) on déduit aisément les relations

$$\langle J_Z V, J_{Z'}V'\rangle+\langle J_{Z'}V, J_Z V'\rangle=2\langle Z,Z'\rangle\langle V,V'\rangle \tag{3}$$

$$[V,J_Z V]=\|V\|^2 Z \tag{4}$$

$$\|J_Z V\|=\|Z\|\cdot\|V\| \tag{5}$$

pour tous $V,V'\in\mathfrak{v}$ et $Z,Z'\in\mathfrak{z}$. En effet

$$\langle J_Z V,J_Z V\rangle=\langle Z,[V,J_Z V]\rangle=-\langle Z,[J_Z V,V]\rangle=-\langle J_Z^2 V,V\rangle=\|Z\|^2\|V\|^2,$$

d'où (5) et, en polarisant en Z,

$$\langle J_Z V,J_{Z'}V\rangle=\langle Z,Z'\rangle\,\|V\|^2=\langle Z',[V,J_Z V]\rangle,$$

d'où (4) ; (3) s'obtient en polarisant encore en V.

Enfin on a

$$[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]=\mathfrak{z},$$

sinon il existerait un $Z\neq 0$ orthogonal à tous les $[V,V']$, en contradiction avec (1) et (2).

Le groupe de Lie N (connexe et simplement connexe) d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ est dit *groupe de type Heisenberg.* Comme $\mathfrak{n}$ est nilpotente l'application exponentielle exp : $\mathfrak{n} \to N$ est un difféomorphisme global et on a, par la formule de Campbell-Hausdorff,

$$\exp X \cdot \exp X' = \exp\Big(X + X' + \frac{1}{2}[X, X']\Big), \quad X, X' \in \mathfrak{n},$$

les crochets d'ordre supérieur étant nuls. En traduisant sa loi de groupe dans la carte exponentielle, on peut donc réaliser N comme l'espace $\mathfrak{v} \times \mathfrak{z}$ muni de la multiplication

$$(V, Z) \cdot (V', Z') = \Big(V + V', Z + Z' + \frac{1}{2}[V, V']\Big).$$

Nous ne développons pas ici la géométrie et l'analyse sur N ; voir par exemple [**BTV**] chap. 3, [**DR2**] § 3.

4.2. Les groupes $S = NA$. — Soit $\mathfrak{n}$ une algèbre de type Heisenberg et soit $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie (triviale) de dimension 1, munie d'un produit scalaire ; on écrira $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H$, où H est un vecteur unitaire de $\mathfrak{a}$. On définit l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ comme l'espace vectoriel réel

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{a},$$

de dimension $n = p + q + 1$, muni d'un crochet de Lie tel que

$$[H, V] = \frac{1}{2}V, \quad [H, Z] = Z$$

pour tous $V \in \mathfrak{v}$, $Z \in \mathfrak{z}$, et d'un produit scalaire qui étend ceux de $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{a}$, avec $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{a}$ orthogonaux. Notons (V, Z, t) l'élément $V + Z + tH$ de $\mathfrak{s}$. Par linéarité on a donc, pour $V, V' \in \mathfrak{v}$, $Z, Z' \in \mathfrak{z}$ et $t, t' \in \mathbb{R}$,

$$[(V, Z, t), (V', Z', t')] = \Big(\frac{1}{2}(tV' - t'V), tZ' - t'Z + [V, V'], 0\Big) \tag{6}$$

et

$$\langle (V, Z, t), (V', Z', t') \rangle = \langle V, V' \rangle + \langle Z, Z' \rangle + tt'. \tag{7}$$

D'après (6) on a

$$[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{n}, \quad [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{z}, \quad [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] = 0,$$

et $\mathfrak{s}$ est une algèbre de Lie *résoluble.*

Définition 6. — On appelle espace de Damek-Ricci le groupe de Lie $S = NA$ (connexe et simplement connexe) dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$ avec le crochet (6), muni de la métrique riemannienne invariante à gauche définie par le produit scalaire (7) sur $\mathfrak{s}$.

On peut *réaliser le groupe* S comme $\mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}$, muni de la multiplication

$$(V, Z, t) \cdot (V', Z', t') = \Big(V + e^{t/2}V', Z + e^t Z' + \frac{e^{t/2}}{2}[V, V'], t + t'\Big), \tag{8}$$

avec $V, V' \in \mathfrak{v}$, $Z, Z' \in \mathfrak{z}$, $t, t' \in \mathbb{R}$; l'élément neutre est $(0, 0, 0)$.

En effet S est un *produit semi-direct* de N par A : comme $[H,V]=V/2$ et $[H,Z]=Z$, l'application $\operatorname{ad} H$ de crochet par H est diagonalisée dans la décomposition $\mathfrak{s}=\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{z}\oplus\mathfrak{a}$, et l'action de $a_t=\exp tH\in A$ sur N s'écrit

$$a_t(V,Z)a_t^{-1}=e^{t\operatorname{ad} H}(V,Z)=\Big(e^{t/2}V,e^tZ\Big)\ ;$$

$N=\mathfrak{v}\times\mathfrak{z}$ est ici réalisé comme en 4.1. Par suite

$$\begin{aligned}(V,Z)a_t(V',Z')a_{t'}&=(V,Z)(e^{t/2}V',e^tZ')a_ta_{t'}\\&=\Big(V+e^{t/2}V',Z+e^tZ'+\frac{e^{t/2}}{2}[V,V']\Big)a_{t+t'},\end{aligned}$$

ce qui donne (8).

La notation $(V,Z,t)=(V,Z)a_t$ désigne donc l'élément $\exp(V+Z)\exp tH$ de S.

Métrique riemannienne de S. — La *métrique invariante à gauche* s'exprime aisément dans ce modèle. D'après (8), la différentielle à l'origine $o=(0,0,0)$ de la translation à gauche L_x par $x=(V,Z,t)\in S$ s'écrit

$$(D_oL_x)(\delta V,\delta Z,\delta t)=\Big(e^{t/2}\delta V,e^t\delta Z+\frac{e^{t/2}}{2}[V,\delta V],\delta t\Big),$$

où $(\delta V,\delta Z,\delta t)$ est un vecteur tangent en o. Si (dV,dZ,dt) est tangent en x, on le ramène à l'origine en

$$(D_oL_x)^{-1}(dV,dZ,dt)=\Big(e^{-t/2}dV,e^{-t}\Big(dZ-\frac{1}{2}[V,dV]\Big),dt\Big),$$

et l'invariance de la métrique donne

$$\|(dV,dZ,dt)\|_x^2=\Big\|(D_oL_x)^{-1}(dV,dZ,dt)\Big\|_o^2,$$

ce qui s'écrit encore

$$ds^2=dt^2+e^{-t}\|dV\|^2+e^{-2t}\Big\|dZ-\frac{1}{2}[V,dV]\Big\|^2 \tag{9}$$

(où la norme est donnée par le produit scalaire (7) sur $\mathfrak{s}=T_oS$).

La *mesure canonique de S* s'en déduit en calculant

$$\sqrt{\det g(x)}=\left|\det(D_oL_x)^{-1}\right|,$$

ce qui est immédiat, la matrice de $(D_oL_x)^{-1}$ étant triangulaire. On obtient la mesure

$$dx=e^{-2\rho t}dV\,dZ\,dt, \tag{10}$$

où[9] $2\rho=\operatorname{tr}_{\mathfrak{s}}\operatorname{ad} H=(p/2)+q$ est la « dimension homogène » de $\mathfrak{n}$, et dV,dZ,dt sont ici les mesures de Lebesgue respectives de $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{z}$ et $\mathbb{R}$. On peut aussi vérifier directement que la mesure (10) est invariante par les translations à gauche sur S définies par $(0,0,t_o)$,

[9] La notation 2ρ (souvent remplacée par Q dans la littérature) permettra d'accorder, au chapitre 5, les formules d'analyse avec celles du cas particulier des espaces hyperboliques. Cet accord n'est pas complet cependant, par suite d'une convention différente sur le choix de H (voir § 6.1).

$(V_o, 0, 0)$ et $(0, Z_o, 0)$, donc est une mesure de Haar à gauche sur le groupe S. On verrait de même que $dVdZdt$ est une mesure de Haar à droite sur S.

Remarque. — Soit $G = NAK$ une *décomposition d'Iwasawa* d'un groupe de Lie semi-simple connexe, non compact, de centre fini et de rang un. Soient B la forme de Killing de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, θ l'involution de Cartan, $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ (de dimensions respectives p et q) les espaces propres définis par les racines α et 2α ; sur tout ceci, voir [**H1**] chap. 6. La composante nilpotente N est alors (si $q \neq 0$) un groupe de type Heisenberg, en prenant $\mathfrak{v} = \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}_{2\alpha}$ et le produit scalaire

$$\langle X, Y\rangle = -\frac{1}{p+4q} B(X, \theta Y), \quad X, Y \in \mathfrak{n}$$

([**D2**] p. 258 ; voir § 6.1 ci-dessous pour plus de détails) ; on a ici $J_Z V = [Z, \theta V]$ d'après l'invariance de la forme de Killing.

La composante résoluble NA de la décomposition d'Iwasawa de G est donc un espace de Damek-Ricci. D'après la classification des espaces symétriques G/K de type non compact et de rang un, les dimensions $p = \dim \mathfrak{g}_\alpha$ et $q = \dim \mathfrak{g}_{2\alpha}$ sont alors[(10)]

	$[H^n(\mathbb{R})]$	$H^n(\mathbb{C})$	$H^n(\mathbb{H})$	$H^2(\mathbb{O})$
q	$[0]$	1	3	7
p	$[n-1]$	$2(n-1)$	$4(n-1)$	8

et celle de G/K est $p+q+1$. On voit ainsi, en comparant avec le tableau des valeurs de p et q pour le groupe de type Heisenberg le plus général (§ 4.1), que les groupes NA issus d'une décomposition d'Iwasawa ne forment qu'une classe très particulière d'espaces de Damek-Ricci, appelés *symétriques*. On trouvera dans [**CDKR1**] ou [**CDKR2**] une caractérisation de cette classe par une condition algébrique sur les applications J_Z.

En prenant $q = 2$ et $p = 4$ dans le tableau du § 4.1 on obtient donc un *espace de Damek-Ricci non symétrique*, de dimension minimale $4+2+1 = 7$. L'algèbre de type Heisenberg correspondante peut se réaliser en munissant $\mathfrak{v} = \mathbb{R}^4$ du crochet

$$[V, V'] = (ab' - ba' + dc' - cd', ac' - ca' + bd' - db') \in \mathfrak{z} = \mathbb{R}^2$$

(si $V = (a, b, c, d)$ et $V' = (a', b', c', d')$), et $\mathfrak{n} = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique [**D1**].

4.3. Géodésiques. — L'expression (9) de la métrique de S montre que $ds^2 \geqslant dt^2$. La droite $t \mapsto (0, 0, t)$ est donc la géodésique de vitesse initiale H issue de l'origine $o = (0, 0, 0)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Exp}_o\, tH = (0, 0, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

De plus $d(o, \mathrm{Exp}_o\, tH) = |t|$, en accord avec (10) § 2.5.

(10) Dans la suite, on laissera ici de côté le cas dégénéré (et bien connu par ailleurs) des espaces $H^n(\mathbb{R})$, pour lesquels $q = 0$.

Ce résultat élémentaire suffit à obtenir toutes les géodésiques de S lorsque c'est un *espace symétrique*, *i.e.* $S = NA$ issu d'une décomposition $G = NAK$ d'un groupe semi-simple de rang un. En effet K est un groupe d'isométries de S qui conservent o, et il agit transitivement sur les sphères centrées à l'origine dans l'espace tangent : si $X \in T_oS$ est unitaire, il existe $k \in K$ tel que $X = k \cdot H$, et

$$\operatorname{Exp}_o tX = k \cdot \operatorname{Exp}_o tH$$

donne la géodésique de vitesse initiale X issue de o. Par l'action transitive de G sur G/K (ou l'action à gauche de S sur lui-même), on en déduit les géodésiques issues d'un point quelconque de S.

Faute d'un tel groupe K, la recherche des géodésiques est plus délicate sur un *espace de Damek-Ricci général*. On y parvient par un artifice inspiré de la technique classique de « réduction à $\mathrm{SU}(1,2)$ » ([**H1**] p. 409 sq.), et où s'introduisent deux notions importantes : sous-groupes totalement géodésiques, réalisation de S comme une boule unité.

Proposition 7. — *Soient M une variété riemannienne (munie de sa connexion ∇) et M' une sous-variété de M telle que, pour tous champs de vecteurs T, U sur M', le champ $\nabla_T U$ soit encore un champ de vecteurs sur M'. Alors M' est une* sous-variété totalement géodésique *de M, i.e. toute géodésique de M tangente à M' en un point est contenue dans M' (et c'est alors une géodésique de M' pour la métrique induite).*

Démonstration. — Voir [**H1**] p. 79–81, ou [**KN**] vol. 2 p. 53–59. □

Lemme 8. — *Soient $V \in \mathfrak{v}$, $Z \in \mathfrak{z}$, et $W = J_Z V \in \mathfrak{v}$ (supposés unitaires). Alors*

$$\mathfrak{s}_o = \mathbb{R}V \oplus \mathbb{R}W \oplus \mathbb{R}Z \oplus \mathbb{R}H$$

est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{s}$, et le sous-groupe de Lie correspondant S_o de S est totalement géodésique.

Démonstration. — La première assertion est immédiate, puisque

$$\begin{aligned} &[H,Z] = Z, \quad [H,V] = V/2, \quad [H,W] = W/2, \\ &[Z,V] = 0, \quad [Z,W] = 0, \qquad [V,W] = Z\,; \end{aligned} \tag{11}$$

la dernière égalité se déduit de (4).

La deuxième assertion va résulter de la Proposition 7. Notons d'abord qu'il suffit, pour l'appliquer à S, de vérifier son hypothèse pour des champs de vecteurs T et U *invariants à gauche* sur S : si f et g sont deux fonctions sur S la définition d'une connexion montre que

$$\nabla_{f \cdot T}(g \cdot U) = f \cdot g \cdot \nabla_T U + f \cdot (Tg) \cdot U,$$

et l'hypothèse sera vérifiée par $f \cdot T$ et $g \cdot U$ et, par linéarité, par des champs de vecteurs quelconques.

