Séminaires & Congrès
8, 2004, p. 311–389

LE THÉORÈME DE COMPARAISON POUR LES CYCLES ÉVANESCENTS

par

Philippe Maisonobe & Zoghman Mebkhout

Résumé. — Le but de cet article est de démontrer le théorème de comparaison pour les cycles évanescents. Nous montrons la constructibilité du complexe des cycles évanescents. Nous montrons que les solutions multiformes d'un complexe holonome sont de détermination finie. Nous montrons que les solutions multiformes d'un complexe holonome régulier sont à croissance modérée. Nous montrons que le gradué associé à la V-filtration d'un module spécialisable commute à la dualité. Nous utilisons tous les résultats précédents pour montrer le théorème de comparaison et nous illustrons les résultats généraux à l'aide de l'exemple d'une fonction monomiale.

***Abstract* (The Comparison Theorem for vanishing cycles).** — The goal of this article is to prove the comparaison theorem for the vanishing cycles. We prove the constructibility of the vanishing cycle complex. We prove that the multivalued solutions of an holonomic complex are of finite determination. We prove that the multivalued solutions of a regular holonomic complex are tame. We prove that the graded module with respect to the V-filtration of a specializable module commute with duality. We use all the previous results to prove the comparaison theorem and we illustrate the general results in the case of a monomial function.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 12, 14, 32.
Mots clefs. — Monodromie, cycles évanescents, modules spécialisables, V-filtration, dualité, régularité, théorème de comparaison.

1. Introduction

Soit $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction analytique complexe. Le théorème de la fibration de Milnor [**Mi**] définit les systèmes locaux $R^i f_* \mathbb{C}$ sur le disque épointé assez petit. D'où les représentations de monodromie, action d'un lacet autour de l'origine dans le sens trigonométrique sur la cohomologie de la fibre de Milnor. Le théorème de la monodromie dit que ces représentations sont quasi-unipotentes : les valeurs propres de la monodromie sont des racines de l'unité. Le théorème de la monodromie a été obtenu par A. Grothendieck en géométrie arithmétique comme conséquence des propriétés galoisiennes des racines de l'unité ([**G**], p. 228). Il a attiré de nombreux mathématiciens et reçu plusieurs démonstrations : transcendante [**Gr**], arithmétique [**Ka1**], géométrique [**Le**].

À la série convergente f, on associe algébriquement son polynôme de Bernstein-Sato $b_f \in \mathbb{C}[s]$. Les premiers exemples non triviaux de polynômes b_f dont on a disposé avaient des racines rationnelles. Ce fait remarquable fit penser à B. Malgrange qu'il avait un lien étroit entre le théorème de la monodromie et la rationalité des zéros de b_f. Précisément, Malgrange montra [**M1**] dans le cas d'une singularité isolée que les exposants de la monodromie, c'est-à-dire les logarithmes de ses valeurs propres, sont égaux modulo les entiers aux racines du polynôme b_f. Autrement dit la quasi-unipotence de la monodromie est équivalente à la rationalité des zéros de b_f. La situation d'une singularité isolée est facilitée par le fait que la cohomologie en degrés > 0 de la fibre de Milnor soit concentrée en un seul degré.

Le polynôme d'une fonction définissant un diviseur à croisements normaux est facile à calculer. À partir de là M. Kashiwara a montré dans [**K1**] que b_f divise un produit de translatés du polynôme obtenu par une résolution plongée des singularités de f ; en particulier les racines de b_f sont rationnelles. Cette démonstration est algébro-géométrique et reste valable sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Nous comprenons aujourd'hui cette démonstration comme un exemple de compatibilité de l'image directe par un morphisme propre avec le gradué associé à la V-filtration qui est démontrée en toute généralité dans l'article [**M-S**]. En fait, ce type de démonstration apparaît déjà dans l'article de N. Katz [**Ka2**].

L'approche algébro-géométrique démontre la rationalité des zéros de b_f, mais non son équivalence avec la quasi-unipotence de la monodromie. Une fois mise en évidence l'équivalence de catégories entre la catégorie des modules holonomes réguliers et la catégorie de faisceaux au sens dérivé (dits pervers dans la littérature), B. Malgrange a repris la question [**M2**] en construisant à partir de f un module holonome régulier muni d'une action de la monodromie et dont le complexe de de Rham est isomorphe au complexe $\mathbf{R}\Psi_f(\mathbb{C}_X)$ des cycles évanescents de Grothendieck-Deligne [**SGA7**]. Son résultat réalise de façon très précise alors son idée originale : la quasi-unipotence de la monodromie d'une singularité est équivalente à la rationalité des zéros de son polynôme de Bernstein-Sato. Sa démonstration consistait à prendre une image directe locale délicate sur le disque.

Dans [**K2**] Kashiwara a indiqué que la démonstration de Malgrange se généralisait au cas d'un module holonome régulier, toujours en prenant une image directe locale sur un disque. Il introduit l'idée importante de résoudre un module holonome par des modules élémentaires. Mais les détails des démonstrations, qui sont loin d'être évidents n'ont jamais paru.

Dans [**S**] C. Sabbah a prolongé le travail de Kashiwara en étudiant le comportement par dualité du gradué associe à un module spécialisable le long d'une hypersurface. Mais le théorème de comparaison n'était pas non plus démontré.

La première démonstration du théorème de comparaison pour les cycles évanescents est faite dans l'article [**M-S**] à l'aide de la notion de régularité issue du théorème de comparaison, qui est au coeur du problème, et du théorème de la résolution des singularités. Dans ce travail on introduit l'idée importante d'exprimer le gradué associé à la V-filtration d'un module spécialisable le long d'une hypersurface à l'aide d'une image inverse extraordinaire d'un module tordu convenablement, qui permet de montrer la régularité de ces gradués dans le cas holonome et le théorème de comparaison et s'insère dans le formalisme des opérations cohomologiques. Le problème est alors devenu de nature locale à la source, ce qui est aussi essentiel.

Dans ce cours, nous reprenons la question en donnant des démonstrations complètes des points clefs à l'aide des méthodes les plus récentes introduites dans l'article [**Me2**]. Au chapitre 2, nous démontrons géométriquement la constructibilité du complexe des cycles évanescents d'un complexe constructible sans le théorème de résolution des singularités, ni le théorème de fibration de Milnor. Dans le chapitre 3 nous montrons que les solutions multiformes d'un module holonome sont de détermination finie et que les solutions multiformes d'un module holonome régulier sont à croissance modérée. Dans le chapitre 4, nous reprenons complètement le fondement de la théorie de la V-filtration et précisons la compatibilité de la dualité avec son gradué. Au chapitre 5, nous démontrons le théorème de comparaison pour les cycles évanescents à partir du critère fondamental de la régularité qui, rappelons le encore une fois, est indépendant du théorème de la résolution des singularités. Dans le chapitre 6 en collaboration avec T. Torrelli nous explicitons pour illustrer les résultats généraux le cas déjà intéressant et non trivial d'une fonction monomiale. Le lecteur est invité à expliciter le cas de singularités un peu plus compliquées pour pénétrer davantage dans le calcul.

2. Constructibilité du complexe des cycles évanescents

2.1. Définition du complexe des cycles évanescents. — Une situation type est la suivante. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur une variété analytique complexe. On choisit une fois pour toute une coordonnée z sur le plan complexe. On note $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ et :

$$p\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad \tau + it \longmapsto \exp(2i\pi(\tau + it))$$

l'application exponentielle qui fait apparaître $\mathbb{C}$ comme revêtement universel du plan épointé. Fixons quelques notations à l'aide du diagramme :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] & X^* \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "f"] & \widetilde{X}^* \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\ 0 \arrow[r, "i"] & \mathbb{C} & \mathbb{C}^* \arrow[l, "j"'] & \mathbb{C} \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

L'application $Y \xhookrightarrow{i} X$ est l'inclusion dans X de la fibre Y de f au-dessus de l'origine dans $\mathbb{C}$, $X^* \xhookrightarrow{j} X$ est celle dans X du complémentaire de Y et $(\widetilde{X}^*, p, \widetilde{f})$ le produit fibré au-dessus de $\mathbb{C}^*$ de X^* et de $\mathbb{C}$.

Définition 2.1–1. — Soit $\mathscr{F}$ un complexe de $D^b(\mathbb{C}_X)$. Le complexe des cycles proches de Grothendieck-Deligne est le complexe :

$$\Psi_f(\mathscr{F}) := i^{-1}\mathbf{R}j_*p_*p^{-1}j^{-1}(\mathscr{F}).$$

Le foncteur des cycles proches Ψ_f ainsi défini est par construction un foncteur de la catégorie $D^b(\mathbb{C}_X)$ vers la catégorie $D^b(\mathbb{C}_Y)$.

Considérons le morphisme de translation sur $\mathbb{C}$:

$$T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \tau + it \longmapsto \tau + 1 + it$$

Il vérifie $p \circ T = p$. Il en résulte que le produit fibré $\widetilde{X^*}$ est muni d'un automorphisme au-dessus de X^* dit *automorphisme de monodromie* ; on le note également T.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau d'espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ et Ω un ouvert de $\widetilde{X}^*$. On considère le morphisme naturel d'adjonction :

$$\Gamma(\Omega, (jp)^{-1}\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(T^{-1}(\Omega), T^{-1}(jp)^{-1}\mathscr{F}) = \Gamma(T^{-1}(\Omega), (jp)^{-1}\mathscr{F})$$

Si $T^{-1}(\Omega) = \Omega$, on obtient ainsi un morphisme naturel :

$$\Gamma(\Omega, (jp)^{-1}\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(\Omega, (jp)^{-1}\mathscr{F})$$

Ainsi, pour tout ouvert U de $\mathbb{C}$, on a un morphisme :

$$\Gamma(U, (jp)_*(jp)^{-1}\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(U, (jp)_*(jp)^{-1}\mathscr{F})$$

Cela permet de définir un morphisme

$$(jp)_*(jp)^{-1}\mathscr{F} \longrightarrow (jp)_*(jp)^{-1}\mathscr{F}$$

puis après dérivation un morphisme

$$\Psi_f(\mathscr{F}) \longrightarrow \Psi_f(\mathscr{F})$$

appelé morphisme de monodromie, que l'on note toujours T.

D'autre part, le morphisme d'adjonction :

$$\mathscr{F} \longrightarrow \mathbf{R}j_*p_*p^{-1}j^{-1}(\mathscr{F})$$

fournit un morphisme :

$$i^{-1}\mathscr{F} \longrightarrow \Psi_f(\mathscr{F})$$

qui commute à l'action de la monodromie :

$$\begin{tikzcd} \Psi_f(\mathscr{F}) \arrow[rr, "T"] & & \Psi_f(\mathscr{F}) \\ & i^{-1}\mathscr{F} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Définition 2.1–2. — On définit le *complexe des cycles évanescents* $\Phi_f(\mathscr{F})$ comme le cône du morphisme naturel :

$$i^{-1}\mathscr{F} \longrightarrow \Psi_f(\mathscr{F})$$

Le morphisme naturel can: $\Psi_f(\mathscr{F}) \to \Phi_f(\mathscr{F})$ est appelé *morphisme canonique*.

Le complexe $\Phi_f(\mathscr{F})$ est bien défini dans la catégorie dérivée ; cependant sa dépendance fonctorielle en $\mathscr{F}$ n'est pas claire à ce stade.

Le morphisme $\widetilde{X}^* \xrightarrow{p} X^*$ est un revêtement topologique et son morphisme structural $p^{-1}\mathscr{O}_{X^*} \to \mathscr{O}_{\widetilde{X}^*}$ est donc un isomorphisme. La trace U^* sur X^* d'un voisinage U de Stein reste de Stein et $p^{-1}(U^*)$, qui est un fermé analytique du produit $U^* \times \mathbb{C}$, est aussi de Stein. Les images directes supérieures $R^k j_* p_*(\mathscr{O}_{\widetilde{X}^*})$ sont donc nulles pour $k > 0$. Le complexe $\Psi_f(\mathscr{O}_X)$ se réduit ainsi au faisceau :

$$\Psi_f(\mathscr{O}_X) := i^{-1}(j_* \circ p_*(\mathscr{O}_{\widetilde{X}^*}))$$

On peut interpréter les sections de $\Psi_f(\mathscr{O}_X)$ comme des fonctions analytiques multiformes en dehors de l'hypersurface $f^{-1}(0)$. Le morphisme naturel $i^{-1}\mathscr{O}_X \to \Psi_f(\mathscr{O}_X)$ est injectif. Son conoyau s'identifie donc à $\Phi_f(\mathscr{O}_X)$. On dispose alors d'une suite exacte de $i^{-1}\mathscr{D}_X$-modules sur Y :

$$0 \longrightarrow i^{-1}\mathscr{O}_X \longrightarrow \Psi_f(\mathscr{O}_X) \xrightarrow{\text{can}} \Phi_f(\mathscr{O}_X) \longrightarrow 0$$

Remarquons d'une part que le morphisme $T - \mathrm{Id}$ passe au quotient par $i^{-1}\mathscr{O}_X$. Il définit donc un morphisme :

$$\mathrm{var}\colon \Phi_f(\mathscr{O}_X) \longrightarrow \Psi_f(\mathscr{O}_X)$$

dit de variation. D'autre part, on vérifie que faisceau $i^{-1}j_*(\mathscr{O}_{X^*})$ apparaît comme étant le sous-faisceau des fonctions uniformes qui sont les sections de $\Psi_f(\mathscr{O}_X)$ invariantes par l'action de la monodromie.

Théorème 2.1–3. — *Pour tout complexe $\mathscr{M} \in D^b(\mathscr{D}_X)$, il existe un morphisme canonique entre les triangles :*

$$i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X) \longrightarrow \Psi_f(\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X)) \longrightarrow \Phi_f(\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X))$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\mathscr{H}om_{i^{-1}\mathscr{D}_X}(i^{-1}\mathscr{M}, i^{-1}\mathscr{O}_X) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{i^{-1}\mathscr{D}_X}&(i^{-1}\mathscr{M}, \Psi_f(\mathscr{O}_X))\\ &\longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{i^{-1}\mathscr{D}_X}(i^{-1}\mathscr{M}, \Phi_f(\mathscr{O}_X))\end{aligned}$$

qui est un isomorphisme si le complexe $\mathscr{M}$ est à cohomologie $\mathscr{D}_X$-cohérente.