Si $X \in \mathfrak{s} = T_oS$ est tangent à l'origine, on note encore X le champ de vecteurs invariant à gauche associé :

$$X(x) = (D_oL_x)\,X, \quad x \in S.$$

Si X, T, U sont trois champs invariants à gauche, leurs produits scalaires mutuels $\langle X(x), T(x)\rangle_x$ etc. sont constants par invariance de la métrique, et l'égalité (3) de 2.3 se réduit à

$$2\langle \nabla_X T, U\rangle = \langle [X,T],U\rangle + \langle [U,X],T\rangle + \langle [U,T],X\rangle \tag{12}$$

(qu'il suffit d'ailleurs d'écrire à l'origine, le champ $\nabla_X T$ étant lui aussi invariant). Ceci permet le calcul de $\nabla_X T$. On a par exemple, pour tous T, U,

$$2\langle \nabla_H T, U\rangle = \langle [H,T],U\rangle - \langle [H,U],T\rangle + \langle [U,T],H\rangle.$$

Comme $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}] = \mathfrak{n}$ est orthogonal à $\mathfrak{a}$, le dernier terme est nul. L'application $T \mapsto [H,T]$ étant diagonalisée dans une base de $\mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{a}$, l'expression $\langle [H,T],U\rangle$ est symétrique en T, U, d'où

$$\nabla_H = 0. \tag{13}$$

On vérifie de même, à l'aide de (12), les égalités

$$\begin{gathered} 2\nabla_V V = 2\nabla_W W = \nabla_Z Z = H, \\ 2\nabla_V Z = -W, \quad 2\nabla_W Z = V, \quad 2\nabla_V W = Z. \end{gathered} \tag{13'}$$

Les autres $\nabla_X T$ (pour $X, T \in \mathfrak{s}_o$) s'en déduisent, compte tenu de $\nabla_X T = \nabla_T X + [X,T]$, et la Proposition 7 montre que S_o est totalement géodésique dans S. $\square$

Remarque. — Il serait facile d'expliciter entièrement la connexion, et donc le tenseur de courbure de S, en poursuivant ces calculs. Le résultat (rébarbatif) est donné dans [**BTV**] p. 84.

Soit alors $X \in \mathfrak{s} = T_oS$ un vecteur tangent à l'origine, explicité sous la forme

$$X = v_oV_o + z_oZ_o + t_oH \in \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{a},$$

avec $v_o, z_o, t_o \in \mathbb{R}$ et V_o, Z_o, H unitaires. La géodésique γ de S définie par $\gamma(0) = o$, $\gamma'(0) = X$ s'obtiendra par les étapes suivantes :

(1) D'après le Lemme 8, γ est aussi une géodésique du sous-groupe S_o de S d'algèbre $\mathfrak{s}_o = \mathbb{R}V_o \oplus \mathbb{R}W_o \oplus \mathbb{R}Z_o \oplus \mathbb{R}H$, avec $W_o = J_{Z_o}V_o$.

(2) Or $\mathfrak{s}_o$ est isomorphe à la composante résoluble de la décomposition d'Iwasawa de l'algèbre classique $su(1,2)$, et on peut identifier la variété riemannienne S_o à l'espace hyperbolique complexe $H^2(\mathbb{C}) = G_o/K_o$, avec $G_o = \mathrm{SU}(1,2)$, $K_o = S(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(2))$.

(3) Dans la réalisation de $H^2(\mathbb{C})$ comme boule unité de $\mathbb{C}^2$, les géodésiques issues de l'origine sont simplement les diamètres, d'où la géodésique γ en remontant les étapes.

Théorème 9 **([CDKR1])**. — *Soit* $X = V + Z + t_o H \in \mathfrak{s} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{a}$ *un vecteur unitaire. Dans la réalisation de* S *comme* $\mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}$ *la géodésique* γ *de l'espace de Damek-Ricci* $S = NA$ *définie par* $\gamma(0) = o$, $\gamma'(0) = X$ *est donnée par*

$$\gamma(r) = \mathrm{Exp}_o(rX) = \Big(\frac{2R(1-t_oR)}{\chi} V + \frac{2R^2}{\chi} J_Z V, \frac{2R}{\chi} Z, \ln\frac{1-R^2}{\chi}\Big),$$

où $R = \mathrm{th}(r/2)$ *et* $\chi = (1-t_oR)^2 + R^2 \|Z\|^2$.

Démonstration. — Esquissons les calculs, en renvoyant à [**CDKR1**] p. 14–15 ou [**BTV**] p. 90–94 pour plus de détails. On rappelle que $G_o = \mathrm{SU}(1,2)$ est le groupe des matrices complexes 3×3 de déterminant 1 qui préservent la forme $|z_o|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2$ sur $\mathbb{C}^3$. Son algèbre de Lie $su(1,2)$ est constituée des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} -i(a_1+a_2) & \overline{x_1} & \overline{x_2} \\ x_1 & ia_1 & -\overline{y} \\ x_2 & y & ia_2 \end{pmatrix},$$

avec $x_1, x_2, y \in \mathbb{C}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, munie du crochet usuel des matrices. L'application

$$(14) \qquad vV_o + wW_o + zZ_o + tH \longmapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} iz & v-iw & t-iz \\ v+iw & 0 & -v-iw \\ t+iz & v-iw & -iz \end{pmatrix},$$

avec $v, w, z, t \in \mathbb{R}$, est d'après (11) un *isomorphisme d'algèbres de Lie* de $\mathfrak{s}_o$ sur la composante résoluble $\mathfrak{n}_o \oplus \mathfrak{a}_o$ de l'algèbre $su(1,2)$. C'est même une *isométrie*, si on munit $\mathfrak{s}_o$ du produit scalaire induit par $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{n}_o \oplus \mathfrak{a}_o$ de celui construit à partir de la forme de Killing de $su(1,2)$ comme expliqué au § 6.1 ci-dessous (Proposition 27) : pour $Y \in su(1,2)$ on a

$$\theta Y = -{}^t\overline{Y}, \quad \|Y\|_\theta^2 = -B(Y, \theta Y) = 6\,\mathrm{tr}\left(Y {}^t\overline{Y}\right),$$

et notre assertion se vérifie sans difficulté.

Passons aux groupes. D'après (8) on peut réaliser S_o comme $\mathbb{R}^4$ muni de la multiplication (induite par S) :

$$(v,w,z,t)\cdot(v',w',z',t') = \Big(v + e^{t/2}v', w + e^{t/2}w', z + e^t z' + \frac{e^{t/2}}{2}(vw' - wv'), t + t'\Big).$$

Dans cette réalisation on a

$$\begin{aligned}(v,w,z,t) &= (v,w,z,0)\cdot(0,0,0,t) \\ &= \exp(vV_o + wW_o + zZ_o)\exp(tH),\end{aligned}$$

où exp est l'application exponentielle de $\mathfrak{s}_o$ sur S_o. En effectuant les calculs correspondants d'exponentielles de matrices dans $\mathrm{SU}(1,2)$, on obtient l'analogue suivant de (14)

$$(15) \qquad (v,w,z,t) \longmapsto \begin{pmatrix} 1+(\eta/2) & \overline{\xi}/2 & -\eta/2 \\ \xi/2 & 1 & -\xi/2 \\ \eta/2 & \overline{\xi}/2 & 1-(\eta/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t/2) & 0 & \mathrm{sh}(t/2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sh}(t/2) & 0 & \mathrm{ch}(t/2) \end{pmatrix},$$

en notant $\xi = v+iw$, $\eta = (v^2/4)+(w^2/4)+iz$. L'application (15) permet d'identifier S_o au sous-groupe résoluble N_oA_o de $G_o = \mathrm{SU}(1,2)$, puis à l'espace homogène $G_o/K_o = H^2(\mathbb{C})$ par la décomposition d'Iwasawa. Ce dernier se réalise comme la boule unité de $\mathbb{C}^2$

$$B_o = \left\{(\zeta_1,\zeta_2) \in \mathbb{C}^2,\ |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 < 1\right\},$$

grâce à l'action naturelle de G_o sur l'ouvert

$$\left\{(z_o,z_1,z_2) \in \mathbb{C}^3,\ |z_o|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 > 0\right\},$$

suivie du passage au quotient $\zeta_1 = z_1/z_o$, $\zeta_2 = z_2/z_o$. En appliquant les matrices (15) au point $(z_o,z_1,z_2) = (1,0,0)$, qui donne l'origine $(0,0)$ de B_o, on obtient le difféomorphisme

$$(v,w,z,t) \longmapsto (\zeta_1,\zeta_2) = \Big(\frac{\xi}{1+e^t+\eta}, \frac{-1+e^t+\eta}{1+e^t+\eta}\Big) \tag{16}$$

de S_o sur B_o, inversé par

$$v+iw = \xi = \frac{2\zeta_1}{1-\zeta_2}, \quad z = \frac{2\,\mathrm{Im}\,\zeta_2}{|1-\zeta_2|^2}, \quad e^t = \frac{1-|\zeta_1|^2-|\zeta_2|^2}{|1-\zeta_2|^2}. \tag{17}$$

Si on munit B_o d'une métrique G_o-invariante convenablement normalisée, ce difféomorphisme est une isométrie.

Comme les géodésiques issues de l'origine dans $B_o = H^2(\mathbb{C})$, paramétrées par la distance r à l'origine, sont de la forme ([**F**] p. 385)

$$\zeta_1(r) = a\,\mathrm{th}\,cr, \quad \zeta_2(r) = b\,\mathrm{th}\,cr,$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$, $|a|^2+|b|^2 = 1$ et $c > 0$, les formules (17) donnent la géodésique cherchée de S sous la forme

$$\gamma(r) = (v(r)V_o + w(r)W_o, z(r)Z_o, t(r)) \in S.$$

Il n'y a plus qu'à choisir a, b, c pour que $\gamma'(0)$ soit le vecteur X donné d'où, par un calcul élémentaire, $a = v_o$, $b = t_o + iz_o$, $c = 1/2$ et le théorème. □

4.4. L'espace S comme boule unité. — Soit (V,Z,t) un point de S. En écrivant $V = vV_o$, $Z = zZ_o$, avec V_o et Z_o unitaires fixés, l'application (16) de 4.3 (avec $w = 0$) associe à (V,Z,t) le point (ζ_1,ζ_2) de la boule unité B_o de $\mathbb{C}^2$ donné par

$$\zeta_1 = \frac{v}{1+e^t+\eta} = \frac{\left(1+e^t+\frac14 v^2\right)v - izv}{\left(1+e^t+\frac14 v^2\right)^2 + z^2},$$

$$\zeta_2 = \frac{-1+e^t+\eta}{1+e^t+\eta} = \frac{\Big(-1+\left(e^t+\frac14 v^2\right)^2+z^2\Big)+2iz}{\left(1+e^t+\frac14 v^2\right)^2+z^2}.$$

Soit B la boule unité de $\mathfrak{s}$. Ceci conduit à définir globalement la *transformation de Cayley* $C : S \to B$ par

$$(V,Z,t) \longmapsto (V',Z',t') = C(V,Z,t),$$

avec

$$
(18)\qquad \begin{aligned}
V' &= \frac{(1+\tau)\,V - J_Z V}{(1+\tau)^2 + \|Z\|^2}, \quad Z' = \frac{2Z}{(1+\tau)^2 + \|Z\|^2},\\
t' &= \frac{-1+\tau^2+\|Z\|^2}{(1+\tau)^2 + \|Z\|^2}, \quad \text{avec } \tau = e^t + \frac{1}{4}\|V\|^2 .
\end{aligned}
$$

On retrouve les formules précédentes si on identifie $B_o \subset \mathbb{R}^4$ à l'intersection de B avec le sous-espace de $\mathfrak{s}$ engendré par V, $J_Z V$, Z et H. Sachant que $J_Z^2 V = -\|Z\|^2 V$, $\|J_Z V\| = \|Z\| \cdot \|V\|$ et que $J_Z V$ est orthogonal à V, on vérifie que C est un difféomorphisme de S sur B, inversé par

$$
(19)\qquad \begin{aligned}
V &= 2\frac{(1-t')V' + J_{Z'}V'}{(1-t')^2 + \|Z'\|^2}, \quad Z = \frac{2Z'}{(1-t')^2 + \|Z'\|^2},\\
e^t &= \frac{1-R^2}{(1-t')^2 + \|Z'\|^2}, \quad \text{avec } R = \sqrt{\|V'\|^2 + \|Z'\|^2 + t'^2}.
\end{aligned}
$$

Notons en particulier les relations

$$
(20)\qquad \begin{aligned}
&\left((1-t')^2 + \|Z'\|^2\right)\left((1+\tau)^2 + \|Z\|^2\right) = 4\\
&1 - R^2 = \frac{4e^t}{(1+\tau)^2 + \|Z\|^2}.
\end{aligned}
$$

On a ainsi un *nouveau modèle de l'espace de Damek-Ricci*, comme la boule unité B de $\mathfrak{s} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{a}$ munie de la métrique(11) obtenue en transportant par la transformation C le ds^2 invariant à gauche (9) de S. Ce modèle met en évidence plusieurs propriétés importantes.

Théorème 10 **([DR1, DR2])**

(i) Les géodésiques issues de l'origine de B sont les diamètres. La distance riemannienne r du point $(V', Z', t') \in B$ à l'origine est

$$
r = \ln \frac{1+R}{1-R}, \ \textit{i.e. } R = \operatorname{th}\frac{r}{2}, \quad \textit{avec } R = \sqrt{\|V'\|^2 + \|Z'\|^2 + t'^2}.
$$

Si $X \in \mathfrak{s}$ est unitaire, la géodésique $\operatorname{Exp}_o rX$ de S est donnée par

$$
(V', Z', t') = C(\operatorname{Exp}_o rX) = \operatorname{th}\frac{r}{2} \cdot X.
$$

(ii) En coordonnées géodésiques polaires (r, θ) autour de l'origine sur B la mesure riemannienne s'écrit

$$
dx = 2^{p+q}\left(\operatorname{sh}\frac{r}{2}\right)^{p+q}\left(\operatorname{ch}\frac{r}{2}\right)^q dr d\sigma_o(\theta),
$$

où $d\sigma_o$ est la mesure euclidienne classique sur la sphère unité de $\mathfrak{s} = \mathbb{R}^{p+q+1}$.

(iii) Les espaces de Damek-Ricci sont des variétés harmoniques.

(11) Il serait sans doute intéressant d'expliciter cette métrique. Ce ne sera cependant pas utile ici.

Démonstration

(i) Avec les notations du Théorème 9 et de sa preuve, le point
$$(\zeta_1(r), \zeta_2(r)) = \operatorname{th}\frac{r}{2}\cdot(v_o, t_o + iz_o) \in B_o \subset \mathbb{C}^2$$
s'identifie maintenant à
$$\operatorname{th}\frac{r}{2}\cdot(v_oV_o + z_oZ_o + t_oH) = \operatorname{th}\frac{r}{2}\cdot X \in B \subset \mathfrak{s}.$$
La transformation C étend l'application $(v, w, z, t) \longmapsto (\zeta_1, \zeta_2)$ construite au Théorème 9, d'où $C(\operatorname{Exp}_o rX) = (V', Z', t') = \operatorname{th}(r/2)\cdot X = RX$ et le résultat.