Démonstration. — On note q le morphisme $j \circ p$. Soit $\mathscr{J}^\bullet$ la résolution $\mathscr{D}_X$-injective de Godement de $\mathscr{O}_X$. Le complexe $q^{-1}\mathscr{J}^\bullet$ est alors une résolution $q^{-1}\mathscr{D}_X$-injective de $q^{-1}\mathscr{O}_X$ et $q_*q^{-1}\mathscr{J}^\bullet$ est une résolution $\mathscr{D}_X$-injective de $q_*q^{-1}\mathscr{O}_X$. On considère les morphismes naturels de triangles :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{J}^\bullet) & \xrightarrow{\alpha} & q_*q^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{J}^\bullet) & \longrightarrow & \text{cône de } \alpha \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{J}^\bullet) & \xrightarrow{\alpha'} & \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(q_*q^{-1}\mathscr{M},q_*q^{-1}\mathscr{J}^\bullet) & \longrightarrow & \text{cône de } \alpha' \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{J}^\bullet) & \xrightarrow{\beta} & \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},q_*q^{-1}\mathscr{J}^\bullet) & \longrightarrow & \text{cône de } \beta
\end{array}$$

Comme $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{J}^\bullet)$ est un complexe d'objets $\mathbb{C}_X$-injectifs, on obtient le morphisme naturel de triangles :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{O}_X) & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{R}q_*q^{-1}(\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{O}_X)) & \longrightarrow & \text{cône de } \alpha \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{O}_X) & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},q_*q^{-1}\mathscr{O}_X) & \longrightarrow & \text{cône de } \beta
\end{array}$$

En appliquant le foncteur i^{-1} et en utilisant le morphisme naturel de foncteurs

$$i^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(-,-) \longrightarrow \mathscr{H}om_{i^{-1}\mathscr{D}_X}(i^{-1}(-),i^{-1}(-)),$$

on obtient le morphisme naturel cherché. Pour montrer que c'est un isomorphisme lorsque $\mathscr{M}$ est à cohomologie $\mathscr{D}_X$-cohérente, on est réduit au cas trivial $\mathscr{M}=\mathscr{D}_X$ en vertu du lemme du Way-Out ([**M-N**], II. 5) (la question étant locale).

Il résulte du théorème précédent que pour $\mathscr{F}=\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{O}_X)$, la dépendance fonctorielle en $\mathscr{M}$ du triangle des cycles évanescents est explicite. La monodromie et le morphisme canonique sont induits par la monodromie et par le morphisme canonique définis sur les fonctions multiformes. De plus, on dispose explicitement d'un morphisme de variation :

$$\mathrm{var}\ :\ \Phi_f(\mathscr{F}) \longrightarrow \Psi_f(\mathscr{F})$$

tel que $\mathrm{var}\circ\mathrm{can}+\mathrm{Id}=T$.

On étudie maintenant les propriétés de finitude du triangle des cycles évanescents en reprenant une méthode utilisée dans la démonstration géométrique du théorème de constructibilité [**M-N**].

Lemme 2.1–4. — *Soit $h : X \to X'$ un morphisme de variétés analytiques ; soit $g : X' \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\mathscr{F} \in D(\mathbb{C}_X)$. On désigne encore par $h : (g\circ h)^{-1}(0) \to g^{-1}(0)$ la restriction de h. Il existe un morphisme naturel :*

$$\Psi_g(\mathbf{R}h_*\mathscr{F}) \longrightarrow \mathbf{R}h_*(\Psi_{g\circ h}\mathscr{F}))$$

qui est un isomorphisme si h est propre.

Démonstration. — Le morphisme se déduit de l'existence des morphismes naturels de changement de base, en vertu du théorème de changement de base pour un morphisme propre c'est un isomorphisme.

Donnons une première application de ce résultat. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ comme dans la situation initiale. On désigne par $\gamma : X \to X \times \mathbb{C}$, $x \mapsto (x, f(x))$ l'application graphe de f ; on note encore $\gamma : f^{-1}(0) \to f^{-1}(0) \times \{0\}$ sa restriction et $\pi : X \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la projection sur $\mathbb{C}$. Le foncteur γ_* étant exact, on déduit du lemme 2.1–4 l'isomorphisme :

$$\Psi_\pi(\gamma_* \mathscr{F}) \simeq \gamma_*(\Psi_f(\mathscr{F}))$$

Pour étudier le foncteur des cycles proches associé à un morphisme, on peut ainsi se ramener au cas où ce morphisme est une projection.

2.2. Le théorème de constructibilité du complexe des cycles évanescents

On rappelle qu'un complexe de $D^b(\mathbb{C}_X)$ est dit *constructible* si ses faisceaux de cohomologie sont des faisceaux constructibles.

Théorème 2.2–1. — *Si $\mathscr{F}$ est un complexe constructible, le complexe $\Psi_f(\mathscr{F})$ est un complexe constructible.*

Démonstration. — On va procéder par récurrence sur la dimension de X. Le cas de dimension 1 est laissé au lecteur. On peut sans restriction supposer que $\mathscr{F}$ est un faisceau constructible. Le problème étant local, on peut supposer que $X = X' \times D$ où X' (resp. D) est un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$ (resp. $\mathbb{C}$) et que $f = \pi : X' \times D \to D$ est la deuxième projection. Soit Z la réunion des composantes non contenues dans $\pi^{-1}(0)$, en dehors desquelles $\mathscr{F}$ est un système local. L'espace Z est contenu dans une hypersurface H dont $X' \times 0$ n'est pas une composante irréductible. On peut alors appliquer le théorème de préparation de Weierstrass à H au voisinage de l'origine ; ainsi, quitte à diminuer X' et D, nous pouvons supposer que :

- $X' = X'' \times \Delta$ où X'' (resp. Δ) est un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n-2}$ (resp. $\mathbb{C}$) ;
- $Z \subset X'' \times \Delta \times D$;
- la restriction à Z de la projection :

$$p : X'' \times \Delta \times D \longrightarrow X'' \times D, \quad (x'', x_1, t) \longmapsto (x'', t)$$

est finie.

Soit $D^* = D - \{0\}$ le disque épointé. L'inclusion $X'' \times \Delta \times D^* \subset X'' \times \mathbb{C} \times D^*$ est une équivalence d'homotopie ; l'application j désignant l'inclusion ouverte

$$X'' \times \Delta \times D^* \hookrightarrow X'' \times \mathbb{C} \times D,$$

$j^{-1}\mathscr{F}$ se prolonge en un faisceau $\widetilde{j^{-1}\mathscr{F}}$ sur $X'' \times \mathbb{C} \times D^*$ qui est un système local en dehors de Z. On note encore $\mathscr{G}$ le prolongement par 0 de $\widetilde{j^{-1}\mathscr{F}}$ à $X'' \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times D$.

Ce faisceau est donc constructible. On note

$$\widetilde{f} = \widetilde{\pi} : X'' \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times D \longrightarrow D, \quad f' = \pi' : X'' \times D \longrightarrow D$$

et

$$\widetilde{p} : X'' \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times D \longrightarrow X'' \times D$$

les projections naturelles. Le morphisme $\widetilde{p}$ étant projectif, $\mathbf{R}\widetilde{p}_*\mathscr{G}$ est constructible [**M-N**]. Par hypothèse de récurrence, le complexe $\Psi_{f'}(\mathbf{R}\widetilde{p}_*\mathscr{G})$ l'est aussi. D'après le lemme 2.1–4, $\mathbf{R}\widetilde{p}_*(\Psi_{\widetilde{f}}(\mathscr{G})) = \Psi_{f'}(\mathbf{R}\widetilde{p}_*(\mathscr{G}))$ et est donc aussi constructible.

Soit Z' la réunion de Z et de $X'' \times \{\infty\} \times D$, ℓ l'inclusion fermée de Z' dans $X'' \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times D$ et k l'inclusion ouverte du complémentaire. Il est facile de voir que $k^{-1}(\Psi_{\widetilde{f}}(\mathscr{G}))$ est constructible. Le complexe $k_! k^{-1}(\Psi_{\widetilde{f}}(\mathscr{G}))$ est donc constructible.

On considère enfin les triangles :

$$k_! k^{-1}(\Psi_{\widetilde{f}}(\mathscr{G})) \longrightarrow \Psi_{\widetilde{f}}(\mathscr{G}) \longrightarrow \ell_* \ell^{-1}(\Psi_{\widetilde{f}}(\mathscr{G})) \tag{1}$$

$$\mathbf{R}\widetilde{p}_*(k_! k^{-1}(\Psi_{\widetilde{f}}(\mathscr{G}))) \longrightarrow \mathbf{R}\widetilde{p}_*(\Psi_{\widetilde{f}}(\mathscr{G})) \longrightarrow \mathbf{R}\widetilde{p}_*(\ell_* \ell^{-1}(\Psi_{\widetilde{f}}(\mathscr{G}))) \tag{2}$$

L'image directe $\mathbf{R}\widetilde{p}_*(k_! k^{-1}(\Psi_{\widetilde{f}}(\mathscr{G})))$ est constructible, car $\widetilde{p}$ est propre. On déduit alors du triangle (2) que $\mathbf{R}\widetilde{p}_*(\ell_* \ell^{-1}(\Psi_{\widetilde{f}}(\mathscr{G})))$ est constructible. Comme $\ell_* \ell^{-1}(\Psi_{\widetilde{f}}(\mathscr{G}))$ est un complexe supporté par Z' et que la restriction de $\widetilde{p}$ à Z' est finie, $\ell_* \ell^{-1}(\Psi_{\widetilde{f}}(\mathscr{G}))$ est aussi constructible ([**M-N**] I.4.22). On déduit du triangle (1) que $\Psi_{\widetilde{f}}(\mathscr{G})$ l'est également. D'où le théorème, puisque la restriction de ce complexe à $X' \times 0$ est $\Psi_f(\mathscr{F})$.

Corollaire 2.2–2. — *Soit $\mathscr{M}$ un complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à cohomologie holonome. Le triangle des cycles évanescents :*

$$i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \Psi_f(\mathscr{O}_X)) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \Phi_f(\mathscr{O}_X))$$

est formé de complexes constructibles.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du théorème de constructibilité et du théorème 2.2–1.

Remarque 2.2–3. — La démonstration de [**SGA7**] de la constructibilité du complexe des cycles évanescents d'un complexe constructible est conséquence du théorème de la résolution des singularités.

Remarque 2.2–4. — On peut montrer en utilisant les propriétés de la fibration de Milnor associée à f que pour tout x dans $f^{-1}(0)$:

$$\Psi_f(\mathscr{F})_x \simeq \mathbf{R}\Gamma(B(x, \varepsilon) \cap f^{-1}(t), \mathscr{F})$$

où $B(x, \varepsilon)$ est une boule de centre x et de rayon ε assez petit et où t est un nombre complexe non nul, assez proche de l'origine. En fait la méthode précédente montre la même propriété avec un système fondamental de l'origine au lieu des boules de Milnor.

Remarque 2.2–5. — Si Y est une sous-variété lisse et $\mathscr{F}$ un complexe de $D^b(\mathbb{C}_X)$, le microlocalisé de Mikio Sato $\mu_Y(\mathscr{F})$ est un complexe porté par le fibré conormal $T^*_Y X$. Lorsque Y est une hypersurface et f une équation de Y, l'image inverse de $\mu_Y(\mathscr{F})$ par l'application $x \mapsto (x, df(x))$ de Y sur $T^*_Y X$ est isomorphe à $\Phi_f(\mathscr{F})$ pour $\mathscr{F}$ constructible, d'où le lien entre la théorie des cycles évanescents de Grothendieck-Deligne et celle de la microlocalisation de M. Sato. C'est ce que montre aussi la méthode précédente. La théorie des cycles évanescents est plus adaptée à la théorie des singularités alors que celle de la microlocalisation convient mieux à l'étude des cycles caractéristiques. Ces deux points de vue sont complètement indépendants et ont des motivations bien distinctes.

3. Le complexe des solutions multiformes d'un complexe holonome

3.1. Les solutions multiformes d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome sont de détermination finie. — Nous allons montrer dans ce paragraphe que les solutions multiformes d'un complexe holonome sont de détermination finie.

Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur une variété analytique complexe.

Définition 3.1–1. — On définit le faisceau des *fonctions multiformes de détermination finie* $\Psi_f^{\mathrm{df}}(\mathscr{O}_X)$ comme le sous-faisceau de $\Psi_f(\mathscr{O}_X)$ constitué des sections localement annulées par un polynôme de la monodromie à coefficients complexes.

Considérons à nouveau le premier diagramme :

$$0 \xrightarrow{i} \mathbb{C} \xleftarrow{\quad j \quad} \mathbb{C}^* \xleftarrow{\quad p \quad} \mathbb{C}$$
$$z = \exp(2i\pi Z) \longleftarrow\!\shortmid Z$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $Z \to (2i\pi Z)^k \exp(2i\pi\alpha Z)$ définit une section globale de $\Psi_{\mathrm{Id}}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}})$ qui correspond au germe de fonction multiforme $z^\alpha \operatorname{Log}^k(z)$; nous avons :

$$(T - \exp(2i\pi\alpha))^{k+1} z^\alpha \operatorname{Log}^k(z) = 0$$

Plus généralement, reprenons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] & X^* \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "f"] & \widetilde{X}^* \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\ 0 \arrow[r, "i"] & \mathbb{C} & \mathbb{C}^* \arrow[l, "j"'] & \mathbb{C} \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

La composée de la fonction $Z \to \exp(2i\pi\alpha Z)(2i\pi Z)^k$ avec $\widetilde{f}$ définit une section globale de $\Psi_f(\mathscr{O}_{\mathbf{X}})$, notée $f^\alpha \operatorname{Log}^k f$, qui vérifie :

$$(T - \exp(2i\pi\alpha))^{k+1} f^\alpha \operatorname{Log}^k f = 0$$

Les sommes finies :

$$\Sigma_{\alpha,k} c_{\alpha,k}(x) f^{\alpha} \operatorname{Log}^k f$$

où les coefficients $c_{\alpha,k}(x)$ sont des fonctions uniformes, sont donc des sections de $\Psi_f^{\mathrm{df}}(\mathscr{O}_X)$.

Théorème 3.1–2. — *Tout germe de fonction de détermination finie s'écrit comme une somme finie $\Sigma_{\alpha,k} c_{\alpha,k}(x) f^{\alpha} \operatorname{Log}^k f$ où les coefficients $c_{\alpha,k}(x)$ sont des germes de fonctions uniformes. De plus, si on suppose que les exposants $\alpha \in \mathbb{C}$ appartiennent à l'image d'une section continue de la projection naturelle $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$, alors la décomposition précédente est unique.*

Démonstration. — Soit g un germe de fonction multiforme ; notons $V(g)$ le $\mathbb{C}[T]$-module engendré par g. Si g est de détermination finie, $V(g)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel complexe de dimension finie muni de l'automorphisme de monodromie T. Soit :

$$V(g) = \oplus_{\beta} V(g)_{\beta}$$

sa décomposition en sous-espaces propres généralisés. Pour chaque nombre complexe β non nul, choisissons un nombre complexe α tel que $\beta = \exp(2i\pi\alpha)$ et posons $g = \Sigma_{\alpha} g_{\alpha}$ où g_{α} appartient à $V(g)_{\beta}$. Il suffit de traiter le cas où T a un seul bloc de Jordan.

Si $(T - \exp(2i\pi\alpha))^m g_{\alpha} = 0$, alors $(T-1)^m f^{-\alpha} g_{\alpha} = 0$. On est alors ramené au cas où la valeur propre est 1, c'est à-dire celui des fonctions dites unipotentes. Sur ces fonctions, on définit alors l'endomorphisme :

$$N := \frac{\operatorname{Log}(T)}{2i\pi} : g \longmapsto N(g) = -\frac{1}{2i\pi} \sum_{k>0} \frac{(1-T)^k}{k} g$$

On vérifie que le produit de deux fonctions unipotentes g' et g'' est une fonction unipotente ainsi que la formule :

$$N(g'g'') = N(g')g'' + g'N(g'')$$

On a en particulier, pour $k \in \mathbb{N}$ non nul :

$$N\Big(\frac{\operatorname{Log}^k f}{k!}\Big) = \frac{\operatorname{Log}^{k-1} f}{(k-1)!}$$

Soit g une fonction unipotente ; on pose :

$$g_k := \sum_{j \geqslant 0} (-1)^j \frac{\operatorname{Log}^j f}{j!} N^{k+j}(g).$$

Cette somme est finie (puisque $N^k(g) = 0$ pour k assez grand). On vérifie alors que les g_k sont uniformes et l'égalité :

$$g = \sum_{k \geqslant 0} g_k \, \frac{(\operatorname{Log} f)^k}{k!}$$

La vérification de l'unicité de la décomposition est laissée au lecteur.

Définition 3.1–3. — On appelle *exposants* d'un germe de fonction de détermination finie les classes dans $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ des nombres α qui interviennent dans une décomposition du théorème précédent. On dit qu'un germe de fonction de détermination finie est *quasi-unipotent* (resp. *unipotent*) si ses exposants sont représentés par des nombres rationnels (resp. entiers). On note $\Psi_f^{\mathrm{qu}}(\mathscr{O}_X)$ (resp. $\Psi_f^{\mathrm{u}}(\mathscr{O}_X)$) le sous-faisceau de $\Psi_f^{\mathrm{df}}(\mathscr{O}_X)$ des fonctions quasi-unipotentes (resp. unipotentes).

Théorème 3.1–4. — *Soit $\mathscr{M}$ un complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à cohomologie bornée holonome. Alors le morphisme canonique :*

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \Psi_f^{\mathrm{df}}(\mathscr{O}_X)) \longrightarrow \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \Psi_f(\mathscr{O}_X))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — La question est locale. On peut supposer que $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module holonome admettant une résolution finie par des $\mathscr{D}_X$-modules libres de type fini :

$$0 \longrightarrow \mathscr{D}_X^{k_N} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathscr{D}_X^{k_0} \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow 0$$

Il nous faut alors montrer que le morphisme naturel de complexes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longleftarrow & \Psi_f^{\mathrm{df}}(\mathscr{O}_X)^{k_N} & \longleftarrow \cdots \longleftarrow & \Psi_f^{\mathrm{df}}(\mathscr{O}_X)^{k_0} & \longleftarrow 0 \\ & \big\downarrow & & \big\downarrow & \\ 0 \longleftarrow & \Psi_f(\mathscr{O}_X)^{k_N} & \longleftarrow \cdots \longleftarrow & \Psi_f(\mathscr{O}_X)^{k_0} & \longleftarrow 0 \end{array}$$

induit un isomorphisme en cohomologie.

Lemme 3.1–5. — *Soit L un complexe borné d'espaces vectoriels complexes muni d'un endomorphisme complexe T, à cohomologie de dimension finie, alors le morphisme canonique :*

$$\mathbf{R}\varinjlim_P \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[T]}(\mathbb{C}[T]/P, L) \longrightarrow L$$

est un isomorphisme dans $D^b(\mathbb{C}[T])$, la limite inductive étant prise dans l'ensemble inductif des polynômes ordonnés par la divisibilité.

Preuve du lemme. — En vertu du lemme du Way-out foncteur ([**M-N**], II.5), on se ramène au cas d'un espace vectoriel de dimension finie muni d'un endomorphisme complexe. Dans cette situation, le lemme est évident puisque tout vecteur est annulé par un polynôme de T.

En vertu du théorème 2.2–1, la fibre en un point x_0 du complexe :

$$0 \longrightarrow \Psi_f(\mathscr{O}_X)^{k_0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Psi_f(\mathscr{O}_X)^{k_N} \longrightarrow 0$$

satisfait aux hypothèses du lemme précédent. On en déduit dans la catégorie dérivée que le complexe :

$$R\varinjlim_P \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[T]}\big(\mathbb{C}[T]/P\ ,\ 0 \to \Psi_f(\mathscr{O}_X)_{x_0}^{k_0} \to \cdots \to \Psi_f(\mathscr{O}_X)_{x_0}^{k_N} \to 0\big)$$

est isomorphe au complexe :

$$0 \longrightarrow \Psi_f(\mathscr{O}_X)_{x_0}^{k_0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Psi_f(\mathscr{O}_X)_{x_0}^{k_N} \longrightarrow 0$$

Si on savait que le $\mathbb{C}[T]$-module $\Psi_f(\mathscr{O}_X)_{x_0}$ est acyclique pour le foncteur

$$\varinjlim_P \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[T]}(\mathbb{C}[T]/P, -)\,,$$

les complexes :

$$\varinjlim_P \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[T]}\big(\mathbb{C}[T]/P, 0 \to \Psi_f(\mathscr{O}_X)_{x_0}^{k_0} \to \cdots \to \Psi_f(\mathscr{O}_X)_{x_0}^{k_N} \to 0\big)$$

et

$$0 \longrightarrow \Psi_f(\mathscr{O}_X)_{x_0}^{k_0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Psi_f(\mathscr{O}_X)_{x_N}^{k_N} \longrightarrow 0$$

seraient isomorphes. Mais par définition, le morphisme :

$$\varinjlim_P \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[T]}(\mathbb{C}[T]/P, \Psi_f(\mathscr{O}_X)) \longrightarrow \Psi_f^{\mathrm{df}}(\mathscr{O}_X)$$

est un isomorphisme. Le théorème 3.1–4 est alors conséquence du lemme :

Lemme 3.1–6. — *Pour tout polynôme P, l'action de $P(T)$ sur $\Psi_f(\mathscr{O}_X)$ est surjective.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que l'action de $T - \exp(2i\pi\alpha)$ est surjective. Avec les notations utilisées précédemment, considérons le morphisme de faisceaux sur X^* :

$$p_*\mathscr{O}_{\widetilde{X}^*} \xrightarrow{\ T - \exp(2i\pi\alpha)\ } p_*\mathscr{O}_{\widetilde{X}^*}$$

Ce morphisme est surjectif de façon évidente et son noyau est le $\mathscr{O}_{X^*}$-module libre engendré par f^α. On a ainsi la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{X^*} f^\alpha \longrightarrow p_*\mathscr{O}_{\widetilde{X^*}} \longrightarrow p_*\mathscr{O}_{\widetilde{X^*}} \longrightarrow 0$$

Mais le faisceau $R^1 j_*\mathscr{O}_{X^*}$ est nul en vertu du théorème B de H. Cartan, tout petit voisinage de Stein dans X ayant une trace qui reste de Stein dans X^*. La suite exacte longue de cohomologie fournit alors la suite exacte :

$$0 \longrightarrow j_*\mathscr{O}_{X^*} f^\alpha \longrightarrow j_*p_*\mathscr{O}_{\widetilde{X^*}} \longrightarrow j_*p_*\mathscr{O}_{\widetilde{X^*}} \longrightarrow 0$$

et donc, après restriction, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow i^{-1}j_*\mathscr{O}_{X^*} f^\alpha \longrightarrow \Psi_f(\mathscr{O}_X) \xrightarrow{\ T - \exp(2i\pi\alpha)\ } \Psi_f(\mathscr{O}_X) \longrightarrow 0$$

Remarque 3.1–7. — Comme application du lemme précédent, on trouve que la variation

$$\mathrm{Var} := T - \mathrm{Id}$$

opérant sur les fonctions analytiques sur le revêtement universel d'un disque épointé est surjective. Ce problème a été très étudié, en particulier par Picard, au début du XX^e siècle sans être complètement résolu faute de méthodes cohomologiques. Il apparaît ici comme une conséquence de la nullité de $H^1(D^*, \mathscr{O}_{D^*})$ pour un disque épointé D^*

du plan complexe. On peut comprendre pourquoi les anciens n'ont pu résoudre ce problème à la main.

Remarque 3.1–8. — Dans la démonstration du théorème 3.1–4, on a fait un usage essentiel des catégorie dérivées en utilisant à la fois les propriétés de finitude de la cohomologie des complexes et les propriétés analytiques de leurs termes. Ce résultat et ce point de vue ont été introduits dans l'article [**Me2**].

Le théorème 3.1–4 permet de remplacer le complexe $\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\Psi_f(\mathscr{O}_X))$ par le complexe $\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\Psi_f^{\mathrm{df}}(\mathscr{O}_X))$ qui se prête bien mieux au théorème de comparaison.

Pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$, notons $\Psi_{f,\alpha}(\mathscr{O}_X)$ le sous-faisceau de $\Psi_f^{\mathrm{df}}(\mathscr{O}_X)$ des fonctions multiformes qui admettant $\alpha+\mathbb{Z}$ comme seul exposant. Si on fixe une section σ de la projection naturelle de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$, on a alors la décomposition :

$$\Psi_f^{\mathrm{df}}(\mathscr{O}_X)=\bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Im}(\sigma)}\Psi_{f,\alpha}(\mathscr{O}_X)$$

Pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$, le faisceau $\Psi_{f,\alpha}(\mathscr{O}_X)$ admet comme sous $\mathscr{D}_X$-module le faisceau $\Psi_{f,\alpha}^m(\mathscr{O}_X)$ constitué des sections de $\Psi_{f,\alpha}(\mathscr{O}_X)$ dont les germes sont les sommes finies :

$$\sum_{\alpha,k}c_{\alpha,k}(x)f^\alpha\operatorname{Log}^k f$$

où les coefficients $c_{\alpha,k}$ sont des fonctions méromorphes admettant au plus des pôles le long de Y. Le sous-faisceau de $\Psi_f^{\mathrm{df}}(\mathscr{O}_X)$:

$$\Psi_f^m(\mathscr{O}_X):=\bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Im}(\sigma)}\Psi_{f,\alpha}^m(\mathscr{O}_X)$$

est appelé le *sous-faisceau des fonctions multiformes modérées de détermination finie.* On définit également :

$$\Phi_f^m(\mathscr{O}_X):=\Psi_f^m(\mathscr{O}_X)/i^{-1}(\mathscr{O}_X)$$

Enfin, le $\mathscr{D}_X$-module $\Psi_{f,\alpha}(\mathscr{O}_X)$ (resp. $\Psi_{f,\alpha}^m(\mathscr{O}_X)$) est filtré par les sous $\mathscr{D}_X$-modules $\Psi_{f,\alpha,k}(\mathscr{O}_X)$ (resp. $\Psi_{f,\alpha,k}^m(\mathscr{O}_X)$) constitués des sections dont les germes sont les sommes finies :

$$\sum_{\ell\leqslant k}c_{\alpha,\ell}(x)f^\alpha\operatorname{Log}^\ell f$$

3.2. La catégorie des complexes de $\mathscr{D}_X$-modules holonomes réguliers $D^b_{\mathrm{hr}}(\mathscr{D}_X)$. — La définition précise de la notion de régularité pour savoir de quoi on parle est essentielle si l'on veut faire des démonstrations rigoureuses du point vue mathématique. Pour la démonstration du théorème de comparaison la définition qui sert est celle issue précisément du théorème de comparaison qui a permit la première démonstration complète du théorème de comparaison pour les cycles évanescents. Et en fait c'est la seule notion de régularité qui permet une démonstration complète et rigoureuse du théorème de comparaison pour les cycles évanescents.

Rappelons que pour un triplet $(X, Z, \mathscr{M})$ où X est une variété analytique complexe non singulière, Z un sous-espace analytique fermé de X et $\mathscr{M}$ un complexe holonome on définit deux complexes constructibles en dualité $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$, $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ définissant des foncteurs exacts de catégories triangulées, l'un covariant l'autre contravariant, entre les catégories $D^b_{\mathrm{h}}(\mathscr{D}_X)$ et $D^b_c(\mathbb{C}_X)$ [**Me1**], [**Me3**].