(ii) Pour calculer la matrice jacobienne de la transformation (18), on la décompose en
$$(V, Z, t) \longmapsto (V, Z, \tau) \longmapsto (V', Z', t').$$
La première jacobienne est triangulaire inférieure, de déterminant e^t. Pour la seconde on utilise la décomposition orthogonale $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 \oplus \mathbb{R}Z$ pour décomposer dZ, que l'on remplace donc par $dZ_1 + Zdu$, et on sépare les contributions de dV, dZ_1, du et $d\tau$. On obtient ainsi une matrice triangulaire supérieure par blocs dans la décomposition $\mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}_1 \oplus (\mathbb{R}Z \oplus \mathbb{R})$, ce qui permet le calcul du déterminant (voir les détails dans [**DR2**] p. 229, avec des notations légèrement différentes). Finalement
$$dV'dZ'dt' = 2^{q+1}\left((1+\tau)^2 + \|Z\|^2\right)^{-2\rho-1} dVdZd\tau.$$
En utilisant (20) et $dVdZd\tau = e^t dVdZdt$, la mesure canonique de S s'écrit d'après (10)
$$\begin{aligned} dx &= 2^n\left(1 - R^2\right)^{-2\rho-1} dV'dZ'dt' \\ &= 2^n\left(1 - R^2\right)^{-2\rho-1} R^{n-1} dR d\sigma_o(\theta) \end{aligned}$$
en coordonnées sphériques (euclidiennes) (R, θ) sur $\mathfrak{s}$. L'égalité $R = \operatorname{th}(r/2)$ donne le résultat annoncé.

(iii) D'après (ii) le déterminant $g(r, \theta)$ de la métrique est le produit d'une fonction de r seul par une fonction des θ^α, donc Lr est une fonction radiale (Lemme 1) et B est harmonique à l'origine (Théorème 4). Il en va de même pour S (isométrique à B), à l'origine comme en tout autre point grâce à l'action transitive des translations à gauche. □

Corollaire 11. — *Pour tout point x de l'espace de Damek-Ricci S, l'application* Exp_x *est un difféomorphisme de T_xS sur S. Deux point distincts de S peuvent être joints par une unique géodésique.*

Démonstration. — Par translation à gauche sur S, il suffit de considérer le cas où x (resp. l'un des deux points donnés) est l'origine. Les assertions sont alors claires sur le modèle B (Théorème 10 (i)). □

Remarques

(1) La distance $d(x,x')$ de deux points quelconques $x=(V,Z,t)$ et $x'=(V',Z',t')$ de S est donnée par

$$(21)\qquad 4\operatorname{ch}^2\frac{d(x,x')}{2}=e^{-t-t'}\Big[\Big(e^t+e^{t'}+\frac{1}{4}\Big\|V-V'\Big\|^2\Big)^2+\Big\|Z-Z'+\frac{1}{2}[V,V']\Big\|^2\Big]$$

Cela résulte de (19), (20) et du Théorème 10 (i), en ramenant l'un des points à l'origine par translation à gauche dans S. On retrouve l'expression (9) du ds^2 en prenant deux points infiniment voisins $V'=V+dV$, $Z'=Z+dZ$, $t'=t+dt$.

Le second membre de (21) est supérieur à $e^{-t-t'}\big(e^t+e^{t'}\big)^2$, d'où

$$(22)\qquad d(x,x')\geqslant|t-t'|,$$

avec égalité si et seulement si $V=V'$ et $Z=Z'$.

Il résulte aussi de (21) (avec $x'=o$) qu'une fonction est *radiale autour de o* si et seulement si elle est de la forme

$$(23)\qquad f\Big(e^{-t}\Big(1+e^t+\frac{1}{4}\left\|V\right\|^2\Big)^2+e^{-t}\left\|Z\right\|^2\Big).$$

(2) D'après le Théorème 5, les espaces de Damek-Ricci sont des variétés d'Einstein. Calculons, à titre d'exercice, la constante λ telle que $\rho_{ij}=\lambda g_{ij}$.

Si L est le laplacien de l'espace (réalisé par la boule B) on a, par la Proposition 1 et le Théorème 10 (ii),

$$\begin{aligned}L\Big(\frac{r^2}{2}\Big)&=1+r\frac{\partial_r\sqrt{g(r,\theta)}}{\sqrt{g(r,\theta)}}\\&=1+r\Big(\frac{p+q}{2}\coth\frac{r}{2}+\frac{q}{2}\operatorname{th}\frac{r}{2}\Big)\\&=(p+q+1)+\frac{p+4q}{12}r^2+O(r^4)\end{aligned}$$

au voisinage de l'origine. En coordonnées géodésiques (x^i) cela s'écrit encore

$$L\Big(\frac{r^2}{2}\Big)=n+\frac{p+4q}{12}g_{ij}(0)x^ix^j+O(|x|^4),$$

d'où $\lambda=-(p/4)-q$ en comparant avec (19) § 2.7.

4.5. Symétrie géodésique et isométries. — Soit $s:\operatorname{Exp}_o X\mapsto\operatorname{Exp}_o(-X)$, $X\in\mathfrak{s}$, la symétrie géodésique par rapport à l'origine o de S ; c'est un difféomorphisme involutif de S sur lui-même. Dans le modèle B, la symétrie est moins l'identité (Théorème 10 (i)) ; on a donc

$$C(s(x))=-C(x),\quad x\in S,$$

ce qui permet d'expliciter s grâce à (18) et (19). En notant $s(V,Z,t) = (\widetilde{V}, \widetilde{Z}, \widetilde{t})$ il vient

$$\begin{aligned} \widetilde{V} &= \frac{-\tau V + J_Z V}{\tau^2 + \|Z\|^2}, \quad \widetilde{Z} = \frac{-Z}{\tau^2 + \|Z\|^2}, \\ e^{\widetilde{t}} &= \frac{e^t}{\tau^2 + \|Z\|^2}, \quad \text{avec } \tau = e^t + \frac{1}{4}\|V\|^2 . \end{aligned} \tag{24}$$

Soit $t : S \to \mathbb{R}$ la fonction définie par la décomposition

$$x = n(x)a_{t(x)} = (V(x), Z(x), t(x))$$

d'un élément de S. Sur l'expression (24) de $\widetilde{t} = (t \circ s)(x)$ on vérifie les identités

$$\begin{cases} (t \circ s)(ax) = (t \circ s)(a) + (t \circ s)(x) \\ (t \circ s)(a) = -\,t(a), \ \ (t \circ s)(na) = (t \circ s)(n^{-1}a) \end{cases} \tag{25}$$

pour $a \in A$, $x \in S$, et $n \in N$.

La symétrie s *conserve la mesure riemannienne*. C'est immédiat sur le modèle B par le Théorème 10 (*ii*), la mesure sphérique usuelle $d\sigma_o$ étant invariante par passage à l'antipode. On a donc, en revenant à S,

$$e^{-2\rho\widetilde{t}} d\widetilde{V} d\widetilde{Z} d\widetilde{t} = e^{-2\rho t} dV dZ dt. \tag{26}$$

Par translations à gauche dans S, on voit que s est une isométrie si et seulement si les symétries géodésiques par rapport à tous les points sont des isométries, c'est-à-dire si S est un *espace symétrique*. Seuls les espaces hyperboliques (§ 4.2), ont cette propriété.

Citons enfin, sans démonstration, la description du groupe des *isométries* de S obtenue par Damek [**D2**]. Ce groupe contient évidemment S (agissant par les translations à gauche L_x, $x \in S$), ainsi que le groupe $A(S)$ des automorphismes du groupe de Lie S dont la différentielle à l'origine o conserve le produit scalaire donné sur l'algèbre de Lie.

Théorème 12. — *Soit S un espace de Damek-Ricci non symétrique. Les isométries de S qui conservent l'origine sont les éléments de $A(S)$.*

Une isométrie quelconque φ transforme o en $x = \varphi(o)$, d'où $L_x^{-1} \circ \varphi \in A(S)$ et le corollaire suivant.

Corollaire 13. — *Sous l'hypothèse du théorème, le groupe des isométries de S est le produit semi-direct $S \times A(S)$, où $f \in A(S)$ agit sur S par $L_x \mapsto f \circ L_x \circ f^{-1} = L_{f(x)}$.*

Le groupe $A(S)$ généralise le groupe noté traditionnellement M en théorie des espaces symétriques, mais il n'y a pas ici d'analogue du groupe K ; le groupe d'isométries de S est aussi petit que possible.

4.6. Le groupe N comme frontière de S. — Reprenons la transformation de Cayley $C : S \to B$ de 4.4, difféomorphisme de $S = NA$ sur la boule unité ouverte B de $\mathfrak{s}$. En remplaçant partout e^t par $a \in \mathbb{R}$ dans les formules (18) et (19), on obtient un difféomorphisme

$$\mathscr{C} : (V, Z, a) \mapsto (V', Z', t')$$

de l'espace $N \times \mathbb{R} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}$ (privé du paraboloïde $Z = 0$, $\tau = -1$) sur l'espace $\mathfrak{s}$ (privé du plan $Z' = 0$, $t' = 1$). D'après (20) on a notamment

$$1 - R^2 = \frac{4a}{(1+\tau)^2 + \|Z\|^2}, \quad \text{avec } R = \sqrt{\|V'\|^2 + \|Z'\|^2 + t'^2}. \tag{27}$$

La restriction C_o de $\mathscr{C}$ à l'hyperplan $a = 0$ est une projection stéréographique généralisée, *difféomorphisme de* $N \times 0 = N$ *sur la sphère unité* ∂B de $\mathfrak{s}$ (privée du point $t' = 1$). Les points de N peuvent ainsi être considérés comme *points à l'infini* de S : pour $n \in N$ on a

$$C_o(n) = \lim_{t \to -\infty} C(na_t) \in \partial B.$$

Noter aussi que $\lim_{r\to\infty} C(\operatorname{Exp}_o rX) = X$ pour $X \in \partial B$ (Théorème 10 (i)).

La preuve du Théorème 10 (ii) donne le jacobien de $\mathscr{C}$:

$$dV'dZ'dt' = 2^{q+1}\left((1+\tau)^2 + \|Z\|^2\right)^{-2\rho-1} dV dZ da,$$

avec $\tau = a + \left(\|V\|^2/4\right)$. Au premier membre, la mesure de Lebesgue $dV'dZ'dt'$ de $\mathfrak{s}$ s'écrit encore $R^{n-1}dRd\sigma_o$ en coordonnées sphériques, où $d\sigma_o$ est la mesure (euclidienne) sur la sphère unité ∂B. Par restriction à $R = 1$, *i.e.* $a = 0$, il vient

$$\left|\frac{\partial R}{\partial a}(V, Z, 0)\right| d\sigma_o = 2^{q+1}\left(\left(1 + \frac{1}{4}\|V\|^2\right)^2 + \|Z\|^2\right)^{-2\rho-1} dV dZ$$

d'où, à l'aide de (27), (25) et $dn = dVdZ$,

$$d\sigma_o = 2^q e^{2\rho(t\circ s)(n)} dn = 2^q P_{i\rho}(n)\, dn \tag{28}$$

(en anticipant sur la notation P_λ du noyau de Poisson introduite au § 5.4).

5. Analyse sur les espaces de Damek-Ricci

Dans ce chapitre on développe les principaux outils de l'analyse harmonique sur un espace de Damek-Ricci $S = NA$. Par analyse harmonique, on entend la décomposition d'une fonction « quelconque » sur S en une combinaison linéaire (intégrale) de fonctions propres du laplacien L de S.

Nous commençons par le cas des fonctions radiales ; dans la suite, *radial* signifiera toujours radial autour de l'élément neutre o de S. Comme S est une variété harmonique le problème se réduit à une variable ; on voit, en explicitant la partie radiale de L, qu'il entre dans le cadre de l'analyse des fonctions de Jacobi développée par Flensted-Jensen et Koornwinder [**Ko**]. Il n'y a plus qu'à en interpréter géométriquement les résultats (§ 5.1), ce qui conduit à introduire la transformation intégrale d'Abel

(§ 5.2) ; sa formule d'inversion suffirait d'ailleurs à retrouver les résultats fondamentaux de l'analyse harmonique radiale. Ces outils permettent notamment de résoudre explicitement l'équation de la chaleur et celle des ondes (§ 5.3).

Après avoir introduit le noyau de Poisson (§ 5.4), on peut enfin ramener au cas radial celui des fonctions non radiales (§ 5.5) par une démarche analogue à celle utilisée pour les espaces riemanniens symétriques ([**H3**] chap. 3).

Ce chapitre est entièrement tiré de l'article fondamental [**DR2**] et des travaux qui ont fait suite [**ADY, AMPS, ACDi, ADi, Di1, Di2**],..., auxquels on renvoie pour des compléments. Nous regrettons de n'avoir pu développer, faute de place, l'élégante approche générale de l'analyse radiale dans [**DR2**]. Contentons-nous d'en citer les deux résultats suivants ; sans être indispensables à la suite, ils en assurent cependant l'assise et la motivation.

(1) Pour la convolution sur S :

$$(u * v)(x) = \int_S u(y)v(y^{-1}x)\,dy,$$

les fonctions intégrables *radiales* forment une algèbre de Banach commutative.

(2) Les opérateurs différentiels linéaires sur S qui commutent aux translations à gauche de S et à la moyenne sphérique autour de l'origine sont les polynômes du laplacien L.

Notations. — Rappelons les principales du chapitre précédent : $x = na_t = (V, Z, t)$ un élément de $S = NA$, $t = t(x)$, $o = (0, 0, 0)$ l'élément neutre, $2\rho = (p/2) + q$, $n = p + q + 1$, $q \geqslant 1$. Le Corollaire 11 permet d'utiliser *globalement* sur S les coordonnées géodésiques polaires autour de o. On note (par abus) $u(x) = u(r)$ une fonction radiale sur S, avec $r = d(o, x)$. Enfin s est la symétrie géodésique par rapport à o, et $\mathscr{D}$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact.

5.1. Analyse harmonique radiale

Fonctions sphériques. — On appelle *fonction sphérique* sur S une *fonction propre radiale* φ du laplacien L, normalisée par $\varphi(o) = 1$. Comme L est un opérateur différentiel elliptique, une telle fonction est analytique sur S.

La partie radiale du laplacien de S s'écrit (Proposition 1 et Théorème 10)

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{rad}} &= \partial_r^2 + \Big(\frac{p+q}{2}\coth\frac{r}{2} + \frac{q}{2}\operatorname{th}\frac{r}{2}\Big)\partial_r \\ &= \partial_r^2 + \Big(\frac{p}{2}\coth\frac{r}{2} + q\coth r\Big)\partial_r,\ \ r > 0. \end{aligned}$$

Le changement $t = r/2$ transforme $4L_{\mathrm{rad}}$ en l'*opérateur de Jacobi*

$$\mathscr{L}_{\alpha,\beta} = \partial_t^2 + ((2\alpha+1)\coth t + (2\beta+1)\operatorname{th} t)\,\partial_t,$$

avec $\alpha = (p + q - 1)/2$, $\beta = (q - 1)/2$. Comme $p \geqslant 0$ et $q \geqslant 0$ on a $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2$, ce qui permet d'appliquer directement les résultats généraux de [**Ko**] p. 6–9 sur l'analyse de Jacobi. Les espaces de Damek-Ricci fournissent donc un cadre géométrique à ces résultats pour les α, β ci-dessus.