Définition 3.2–1. — Par définition les complexes $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$, $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ sont les complexes d'irrégularité de $\mathscr{M}$ le long de Z. On dit alors que le complexe holonome $\mathscr{M}$ est régulier le long de Z si ses complexes d'irrégularité le long de Z sont nuls.

On note $D^b_{\mathrm{hr}}(\mathscr{D}_X, Z)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $D^b_{\mathrm{h}}(\mathscr{D}_X)$ des complexes holonomes réguliers le long de Z, c'est de façon évidente une catégorie triangulée. C'est à peu près la seule propriété qui résulte immédiatement de la définition.

Définition 3.2–2. — On dit que le complexe holonome $\mathscr{M}$ est régulier si ses complexes d'irrégularité le long de tout espace analytique de X sont nuls.

On note $D^b_{\mathrm{hr}}(\mathscr{D}_X)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $D^b_{\mathrm{h}}(\mathscr{D}_X)$ des complexes holonomes réguliers, c'est de façon évidente une catégorie triangulée. C'est aussi à peu près la seule propriété qui résulte immédiatement de la définition.

Le calcul des complexes $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$, $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ est hautement non trivial et pour que la définition précédente soit intéressante il faut disposer de nombreux exemples non triviaux de complexes réguliers. Le théorème suivant est très instructif et résume les efforts dans les années 1970 de plusieurs auteurs, motivé par de nombreuses questions géométriques en apparence indépendantes (théorème de comparaison pour la cohomologie de de Rham d'une variété algébrique complexe non singulière, lemme de Poincaré singulier, théorème de comparaison entre cohomologie infinitésimale et cohomologie de Betti d'une variété algébrique complexe singulière, théorème de comparaison entre cohomologies locales algébrique et analytique d'une sous-variété singulière,...) :

Théorème 3.2–3. — *Le fibré trivial $\mathscr{O}_X$ est régulier.*

Précisément le théorème de comparaison local de Grothendieck de 1963, au langage et notations près, dit que le complexe $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{O}_X)$ est nul pour toute hypersurface Z. Un argument combinatoire montre alors que le complexe $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{O}_X)$ est nul pour tout espace analytique Z. Autrement dit le fibré trivial $\mathscr{O}_X$ appartient à la catégorie $D^b_{\mathrm{hr}}(\mathscr{D}_X)$. Si l'hypersurface Z n'a pas de singularité un calcul simple montre que le complexe $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{O}_X)$ est nul, mais si l'hypersurface Z a des singularités Grothendieck invoquait le théorème d'Hironaka sur la résolution des singularités. Cet exemple devrait permettre au lecteur de situer le problème de la régularité à plusieurs variables, source de nombreuses difficultés d'interprétations qui nous a appris à être vigilant sur les considérations abstraites. Comme nous l'avons expliqué dans le cours [**Me3**] ce théorème est une conséquence du critère fondamental de la régularité qui dit que puisque le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{O}_X)$ pour toute hypersurface Z qui est porté par le lieu singulier $\mathrm{Sing}(Z)$, il n'a pas d'autre choix que d'être nul. La régularité est insensible aux singularités.

Les propriétés de la catégorie $D^b_{\mathrm{hr}}(\mathscr{D}_X)$ auxquelles on s'attend sont encore moins visibles. Par exemple il n'est pas évident que la catégorie $D^b_{\mathrm{hr}}(\mathscr{D}_X)$ soit stable par image inverse et en fait pour compliquer davantage la catégorie $D^b_{\mathrm{hr}}(\mathscr{D}_X, Z)$ pour une hypersurface Z n'est pas stable par image inverse. Toutes ces questions n'ont reçu des réponses satisfaisantes qu'après le théorème de Positivité de l'irrégularité et le critère fondamental de la régularité qui donnent des démonstrations complètes des propriétés de la catégorie $D^b_{\mathrm{hr}}(\mathscr{D}_X)$ qui ne dépendent pas du théorème de la résolution des singularités [**Me3**]. Nous utilisons dans ce chapitre les théorèmes suivants qui sont démontrés dans le cours [**Me3**] :

Théorème 3.2–4. — *Soit Z une hypersurface, alors la catégorie* $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X, Z)$ *des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes réguliers le long de Z est stable par sous-quotients, en particulier c'est une catégorie abélienne, et la catégorie $D^b_{\mathrm{hr}}(\mathscr{D}_X, Z)$ des complexes holonomes réguliers le long de Z est stable par cohomologies.*

Théorème 3.2–5. — *La catégorie $D^b_{\mathrm{hr}}(\mathscr{D}_X)$ est stable par image inverse totale, par dualité et par produit tensoriel interne total.*

Autrement dit si $f : X' \to X$ est un morphisme de variétés analytiques complexes et $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ deux complexes holonomes réguliers sur X, l'image inverse différentielle $f^*_d\mathscr{M}$ est un complexe holonome régulier sur X', le complexe dual $\mathscr{M}^*$ est un complexe holonome régulier sur X et le produit tensoriel interne $\mathscr{M} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{N}$ est un complexe holonome régulier sur X. On résume cela en disant que la catégorie des complexes holonomes réguliers est stable par image inverse, produit tensoriel interne et par dualité.

Le fait d'avoir formuler la définition de l'irrégularité sous forme cohomologique lui donne une très grande souplesse. Par exemple le complexe d'irrégularité commute à l'image directe par un morphisme propre [**Me3**]. Ceci combiné au théorème 3.2–3 fournit la démonstration la plus élégante et la plus générale de la régularité de l'image directe par un morphisme propre du fibré trivial connu sous le nom de la connexion de Gauss-Manin. Un autre exemple de la souplesse de ce point de vue est la démonstration du théorème de comparaison pour les cycles évanescents qui fait l'objet de ce cours.

3.3. Les solutions multiformes d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier sont à croissance modérée. — Nous allons montrer dans ce paragraphe que les solutions multiformes d'un complexe holonome régulier sont à croissance modérée.

Pour un nombre complexe α et un entier k, notons $\mathscr{N}^{\alpha,k}$ le $\mathscr{D}_{\mathbb{C}}$-module des sommes :

$$\sum_{0\leqslant \ell\leqslant k} c_\ell(z) z^\alpha \operatorname{Log}(z)^\ell$$

où les coefficients $c_\ell(z)$ sont des fonctions méromorphes à l'origine. C'est donc un $\mathscr{O}_{\mathbb{C}}(*0)$-module libre de rang $k+1$ dont la matrice de l'action de $z\partial/\partial z$ dans la base $z^\alpha, \ldots, z^\alpha(\operatorname{Log}(z))^k$ est un bloc de Jordan de taille $k+1$ associé à α. De plus, c'est un $\mathscr{D}_{\mathbb{C}}$-module holonome régulier.

Théorème 3.3–1. — *Pour tout complexe $\mathscr{M}$ de $\mathscr{D}_X$-modules dont les faisceaux de cohomologie sont des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes réguliers, le morphisme naturel :*

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{i^{-1}\mathscr{D}_X}(i^{-1}\mathscr{M}, \Psi^m_{f,\alpha,k}(\mathscr{O}_X)) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{i^{-1}\mathscr{D}_X}(i^{-1}\mathscr{M}, \Psi_{f,\alpha,k}(\mathscr{O}_X))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — L'image inverse $f^*(\mathscr{N}^{\alpha,k})$ est un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier en vertu du théorème précédent. D'autre part, la restriction $i^{-1}f^*(\mathscr{N}^{\alpha,k})$ est par construction isomorphe à $\Psi^m_{f,\alpha,k}(\mathscr{O}_X)$ comme $i^{-1}\mathscr{D}_X$-module. Le cône du morphisme :

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{i^{-1}\mathscr{D}_X}(i^{-1}\mathscr{M}, \Psi^m_{f,\alpha,k}(\mathscr{O}_X)) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{i^{-1}\mathscr{D}_X}(i^{-1}\mathscr{M}, \Psi_{f,\alpha,k}(\mathscr{O}_X))$$

est donc isomorphe à celui du morphisme :

$$i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, f^*(\mathscr{N}^{\alpha,k})) \longrightarrow i^{-1}\mathbf{R}j_*j^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, f^*(\mathscr{N}^{\alpha,k}))$$

Mais nous avons déjà vu ([**Me3**], proposition 3.5.8) qu'il y a un isomorphisme canonique :

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, f^*(\mathscr{N}^{\alpha,k})) \simeq \mathbf{DR}(\mathscr{M}^* \otimes_{\mathscr{O}_X} f^*(\mathscr{N}^{\alpha,k}))$$

Ceci fait apparaître le cône précédent comme le complexe d'irrégularité de

$$\mathscr{M}^* \otimes_{\mathscr{O}_X} f^*\mathscr{N}^{\alpha,k}$$

le long de Y. Mais si le complexe $\mathscr{M}$ est régulier, le complexe dual et le produit tensoriel $\mathscr{M}^* \otimes_{\mathscr{O}_X} f^*\mathscr{N}^{\alpha,k}$ sont réguliers en vertu du théorème 3.2–5. D'où la nullité du complexe d'irrégularité et le théorème 3.3–1 s'ensuit donc.

Par passage à la limite inductive en k, on en déduit que pour tout complexe $\mathscr{M}$ à cohomologie holonome régulière, le morphisme :

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{i^{-1}\mathscr{D}_X}(i^{-1}\mathscr{M}, \Psi^m_{f,\alpha}(\mathscr{O}_X)) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{i^{-1}\mathscr{D}_X}(i^{-1}\mathscr{M}, \Psi_{f,\alpha}(\mathscr{O}_X))$$

est un isomorphisme. D'où, en tenant compte du théorème 3.1–4, l'isomorphisme :

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{i^{-1}\mathscr{D}_X}(i^{-1}\mathscr{M}, \Psi^m_{f}(\mathscr{O}_X)) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{i^{-1}\mathscr{D}_X}(i^{-1}\mathscr{M}, \Psi_{f}(\mathscr{O}_X))$$

Sous l'hypothèse de régularité, l'étude du triangle des cycles évanescents est donc ramenée à celle plus aisée du triangle :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\mathscr{H}om_{i^{-1}\mathscr{D}_X}(i^{-1}\mathscr{M}, i^{-1}(\mathscr{O}_X)) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{i^{-1}\mathscr{D}_X}&(i^{-1}\mathscr{M}, \Psi^m_f(\mathscr{O}_X))\\ &\longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{i^{-1}\mathscr{D}_X}(i^{-1}\mathscr{M}, \Phi^m_f(\mathscr{O}_X))\end{aligned}$$

Remarque 3.3–2. — Dans le théorème précédent on a fait l'hypothèse de régularité de $\mathscr{M}$ dans toutes les directions mais on a besoin de la régularité du produit tensoriel $\mathscr{M}^* \otimes_{\mathscr{O}_X} f^*\mathscr{N}^{\alpha,k}$ que le long de $f^{-1}(0)$. En fait on peut démontrer, ce n'est pas évident, dans cette situation précise que la seule hypothèse de la régularité le long de $f^{-1}(0)$ pour $\mathscr{M}$ suffit.

4. La théorie de la V-filtration

Dans ce chapitre on se place sur une variété analytique complexe X, mais le lecteur pourra supposer s'il le souhaite que X est une variété algébrique non singulière sur un corps de caractéristique nulle algébriquement clos en remplaçant les polycylindres par les ouverts affines. Les démonstrations sont plutôt plus simples. En dimension 1, la V-filtration de $\mathscr{D}_X$ avait été considérée en substance par Fuchs évidemment avec un langage différent.

4.1. La V-filtration du faisceau $\mathscr{D}_X$. — Soit $Y \subset X$ une hypersurface non singulière. On note $\mathscr{I}_Y \subset \mathscr{O}_X$ l'idéal des fonctions holomorphes qui s'annulent sur Y. Pour tout $k \leqslant 0$ entier, on pose $\mathscr{I}_Y^k := \mathscr{O}_X$.

Définition 4.1–1. — On définit la V-filtration du faisceau $\mathscr{D}_X$, indexée par les entiers relatifs, comme étant la filtration dont le terme d'ordre k est $V_k(\mathscr{D}_X)$, le sous-faisceau de $\mathscr{D}_X$ défini par :

$$\forall\, x \in X\,; \quad V_k(\mathscr{D}_X)_x := \{P \in \mathscr{D}_{X,x}\,;\, \forall\, \ell \in \mathbb{Z}\colon P(\mathscr{I}_{Y,x}^{\ell+k}) \subset \mathscr{I}_{Y,x}^{\ell}\}$$

Cette filtration vérifie les propriétés suivantes :

1) $\forall\, k \in \mathbb{Z} : V_k(\mathscr{D}_X) \subset V_{k+1}(\mathscr{D}_X)$,
2) $\mathscr{D}_X = \cup_{k\in\mathbb{Z}} V_k(\mathscr{D}_X)$
3) $\forall\,(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2\colon V_k(\mathscr{D}_X)V_\ell(\mathscr{D}_X) \subset V_{k+\ell}(\mathscr{D}_X)$
4) $\forall\, k \in \mathbb{Z} : V_k(\mathscr{D}_X)_{|X-Y} = (\mathscr{D}_X)_{|X-Y}$

On note $\mathrm{Gr}^V(\mathscr{D}_X) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V_k(\mathscr{D}_X)/V_{k-1}(\mathscr{D}_X)$ le gradué de $\mathscr{D}_X$ pour cette filtration et $\mathrm{Gr}_k^V(\mathscr{D}_X) := V_k(\mathscr{D}_X)/V_{k-1}(\mathscr{D}_X)$ sa composante en degré k.

Soit (x,t) un système de coordonnées locales tel que $t=0$ soit une équation locale de Y. On constate que pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, l'opérateur $t^k\partial_t^\ell$ appartient à $V_{\ell-k}(\mathscr{D}_X)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, un opérateur P de $V_{-k}(\mathscr{D}_X)$ (resp. de $V_k(\mathscr{D}_X)$) s'écrit localement de façon unique :

$$P = t^k \sum_{\text{finie}} a_{\alpha,j}\partial_x^\alpha (t\partial_t)^j \ ;\ a_{\alpha,j} \in \mathscr{O}_X$$

(resp. $P = \sum_{\ell=0}^k \sum_{\text{finie}} a_{\alpha,j,\ell}\partial_x^\alpha\partial_t^\ell(t\partial_t)^j \ ;\ a_{\alpha,j,\ell} \in \mathscr{O}_X$.) En particulier, pour tout entier relatif k, $V_k(\mathscr{D}_X)$ est un $V_0(\mathscr{D}_X)$-module localement libre.

Nous allons étudier la cohérence de certains anneaux liés à la filtration V. Dégageons en deux lemmes les principes utilisés dans le cours du C.I.M.P.A. de Nice [**G-M**] pour établir la cohérence de l'anneau $\mathscr{D}_X$.

Lemme 4.1–2. — *Soit B un anneau muni d'une filtration croissante (B_j) indexée par $\mathbb{N}$. Supposons que $B = \cup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ et que pour tout entier j et ℓ, $B_j B_\ell \subset B_{j+\ell}$. Si l'anneau $\operatorname{gr} B$ est noethérien, alors l'anneau B l'est aussi.*

Rappelons qu'un compact $K \subset X$ est dit être un polycylindre de X s'il existe une carte de X et $(\rho_1, \dots, \rho_n) \in (\mathbf{R}^+)^n$ tels que l'image de K soit :

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \; ; \; \forall\, i \in \{1, \dots, n\} : \quad |\, x_i \,| \leqslant \rho_i\}$$

Définition 4.1–3. — Soit $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux cohérent sur X et U un ouvert de X. On dit que $\mathscr{A}$ vérifie les théorèmes A et B de Cartan sur U si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) Pour tout polycylindre compact K contenu dans U et pour tout entier $k \geqslant 1$, $H^k(K, \mathscr{A}) = 0$;

2) Pour tout ouvert V contenu dans U, pour tout morphisme $\phi : \mathscr{A}^{\ell}_{|V} \to \mathscr{A}^{m}_{|V}$ de $\mathscr{A}_{|V}$-modules et pour tout polycylindre compact K contenu dans V, $\ker \phi(K)$ engendre $(\ker \phi)_{|K}$ et pour tout entier $k \geqslant 1$, $H^k(K, \ker \phi) = 0$.

Le faisceau $\mathscr{O}_X$ vérifie bien les théorèmes A et B sur tout ouvert de X en vertu des théorèmes de H. Cartan.

D'autre part, le lecteur peut vérifier le fait suivant. Soit $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux cohérent vérifiant les théorèmes A et B de Cartan sur U. Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{A}$-module cohérent admettant une présentation sur un ouvert V contenu dans U. Alors, pour tout polycylindre compact K contenu dans V, $\mathscr{M}(K)$ engendre $\mathscr{M}_{|K}$, $\mathscr{M}(K)$ est un $\mathscr{A}(K)$-module de type fini et pour tout entier $k \geqslant 1$, $H^k(K, \mathscr{M}) = 0$.

Lemme 4.1–4. — *Soit $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux cohérent vérifiant les théorèmes A et B de Cartan sur un ouvert U. Soit $\mathscr{B}$ un faisceau d'anneaux admettant une filtration $(\mathscr{B}_j)$, indexée par $\mathbb{N}$ et vérifiant*

1) $\mathscr{B} = \cup_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_j$, $\forall\, (j, \ell) \in \mathbb{N}^2$ *:* $\mathscr{B}_j \subset \mathscr{B}_{j+1}$ *et* $\mathscr{B}_j\, \mathscr{B}_\ell \subset \mathscr{B}_{j+\ell}$ *;*

2) *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathscr{B}_{j|U}$ est $\mathscr{A}_{|U}$-module libre et pour tout polycylindre compact K contenu dans U, $\mathscr{B}(K)$ est noethérien.*

Alors $\mathscr{B}_{|U}$ est un faisceau d'anneaux cohérent vérifiant les théorèmes A et B de Cartan sur U.

Démonstration. — Soit $K \subset U$ un polycylindre compact. Pour tout entier k, K étant compact, $H^k(K, \mathscr{B}) = \varinjlim H^k(K, \mathscr{B}_j)$. Or, vu les propriétés de $\mathscr{A}$ et des $\mathscr{B}_j$, pour $k \geqslant 1$, on a $H^k(K, \mathscr{B}_j) = 0$. Donc pour $k \geqslant 1$, $H^k(K, \mathscr{B}) = 0$.

Soit V un ouvert contenu dans U. Soit $\phi : \mathscr{B}^\ell_{|V} \to \mathscr{B}^m_{|V}$ un morphisme de $\mathscr{B}_{|V}$-module. Soit $K \subset U$ un polycylindre compact contenu dans V. Alors, quitte à remplacer V par un voisinage de K,

$$\exists\, j_0 \in \mathbb{N}\ ;\ \forall\, j \in \mathbb{N} : \quad \phi(\mathscr{B}^\ell_{j|V}) \subset \mathscr{B}^m_{j+j_0|V}$$

Ainsi, $\ker(\phi_{|V})$ est réunion croissante des noyaux des morphismes :

$$\phi : \mathscr{B}^\ell_{j|V} \longrightarrow \mathscr{B}^m_{j+j_0|V}$$

Il en résulte que $\ker\phi(K)$ engendre $(\ker\phi)_{|K}$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $H^k(K, \ker\phi) = 0$.

Il reste à montrer la cohérence de $\mathscr{B}_{|U}$. Soit V un ouvert contenu dans U. Soit $\phi : \mathscr{B}^\ell_{|V} \to \mathscr{B}_{|V}$ un morphisme de $\mathscr{B}_{|V}$-module. Par exactitude à gauche du foncteur section sur K, $\ker\phi(K)$ est un sous $\mathscr{B}(K)$-module d'un $\mathscr{B}(K)$-module de type fini. L'anneau $\mathscr{B}(K)$ étant de plus noethérien, $\ker\phi(K)$ est donc un $\mathscr{B}(K)$-module de type fini. Comme $\ker\phi(K)$ engendre $(\ker\phi)_{|K}$, $(\ker\phi)_{|K}$ est de type fini. Ainsi, $\mathscr{B}$ est un anneau cohérent.

Proposition 4.1–5. — *Soit $U \subset X$ un ouvert de carte dans lequel Y a pour équation $t = 0$.*

1) *Pour tout polycylindre compact $K \subset U$, l'anneau $V_0(\mathscr{D}_X)(K)$ est noethérien.*

2) *Le faisceau d'anneaux $V_0(\mathscr{D}_X)$ est un faisceau cohérent et vérifie les théorèmes A et B de Cartan sur U.*

Démonstration. — Soit $U = X$. On considère la filtration de $V_0(\mathscr{D}_X)$ indexée par $\mathbb{N}$ définie par :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}\ ,\ F^j(V_0(\mathscr{D}_X)) = V_0(\mathscr{D}_X) \cap \mathscr{D}_X(j)$$

où $\mathscr{D}_X(j)$ désigne le sous-faisceau de $\mathscr{D}_X$ des opérateurs d'ordre inférieur ou égal à j.

1) Pour montrer que $V_0(\mathscr{D}_X)(K)$ est un anneau noethérien, il suffit d'appliquer le lemme 4.1–2 avec la filtration $F^j(V_0(\mathscr{D}_X))(K)$ de $V_0(\mathscr{D}_X)(K)$. En effet, on vérifie aisément que son gradué s'identifie à $\mathscr{O}_X(K)[\xi_1, \dots, \xi_n, \eta]$ qui est un anneau noethérien (d'après le théorème de Frisch).

2) Il suffit de remarquer que la filtration $F^j(V_0(\mathscr{D}_X))$ de $V_0(\mathscr{D}_X)$ satisfait aux hypothèses du lemme 4.1–4 (avec $\mathscr{A} = \mathscr{O}_X$).

On va développer pour le faisceau $\mathscr{D}_X$ muni de sa filtration $V_k(\mathscr{D}_X), k \in \mathbb{Z}$, un formalisme de bonnes filtrations pour les $\mathscr{D}_X$-modules cohérents analogue à celui de la filtration par l'ordre usuel des opérateurs différentiels.

Définition 4.1–6. — On appelle faisceau de Rees associé à la filtration $\mathscr{I}^k_Y, k \in \mathbb{Z}$, le sous-faisceau de $\mathscr{O}_X[\tau, \tau^{-1}]$ défini par :

$$\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathscr{I}_Y^{-k} \tau^k$$

On appelle faisceau de Rees associé à la filtration $V_k(\mathscr{D}_X), k \in \mathbb{Z}$, le sous-faisceau de $\mathscr{D}_X[\tau, \tau^{-1}]$ défini par :

$$\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V_k(\mathscr{D}_X)\tau^k.$$

Les faisceaux $\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)$ et $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)$ sont de façon naturelle des faisceaux d'anneaux sur X. De plus, $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)$ est un faisceau de $\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)$-modules.

Proposition 4.1–7. — *Soit $U \subset X$ un ouvert de carte dans lequel Y a pour équation $t = 0$.*

1) *Pour tout polycylindre compact $K \subset U$, les anneaux $\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)(K)$ et $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)(K)$ sont noethériens.*

2) *Les faisceaux d'anneaux $\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)$ et $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)$ sont cohérents et vérifient les théorèmes A et B de Cartan sur U.*

Démonstration. — Pour alléger les notations, supposons que $U = X$. On s'intéresse d'abord à l'anneau $\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)$. On a les isomorphismes d'anneaux :

$$\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X) \simeq \mathscr{O}_X[\tau, t/\tau] \simeq \mathscr{O}_X[\tau, v]/(t - \tau v)$$

L'anneau $\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)(K) \simeq \mathscr{O}_X(K)[\tau, v]/(t - \tau v)$ est donc noethérien.

D'autre part, pour j entier, $\bigoplus_{k=-j}^{j} \mathscr{I}_Y^{-k}\tau^k$ est une filtration croissante de $\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)$ par des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents. Il reste à remarquer que cette filtration vérifie les hypothèses du lemme 4.1–4 avec $\mathscr{A} = \mathscr{O}_X$.

Étudions enfin l'anneau $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)$. On constate que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a l'identité :

$$(t\tau^{-1})^j(\partial_t^j\tau^j) = t^j\partial_t^j$$

Par suite, $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)$ est un $\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)$-module libre de base $\{\partial_x^\alpha(\partial_t\tau)^j\}$.

$$\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X) = \mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)\langle\partial_x, \partial_t\tau\rangle.$$

En filtrant l'anneau $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)$ par l'ordre en ∂_x et $\partial_t\tau$, puis en utilisant le lemme 4.1–2, on obtient que $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)(K)$ est noethérien. Les propriétés de $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)$ annoncées se déduisent alors du lemme 4.1–4.

Proposition 4.1–8. — *Soit $U \subset X$ un ouvert de carte dans lequel Y a pour équation $t = 0$. Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)$-module (resp. $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)$). Soit K un polycylindre compact contenu dans U. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $\begin{cases} \bullet\ \mathscr{M}(K) \text{ un } \mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)(K)\text{-module de type fini (resp. } \mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)(K)); \\ \bullet\ \forall x \in K : \mathscr{O}_{X,x} \otimes_{\mathscr{O}_X(K)} \mathscr{M}(K) \to \mathscr{M}_x \text{ est un isomorphisme.} \end{cases}$

(2) *$\mathscr{M}_{|K}$ est un $\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)_{|K}$-module (resp. $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)_{|K}$) de présentation finie.*

Sous ces hypothèses, $\mathscr{M}_{|K}$ est un $\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)_{|K}$-module de présentation finie (resp. un $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)_{|K}$-module de présentation finie).

Démonstration. — On commence par traiter le cas des $\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)$-modules. Montrons que l'assertion 1 implique l'assertion 2. On constate qu'en restriction à U, l'anneau $\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)$ est réunion croissante de $\mathscr{O}_X$-modules libres. Il en résulte que le morphisme naturel :

$$\mathscr{O}_{X,x} \otimes_{\mathscr{O}_X(K)} \mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)(K) \longrightarrow \mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)_x$$

est un isomorphisme. Puisque $\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)(K)$ est noethérien, nous avons une suite exacte :

$$\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)(K)^q \xrightarrow{\phi} \mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)(K)^p \xrightarrow{\pi} \mathscr{M}(K) \longrightarrow 0$$

qui donne des morphismes de faisceaux toujours notés ϕ et π :

$$\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)^q_{|K} \xrightarrow{\phi} \mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)^p_{|K} \xrightarrow{\pi} \mathscr{M}_{|K} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

En appliquant le foncteur exact à droite $\mathscr{O}_{X,x}\otimes_{\mathscr{O}_X(K)}-$, nous obtenons la suite exacte :

$$\mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)^q_x \xrightarrow{\phi_x} \mathscr{R}_V(\mathscr{O}_X)^p_x \xrightarrow{\pi_x} \mathscr{M}_x \longrightarrow 0$$

Ainsi, (3) est une présentation de $\mathscr{M}_{|K}$. En utilisant l'exactitude à droite du produit tensoriel, on montre que l'assertion 2 implique l'assertion 1. Enfin, la preuve est identique dans le cas des $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)$-modules.

Proposition 4.1–9. — *Soit $U_k(\mathscr{M})$, $k \in \mathbb{Z}$, une filtration croissante exhaustive d'un $\mathscr{D}_X$-module cohérent $\mathscr{M}$ par des $V_0(\mathscr{D}_X)$-modules, compatible à la filtration $V_k(\mathscr{D}_X)$, $k \in \mathbb{Z}$ de $\mathscr{D}_X$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Le module de Rees associé :*

$$\mathscr{R}_U(\mathscr{M}) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} U_k(\mathscr{M})\tau^k$$

est un $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)$-module cohérent ;

2) *Les $V_0(\mathscr{D}_X)$-modules $U_k(\mathscr{M})$ sont cohérents, et* localement*, il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \in \mathbb{N}$:*

$$V_k(\mathscr{D}_X)U_{k_0}(\mathscr{M}) = U_{k+k_0}(\mathscr{M}) \ \text{ et } \ V_{-k}(\mathscr{D}_X)U_{-k_0}(\mathscr{M}) = U_{-k-k_0}(\mathscr{M})$$

3) *Au voisinage de tout point, il existe* localement *un morphisme surjectif :*

$$\mathscr{D}_X^p \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow 0$$

tel que la filtration $U_k(\mathscr{M}), k \in \mathbb{Z}$, soit la filtration image convenablement décalée.