Dans nos notations[12] ils s'énoncent :

(1) Pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$ il existe une *unique* fonction C^∞ radiale φ_λ telle que

$$L\varphi_\lambda = -\left(\lambda^2 + \rho^2\right)\varphi_\lambda \quad \text{et} \quad \varphi_\lambda(0) = 1. \tag{1}$$

On a $\varphi_\lambda = \varphi_\mu$ si et seulement si $\lambda = \pm\mu$. De plus

$$\varphi_\lambda(r) = {}_2F_1\left(\rho - i\lambda, \rho + i\lambda; \frac{n}{2}; -\operatorname{sh}^2\frac{r}{2}\right) \tag{2}$$

$$= \left(1 - \operatorname{th}^2\frac{r}{2}\right)^{\rho - i\lambda} {}_2F_1\left(\rho - i\lambda, \frac{n}{2} - \rho - i\lambda; \frac{n}{2}; \operatorname{th}^2\frac{r}{2}\right), \tag{2'}$$

où ${}_2F_1$ est la *fonction hypergéométrique*

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!},$$

avec $(a)_o = 1$, $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ si $k \geqslant 1$; la fonction ${}_2F_1$ est prolongée analytiquement à $\mathbb{C} \smallsetminus [1, \infty[$.

(2) Pour $\operatorname{Re}(i\lambda) = -\operatorname{Im}\lambda > 0$ on a l'équivalent asymptotique

$$\varphi_\lambda(r) \sim c(\lambda) e^{(i\lambda - \rho)r} \text{ quand } r \to \infty, \tag{3}$$

avec

$$c(\lambda) = 4^{\rho - i\lambda} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(2i\lambda)}{\Gamma(\rho + i\lambda)\Gamma\left(\frac{n}{2} - \rho + i\lambda\right)}. \tag{4}$$

Le passage de (2) à (2') résulte d'une transformation classique des fonctions hypergéométriques (changement de la variable z en $z/(z-1)$). Les formules (3) et (4) se déduisent de (2'), sachant que ${}_2F_1(a, b; c; z)$ tend vers

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)}$$

lorsque z tend vers 1 par valeurs inférieures, si $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a + \operatorname{Re} b$ et $\operatorname{Re} c > 0$.

Transformation de Fourier sphérique. — Connaissant les fonctions sphériques φ_λ de S, on peut définir la transformée de Fourier sphérique d'une fonction *radiale* u sur S par

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(\lambda) &= \int_S u(x)\varphi_\lambda(x)\,dx \\ &= \frac{2^n \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty u(r)\varphi_\lambda(r)\left(\operatorname{sh}\frac{r}{2}\right)^{p+q}\left(\operatorname{ch}\frac{r}{2}\right)^q dr, \end{aligned} \tag{5}$$

d'après le Théorème 10 (*ii*).

[12] Prendre garde aux différences de notations (facteur 2) avec les formules usuelles pour les espaces hyperboliques (*cf.* § 6.1).

Soit $\mathscr{D}(S)_{\mathrm{rad}}$ l'espace des fonctions C^∞ sur S, radiales et à support compact. Pour $u \in \mathscr{D}(S)_{\mathrm{rad}}$, l'intégrale $\widetilde{u}(\lambda)$ converge pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et, par (1) et la symétrie du laplacien (§ 2.7),

$$\widetilde{Lu}(\lambda) = -\left(\lambda^2 + \rho^2\right) \widetilde{u}(\lambda).$$

D'après [**Ko**] à nouveau, on a les deux théorèmes fondamentaux suivants.

***Théorème 14* (Paley-Wiener)**. — *La transformation de Fourier sphérique $u \mapsto \widetilde{u}$ est une bijection de $\mathscr{D}(S)_{\mathrm{rad}}$ sur l'espace des fonctions entières f de $\lambda \in \mathbb{C}$, paires, pour lesquelles il existe une constante $A(f) \geqslant 0$ telle que, pour tout entier $k \geqslant 0$,*

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |f(\lambda)|(1+|\lambda|)^k e^{-A(f)|\operatorname{Im}\lambda|} < \infty.$$

De plus le support de u est contenu dans la boule $d(o,x) \leqslant R$ si et seulement si $\widetilde{u}$ vérifie ces inégalités avec $A(\widetilde{u}) \leqslant R$.

On trouvera dans [**Di2**] une preuve plus géométrique de ce théorème, obtenue en travaillant dans S, ainsi qu'une extension à l'espace de Schwartz de type L^p.

***Théorème 15* (Inversion de Fourier, formule de Plancherel)**. — *La transformation de Fourier sphérique est inversée par*

$$u(x) = C \int_{\mathbb{R}} \widetilde{u}(\lambda)\varphi_\lambda(x)\, |c(\lambda)|^{-2} d\lambda,$$

où $u \in \mathscr{D}(S)_{\mathrm{rad}}$, $x \in S$ et $C = 2^{q-3}\pi^{-(n/2)-1}\Gamma(n/2)$.

De plus, la transformation $u \mapsto \widetilde{u}$ se prolonge en un isomorphisme d'espaces hilbertiens de $L^2(S)_{rad}$ (fonctions radiales de carré intégrable pour dx) sur $L^2(\mathbb{R}, d\mu(\lambda))$ (fonctions de carré intégrable pour $d\mu(\lambda) = C|c(\lambda)|^{-2}d\lambda$).

La mesure de Plancherel $d\mu$ s'écrit à l'aide de (4) :

$$C|c(\lambda)|^{-2} = \frac{\delta(\lambda)}{2^n \pi^{n/2}\Gamma(n/2)} \prod_{1 \leqslant j < n/2} (\lambda^2 + c_j^2), \tag{6}$$

où

$$\delta(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \text{ est pair (donc } p/2 \text{ pair)} \\ \lambda \operatorname{th} \pi\lambda & \text{si } q \text{ est impair et } p/2 \text{ pair} \\ \lambda \coth \pi\lambda & \text{si } q = 1 \text{ et } p/2 \text{ impair}\,; \end{cases}$$

d'après le tableau du § 4.1 on a ainsi tous les cas possibles. Les c_j sont des entiers ou des demi-entiers selon les cas. Noter que $|c(\lambda)|^{-2}$ est *polynomiale* si et seulement si $q = \dim \mathfrak{z}$ est paire, *i.e.* si $n = \dim S$ est impaire.

Interprétation géométrique. — Pour interpréter les fonctions propres du laplacien et la transformation de Fourier sphérique, on écrit L en coordonnées (V, Z, t) sur S. On sait que

$$ds^2 = dt^2 + e^{-t}\,\|dV\|^2 + e^{-2t}\left\|dZ - \frac{1}{2}[V, dV]\right\|^2$$

(*cf.* (9) § 4.2), ce qui permet d'exprimer L par des calculs similaires à ceux du § 3.1 en coordonnées géodésiques polaires. On a ici $\sqrt{\det g(V,Z,t)} = e^{-2\rho t}$ (*cf.* (10) § 4.2) d'où, par (17) § 2.7,

$$Lu = e^{2\rho t}\partial_j\left(e^{-2\rho t}g^{jk}\partial_k u\right)$$

en coordonnées (V, Z, t). Si on affecte l'indice o à la variable t et des indices grecs α, β de 1 à $n-1$ aux variables (V, Z), on lit sur le ds^2 que $g_{oo} = 1$, $g_{o\alpha} = g_{\alpha o} = 0$, d'où $g^{oo} = 1$, $g^{o\alpha} = g^{\alpha o} = 0$ pour la matrice inverse, et[13]

$$Lu = \left(\partial_t^2 - 2\rho\partial_t\right)u + \partial_\alpha\left(g^{\alpha\beta}\partial_\beta u\right)$$

pour toute fonction u sur S.

La « partie radiale » de L relativement à t est un opérateur *à coefficients constants*, et admet donc des exponentielles pour fonctions propres. Soit $t : x \mapsto t(x)$ la fonction définie par

$$x = n(x)a_{t(x)}, \quad x \in S,\ n(x) \in N,\ t(x) \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$L\big(e^{(\rho\pm i\lambda)t(x)}\big) = -\left(\lambda^2 + \rho^2\right)e^{(\rho\pm i\lambda)t(x)}, \quad x \in S,\ \lambda \in \mathbb{C},$$

et $e^{(\rho\pm i\lambda)t}$ sont deux fonctions propres (N-invariantes à gauche) de L.

Soit M la *moyenne sphérique centrée à l'origine* (*cf.* § 3.2)

$$Mu(r) = \frac{1}{\sigma(r)}\int_{S(r)} u\,d\sigma,$$

que l'on peut aussi considérer comme une fonction radiale sur S. Comme S est une variété harmonique M commute à L (Théorèmes 4 et 10), d'où les fonctions propres radiales $M\left(e^{(\rho\pm i\lambda)t}\right)$, de même valeur propre $-\left(\lambda^2+\rho^2\right)$. Ces fonctions valent 1 à l'origine, d'où par unicité

$$\varphi_\lambda(r) = M\big(e^{(\rho-i\lambda)t}\big)(r) = M\big(e^{(\rho+i\lambda)t}\big)(r). \tag{7}$$

C'est l'analogue de la formule intégrale de Harish-Chandra pour les espaces riemanniens symétriques ([**H2**] p. 418), la moyenne sphérique remplaçant ici l'intégration sur K. Comme φ_λ est radiale on a aussi

$$\varphi_\lambda(x) = \varphi_\lambda(x^{-1}) = \varphi_\lambda(s(x)), \quad x \in S,$$

puisque les points x, x^{-1} et $s(x)$ sont à la même distance de o.

[13] Une expression plus détaillée de L sera donnée au Lemme 17 ci-dessous.

Signalons aussi, sans démonstration, l'*équation fonctionnelle des fonctions sphériques* sur S ([**DR2**] p. 223) : une fonction continue φ sur S est sphérique si et seulement si

$$M(\varphi_x)(y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

pour tous $x, y \in S$, en notant $\varphi_x(y) = \varphi(xy)$ la translatée à gauche par x.

La fonction sphérique φ_λ *est bornée (par* 1*) sur* S *si et seulement si* $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \rho$ ([**DR2**] p. 238). En effet, en notant $\mu = \operatorname{Im}\lambda$,

$$\begin{aligned}|\varphi_\lambda| &= \left|M\big(e^{(\rho-i\lambda)t}\big)\right| \leqslant M\big(e^{(\rho+\mu)t}\big) = M\big((e^{2\rho t})^{(\rho+\mu)/2\rho}\big)\\ &\leqslant \big(M\left(e^{2\rho t}\right)\big)^{(\rho+\mu)/2\rho} = (\varphi_{i\rho})^{(\rho+\mu)/2\rho} = 1\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $2\rho/(\rho+\mu)$ et $2\rho/(\rho-\mu)$; l'égalité $\varphi_{i\rho} = 1$ se déduit de l'unicité de la solution de (1) avec $\lambda^2 + \rho^2 = 0$. Inversement, $|\varphi_\lambda(r)|$ tend vers l'infini avec r si $\operatorname{Im}\lambda < -\rho$ d'après (3), d'où le résultat compte tenu de $\varphi_\lambda = \varphi_{-\lambda}$.

Méthode de descente. — Dans [**DR2**] et [**R**] les propriétés fondamentales de la transformation sphérique s'obtiennent par une intéressante méthode géométrique, que l'on va esquisser dans un cadre un peu plus général.

Soient $\mathfrak{z}_o$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{z}$, de dimension q_o, et $\mathfrak{z}'$ son orthogonal dans $\mathfrak{z}$. On note

$$\mathfrak{n}_o = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}_o, \quad \mathfrak{s}_o = \mathfrak{n}_o \oplus \mathfrak{a},$$

munis du produit scalaire induit par celui de $\mathfrak{s}$. On vérifie que $\mathfrak{n}_o$ est encore une algèbre de Lie de type Heisenberg si on la munit du crochet

$$[V, V']_o = p_o([V, V']),$$

où p_o est la projection orthogonale de $\mathfrak{z}$ sur $\mathfrak{z}_o$; on en déduit un espace de Damek-Ricci $S_o = N_o A$. L'indice o sera affecté aux notions relatives à S_o. Ainsi $2\rho = (p/2) + q$, $2\rho_o = (p/2) + q_o$, et L, L_o sont les laplaciens respectifs de S et S_o.

La proposition suivante permet de « descendre » certaines questions de S à S_o.

Proposition 16. — *La* transformation de Radon

$$\mathscr{R}u(V, Z_o, t) = e^{(\rho_o-\rho)t}\int_{\mathfrak{z}'} u(V, Z_o + Z', t)\, dZ',$$

avec $u \in \mathscr{D}(S)$*,* $V \in \mathfrak{v}$*,* $Z_o \in \mathfrak{z}_o$*,* $t \in \mathbb{R}$*, définit une fonction* $\mathscr{R}u \in \mathscr{D}(S_o)$ *qui possède les propriétés suivantes :*

(*i*) $\mathscr{R}(L+\rho^2)u = (L_o + \rho_o^2)\mathscr{R}u$

(*ii*) *si* u *est radiale sur* S*, alors* $\mathscr{R}u$ *est radiale sur* S_o*.*

Démonstration. — Soient $V_1, \ldots, V_p$, $Z_1, \ldots, Z_q$ et H des bases orthonormales de $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{a}$, et conservons ces notations pour les champs de vecteurs invariants à gauche sur S qui leur sont associés. Le lemme suivant se déduit de (18) § 2.7, compte tenu de (13) et (13') § 4.3.

Lemme 17. — *Le laplacien de S peut s'écrire*
$$L=\sum_{i=1}^{p}V_i^2+\sum_{j=1}^{q}Z_j^2+H^2-2\rho H.$$

Pour l'expliciter davantage, on observe que l'opérateur différentiel invariant à gauche défini par $X\in\mathfrak{s}$ est donné par
$$Xu(x)=\frac{d}{ds}u(x\cdot\exp sX)\Big|_{s=0}$$
d'où, compte tenu de la loi (8) § 4.2,
$$\begin{aligned}&V_i=e^{t/2}\Big(\partial_{v^i}+\frac{1}{2}\langle[V,V_i],\partial_Z\rangle\Big)\\ &Z_j=e^t\partial_{z^j}\,,\quad H=\partial_t\end{aligned}\tag{8}$$
(on a noté $V=v^iV_i$ et $Z=z^jZ_j$). En prenant ici pour base (Z_j) une base orthonormale de $\mathfrak{z}_o$ suivie d'une de $\mathfrak{z}'$, on voit d'après le Lemme 17 que
$$L=\sum_{i=1}^{p}V_i^2+\sum_{j=1}^{q_o}Z_j^2+\partial_t^2-2\rho\partial_t+L',$$
où L' ne dérive que sur les variables de $\mathfrak{z}'$. Dans le calcul de $\mathscr{R}Lu$, le terme $\mathscr{R}L'u$ est donc nul. On peut de même remplacer $[V,V_i]$ par $[V,V_i]_o$ dans (8), les termes manquants ne dérivant que dans la direction de $\mathfrak{z}'$. Comme
$$e^{(\rho_o-\rho)t}(\partial_t^2-2\rho\partial_t)=(\partial_t^2-2\rho_o\partial_t+\rho_o^2-\rho^2)\circ e^{(\rho_o-\rho)t},$$
il vient finalement $\mathscr{R}Lu=(L_o+\rho_o^2-\rho^2)\mathscr{R}u$, d'où le résultat (i) annoncé.