Démonstration. — 1) implique 2). Si $\mathscr{R}_U(\mathscr{M})$ est cohérent, il est engendré localement par un système fini $\{m_i\}_i$ de générateurs homogènes en τ. On note $d_i \in \mathbb{Z}$ le degré de m_i. Nous avons ainsi, un morphisme surjectif de $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)$-module gradué :

$$\bigoplus_{\text{finie}} \mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)(-d_i) \xrightarrow{\pi} \mathscr{R}_U(\mathscr{M}) \longrightarrow 0$$

où pour tout $d \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)(d) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V_{k+d}(\mathscr{D}_X)\tau^k$ est le décalage de d. Le $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)$-module $\ker\pi$ étant cohérent, par itération de la construction précédente, nous obtenons localement une suite exacte de $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)$-modules :

$$\bigoplus_{\text{finie}} \mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)(-\ell_j) \xrightarrow{\ \phi\ } \bigoplus_{\text{finie}} \mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)(-d_i) \xrightarrow{\ \pi\ } \mathscr{R}_U(\mathscr{M}) \longrightarrow 0$$

Il en résulte des suites exactes de $V_0(\mathscr{D}_X)$-modules :

$$\bigoplus_{\text{finie}} V_{k-\ell_j}(\mathscr{D}_X) \longrightarrow \bigoplus_{\text{finie}} V_{k-d_i}(\mathscr{D}_X) \longrightarrow U_k(\mathscr{M}) \longrightarrow 0$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $U_k(\mathscr{M})$ est un $V_0(\mathscr{D}_X)$-module de présentation finie (donc $V_0(\mathscr{D}_X)$-cohérent) sur un même ouvert. Enfin $k_0 = \sup_i(\mid d_i \mid)$ satisfait à la condition demandée.

2) implique 3). Par hypothèse il existe localement des morphismes surjectifs de $V_0(\mathscr{D}_X)$-modules :

$$V_0(\mathscr{D}_X)^{p_k} \longrightarrow U_k(\mathscr{M}) \longrightarrow 0$$

Pour tout $-k_0 \leqslant k \leqslant k_0$, on les relève en des morphismes $\mathscr{D}_X$ linéaires : $\phi_k : \mathscr{D}_X^{p_k} \to \mathscr{M}$. On considère alors le morphisme surjectif :

$$\phi = (\phi_{-k_0}, \dots, \phi_{k_0}) \ : \ \bigoplus_{k=-k_0}^{k_0} \mathscr{D}_X^{p_k} \longrightarrow \mathscr{M}$$

Il reste à vérifier que si l'on pose $V'_\ell\big(\bigoplus_{k=-k_0}^{k_0} \mathscr{D}_X^{p_k}\big) := \bigoplus_{k=-k_0}^{k_0} V_{\ell-k}(\mathscr{D}_X)^{p_k}$, pour tout entier $\ell \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\phi\Big(V'_\ell\big(\bigoplus_{-k_0}^{k_0} \mathscr{D}_X^{p_k}\big)\Big) = U_\ell(\mathscr{M})$$

3) implique 1). Soit $\phi : \mathscr{D}_X^p \to \mathscr{M}$ un morphisme surjectif de $\mathscr{D}_X$-modules. Pour simplifier, on suppose que pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $U_k(\mathscr{M}) = \phi(V_k(\mathscr{D}_X)^p)$. On complète alors la surjection ϕ en une présentation du $\mathscr{D}_X$-module cohérent $\mathscr{M}$:

$$\mathscr{D}_X^r \xrightarrow{\ \psi\ } \mathscr{D}_X^p \xrightarrow{\ \phi\ } \mathscr{M} \longrightarrow 0$$

Quitte à diminuer X, on peut supposer que X est un ouvert de carte dans lequel Y a pour équation $t = 0$. Soit K un polycylindre compact contenu dans U. On montre que $\operatorname{im}\psi \cap V_k(\mathscr{D}_X)^p$ est une réunion croissante de $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Ainsi, $\operatorname{im}\psi \cap V_k(\mathscr{D}_X)^p_{|K}$ est engendré par ses sections globales $\operatorname{im}\psi \cap V_k(\mathscr{D}_X)^p(K)$. Ces sections forment un sous $V_0(\mathscr{D}_X)(K)$-module de $V_k(\mathscr{D}_X)^p(K)$ qui est donc de type fini. On en déduit que $\operatorname{im}\psi \cap V_k(\mathscr{D}_X)^p_{|K}$ est de type fini. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe donc une présentation :

$$V_0(\mathscr{D}_X)^{\ell_k}_{|K} \longrightarrow V_k(\mathscr{D}_X)^p_{|K} \xrightarrow{\ \phi\ } U_k(\mathscr{M})_{|K} \longrightarrow 0$$

On rappelle que, vu la nature de X, $V_k(\mathscr{D}_X)$ est un $V_0(\mathscr{D}_X)$-module libre de type fini. Or $V_0(\mathscr{D}_X)$ vérifie les théorèmes A et B de Cartan (ici, sur X). Quitte à diminuer K, on en déduit que pour tout entier k, $U_k(\mathscr{M})(K) = V_k(\mathscr{D}_X)(K)U_0(\mathscr{M})(K)$. Le

$\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)(K)$-module $\mathscr{R}_U(\mathscr{M})(K)$ est ainsi engendré par $U_0(\mathscr{M})(K)$. Le $V_0(\mathscr{D}_X)(K)$ module $U_0(\mathscr{M})(K)$ étant de type fini, on en déduit que $\mathscr{R}_U(\mathscr{M})(K)$ est un $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)(K)$-module de type fini. Les modules $U_k(\mathscr{M})_{|K}$ étant de présentation finie, on déduit de la proposition 4.1–8 que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in K$ les morphismes naturels :

$$\mathscr{O}_{X,x} \otimes_{\mathscr{O}_X(K)} U_k(\mathscr{M})(K) \longrightarrow U_k(\mathscr{M})_x$$

sont des isomorphismes. Il en résulte que les morphismes naturels :

$$\forall\, x \in K\ ;\ \mathscr{O}_{X,x} \otimes_{\mathscr{O}_X(K)} \mathscr{R}_U(\mathscr{M})(K) \longrightarrow \mathscr{R}_U(\mathscr{M})_x$$

le sont aussi. La cohérence du $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)$-module $\mathscr{R}_U(\mathscr{M})$ se déduit alors de la proposition 4.1–8.

Définition 4.1–10. — Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent. Une filtration croissante exhaustive de $\mathscr{M}$ par des $V_0(\mathscr{D}_X)$-modules, $V_k(\mathscr{M}), k \in \mathbb{Z}$, (i.e. une V-filtration de $\mathscr{M}$) est dite V-bonne si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes de la proposition précédente.

Proposition 4.1–11. — *Dans une suite exacte de $\mathscr{D}_X$-modules cohérents*

$$0 \longrightarrow \mathscr{M}_1 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}_2 \longrightarrow 0$$

la filtration induite sur $\mathscr{M}_1$ et la filtration image sur $\mathscr{M}_2$ par une bonne V-filtration de $\mathscr{M}$ sont bonnes.

Démonstration. — Soit $\mathscr{R}_U(\mathscr{M})$ l'anneau de Rees associé à une bonne V-filtration de $\mathscr{M}$. Soit $\mathscr{R}_U(\mathscr{M}_1)$ (resp. $\mathscr{R}_U(\mathscr{M}_2)$) l'anneau de Rees associé à la filtration induite sur $\mathscr{M}_1$ (resp. la filtration image sur $\mathscr{M}_2$). Par construction, on a une suite exacte de $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathscr{R}_U(\mathscr{M}_1) \longrightarrow \mathscr{R}_U(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathscr{R}_U(\mathscr{M}_2) \longrightarrow 0$$

La filtration de $\mathscr{M}_2$ étant localement une filtration image associée à une présentation de $\mathscr{M}_2$, c'est une bonne V-filtration de $\mathscr{M}_2$ d'après la proposition 4.1–9. Ainsi, le module $\mathscr{R}_V(\mathscr{D}_X)$-module $\mathscr{R}_U(\mathscr{M}_2)$ est cohérent ; ce qui entraîne que $\mathscr{R}_U(\mathscr{M}_1)$ le soit aussi. Toujours d'après la proposition 4.1–9, la filtration induite sur $\mathscr{M}_1$ est donc bonne.

Terminons ce paragraphe en donnant une interprétation des éléments de $\mathrm{Gr}^V(\mathscr{D}_X)$ en termes d'opérateurs différentiels sur le fibré normal à Y. On note T_YX le fibré normal à Y et π sa projection canonique sur Y.

Lemme 4.1–12. — *Le faisceau $\mathrm{Gr}^V(\mathscr{D}_X)_{|Y}$ s'identifie naturellement au sous-faisceau de l'image $\pi_*(\mathscr{D}_{T_YX})$ constitué des opérateurs polynomiaux par rapport aux fibres de π. De plus, si Y possède une équation globale réduite, $\mathrm{Gr}_0^V(\mathscr{D}_X)_{|Y}$ s'identifie alors au $\mathscr{D}_Y$-module $\mathscr{D}_Y[\tau\partial_\tau]$.*

Soit : $p\ :\ (x,t)\to(x'_1=p_1(x,t),\dots,x'_n=p_n(x,t),t'=t\mu(x,t))$, une application de changement de carte de X adaptée à l'hypersurface Y d'équation $t=0$. On note $q:(x',t')\mapsto(x,t)$, l'inverse de p. Le morphisme :

$$p_{|Y}\ :\ x\longmapsto(x'_1=p_1(x,0),\dots,x'_n=p_n(x,0))$$

est alors une application de changement de carte de Y. On note $q_{|Y}:x'\mapsto x=q(x',0)$ l'inverse de $p_{|Y}$. L'application :

$$\overline{p}\ :\ (x,\tau)\longmapsto(x'_1=p_1(x,0),\dots,x'_n=p_n(x,0),\tau'=\tau\mu(x,0))$$

est une application de changement de carte de T_YX.

Soit $a(x)$ une section locale de $\mathscr{O}_X$ indépendante de t. On constate que la classe des opérateurs différentiels $a(x)$, ∂_{x_i}, t et ∂_t dans $\mathrm{Gr}^V(\mathscr{D}_X)$ se transforment par p respectivement en celle des opérateurs :

- $a(q(x',0),0)$;
- $\sum_{j=1}^n(\partial p_j/\partial x_i)(q(x',0),0)\partial_{x'_j}+\mu(q(x',0),0)^{-1}(\partial\mu/\partial x_i)(q(x',0),0)t'\partial_{t'}$;
- $\mu(q(x',0),0)^{-1}t'$;
- $\mu(q(x',0),0)\partial_{t'}$.

Considérons les sections $a(x)$, ∂_{x_i}, τ et ∂_τ de $\pi_*(\mathscr{D}_{T_YX})$. Ces opérateurs se transportent par la carte $\overline{p}$ en respectivement :

- $a(q(x',0),0)$;
- $\sum_{j=1}^n(\partial p_j/\partial x_i)(q(x',0),0)\partial_{x'_j}+\mu(p(x',0),0)^{-1}(\partial\mu/\partial x_i)(q(x',0),0)\tau'\partial_{\tau'}$;
- $\mu(q(x',0),0)^{-1}\tau'$;
- $\mu(q(x',0),0)\partial_{\tau'}$.

Il en résulte que $\mathrm{Gr}_V(\mathscr{D}_X)_{|Y}$ s'identifie au sous-faisceau de $\pi_*(\mathscr{D}_{T_YX})$ des opérateurs polynomiaux par rapport aux fibres de π.

De plus, si Y possède une équation globale $f=0$, l'application

$$T_YX\longrightarrow Y\times\mathbb{C},\quad(y,\lambda)\longmapsto(y,\langle df(y),\lambda\rangle)$$

définit une trivialisation du fibré normal. Cette trivialisation permet d'identifier le faisceau $\mathscr{D}_Y$ au sous-faisceau de $\pi_*(\mathscr{D}_{T_YX})$ des opérateurs indépendants de τ et ∂_τ. On note que l'opérateur $\tau\partial_\tau$ est défini intrinsèquement dans $\mathscr{D}_{T_YX}$. Le faisceau $\mathrm{Gr}_0^V(\mathscr{D}_X)_{|Y}$ s'identifie alors à $\mathscr{D}_Y[\tau\partial_\tau]$.

4.2. Les $\mathscr{D}_X$-modules spécialisables le long de Y. — On vient de montrer que la classe E dans $\mathrm{Gr}_0^V(\mathscr{D}_X)$ du champ de vecteurs $t\partial_t$, où $t=0$ est une équation locale réduite de Y, ne dépend pas de cette équation. Elle définit donc une section canonique du faisceau $\mathrm{Gr}_0^V(\mathscr{D}_X)$. Quand il n'y a pas de risque de confusion, on note encore E un relèvement dans $V_0(\mathscr{D}_X)$ de cette section.

Lemme 4.2–1. — *Soit $U_\bullet(\mathscr{M})$ et $U'_\bullet(\mathscr{M})$ deux bonnes V-filtrations d'un $\mathscr{D}_X$-module cohérent $\mathscr{M}$. Localement, il existe deux entiers $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que :*

$$\forall\, k \in \mathbb{Z} \;\; ; \;\; U_{k_1+k}(\mathscr{M}) \subset U'_k(\mathscr{M}) \subset U_{k_2+k}(\mathscr{M})$$

Démonstration. — Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que localement :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\colon U_{k_0+k}(\mathscr{M}) = V_k(\mathscr{D}_X)U_{k_0}(\mathscr{M})$$

Comme $U_{k_0}(\mathscr{M})$ est de type fini sur $V_0(\mathscr{D}_X)$, il existe un entier $r_0 \in \mathbb{N}$ tel que $U_{k_0}(\mathscr{M}) \subset U'_{r_0}(\mathscr{M})$. Il en résulte :

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; U_{k_0+k}(\mathscr{M}) \subset U'_{r_0+k}(\mathscr{M})$$

Ainsi pour tout $k \geqslant r_0$: $U_{k_0-r_0+k}(\mathscr{M}) \subset U'_k(\mathscr{M})$. Pour $0 \leqslant j \leqslant r_0 - 1$, soit $k(j) \in \mathbb{Z}$ tel que $U_{j+k(j)}(\mathscr{M}) \subset U'_j(\mathscr{M})$. Nous avons alors,

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; U_{\kappa_1+k}(\mathscr{M}) \subset U'_k(\mathscr{M})$$

où κ_1 désigne le plus petit entier parmi $\{k_0 - r_0, k(0), \ldots, k(r_0 - 1)\}$. De même, il existe $\kappa_2 \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; U'_{-\kappa_2+k}(\mathscr{M}) \subset U_k(\mathscr{M})$$

On peut supposer que κ_2 est un entier naturel. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $U'_k(\mathscr{M}) \subset U_{\kappa_2+k}(\mathscr{M})$. On a donc trouvé deux entiers relatifs κ_1 et κ_2 tels que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; U_{\kappa_1+k}(\mathscr{M}) \subset U'_k(\mathscr{M}) \subset U_{\kappa_2+k}(\mathscr{M})$$

En procédant de façon analogue, on trouve $\kappa'_1, \kappa'_2 \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\forall\, k \leqslant 0 \;:\; U_{\kappa'_1+k}(\mathscr{M}) \subset U'_k(\mathscr{M}) \subset U_{\kappa'_2+k}(\mathscr{M})$$

Les entiers $k_1 = \inf\{\kappa_1, \kappa'_1\}$ et $k_2 = \sup\{\kappa_2, \kappa'_2\}$ conviennent alors.

Proposition 4.2–2. — *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Il existe une bonne V-filtration $U_\bullet(\mathscr{M})$ et, localement sur X, un polynôme $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ non nul vérifiant $b(E+k)U_k(\mathscr{M}) \subset U_{k-1}(\mathscr{M})$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

2) *Pour toute bonne V-filtration $U_\bullet(\mathscr{M})$, il existe localement sur X un polynôme $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ non nul tel que $b(E+k)U_k(\mathscr{M}) \subset U_{k-1}(\mathscr{M})$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

3) *Pour tout système fini de générateurs locaux $(m_i)_{i=1,\ldots,\ell}$ de $\mathscr{M}$, il existe un polynôme $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ non nul tel que $b(E)m_i \in \sum_{j=1}^{\ell} V_{-1}(\mathscr{D}_X)m_j$.*

Démonstration. — 1) implique 2). Cela résulte du lemme 4.2–1 et de l'identité suivante :

$$b(E+k+k_1)\cdots b(E+k+k_2-1)b(E+k+k_2)U'_k(\mathscr{M}) \subset U'_{k-1}(\mathscr{M})$$

en utilisant les notations alors introduites.

2) implique 3). En effet, d'après la proposition 4.1–9, $U_k(\mathscr{M}) = \sum_i V_k(\mathscr{D}_X)m_i$, $k \in \mathbb{Z}$, est une bonne V-filtration de $\mathscr{M}$.

3) implique 1). Considérons la bonne V-filtration $U_k(\mathscr{M}) = \sum_i V_k(\mathscr{D}_X)m_i$, $k \in \mathbb{Z}$. Le point 1) résulte alors des relations de commutation :

$$b(E+k)V_k(\mathscr{D}_X) \subset V_k(\mathscr{D}_X)b(E) + V_{k-1}(\mathscr{D}_X)$$

vérifiées pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 4.2–3. — Un $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}$ cohérent est dit spécialisable le long de Y s'il possède l'une des propriétés équivalentes de la proposition 4.2–2. Soit alors $U_\bullet(\mathscr{M})$ une bonne V-filtration de $\mathscr{M}$. On appelle polynôme de Bernstein-Sato (local) de la bonne V-filtration $U_\bullet(\mathscr{M})$ le polynôme $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ unitaire de plus petit degré tel que localement :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}\colon b(E+k)U_k(\mathscr{M}) \subset U_{k-1}(\mathscr{M})$$

Proposition 4.2–4. — *Soit $0 \to \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M} \to \mathscr{M}_2 \to 0$ une suite exacte de $\mathscr{D}_X$-modules cohérents. Le module $\mathscr{M}$ est spécialisable le long de Y si et seulement si les modules $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2$ le sont.*

Démonstration. — Supposons que $\mathscr{M}$ soit spécialisable. On note $b(s)$ le polynôme de Bernstein-Sato associé à une bonne V-filtration $U_\bullet(\mathscr{M})$. D'après la proposition 4.1–11, la filtration induite et la filtration image sont alors de bonnes V-filtrations. On vérifie aisément que $b(s)$ est un polynôme associé à ces filtrations (au sens de la proposition 4.2–2). Ainsi, $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2$ sont spécialisables.

Réciproquement, soient $b_1(s)$ (resp. $b_2(s)$) le polynôme de Bernstein-Sato de la filtration induite (resp. image) par la bonne V-filtration $U_\bullet(\mathscr{M})$ de $\mathscr{M}$. Il est facile de voir que le produit $b_1(s)b_2(s)$ est un polynôme associé à la V-filtration $U_\bullet(\mathscr{M})$.

La catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules spécialisables le long de Y est donc une sous-catégorie abélienne, stable par extension, de la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules cohérents.

Exercice 4.2–5. — Montrer qu'un $\mathscr{D}_X$-module cohérent à support contenu dans Y (resp. admettant Y comme hypersurface non caractéristique) est spécialisable et qu'il possède une bonne V-filtration dont les racines du polynôme de Bernstein-Sato sont des entiers relatifs strictement négatifs (resp. positifs ou nuls).

Proposition 4.2–6. — *Soit $\sigma : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une section de la projection naturelle $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent spécialisable. Il existe une unique bonne V-filtration, notée $V^\sigma_\bullet(\mathscr{M})$, dont le polynôme de Bernstein-Sato $b^\sigma(s) \in \mathbb{C}[s]$ a ses racines dans l'image de σ.*

Démonstration. — Soit $b(s)$ le polynôme de Bernstein-Sato d'une bonne V-filtration $U_\bullet(\mathscr{M})$. Quitte à décaler cette filtration, on peut supposer que la partie réelle de toute racine α de $b(s)$ vérifie $\operatorname{Re}\alpha \leqslant \operatorname{Re}\sigma\pi(\alpha)$. Soit alors $\lambda \in \mathbb{C}$ un zéro de $b(s)$ de multiplicité $\ell \in \mathbb{N}$ et vérifiant $\operatorname{Re}\lambda < \operatorname{Re}\sigma\pi(\lambda)$. On écrit : $b(s) = (s-\lambda)^\ell b_1(s)$. Le lecteur vérifiera alors que :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}\colon U'_k(\mathscr{M}) = U_{k-1}(\mathscr{M}) + (E+k-\lambda)^\ell U_k(\mathscr{M})$$

est une bonne V-filtration de $\mathscr{M}$. On constate que $(s-\lambda-1)^{\ell}b_1(s)$ est un polynôme de Bernstein associé à cette filtration. Cette construction permet de construire de proche en proche une bonne V-filtration dont le polynôme de Bernstein-Sato a ses racines dans l'image de la section σ.

On considère maintenant deux bonnes V-filtrations $U_\bullet(\mathscr{M})$ et $V_\bullet(\mathscr{M})$ dont les polynômes de Bernstein-Sato $b_U(s)$ et $b_V(s)$ ont leurs racines dans l'image de la section σ. Nous allons montrer que $U_\bullet(\mathscr{M}) \subset V_\bullet(\mathscr{M})$. D'après le lemme 4.2–1, il existe un entier $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $U_k(\mathscr{M}) \subset V_{k+\ell}(\mathscr{M})$. L'inclusion $U_\bullet(\mathscr{M}) \subset V_\bullet(\mathscr{M})$ étant manifeste lorsque $\ell \leqslant 0$, traitons le cas $\ell \in \mathbb{N} - \{0\}$. On constate que les polynômes $b_U(s+k)$ et $b_V(s+k+\ell)$ sont alors premiers entre eux, Il existe donc deux polynômes p et q tels que $1 = p(s)b_U(s+k) + q(s)b_V(s+k+\ell)$. En particulier, pour toute section locale m de $U_k(\mathscr{M})$:

$$m = p(E)b_U(E+k)m + q(E)b_V(E+k+\ell)m \in U_{k-1}(\mathscr{M}) + V_{k+\ell-1}(\mathscr{M}) \subset V_{k+\ell-1}(\mathscr{M})$$

En itérant le procédé, on obtient l'inclusion $U_\bullet(\mathscr{M}) \subset V_\bullet(\mathscr{M})$. L'égalité s'obtient par un argument symétrique.

Corollaire 4.2–7. — *Soit $0 \to \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M} \to \mathscr{M}_2 \to 0$ une suite exacte de $\mathscr{D}_X$-modules spécialisables le long de Y. Soit $\sigma : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une section de la projection naturelle $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$.*

1) *Pour tout entier relatif k, la suite de $V_0(\mathscr{D}_X)$-modules :*

$$0 \longrightarrow V_k^{\sigma}(\mathscr{M}_1) \longrightarrow V_k^{\sigma}(\mathscr{M}) \longrightarrow V_k^{\sigma}(\mathscr{M}_2) \longrightarrow 0$$

est exacte, c'est-à-dire que la V^{σ}-filtration esr stricte.

2) *La suite de $\mathrm{Gr}^V(\mathscr{D}_X)$-modules gradués :*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gr}^{V^{\sigma}}(\mathscr{M}_1) \longrightarrow \mathrm{Gr}^{V^{\sigma}}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathrm{Gr}^{V^{\sigma}}(\mathscr{M}_2) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. — Remarquons que la filtration $V_\bullet^{\sigma}(\mathscr{M})$ induit sur $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2$ des filtrations dont les polynômes de Bernstein-Sato divisent $b^{\sigma}(s)$. D'après la proposition 4.2–6, ces filtrations induites sont les filtrations $V_\bullet^{\sigma}(\mathscr{M}_1)$ et $V_\bullet^{\sigma}(\mathscr{M}_2)$; ce qui assure l'exactitude des suites proposées.

Enfin, si $\phi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ est un morphisme de $\mathscr{D}_X$-modules spécialisables, il résulte du corollaire 4.2–7 que :

$$\phi(V_k^{\sigma}(\mathscr{M})) \subset V_k^{\sigma}(\mathscr{N}) \ \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{M} \to V_k^{\sigma}(\mathscr{M})$ définit un foncteur de la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules spécialisables le long de Y vers celle de la catégorie des $V_0(\mathscr{D}_X)$-modules.

4.3. La filtration canonique d'un module spécialisable. — Nous allons raffiner la filtration $V^{\sigma}(\mathscr{M})$ d'un $\mathscr{D}_X$-module spécialisable $\mathscr{M}$ en définissant une filtration indexée par $\mathbb{C}$. Cela oblige à définir un ordre total sur $\mathbb{C}$ qui prolonge l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$. On choisit l'ordre lexicographique sur $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$:

$$x + iy \leqslant x' + iy' \text{ signifie } x < x' \text{ ou } x = x' \text{ et } y \leqslant y'$$

Pour tout nombre complexe $\alpha \in \mathbb{C}$, le sous-ensemble $\alpha + \mathbb{Z}$ de $\mathbb{C}$ sera appelé un réseau de $\mathbb{C}$. On dit qu'une bonne filtration $U_\bullet(\mathscr{M})$ indexée par $\mathbb{C}$ en est une bonne V-filtration si sa restriction à chaque réseau est une bonne V-filtration.

Rappelons que d'après la proposition 4.2–4, tout sous $\mathscr{D}_X$-module engendré par une section locale d'un module spécialisable est spécialisable.

Définition 4.3–1. — Soit m une section locale d'un module spécialisable $\mathscr{M}$. Le polynôme unitaire de plus petit degré vérifiant localement :

$$b(E)m \in V_{-1}(\mathscr{D}_X)m$$

est appelé le polynôme de Bernstein-Sato de la section locale m. On le note $b_m(s) \in \mathbb{C}[s]$. On appelle ordre local de m le long de Y, noté $\operatorname{ord}_Y(m)$, l'ensemble des racines de $b_m(s)$.

Notation 4.3–2. — Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on note σ_α la section de $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dont l'image est l'ensemble dans $\{a \in \mathbb{C} \ ; \ -\alpha - 1 \leqslant a < -\alpha\}$. Étant donné un $\mathscr{D}_X$-module spécialisable $\mathscr{M}$, pour alléger les notations, on notera $b_\alpha(s) \in \mathbb{C}[s]$ le polynôme de Bernstein-Sato de la bonne V-filtration $V_\bullet^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M})$.

Remarquons que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ la filtration induite $V_\bullet^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M}) \cap \mathscr{D}_X m$ est la bonne V-filtration $V_\bullet^{\sigma_\alpha}(\mathscr{D}_X m)$ et son polynôme de Bernstein-Sato divise $b_\alpha(s)$. Comme $V_\bullet(\mathscr{D}_X)m$ est une bonne V-filtration de $\mathscr{D}_X m$, il résulte du lemme 4.2–1 qu'il existe deux entiers k_1 et k_2 tels que : $b_0(E + k_1) \cdots b_0(E + k_2)m \in V_{-1}(\mathscr{D}_X)m$. Si $A \subset \mathbb{C}$ désigne l'ensemble des racines de b_0, l'ordre local le long de Y d'une section $m \in \mathscr{M}$ est donc contenu dans $A + \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$.

Définition 4.3–3. — Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module spécialisable le long de Y. La filtration $V_\bullet(\mathscr{M})$ indexée par $\mathbb{C}$ et définie par :

$$\forall\, x \in X,\ V_\alpha(\mathscr{M})_x := \{m \in \mathscr{M}_x \ , \ \operatorname{ord}_Y(m) \subset \{a \in \mathbb{C} \ ; \ a \geqslant -\alpha - 1\}\}$$

est appelée V-filtration canonique par l'ordre relatif à Y.