Pour (ii), notons qu'une fonction radiale u sur S peut s'écrire, d'après (23) § 4.4,
$$u(V,Z_o+Z_1,t)=f\Big(e^{-t}\Big(1+e^t+\frac{1}{4}\left\|V\right\|^2\Big)^2+e^{-t}\left\|Z_o\right\|^2+e^{-t}\left\|Z_1\right\|^2\Big).$$
Le changement de variable $e^{-t/2}Z'=Z''$ dans l'intégrale sur $\mathfrak{z}'$ (de dimension $q-q_o=2(\rho-\rho_o)$) donne
$$\mathscr{R}u(V,Z_o,t)=\int_{\mathfrak{z}'}f\Big(e^{-t}\Big(1+e^t+\frac{1}{4}\left\|V\right\|^2\Big)^2+e^{-t}\left\|Z_o\right\|^2+\left\|Z''\right\|^2\Big)\,dZ''.$$
D'après (23) § 4.4, cette intégrale ne dépend que de la distance du point (V,Z_o,t) à l'origine dans S_o ; la fonction $\mathscr{R}u$ est donc radiale sur S_o. □

Les propriétés (i) et (ii) montrent que la transformation $\mathscr{R}$ relie l'analyse harmonique radiale de S à celle de S_o, et notamment leurs fonctions sphériques respectives. Ricci applique cette méthode avec un $\mathfrak{z}_o$ de dimension $q_o=1$; le groupe N_o obtenu est alors le groupe de Heisenberg de dimension $p+1$, et S_o s'identifie à l'espace hyperbolique $H^{(p/2)+1}(\mathbb{C})$ (*cf.* § 4.2). Certains résultats sur S peuvent ainsi se déduire des résultats correspondants pour l'espace classique S_o.

5.2. Transformation d'Abel. — On peut pousser plus loin la méthode de descente, et relier directement l'analyse harmonique radiale de S à celle de la droite $\mathbb{R}$ par la transformation intégrale d'Abel. Elle s'introduit en observant que la transformée de Fourier sphérique d'une fonction radiale u s'écrit, d'après (5) et (7),

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(\lambda) &= \int_S u \cdot \varphi_\lambda \, dx = \int_S u \cdot M\big(e^{(\rho-i\lambda)t}\big)\, dx \\ &= \int_S Mu(x) e^{(\rho-i\lambda)t(x)} dx = \int_S u(x) e^{(\rho-i\lambda)t(x)}\, dx,\end{aligned}$$

grâce au Lemme 2 (applicable ici globalement).

En notant $x = (V, Z, t)$, la mesure $dx = e^{-2\rho t} dV dZ dt$ (*cf.* (10) § 4.2) s'écrit encore $dx = e^{-2\rho t} dn dt$, où $dn = dV dZ$ est une mesure invariante (à gauche et à droite) sur le groupe nilpotent N. Par suite

$$\widetilde{u}(\lambda) = \int_{N\times\mathbb{R}} u(na_t) e^{(-\rho-i\lambda)t} dn dt = \widehat{\mathscr{A}u}(\lambda) \tag{9}$$

en notant

$$\mathscr{A}u(t) = e^{-\rho t} \int_N u(na_t)\, dn = e^{\rho t} \int_N u(a_t n)\, dn \tag{10}$$

la *transformée d'Abel* de la fonction radiale u, et

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

la transformation de Fourier usuelle sur $\mathbb{R}$. Dans (10) la deuxième égalité s'obtient en observant que

$$a_{-t} n a_t = (e^{-t/2} V, e^{-t} Z, 0) = n' \quad \text{et} \quad dn' = e^{-2\rho t} dn\,;$$

notons au passage les deux expressions de la mesure de S :

$$d(na_t) = e^{-2\rho t} dn dt, \quad d(a_t n) = dn dt. \tag{11}$$

La transformation d'Abel transforme le laplacien en un opérateur différentiel à coefficients constants, et la convolution de S en celle de $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{A}\left(L + \rho^2\right) u = \partial_t^2 \mathscr{A} u \tag{12}$$

$$\mathscr{A}(u *_S v) = \mathscr{A}u *_{\mathbb{R}} \mathscr{A}v \tag{13}$$

pour $u, v \in \mathscr{D}(S)_{\mathrm{rad}}$. En effet

$$\begin{aligned}\widehat{\mathscr{A}Lu}(\lambda) = \widetilde{Lu}(\lambda) &= \int_S Lu \cdot \varphi_\lambda \, dx = \int_S u \cdot L\varphi_\lambda \, dx \\ &= -\left(\lambda^2 + \rho^2\right) \widetilde{u}(\lambda) = -\left(\lambda^2 + \rho^2\right) \widehat{\mathscr{A}u}(\lambda),\end{aligned}$$

ce qui établit (12). L'égalité (13) peut se vérifier aussi par transformation de Fourier :

$$\widehat{\mathscr{A}(u * v)} = \widetilde{u * v} = \widetilde{u} \cdot \widetilde{v} = \widehat{\mathscr{A}u} \cdot \widehat{\mathscr{A}v},$$

ou *directement* comme suit :

$$\mathscr{A}(u*v)(t) = e^{-\rho t}\int_N (u*v)(na_t)\,dn = e^{-\rho t}\int_{S\times N} u(x)v(x^{-1}na_t)\,dxdn,$$

ce qui s'écrit encore, en posant $x = n'a_{t'}$,

$$e^{-\rho t}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\rho t'}dt'\int_N u(n'a_{t'})\,dn'\int_N v(a_{-t'}n'^{-1}na_t)\,dn\,;$$

le changement $n\mapsto n'' = a_{-t'}n'^{-1}na_{t'}$ dans la dernière intégrale donne $dn'' = e^{-2\rho t'}dn$ et

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(u*v)(t) &= e^{-\rho t}\int_{\mathbb{R}} dt'\int_N u(n'a_{t'})\,dn'\int_N v(n''a_{t-t'})\,dn''\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\rho t}e^{\rho t'}\mathscr{A}u(t')\,e^{\rho(t-t')}\mathscr{A}v(t-t')\,dt' = (\mathscr{A}u*\mathscr{A}v)(t).\end{aligned}$$

D'après (9), la transformation de Fourier sphérique sur S est donc la composée de la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$ et de la transformation d'Abel, et l'inversion de la première revient à la recherche de $\mathscr{A}^{-1}$.

***Théorème 18* ([ADY]).** — *La transformation d'Abel de $S = NA$ est une bijection de $\mathscr{D}(S)_{\mathrm{rad}}$ sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})_{\mathrm{pair}}$. La transformation inverse s'écrit, avec $f\in\mathscr{D}(\mathbb{R})_{\mathrm{pair}}$,*

$$\left(\mathscr{A}^{-1}f\right)(r) = C_{pq}\Big(-\frac{d}{d(\operatorname{ch} r)}\Big)^{q/2}\Big(-\frac{d}{d(\operatorname{ch}(r/2))}\Big)^{p/2}f(r)$$

si $\dim S$ *est impair, et*

$$\left(\mathscr{A}^{-1}f\right)(r) = C'_{pq}\int_r^\infty \frac{d(\operatorname{ch} s)}{\sqrt{\operatorname{ch} s-\operatorname{ch} r}}\Big(-\frac{d}{d(\operatorname{ch} s)}\Big)^{(q+1)/2}\Big(-\frac{d}{d(\operatorname{ch}(s/2))}\Big)^{p/2}f(s)$$

si $\dim S$ *est pair. On a noté* $C_{pq} = 2^{-(3p+q)/2}\pi^{(1-n)/2} = \pi^{1/2}C'_{pq}$.

Rappelons que p est toujours pair et que $\dim S = p+q+1$.

Démonstration. — Pour $u\in\mathscr{D}(S)_{\mathrm{rad}}$, on a $\mathscr{A}u\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ par (12).

La parité de $\mathscr{A}u$ résulte de (9) et de $\varphi_\lambda = \varphi_{-\lambda}$. Elle se voit aussi sur (10) directement, en vérifiant par (21) § 4.4 que les points na_t et $a_{-t}n$ ont même distance à l'origine, d'où $u(na_t) = u(a_{-t}n)$ pour u radiale.

Pour expliciter $\mathscr{A}$ on écrit, avec $n = (V, Z, 0)$ (*cf.* (21) § 4.4),

$$u(na_t) = f\left(d(o, na_t)\right) = f\left(2\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\Big(\operatorname{ch}\frac{t}{2}+\frac{e^{-t/2}}{8}\|V\|^2\Big)^2+\frac{e^{-t}}{4}\|Z\|^2}\right).$$

Comme $dn = dVdZ$, l'intégrale $\mathscr{A}u$ s'exprime en coordonnées sphériques sur $\mathfrak{v}$ et sur $\mathfrak{z}$. Les changements de variables $V = 2^{3/2}e^{t/4}y^{1/2}\eta$, $Z = 2e^{t/2}z^{1/2}\zeta$, avec $x, z>0$,

$\|\xi\| = \|\zeta\| = 1$, donnent

$$\begin{aligned}\mathscr{A}u(t) &= C''_{pq} \int\int_0^\infty f\left(2 \operatorname{arg ch} \sqrt{\left(\operatorname{ch}\frac{t}{2} + x\right)^2 + z}\right) x^{(p/2)-1} z^{(q/2)-1} dxdz,\\ C''_{pq} &= \frac{2^{(3p/2)+q}\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma(p/2)\Gamma(q/2)}.\end{aligned}$$

Les changements successifs $\operatorname{ch}(t/2) + x = \operatorname{ch}(s/2)$, puis $\operatorname{ch} s + 2z = \operatorname{ch} r$, donnent enfin

$$\mathscr{A}u(t) = 2^{(3p+q)/2}\pi^{(n-1)/2}\left(\mathscr{W}^{1/2}_{p/2} \circ \mathscr{W}^{1}_{q/2} f\right)(\operatorname{ch} t/2),$$

où

$$\mathscr{W}^\alpha_\mu f(r) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_r^\infty f(s)(\operatorname{ch}\alpha s - \operatorname{ch}\alpha r)^{\mu-1} d(\operatorname{ch}\alpha s)$$

est, pour $\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\mu > 0$, une *transformation intégrale fractionnaire du type de Weyl.* Or on peut, pour chaque $\alpha > 0$ fixé, prolonger la définition des $\mathscr{W}^\alpha_\mu$, pour $\mu \in \mathbb{C}$, en un groupe à un paramètre de transformations, avec notamment

$$\mathscr{W}^\alpha_{-1} f(r) = -\frac{d}{d(\operatorname{ch}\alpha r)} f(r)$$

(voir [**Ko**] § 5.3). Ceci permet d'inverser $\mathscr{A}$ et donne les formules annoncées. □

Remarque. — On pourrait retrouver ainsi la formule d'inversion du Théorème 15, à partir de l'inversion de Fourier de $\mathbb{R}$ pour les fonctions paires

$$\mathscr{A}u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathscr{A}u}(\lambda)\cos(\lambda t)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widetilde{u}(\lambda)\cos(\lambda t)\, d\lambda,$$

en appliquant $\mathscr{A}^{-1}$ sous l'intégrale (sur la variable t). Par suite

$$\left(\mathscr{A}^{-1}\cos\lambda t\right)(r) = 2\pi C|c(\lambda)|^{-2}\varphi_\lambda(r) \tag{14}$$

par identification avec le Théorème 15.

Transformation d'Abel duale. — Soient u une fonction radiale, continue à support compact sur S, et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathscr{A}u(t) f(t)\, dt &= \int_{N\times\mathbb{R}} u(na_t) f(t) e^{-\rho t} dndt\\ &= \int_S u(x) f(t(x)) e^{\rho t(x)} dx,\end{aligned}$$

avec $x = n(x)a_{t(x)}$, $dx = e^{-2\rho t} dndt$. Comme u est radiale, on peut rendre radiale aussi (par moyenne sphérique) l'expression en $t(x)$, d'où

$$\int_{\mathbb{R}} \mathscr{A}u(t) f(t)\, dt = \int_S u(x)\mathscr{A}^* f(x)\, dx, \quad \text{avec } \mathscr{A}^* f = M\left(e^{\rho t}(f\circ t)\right), \tag{15}$$

ce qui définit la *transformation d'Abel duale* $\mathscr{A}^*$. En particulier

$$\varphi_\lambda = \mathscr{A}^*\left(e^{-i\lambda t}\right) = \mathscr{A}^*(\cos\lambda t), \tag{16}$$

où l'opérateur $\mathscr{A}^*$ agit sur la variable t.

Comme $\mathscr{A}$ précédemment, l'opérateur $\mathscr{A}^*$ (restreint aux fonctions paires) peut s'écrire comme composé de *transformations intégrales de Riemann-Liouville* (analogues à celles de Weyl, en intégrant de 0 à r au lieu de r à l'infini) d'où, en utilisant [**Ko**] § 5.3, une formule explicite pour $(\mathscr{A}^*)^{-1}$, donnée par un opérateur différentiel sur la variable $r = d(o, x)$ si $\dim S$ est impair, et intégro-différentiel sinon.

5.3. Chaleur et ondes. — Les outils précédents permettent de résoudre *l'équation de la chaleur* sur S

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = L_x u(t,x), \quad t > 0,\ x \in S, \\ \lim_{t\to 0} u(t,x) = f(x) \end{cases} \tag{17}$$

et *l'équation des ondes*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) = (L_x + \rho^2)u(t,x), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in S, \\ u(0,x) = f(x), \quad \partial_t u(0,x) = 0, \end{cases} \tag{18}$$

où f est une fonction donnée. Notons que le changement de $u(t,x)$ en $v(t,x) = e^{\rho^2 t} u(t,x)$ transforme (17) en

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) = (L_x + \rho^2)v(t,x) \\ \lim_{t\to 0} v(t,x) = f(x) \end{cases} . \tag{17'}$$

Si f est *radiale* on peut résoudre (au moins formellement) (17') et (18) par transformation de Fourier sphérique sur S, qui ramène à des équations différentielles ordinaires en t, ou par transformation d'Abel sur la variable x, qui ramène aux problèmes analogues sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R} \times S$.

Ainsi, en notant

$$\mathscr{A} v(t,s) = e^{\rho s} \int_N v(t, na_s)\, dn$$

la transformée d'Abel de $v(t,x)$ sur la variable x, on a

$$\partial_t \mathscr{A} v(t,s) = \partial_s^2 \mathscr{A} v(t,s)$$

d'après (17') et (12) d'où, pour f radiale,

$$\mathscr{A} v(t,s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \mathscr{A} f(r) e^{-(r-s)^2/4t} dr, \quad t > 0$$

et

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\rho^2 t} \mathscr{A}^{-1}\big(\mathscr{A} f *_{\mathbb{R}} e^{-r^2/4t}\big).$$

L'égalité (13) suggère donc de considérer la fonction

$$u(t,\cdot) = f * H_t, \quad \text{avec } H_t = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\rho^2 t} \mathscr{A}^{-1}\big(e^{-r^2/4t}\big) \tag{19}$$

(où $\mathscr{A}^{-1}$ est étendu à l'espace de Schwartz des fonctions de la variable r). Sachant que $L(f * g) = f * Lg$ par invariance à gauche du laplacien, on vérifie que (19) donne bien une solution de (17) pour toute $f \in \mathscr{D}(S)$, radiale ou non. On renvoie à [**ADY**] § 5 pour une étude détaillée du *noyau de la chaleur* H_t.

Pour l'*équation des ondes*, avec f radiale dans un premier temps, la transformation sphérique s'avère plus avantageuse. L'équation (18) conduit à

$$\begin{cases} \partial_t^2 \widetilde{u}(t,\lambda) = -\lambda^2 \widetilde{u}(t,\lambda), \\ \widetilde{u}(0,\lambda) = \widetilde{f}(\lambda),\ \partial_t \widetilde{u}(0,\lambda) = 0, \end{cases}$$

d'où

$$\widetilde{u}(t,\lambda) = \widetilde{f}(\lambda)\cos\lambda t \tag{20}$$

et $u(t,x)$ par inversion de la transformation sphérique. L'égalité (20) donne bien une solution de (18) si par exemple $f \in \mathscr{D}(S)_{\mathrm{rad}}$. De plus, le théorème 14 (Paley-Wiener) montre que, si le support de f est contenu dans la boule $d(o,x) \leqslant R$, celui de $u(t,\cdot)$ est contenu dans la boule $d(o,x) \leqslant |t| + R$.

On peut déduire de (20), d'après [**AMPS**], une expression plus intéressante. On a d'abord

$$u(t,o) = \left(\mathscr{A}^{*-1} f\right)(t) \tag{21}$$

pour $f \in \mathscr{D}(S)_{\mathrm{rad}}$ et $t \in \mathbb{R}$. En effet

$$u(t,o) = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(\lambda)\cos\lambda t\, d\mu(\lambda)$$

par le Théorème 15 d'où, pour toute fonction réelle $g \in \mathscr{D}(S)_{\mathrm{rad}}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u(t,o)\mathscr{A} g(t)\, dt &= \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{f}(\lambda)\mathscr{A} g(t)\cos\lambda t\, dt d\mu(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(\lambda)\widetilde{g}(\lambda)\, d\mu(\lambda) = \int_S f(x)g(x)\, dx \end{aligned}$$

par le Théorème 15 (formule de Plancherel) ; rappelons que $u(t,o)$ et $\mathscr{A} g(t)$ sont des fonctions paires. La dernière intégrale est $\int \mathscr{A}^{*-1} f \cdot \mathscr{A} g\, dt$, d'où (21).

Par translation à gauche sur S et moyenne sphérique (qui commutent au laplacien), on obtient enfin grâce à (21) une solution de l'équation des ondes (18), avec $f \in \mathscr{D}(S)$ (radiale ou non), sous la forme[14]

$$u(t,x) = \left(\mathscr{A}^{*-1} M(f_x)\right)(t), \tag{22}$$

avec $f_x(y) = f(xy)$, $x, y \in S$.

Proposition 19. — *Sur un espace S de dimension impaire, la solution (22) de l'équation des ondes (18) vérifie le principe de Huygens : si $f \in \mathscr{D}(S)$ a son support contenu dans la boule $d(o,x) \leqslant R$, le support en x de $u(t,x)$ est contenu dans la couronne*

$$|t| - R \leqslant d(o,x) \leqslant |t| + R.$$

[14] Cela revient à dire, compte tenu de la définition de $\mathscr{A}^*$, que les fonctions

$$y \mapsto e^{\rho t(y)} u(t(y),x) \text{ et } y \mapsto f(xy)$$

ont, pour tout x, mêmes moyennes sphériques autour de o.

Démonstration. — Quitte à changer t en $-t$, il suffit de raisonner pour $t \geqslant 0$. Le support de la translatée f_x est contenu dans la boule de centre x^{-1} et de rayon R. La moyenne $M(f_x)(t)$ est donc nulle si $|d(o,x^{-1})-t| > R$, la sphère de rayon t centrée en o étant alors disjointe de cette boule. Pour $\dim S$ impair, l'explicitation de $\mathscr{A}^{*-1}$ comme *opérateur différentiel* montre que $u(t,x)=0$ pour $t>0$ et $|d(o,x^{-1})-t| = |d(o,x)-t| > R$. □

5.4. Noyau de Poisson, application aux fonctions sphériques

Laplacien et symétrie. — La symétrie géodésique s par rapport à l'origine (§ 4.5) conserve la mesure riemannienne, mais ne commute pas en général au laplacien : seules les isométries ont cette propriété ([**H2**] p. 246). On a cependant le résultat suivant.

Proposition 20. — *Soit u une fonction N-invariante à gauche, de classe C^2 sur S. Alors*

$$(Lu)\circ s = L(u\circ s).$$

Démonstration[15]. — Si $t : x \mapsto t(x)$ est la fonction définie par $x = n(x)a_{t(x)}$, une fonction N-invariante à gauche peut s'écrire $u(x) = \varphi(e^{-t(x)})$.

Soit $X_1,\ldots,X_n$ une base orthonormale de champs de vecteurs sur S. D'après l'expression (18) § 2.7 du laplacien on a, pour toute fonction v sur S,

$$L(\varphi\circ v) = \varphi'(v)Lv + \varphi''(v)\sum_1^n (X_i v)^2 .$$

Il suffit donc d'établir les égalités

$$L(e^{-t})\circ s = L(e^{-t\circ s}) \quad \text{et} \quad \sum_1^n \left(X_i e^{-t}\right)^2 \circ s = \sum_1^n \left(X_i e^{-t\circ s}\right)^2 . \tag{23}$$

Reprenons l'expression du laplacien donnée par le Lemme 17 et les formules (8). Sachant que

$$e^{-t\circ s(x)} = f(x) = e^{-t}(\tau^2 + \|Z\|^2), \quad \tau = e^t + \frac{1}{4}\|V\|^2$$

(*cf.* (24) § 4.5), on obtient

$$\begin{aligned} V_i f &= e^{-t/2}\left(\tau v^i + \langle J_Z V, V_i\rangle\right), & Z_j f &= 2z^j, & Hf &= 2\tau - f,\\ V_i^2 f &= \tau + \frac{1}{2}\Big((v^i)^2 + \|[V,V_i]\|^2\Big), & Z_j^2 f &= 2e^t, & H^2 f &= f - \frac{1}{2}\|V\|^2 . \end{aligned}$$

[15] Faute d'une preuve géométrique directe, qui serait plus instructive !

En observant que

$$\sum_{i=1}^{p} \|[V, V_i]\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \langle Z_j, [V, V_i] \rangle^2 = \sum_j \left\| J_{Z_j} V \right\|^2$$
$$= \sum_j \|Z_j\|^2 \|V\|^2 = q \|V\|^2$$

on en déduit (23) et la proposition. □

Noyau de Poisson. — On appelle ainsi la fonction de $x = (V, Z, t) \in S$ définie par

$$P_\lambda(x) = e^{(\rho - i\lambda)(t \circ s)(x)} = \left(\frac{e^t}{\left(e^t + \frac{1}{4}\|V\|^2\right)^2 + \|Z\|^2} \right)^{\rho - i\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{24}$$

Noter qu'on a, d'après (25) § 4.5, pour $a \in A$, $x \in S$, $n \in N$,

$$P_\lambda(ax) = P_\lambda(a) P_\lambda(x), \quad P_\lambda(na) = P_\lambda(n^{-1}a), \quad P_\lambda(a_t) = e^{(i\lambda - \rho)t}. \tag{25}$$

Comme $e^{(\rho - i\lambda)t(x)}$ est fonction propre de L (§ 5.1), on a encore

$$LP_\lambda = -\left(\lambda^2 + \rho^2\right) P_\lambda$$

d'après la Proposition 20 ; en particulier la fonction $P_{i\rho}(x) = e^{2\rho(t \circ s)(x)}$ est *harmonique sur S.*

Comme $P_\lambda(o) = 1$ on en déduit par moyenne une *nouvelle expression des fonctions sphériques*

$$\varphi_\lambda = M(P_\lambda). \tag{26}$$

Autres expressions des fonctions sphériques. — Dans le modèle B de l'espace de Damek-Ricci, la sphère riemannienne de rayon r centrée à l'origine est la sphère euclidienne de rayon $R = \operatorname{th} r/2$, et sa mesure riemannienne $d\sigma$ s'écrit

$$d\sigma = 2^{p+q} \left(\operatorname{sh} \frac{r}{2} \right)^{p+q} \left(\operatorname{ch} \frac{r}{2} \right)^q d\sigma_o,$$

où $d\sigma_o$ est la mesure euclidienne sur la sphère unité (voir § 3.1 et Théorème 10). Par suite la moyenne sphérique centrée à l'origine se ramène à une moyenne sur ∂B :

$$Mf(r) = \frac{1}{\sigma_o} \int_{\xi \in \partial B} f(R\xi)\, d\sigma_o(\xi),$$

si f est une fonction sur B et $\sigma_o = \int_{\partial B} d\sigma_o = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$. Par transformation de Cayley $C : S \to B$ on a donc, pour toute fonction continue u sur S,

$$Mu(x) = \frac{1}{\sigma_o} \int_{\xi \in \partial B} (u \circ C^{-1})(R\xi)\, d\sigma_o(\xi), \quad \text{avec } x \in S,\ R = \|C(x)\|,$$

ce qu'on peut encore écrire comme une intégrale sur N par la transformation C_o du § 4.6 (formule (28)).

Les expressions (7) ou (26) des fonctions φ_λ permettent donc de les écrire comme intégrales sur N (*cf.* [**DR2**] p. 239). Nous utiliserons plutôt l'expression suivante.

Proposition 21 (**[ADY]**). — *Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in S$ on a*

$$\varphi_\lambda(x) = C' \int_N P_\lambda(n^{-1}x)P_{-\lambda}(n^{-1})\,dn = C' \int_N P_\lambda(nx)P_{-\lambda}(n)\,dn$$

avec $C' = 2^q/\sigma_o = 2^{q-1}\pi^{-n/2}\Gamma(n/2)$.

Démonstration (sic). — La convergence des intégrales sera établie au Lemme 25 ; l'invariance de dn à gauche et à droite donne $dn = d(n^{-1})$.

Il serait facile de voir que ces intégrales sont fonctions propres du laplacien avec valeur propre $-\left(\lambda^2 + \rho^2\right)$, et prennent en $x = o$ la valeur

$$C' \int_N P_\lambda(n)P_{-\lambda}(n)\,dn = C' \int_N P_{i\rho}(n)\,dn = 2^{-q}C'\sigma_o = 1$$

d'après (28) § 4.6. Mais cela ne suffit pas à établir l'égalité avec $\varphi_\lambda(x)$, le caractère radial en x n'étant pas évident...

Nous admettons ici la proposition. Elle est établie dans [**ADY**] p. 655 à partir de $\varphi_\lambda = MP_\lambda$ par un passage à la frontière un peu délicat, et dans [**Di1**] p. 639 par « descente » à l'espace hyperbolique complexe (*cf.* § 5.1). □

Corollaire 22. — *Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x, y \in S$ on a*

$$\varphi_\lambda(x^{-1}y) = C' \int_N P_\lambda(n^{-1}y)P_{-\lambda}(n^{-1}x)\,dn = C' \int_N P_\lambda(ny)P_{-\lambda}(nx)\,dn.$$

Démonstration. — Soit $x = n_o a_t$. La Proposition 21 donne

$$\varphi_\lambda(x^{-1}y) = C' \int_N P_\lambda(nx^{-1}y)P_{-\lambda}(n)\,dn$$

d'où, par le changement de variable $n \mapsto n'$ défini par $n = a_{-t}n'n_o a_t$, $dn = e^{-2\rho t}dn'$,

$$\varphi_\lambda(x^{-1}y) = C' \int_N P_\lambda(a_{-t}n'y)P_{-\lambda}(a_{-t}n'x)e^{-2\rho t}dn'.$$

Par (25) l'intégrand s'écrit aussi

$$P_\lambda(n'y)P_{-\lambda}(n'x)P_\lambda(a_{-t})P_{-\lambda}(a_{-t})e^{-2\rho t} = P_\lambda(n'y)P_{-\lambda}(n'x),$$

d'où le corollaire. □

On peut aussi voir les φ_λ comme des *coefficients de représentations* de S. Soit en effet π_λ la représentation du groupe S sur l'espace $L^2(N)$ induite par le caractère $a_t \mapsto e^{i\lambda t}$ de A, *i.e.*

$$(\pi_\lambda(x)f)\,(n) = e^{(i\lambda-\rho)t(x)} f\left(a_{t(x)}^{-1}n(x)^{-1}na_{t(x)}\right),$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in L^2(N)$, $n \in N$, et la décomposition $x = n(x)a_{t(x)}$ de $x \in S$. Cette représentation est *unitaire* pour λ réel : l'égalité $(\pi_\lambda(x)f, \pi_\lambda(x)g) = (f, g)$ se vérifie sans difficulté par le changement de variable $n \mapsto n' = a_{t(x)}^{-1}n(x)^{-1}na_{t(x)}$ dans l'intégrale.

Corollaire 23. — *Pour λ réel et $x \in S$ on a*

$$\varphi_\lambda(x) = C' \left(\pi_\lambda(x)P_\lambda, P_\lambda\right),$$

produit scalaire de $L^2(N)$.

Démonstration. — En utilisant les trois relations (25) on vérifie que

$$\left(\pi_\lambda(x)P_\lambda\right)(n) = P_\lambda(n^{-1}x).$$

Pour λ réel on a $\overline{P_\lambda(n)} = P_{-\lambda}(n) = P_{-\lambda}(n^{-1})$, et la Proposition 21 donne le résultat. □

5.5. Analyse harmonique non radiale. — On définit la *transformée de Fourier-Helgason* de $u \in \mathscr{D}(S)$ par

$$\widetilde{u}(\lambda, n) = \int_S u(x)P_\lambda(n^{-1}x)\,dx, \tag{27}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in N$; rappelons que $P_\lambda(x) = e^{(\rho - i\lambda)(t \circ s)(x)}$. On peut voir (27) comme un analogue de la transformée de Fourier usuelle, écrite en coordonnées sphériques, d'une fonction sur $\mathbb{R}^n$, λ jouant le rôle d'une variable radiale dans l'espace de Fourier et n celui d'une variable de direction (dans l'esprit du paragraphe 4.6).

Nous ne montrons ici que la formule d'inversion ; voir l'article original [**ACDi**] pour le théorème de Plancherel, et [**ADi**] pour un résultat de type Paley-Wiener.

***Théorème 24* ([ACDi])**. — *La transformée de Fourier-Helgason est inversée par*[16]

$$u(x) = C'' \int_{\mathbb{R}\times N} \widetilde{u}(\lambda, n)P_{-\lambda}(n^{-1}x)|c(\lambda)|^{-2}d\lambda dn$$

pour $u \in \mathscr{D}(S)$, $x \in S$, avec $C'' = CC' = 4^{q-2}\pi^{-n-1}\Gamma(n/2)^2$.

Démonstration. — On se ramène au cas d'une fonction radiale sur S en posant, pour x fixé,

$$U = M(u_x), \quad \text{avec } u_x(y) = u(xy).$$

Alors $U \in \mathscr{D}(S)$ est radiale et $U(o) = u_x(o) = u(x)$. Par le Théorème 15 on a donc

$$u(x) = C \int_{\mathbb{R}} \widetilde{U}(\lambda)|c(\lambda)|^{-2}d\lambda.$$

Or, d'après le Lemme 2,

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(\lambda) &= \int_S M(u_x)(y)\varphi_\lambda(y)\,dy = \int_S u_x(y)\varphi_\lambda(y)\,dy \\ &= \int_S u(y)\varphi_\lambda(x^{-1}y)\,dy,\end{aligned}$$

puisque φ_λ est radiale et la mesure dy invariante à gauche.

[16] Noter que la normalisation de P_λ dans [**ACDi**] diffère de la nôtre.

Ces égalités, jointes au Corollaire 22, entraînent le théorème à condition de justifier les permutations d'intégrales. Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 25. — *Pour tout compact K de S il existe une constante $C(K)$ telle que*

$$\left|P_\lambda(n^{-1}x)\right| \leqslant C(K)e^{\rho(t\circ s)(n)} \in L^2(N),$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in N$ et $x \in K$.

Démonstration. — Pour λ réel on a, d'après (25) § 4.5,

$$\left|P_\lambda(n^{-1}x)\right| = e^{\rho T(n,x)}e^{\rho(t\circ s)(n)},$$

où $T(n,x) = (t\circ s)(n^{-1}x) - (t\circ s)(n^{-1})$ est donné par (24) § 4.5 :

$$e^{T(n,x)} = e^{t_o}\frac{\left(1+\frac{1}{4}\left\|V\right\|^2\right)^2 + \left\|Z\right\|^2}{\left(e^{t_o}+\frac{1}{4}\left\|V+V_o\right\|^2\right)^2 + \left\|Z+Z_o+\frac{1}{2}[V,V_o]\right\|^2}$$

en notant $n^{-1} = (V,Z,0)$, $x = (V_o,Z_o,t_o)$. On voit sans peine que cette expression reste comprise entre deux constantes strictement positives lorsque V et Z varient, V_o, Z_o et t_o restant dans un compact. Comme

$$\int_N e^{2\rho(t\circ s)(n)}dn = 2^{-q}\sigma_o$$

par (28) § 4.6, le lemme est établi. □

En prenant pour K le support de u on a donc, pour $x \in K$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\int_{N\times S}|u(y)|\left|P_\lambda(n^{-1}y)P_{-\lambda}(n^{-1}x)\right| dndy < \infty,$$

ce qui justifie l'égalité

$$\widetilde{U}(\lambda) = \int_N \widetilde{u}(\lambda,n)P_{-\lambda}(n^{-1}x)\,dn.$$

De plus

$$|\widetilde{u}(\lambda,n)| \leqslant \int_S |u(x)|\left|P_\lambda(n^{-1}x)\right| dx \leqslant C_o e^{\rho(t\circ s)(n)}.$$

Remplaçons u par $L^k u$. Comme $\widetilde{Lu}(\lambda,n) = -\left(\lambda^2+\rho^2\right)\widetilde{u}(\lambda,n)$ d'après (27), on a même l'inégalité suivante : pour tout entier $k \geqslant 0$ il existe une constante C_k telle que, pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in N$,

$$|\widetilde{u}(\lambda,n)| \leqslant \frac{C_k}{\left(\lambda^2+\rho^2\right)^k}e^{\rho(t\circ s)(n)} \tag{28}$$

Comme $|c(\lambda)|^{-2}$ est à croissance polynomiale sur $\mathbb{R}$ (*cf.* (6) § 5.1), on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}\times N}\left|\widetilde{u}(\lambda,n)P_{-\lambda}(n^{-1}x)\right||c(\lambda)|^{-2}d\lambda dn < \infty,$$

ce qui achève les justifications nécessaires et la preuve du Théorème 24. □

Cas d'une fonction radiale. — Si $u \in \mathscr{D}(S)_{\mathrm{rad}}$, la définition (27) s'écrit d'après le Lemme 2

$$\widetilde{u}(\lambda, n) = \int_S Mu(x) P_\lambda(n^{-1}x)\, dx = \int_S u(x) M\left(P_\lambda(n^{-1}\cdot)\right)(x)\, dx.$$

Or la fonction $x \mapsto P_\lambda(n^{-1}x)$ est fonction propre du laplacien pour la valeur propre $-\left(\lambda^2+\rho^2\right)$, et vaut $P_\lambda(n^{-1})$ à l'origine. Par suite

$$M\left(P_\lambda(n^{-1}\cdot)\right)(x) = P_\lambda(n^{-1})\varphi_\lambda(x),$$

ce qui donne

$$\widetilde{u}(\lambda, n) = P_\lambda(n^{-1})\widetilde{u}(\lambda), \quad u \in \mathscr{D}(S)_{\mathrm{rad}}. \tag{29}$$

La Proposition 21 montre l'accord des formules d'inversion données par les Théorèmes 15 (cas radial) et 24 (cas général).

Transformation de Radon sur S. — Dans la définition (27) :

$$\widetilde{u}(\lambda, n) = \int_S u(x) e^{(\rho - i\lambda)(t\circ s)(n^{-1}x)} dx, \quad u \in \mathscr{D}(S),$$

il est naturel de décomposer l'intégrale en faisant apparaître les *surfaces de niveau* de la fonction $x \mapsto (t\circ s)(n^{-1}x)$, *i.e.* en écrivant $s(n^{-1}x) = n'a_t$, avec t donné. Prenons n' et t pour variables d'intégration. L'invariance de dx par les translations à gauche et par la symétrie s (§ 4.5) donne

$$x = ns(n'a_t), \quad dx = d(n'a_t) = e^{-2\rho t} dn' dt,$$

d'où

$$\widetilde{u}(\lambda, n) = \widehat{\mathscr{R}u}(\lambda, n), \quad \lambda \in \mathbb{C},\ n \in N, \tag{30}$$

en notant

$$\mathscr{R}u(t, n) = e^{-\rho t} \int_N u(ns(n'a_t))\, dn', \quad t \in \mathbb{R},\ n \in N, \tag{31}$$

et $\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt$ la transformation de Fourier usuelle sur la variable t.

Cette *transformée de Radon* de u, analogue à celle introduite par Helgason pour les espaces symétriques, associe à une fonction u ses intégrales sur la famille des « horocycles » $ns(Na_t)$, $n \in N$, $t \in \mathbb{R}$. Noter que, d'après (21) § 4.4, on a

$$d(o, Na_t) = d(o, s(Na_t)) = |t|.$$

La *transformation de Radon duale* associée s'obtient alors en intégrant une fonction $f(t, n)$ sur l'ensemble des horocycles $ns(Na_t)$ passant par un point donné x, c'est-à-dire tels que $s(n^{-1}x) \in Na_t$, soit encore $(t\circ s)(n^{-1}x) = t$. Plus précisément, montrons que

$$\int_{\mathbb{R}\times N} \mathscr{R}u(t, n) f(t, n)\, dt dn = \int_S u(x) \mathscr{R}^* f(x)\, dx, \tag{32}$$

avec

$$\mathscr{R}^* f(x) = \int_N e^{\rho(t\circ s)(n^{-1}x)} f((t\circ s)(n^{-1}x), n)\, dn. \tag{33}$$

En effet, le premier membre de (32) s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}} u(ns(n'a_t)) f(t,n) e^{-\rho t}\, dt dn' dn,$$

ou encore, par le changement $x = n'a_t$, avec $dx = e^{-2\rho t} dn' dt$,

$$\int_{S\times N} u(ns(x)) f(t(x), n) e^{\rho t(x)} dx dn\,;$$

enfin le changement $y = ns(x)$ dans l'intégrale en x donne $dy = dx$ et

$$\int_S u(y)\, dy \int_N e^{\rho(t\circ s)(n^{-1}y)} f((t\circ s)(n^{-1}y), n)\, dn,$$

ce qui établit (32).

D'après (30) l'inversion de la transformation de Fourier-Helgason (Théorème 24) et l'inversion de Fourier sur $\mathbb{R}$ conduisent aisément à une formule d'inversion de $\mathscr{R}$.

Corollaire 26. — *Pour $u \in \mathscr{D}(S)$ on a $\mathscr{R}u \in C^\infty(\mathbb{R}\times N)$, et la transformation de Radon $\mathscr{R}$ est inversée par*

$$u = \mathscr{R}^* D \mathscr{R} u, \quad u \in \mathscr{D}(S),$$

où l'opérateur D, agissant sur la seule variable $t \in \mathbb{R}$, est différentiel si $\dim S$ *est impaire, intégro-différentiel sinon.*

Démonstration. — L'intégrale (31) porte seulement sur les n' tels que $ns(n'a_t)$ appartienne au support de u. En notant $n'a_t = (V', Z', t)$ et $s(n'a_t) = (\widetilde{V}, \widetilde{Z}, \widetilde{t})$, on voit donc que la distance

$$d(o, ns(n'a_t)) = d(n^{-1}, s(n'a_t)) \geqslant |\widetilde{t}|$$

(*cf.* (22) §4.4) doit rester bornée. Il en résulte, d'après l'expression (24) §4.5 de $e^{\widetilde{t}}$, qu'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\Big(e^t + \frac{1}{4}\|V'\|^2\Big)^2 + \|Z'\|^2 \leqslant k e^t,$$

d'où $e^t \leqslant k$, et $\|Z'\| \leqslant k$, $\|V'\| \leqslant 2\sqrt{k}$. Par suite n' reste dans un compact de N, et $\mathscr{R}u$ est C^∞ sur $\mathbb{R}\times N$.

Soit D l'opérateur défini par

$$\widehat{Df}(\lambda) = 2\pi C'' |c(\lambda)|^{-2} \widehat{f}(\lambda).$$

L'expression (6) §5.1 de $|c(\lambda)|^{-2}$ montre que D est un opérateur différentiel à coefficients constants si $\dim S$ est impaire, à composer avec un opérateur de convolution sur $\mathbb{R}$ si $\dim S$ est paire[17]. Par le Théorème 24 on a alors

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_{\mathbb{R}\times N} C''|c(\lambda)|^{-2}\widehat{\mathscr{R}u}(\lambda,n)e^{(\rho+i\lambda)(t\circ s)(n^{-1}x)}\,d\lambda dn\\
&= \int_N e^{\rho(t\circ s)(n^{-1}x)}dn \int_{\mathbb{R}} \widehat{D\mathscr{R}u}(\lambda,n)e^{i\lambda(t\circ s)(n^{-1}x)}\frac{d\lambda}{2\pi}\\
&= \int_N e^{\rho(t\circ s)(n^{-1}x)}D\mathscr{R}u((t\circ s)(n^{-1}x),n)\,dn = \mathscr{R}^*D\mathscr{R}u(x). \qquad \square
\end{aligned}$$

6. Espaces hyperboliques et espaces de Damek-Ricci

On a déjà signalé (§ 4.2, Remarque) que les espaces riemanniens symétriques de type non compact et de rang un (espaces hyperboliques) sont un cas particulier des espaces de Damek-Ricci. On revient ici plus en détail sur le lien entre ces deux points de vue, qui comporte quelques pièges de notations.

Dans tout ce chapitre on note G un groupe de Lie semi-simple réel, connexe, non compact et de centre fini. Rappelons brièvement quelques notations classiques ([**H1**] chap. 6) : $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie en les (± 1)-espaces propres d'une involution de Cartan θ de G, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}\oplus\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{k}$ et $G = NAK$ une décomposition d'Iwasawa, avec K sous-groupe compact maximal de G, N sous-groupe nilpotent et A sous-groupe abélien. On suppose ici $\dim A = 1$, et on note α et 2α les racines positives de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{a}$. L'espace G/K est alors l'un des espaces hyperboliques $H^n(\mathbb{C})$, $H^n(\mathbb{H})$ ou $H^2(\mathbb{O})$.

6.1. Relations entre produits scalaires.

— La projection canonique de G sur G/K donne, par différentiation à l'élément neutre, une projection $\pi : \mathfrak{g}\to T_o(G/K)$, surjective et de noyau $\mathfrak{k}$, sur l'espace tangent à l'origine o de G/K. Par suite π induit un isomorphisme entre $T_o(G/K)$ et chaque supplémentaire de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$, notamment $\mathfrak{p}$ ou $\mathfrak{s} = \mathfrak{n}\oplus\mathfrak{a}$. La projection parallèlement à $\mathfrak{k}$, soit $\frac{1}{2}(I-\theta)$, assure le passage de l'un à l'autre :

$$\pi|_{\mathfrak{s}} = \big(\,\pi|_{\mathfrak{p}}\,\big)\circ\Big(\frac{1}{2}\,(I-\theta)|_{\mathfrak{s}}\Big).$$

La structure d'espace symétrique sur G/K s'obtient en munissant cette variété d'une métrique riemannienne invariante par l'action de G, ce qui revient à munir $T_o(G/K)$ d'un produit scalaire K-invariant. Si on identifie $T_o(G/K)$ à $\mathfrak{p}$ (grâce à π), on pourra choisir un produit scalaire de la forme

$$\langle X, X'\rangle_{\mathfrak{p}} = 2\lambda B(X,X'),\quad X,X'\in\mathfrak{p},$$

[17] Une expression explicite de D a été obtenue par A. Abouelaz et O. El Fourchi (prépublication de l'Université de Casablanca, 1998).

où λ est une constante positive et B est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Comme $\theta = -I$ sur $\mathfrak{p}$, c'est encore la restriction à $\mathfrak{p}$ du produit scalaire sur $\mathfrak{g}$:

$$2\lambda\langle X, X'\rangle_\theta = -2\lambda B(X, \theta X'), \quad X, X' \in \mathfrak{g}.$$

Si on identifie maintenant $T_o(G/K)$ à $\mathfrak{s}$ (grâce à π), on devra munir $\mathfrak{s}$ du produit scalaire déduit du précédent par transport, à savoir

$$\begin{aligned}\langle Y, Y'\rangle_{\mathfrak{s}} &= 2\lambda B\Big(\frac{1}{2}(I-\theta)Y, \frac{1}{2}(I-\theta)Y'\Big), \quad Y, Y' \in \mathfrak{s},\\ &= \lambda\left(B(Y, Y') - B(Y, \theta Y')\right)\end{aligned} \tag{1}$$

d'après la θ-invariance de B. Cela s'écrit encore, en séparant les composantes[18] selon $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{a}$,

$$\langle X + H, X' + H'\rangle_{\mathfrak{s}} = \lambda\left(\langle X, X'\rangle_\theta + 2\langle H, H'\rangle_\theta\right), \tag{2}$$

pour $X, X' \in \mathfrak{n}$ et $H, H' \in \mathfrak{a}$. En effet, pour $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ et $X_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma$ (sous-espaces propres associés à des racines β, γ de $\mathfrak{g}$), on a

$$(\beta+\gamma)(H)B(X_\beta, X_\gamma) = B([H, X_\beta], X_\gamma) + B(X_\beta, [H, X_\gamma]) = 0,$$

d'où $B(X_\beta, X_\gamma) = 0$ si $\beta + \gamma \neq 0$. Comme $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$, $\theta\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}$ et $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_o$, il vient

$$B(\mathfrak{a}, \mathfrak{n}) = B(\mathfrak{a}, \theta\mathfrak{n}) = B(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) = 0,$$

et (2) résulte de (1).

Le produit scalaire (2) définit sur le groupe $S = NA$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ une métrique invariante à gauche. Montrons enfin qu'on peut choisir λ pour que S soit un espace de Damek-Ricci. Pour $V, V' \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $Z \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$ on a d'après (2)

$$\begin{aligned}\langle Z, [V, V']\rangle_{\mathfrak{s}} &= -\lambda B(Z, \theta[V, V']) = -\lambda B(Z, [\theta V, \theta V'])\\ &= -\lambda B([Z, \theta V], \theta V') = \langle [Z, \theta V], V'\rangle_{\mathfrak{s}}.\end{aligned}$$

Par suite, avec les notations du chapitre 4,

$$J_Z V = [Z, \theta V], \tag{3}$$

d'où

$$J_Z^2 V = [Z, \theta[Z, \theta V]] = [Z, [\theta Z, V]] = [[Z, \theta Z], V]$$

puisque $[Z, V] = 0$.

Pour calculer $[Z, \theta Z]$, on observe que ce vecteur appartient à $\mathfrak{p}$ (car θ le change en son opposé) et à $[\mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{g}_{-2\alpha}] \subset \mathfrak{g}_o$, donc à $\mathfrak{a}$. Soit H une base donnée de $\mathfrak{a}$. On a donc $[Z, \theta Z] = tH$, et

$$tB(H, H) = B(H, [Z, \theta Z]) = B([H, Z], \theta Z) = 2\alpha(H)B(Z, \theta Z).$$

[18] Noter le facteur 2 devant la $\mathfrak{a}$-composante !

Par suite

$$J_Z^2 V = t[H,V] = t\alpha(H)V = 2\alpha(H)^2 \frac{B(Z,\theta Z)}{B(H,H)} V.$$

Soient $p = \dim \mathfrak{g}_\alpha$, $q = \dim \mathfrak{g}_{2\alpha}$. Comme $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_o \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$ on a

$$B(H,H) = \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad} H)^2 = 2p \cdot \alpha(H)^2 + 2q \cdot (2\alpha(H))^2 = 2(p+4q)\alpha(H)^2, \tag{4}$$

et il vient finalement

$$J_Z^2 V = -\frac{1}{p+4q} \langle Z, Z\rangle_\theta V$$

pour $V \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Z \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$. D'après (2) l'égalité $J_Z^2 V = -\|Z\|_{\mathfrak{s}}^2 V$ est vérifiée si on choisit $\lambda = 1/(p+4q)$, et $\mathfrak{n}$ est alors une *algèbre de type Heisenberg.*

Pour cette valeur de λ on a d'après (2) et (4), pour tout $H \in \mathfrak{a}$,

$$\|H\|_{\mathfrak{s}}^2 = 2\lambda \|H\|_\theta^2 = \frac{2}{p+4q} B(H,H) = 4\alpha(H)^2.$$

Le vecteur H sera donc unitaire dans $\mathfrak{s}$ si on choisit[19] $\alpha(H) = 1/2$, c'est-à-dire $[H,V] = \frac{1}{2}V$ pour $V \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $[H,Z] = Z$ pour $Z \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$, d'où l'accord complet avec les notations du § 4.2.

En résumé, on a établi la Proposition suivante.

Proposition 27. — *Soit $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$, associé au groupe semi-simple G de rang un (voir hypothèses au début de ce chapitre). Si on munit $\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$ du crochet induit par celui de $\mathfrak{g}$ et du produit scalaire*

$$\langle X + H, X' + H'\rangle_{\mathfrak{s}} = \frac{1}{p+4q} \left(\langle X, X'\rangle_\theta + 2\langle H, H'\rangle_\theta\right),$$

avec $X, X' \in \mathfrak{n}$ et $H, H' \in \mathfrak{a}$, on a $J_Z V = [Z, \theta V]$ pour $V \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $Z \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$, et le groupe correspondant $S = NA$ est un espace de Damek-Ricci.

6.2. Transformation de Fourier-Helgason. — *Pour un espace symétrique G/K*, la définition de la transformation de Fourier-Helgason fait intervenir K, ou plus exactement l'espace homogène K/M qui joue le rôle de frontière de G/K. Elle s'écrit, pour $f \in \mathscr{D}(G/K)$,

$$\widetilde{f}^H(\lambda, kM) = \int_{G/K} f(y) e^{\langle \rho - i\lambda, A(y,kM)\rangle} dy \tag{5}$$

([**H3**] p. 223), où $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $k \in K$ et dy est une mesure G-invariante sur G/K. Le terme géométrique $A(y,kM) \in \mathfrak{a}$ donne la distance de l'origine à l'horocycle de normale $kM \in K/M$ passant par le point $y \in G/K$. Il s'obtient par la décomposition d'Iwasawa de $g \in G = NAK$: si on note $A(g) \in \mathfrak{a}$ l'unique élément tel que $g \in N(\exp A(g))K$, on a

$$A(gK, kM) = A(k^{-1}g), \quad g \in G,\ k \in K. \tag{6}$$

[19] On voit ici l'origine d'un choix qui diffère de l'habituel $\alpha(H) = 1$ en théorie des espaces G/K.

La formule d'inversion obtenue par Helgason s'écrit alors ([**H3**] p. 225)

$$f(y) = C^{te} \int_{\mathfrak{a}^* \times (K/M)} \widetilde{f}^H(\lambda, kM) e^{\langle \rho + i\lambda, A(y,kM)\rangle} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda d(kM), \tag{7}$$

où la constante dépend des normalisations.

Pour un espace de Damek-Ricci $S = NA$, on a vu au § 4.6 que N joue le rôle de frontière, ce qui a conduit à la définition du § 5.5

$$\widetilde{u}(\lambda, n) = \int_S u(x) P_\lambda(n^{-1}x)\, dx, \tag{8}$$

où $u \in \mathscr{D}(S)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in N$, et à la formule d'inversion du Théorème 24

$$u(x) = C'' \int_{\mathbb{R} \times N} \widetilde{u}(\lambda, n) P_{-\lambda}(n^{-1}x) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda dn. \tag{9}$$

Il est instructif de comparer les deux définitions ([**ACDi**] p. 418), sous les hypothèses du début de ce chapitre.

Soit $H \in \mathfrak{a}$ le vecteur défini, comme précédemment, par $\alpha(H) = 1/2$. On a d'abord, pour $x \in S = NA$,

$$(t \circ s)(x) H = A(\theta x). \tag{10}$$

En effet, en comparant la symétrie géodésique s de S et l'involution de Cartan θ de G,

$$\begin{aligned} \theta(x)K = s(x)K &= n(s(x)) a_{t(s(x))} K \\ &= n(s(x)) (\exp(t \circ s)(x) H) K, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

La décomposition d'Iwasawa, prise sous la forme $G = KAN$, définit $k(g) \in K$, unique, tel que $g \in k(g)AN$. L'égalité (10) se généralise selon

$$P_\lambda(n^{-1}x) = P_\lambda(n^{-1}) e^{\langle \rho - i\lambda, A((\theta x)K, k(\theta n)M)\rangle}, \tag{11}$$

pour $x \in S$, $n \in N$. En se souvenant que θ est un automorphisme du groupe G, on a en effet, d'après les définitions,

$$\theta n^{-1} = n' e^{A(\theta n^{-1})} \left(k(\theta n)\right)^{-1}$$

avec $n' \in N$, d'où

$$\theta\left(n^{-1}x\right) = n' e^{A(\theta n^{-1})} \left(k(\theta n)\right)^{-1} \theta x$$

et finalement

$$A\left(\theta\left(n^{-1}x\right)\right) = A\left(\theta n^{-1}\right) + A\big(\left(k(\theta n)\right)^{-1} \theta x\big),$$

ce qui établit (11), grâce à (6) et (10).

On peut maintenant comparer les définitions (5) et (8). Pour $u \in \mathscr{D}(S)$ notons $f \in \mathscr{D}(G/K)$ la fonction définie par $f(naK) = u(na)$ avec $n \in N$, $a \in A$. Alors

$$\int_S u(x)\, dx = \int_{G/K} f(y)\, dy,$$

et les égalités (5), (8) et (11) montrent que

$$\widetilde{u}(\lambda, n) = P_\lambda(n^{-1})\,\widetilde{f \circ \theta}^H(\lambda, k(\theta n)M) \tag{12}$$

(en accord avec (29) § 5.5 pour les fonctions radiales).

En reportant (11) et (12) dans (9) on vérifie enfin l'accord des formules d'inversion (7) et (9) : il suffit d'observer que

$$P_\lambda(n^{-1})P_{-\lambda}(n^{-1}) = e^{2\rho(t \circ s)(n)} = e^{2\langle\rho, A(\theta n)\rangle},$$

et de transférer l'intégration de N à K/M par la formule intégrale ([**H2**] p. 198, avec des notations légèrement différentes)

$$\int_N F(k(\theta n)M)e^{2\langle\rho, A(\theta n)\rangle}dn = C^{te}\int_{K/M} F(kM)\,d(kM).$$

Références

Commentaires sur les monographies citées

Parmi les nombreux cours de géométrie différentielle (et notamment riemannienne), ceux retenus ici comportent divers prolongements d'intérêt particulier : étude détaillée du laplacien dans [**BGM**], chapitre 6 consacré aux variétés harmoniques dans [**Be**] ou [**W**], structure des espaces symétriques dans [**H1**], espaces à courbure constante et problèmes de classification dans [**Wo**]. D'un abord plus ardu, le classique traité [**KN**] reste une référence très complète, notamment sur la géométrie différentielle des espaces homogènes. Le livre [**RWW**] est surtout mentionné pour son intérêt historique, l'essentiel de ses résultats étant repris dans [**W**]. Le fascicule [**BTV**] étudie diverses généralisations de la notion d'espace symétrique, du seul point de vue géométrique, et tout particulièrement les espaces de Damek-Ricci ; certains résultats y sont cités sans démonstration. Les articles d'exposition [**F**] et [**Ko**], vivement recommandés, sont d'excellentes introductions à l'analyse harmonique sur les espaces symétriques de rang un, de deux points de vue différents ; ils ne nécessitent que peu de connaissances préalables. Le livre [**H2**], auquel fait suite [**H3**], permettra d'aller beaucoup plus loin.

[ACDi] F. Astengo, R. Camporesi & B. Di Blasio – « The Helgason Fourier transform on a class of nonsymmetric harmonic spaces », *Bull. Austral. Math. Soc.* **55** (1997), p. 405–424.

[ADi] F. Astengo & B. Di Blasio – « A Paley-Wiener theorem on NA harmonic spaces », *Colloq. Math.* **80** (1999), p. 211–233.

[ADY] J.-P. Anker, E. Damek & C. Yacoub – « Spherical analysis on harmonic AN groups », *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa* **33** (1996), p. 643–679.

[AMPS] J.-P. Anker, P. Martinot, E. Pedon & A. Setti – « The wave equation on harmonic AN groups », en préparation.

[Be] A. Besse – *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer-Verlag, 1978.

[BGM] M. Berger, P. Gauduchon & E. Mazet – *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Math., vol. 194, Springer-Verlag, 1971.

[BTV] J. Berndt, F. Tricerri & L. Vanhecke – *Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces*, Lecture Notes in Math., vol. 1598, Springer-Verlag, 1995.

[CDKR1] M. Cowling, A. Dooley, A. Korányi & F. Ricci – « H-type groups and Iwasawa decompositions », *Adv. in Maths.* **87** (1991), p. 1–41.

[CDKR2] ______, « An approach to symmetric spaces of rank one via groups of Heisenberg type », *J. Geom. Analysis* **8** (1998), p. 199–237.

[D1] E. Damek – « Curvature of a semi-direct extension of a Heisenberg type nilpotent group », *Colloq. Math.* **53** (1987), p. 249–253.

[D2] ______, « The geometry of a semi-direct extension of a Heisenberg type nilpotent group », *Colloq. Math.* **53** (1987), p. 255–268.

[Di1] B. Di Blasio – « An extension of the theory of Gelfand pairs to radial functions on Lie groups », *Boll. U.M.I.* **11** (1997), p. 623–642.

[Di2] ______, « Paley-Wiener theorems on harmonic extensions of H-type groups », *Monat. Math.* **123** (1997), p. 21–42.

[DR1] E. Damek & F. Ricci – « A class of nonsymmetric harmonic Riemannian spaces », *Bull. Amer. Math. Soc.* **27** (1992), p. 139–142.

[DR2] ______, « Harmonic analysis on solvable extensions of H-type groups », *J. Geom. Analysis* **2** (1992), p. 213–248.

[F] J. Faraut – « Analyse harmonique sur les paires de Guelfand et les espaces hyperboliques », in *Analyse harmonique* (J.-L. Clerc & al., éds.), Les Cours du C.I.M.P.A., Hermann, Paris, 1982.

[H1] S. Helgason – *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.

[H2] ______, *Groups and geometric analysis*, Academic Press, 1984.

[H3] ______, *Geometric analysis on symmetric spaces*, Math. Surveys and Monographs, vol. 39, American Math. Soc., 1994.

[Ka] A. Kaplan – « Fundamental solutions for a class of hypoelliptic p.d.e. generated by composition of quadratic forms », *Trans. Amer. Math. Soc.* **258** (1980), p. 147–153.

[KN] S. Kobayashi & K. Nomizu – *Foundations of differential geometry*, John Wiley & Sons, 1996, vol. I & II.

[Ko] T. Koornwinder – *Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups*, D. Reidel, 1984.

[L] A. Lichnérowicz – « Sur les espaces riemanniens complètement harmoniques », *Bull. Soc. Math. France* **72** (1944), p. 146–168.

[R] F. Ricci – « The spherical transform on harmonic extensions of H-type groups », *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino* **50** (1992), p. 381–392.

[RWW] H. Ruse, A. Walker & T. Willmore – *Harmonic spaces*, Edizioni Cremonese, 1961.

[S] Z. Szabó – « The Lichnerowicz conjecture on harmonic manifolds », *J. Diff. Geom.* **31** (1990), p. 1–28.

[SS] R. Schimming & H. Schlichtkrull – « Helmholtz operators on harmonic manifolds », *Acta Math.* **173** (1994), p. 235–258.

[W] T. Willmore – *Riemannian geometry*, Oxford University Press, 1993.

[Wo] J. Wolf – *Spaces of constant curvature*, McGraw-Hill, 1967.

F. Rouvière, Laboratoire Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France
E-mail : frou@math.unice.fr