Exercice 4.3–4. — Soit $X = \mathbb{C}$, $Y = \{0\}$, $\beta \in \mathbb{C}$ et $\mathscr{M} = \mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X(t\partial_t - \beta)$. On note t^β la classe de 1 dans $\mathscr{M}$ et $t^{\beta+17}$ celle de t^{17}. Montrer que $\mathscr{M}$ est spécialisable et que $\{\beta\}$ est l'ordre la section $m = t^\beta + t^{\beta+17}$ au voisinage de l'origine (en particulier, $m \in V_{-\beta-1}(\mathscr{M})$).

Proposition 4.3–5. — *La filtration canonique d'un $\mathscr{D}_X$-module spécialisable $\mathscr{M}$ est une bonne V-filtration et vérifie :*

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{C},\ \ \forall\, k \in \mathbb{Z} :\ V_{\alpha+k}(\mathscr{M}) = V_k^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M})$$

Démonstration. — Constatons que pour tout entier $\ell \in \mathbb{Z}$, nous avons les identités :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}\colon\ b_\alpha(E+k+\ell)V_{k+\ell}^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M}) \subset V_{k+\ell-1}^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M})$$

Ainsi, $b_\alpha(s+\ell)$ est le polynôme de Bernstein-Sato de la bonne $V_\bullet$-filtration décalée $V_{\ell+\bullet}^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M})$; de plus les filtrations $V_{\ell+\bullet}^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M})$ et $V_\bullet^{\sigma_{\alpha+\ell}}(\mathscr{M})$ coïncident.

En particulier, $V_k^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M}) = V_0^{\sigma_{\alpha+k}}(\mathscr{M})$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Il suffit donc de montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$V_\alpha(\mathscr{M}) = V_0^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M})$$

Soit $m \in V_\alpha(\mathscr{M})$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, nous avons l'identité :

$$b_m(E-k+1)\cdots b_m(E-1)b_m(E)m \in V_{-k}(\mathscr{D}_X)m$$

Mais si k est assez grand, m appartient à $V_k^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M})$ et donc :

$$b_m(E-k+1)\cdots b_m(E-1)b_m(E)m \in V_0^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M})$$

D'autre part, on a :

$$b_\alpha(E+k)m \in V_{k-1}^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M})$$

Or les polynômes $b_\alpha(s+k)$ et $b_m(s-k+1)\cdots b_m(s-1)b_m(s)$ sont premiers entre eux. À partir d'une identité de Bezout, on en déduit donc que m appartient en fait à $V_{k-1}^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M})$. En itérant ce procédé, nous obtenons : $m \in V_0^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M})$; ainsi $V_\alpha(\mathscr{M}) \subset V_0^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M})$.

Réciproquement, soit $m \in V_0^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M})$ une section locale non nulle. Rappelons que la V-filtration $V_\bullet^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M}) \cap \mathscr{D}_X m$ induite est $V_\bullet^{\sigma_\alpha}(\mathscr{D}_X m)$ et que son polynôme de Bernstein-Sato divise $b_\alpha(s)$ (corollaire 4.2–7). D'autre part, $V_\bullet(\mathscr{D}_X)m$ définit une bonne V-filtration de $\mathscr{D}_X m$. Il existe donc un entier $\kappa \in \mathbb{N}$ tel que $V_{-\kappa}^{\sigma_\alpha}(\mathscr{D}_X m) \subset V_{-1}(\mathscr{D}_X)m$. Par suite, $b_\alpha(s-\kappa+1)\cdots b_\alpha(s)$ est un multiple de $b_m(s)$; en particulier, l'ordre local de m le long de Y est supérieur ou égal à $-\alpha-1$. Donc m appartient à $V_\alpha(\mathscr{M})$.

Remarque. — Rappelons que $A \subset \mathbb{C}$ désigne l'ensemble des zéros du polynôme de Bernstein-Sato local $b_0(s)$ de $V_\bullet^{\sigma_0}(\mathscr{M})$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. On a : $V_\alpha(\mathscr{M}) = V_\beta(\mathscr{M})$ où β est le plus grand élément de $A + \mathbb{Z}$ minorant α. On définit alors $V_{<\alpha}(\mathscr{M})$ comme la réunion des $V_\beta(\mathscr{M})$ tels que $\beta < \alpha$. Ainsi, $V_{<\alpha}(\mathscr{M}) = V_\beta(\mathscr{M})$ où β est le plus grand élément de $A + \mathbb{Z}$ strictement inférieur à α.

On notera $\sigma_{<\alpha}$ la section de $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dont l'image est l'ensemble $\{a \in \mathbb{C}\ ;\ -\alpha-1 < a \leqslant -\alpha\}$.

Exercice 4.3–6. — Montrer que le polynôme de Bernstein-Sato de la V-filtration $V_\bullet^{\sigma_0}(\mathscr{M})$ d'un $\mathscr{D}_X$-module cohérent $\mathscr{M}$ supporté par Y est une puissance de $s+1$

et que les racines des polynômes de Bernstein-Sato de ses sections sont des entiers relatifs strictement négatifs.

Corollaire 4.3–7. — *Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module spécialisable le long de Y, on a l'égalité :*

$$V_{<\alpha}(\mathscr{M}) = V_0^{\sigma_{<\alpha}}(\mathscr{M})$$

Notation 4.3–8. — Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module spécialisable le long de Y. La filtration V-filtration de $\mathscr{M}$ étant croissante, on pose :

$$\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}) := V_\alpha(\mathscr{M})/V_{<\alpha}(\mathscr{M})$$

pour tout α complexe dans $\mathbb{C}$.

Proposition 4.3–9. — *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module spécialisable le long de Y.*

1) *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, l'endomorphisme $E+\alpha+1$ du $\mathrm{Gr}_0^V(\mathscr{D}_X)$-module cohérent $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$ est localement nilpotent de degré de nilpotence la multiplicité de la racine $-\alpha-1$ de $b_\alpha(s)$.*

2) *Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, si $\alpha \in]k-1,k]$, le $\mathrm{Gr}_0^V(\mathscr{D}_X)$-module $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$ est naturellement isomorphe au sous-espace propre généralisé pour la valeur propre $-\alpha-1$ de l'endomorphisme E de $V_k(\mathscr{M})/V_{k-1}(\mathscr{M})$.*

3) *Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, il existe un isomorphisme fonctoriel de $\mathrm{Gr}_0^V(\mathscr{D}_X)$-modules :*

$$V_k(\mathscr{M})/V_{k-1}(\mathscr{M}) \simeq \bigoplus_{\alpha\in]k-1,k]} \mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$$

Preuve de 1). — Si ℓ est la multiplicité de la racine $-\alpha-1$ de $b_\alpha(s)$, on pose, $b_\alpha(s) = b'_\alpha(s)(s+\alpha+1)^\ell$. On a remarqué dans la preuve de la proposition 4.2–6 que le polynôme de Bernstein-Sato de la bonne V-filtration de $\mathscr{M}$ suivante :

$$V_{\bullet-1}^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M}) + (E+.+\alpha+1)^\ell V_\bullet^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M})$$

divise $b'_\alpha(s)(s+\alpha)^\ell$. Les racines de ce polynôme étant contenue dans l'intervalle $-\alpha-1 < s \leqslant -\alpha$, cette filtration est donc la bonne V-filtration $V_\bullet^{\sigma_{<\alpha}}(\mathscr{M})$ (voir proposition 4.2–6). En particulier :

$$V_{-1}^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M}) + (E+\alpha+1)^\ell V_0^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M}) = V_0^{\sigma_{<\alpha}}(\mathscr{M}) = V_{<\alpha}(\mathscr{M})$$

puisque $V_{-1}^{\sigma_\alpha}(\mathscr{M}) = V_{\alpha-1}(\mathscr{M})$. Il en résulte que $(E+\alpha+1)^\ell$ annule $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$.

Preuve de 2). — Remarquons que $V_k(\mathscr{M})/V_{k-1}(\mathscr{M})$ n'est autre que le $\mathrm{Gr}_0^V(\mathscr{D}_X)$-module $V_0^{\sigma_k}(\mathscr{M})/V_{-1}^{\sigma_k}(\mathscr{M})$. En particulier, le polynôme minimal de l'endomorphisme E du quotient $V_k(\mathscr{M})/V_{k-1}(\mathscr{M})$ est $b_k(s)$ (dont les racines sont dans l'intervalle $[-k-1,-k[$ par définition de $V_\bullet^{\sigma_k}(\mathscr{M})$). Soit $\ell_\alpha \in \mathbb{N}$ la multiplicité de la racine $-\alpha-1$ de $b_k(s)$. On note $\mathscr{N}_\alpha = \ker(E+\alpha+1)^{\ell_\alpha}$, le sous-espace propre généralisé pour la valeur propre $-\alpha-1$ de l'endomorphisme E de $V_k(\mathscr{M})/V_{k-1}(\mathscr{M})$.

Soit $m \in V_k(\mathscr{M})$ définissant une section de $\mathscr{N}_\alpha$. La section $m' = (E+\alpha+1)^{\ell_\alpha} m$ appartient à $V_{k-1}(\mathscr{M})$ et les zéros de $b_{m'}(s)$ sont supérieurs à $-k$. Ainsi,

$$b_{m'}(E)(E+\alpha+1)^{\ell_\alpha} m \in V_{-1}(\mathscr{D}_X)m$$

et donc $m \in V_\alpha(\mathscr{M})$. On en déduit un morphisme naturel de $\mathrm{Gr}_0^V(\mathscr{D}_X)$-modules $f_\alpha : \mathscr{N}_\alpha \to \mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$.

Ce morphisme est injectif. En effet, si $m \in V_k(\mathscr{M})$ représente un élément du noyau de f_α, alors $m \in V_{<\alpha}(\mathscr{M})$ et les racines du polynôme de Bernstein-Sato $b_m(s)$ sont strictement supérieures à $\alpha - 1$. D'autre part, pour $\ell \in \mathbb{N}$ entier assez grand, $b_m(E-\ell)\cdots b_m(E)m \in V_{k-1}(\mathscr{M})$. Il résulte alors d'une relation de Bezout entre les polynômes $b_m(s-\ell)\cdots b_m(s)$ et $(s+\alpha+1)^{\ell_\alpha}$ que $m \in V_{k-1}(\mathscr{M})$, comme souhaité.

Montrons enfin la surjectivité de f_α. Soit $m \in V_\alpha(\mathscr{M})$. On note $\ell \in \mathbb{N}$ la multiplicité de la racine $-\alpha-1$ de $b_m(s)$, $c(s) \in \mathbb{C}[s]$ le quotient de la division euclidienne de $b_m(s)$ par $(s+\alpha+1)^\ell$ et $\widetilde{\ell}_\alpha \in \mathbb{N}$ l'ordre de nilpotence de l'endomorphisme $E+\alpha+1$ sur $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$. Soit alors $u(s), v(s) \in \mathbb{C}[s]$ deux polynômes vérifiant :

$$1 = u(s)(s+\alpha+1)^{\widetilde{\ell}_\alpha} + v(s)c(s)$$

On constate aisément que $v(E)c(E)m \in V_k(\mathscr{M})$ définit un élément de $\mathscr{N}_\alpha$, dont l'image par f_α représente dans $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$ la même classe que m.

Preuve de 3). — L'endomorphisme E de $V_k(\mathscr{M})/V_{k-1}(\mathscr{M})$ ayant $b_k(s)$ pour polynôme minimal, le $\mathrm{Gr}_0^V(\mathscr{D}_X)$-module $V_k(\mathscr{M})/V_{k-1}(\mathscr{M})$ est somme directe de ses sous-espaces propres généralisés $\mathscr{N}_\alpha, \alpha \in [-k-1, -k[$. On obtient ainsi un isomorphisme fonctoriel de $\mathrm{Gr}_0^V(\mathscr{D}_X)$-modules :

$$V_k(\mathscr{M})/V_{k-1}(\mathscr{M}) \simeq \bigoplus_{\alpha \in]k-1,k]} \mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$$

La proposition est donc démontrée. Le fait suivant résulte alors du lemme 4.1–12 :

Corollaire 4.3–10. — *Si l'hypersurface Y admet une équation, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})_{|Y}$ est un $\mathscr{D}_Y$-module cohérent.*

Proposition 4.3–11. — *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module spécialisable le long de Y.*

1) *Pour tout complexe $\alpha \geqslant 0$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a l'égalité :*

$$V_{\alpha+k}(\mathscr{M}) = V_k(\mathscr{D}_X)V_\alpha(\mathscr{M})$$

2) *Pour tout complexe $\alpha > 0$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a l'égalité :*

$$V_{-\alpha-k}(\mathscr{M}) = V_{-k}(\mathscr{D}_X)V_{-\alpha}(\mathscr{M})$$

Démonstration. — Soit $\alpha \geqslant 0$. D'après la proposition 4.3–5, l'endomorphisme E du quotient $V_{\alpha+k}(\mathscr{M})/V_{\alpha+k-1}(\mathscr{M})$ a pour polynôme minimal $b_{\alpha+k}(s)$ dont les racines sont dans l'intervalle $[-\alpha-k-1, -\alpha-k[$. En particulier, pour tout entier $k \geqslant 1$, $s+1$ et $b_{\alpha+k}(s)$ sont premiers entre eux. Il résulte d'une identité de Bezout que, pour tout entier $k \geqslant 1$, l'endomorphisme de $V_{\alpha+k}(\mathscr{M})/V_{\alpha+k-1}(\mathscr{M})$ induit par $\partial_t t = t\partial_t + 1$ est

bijectif. On en déduit que $V_{\alpha+k}(\mathscr{M}) = V_k(\mathscr{D}_X)V_\alpha(\mathscr{M})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Soit $\alpha > 0$. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que

$$\forall\, k \in \mathbb{N} :\ V_{-\alpha-k_0-k}(\mathscr{M}) = V_{-k}(\mathscr{D}_X)V_{-\alpha-k_0}(\mathscr{M})$$

L'endomorphisme E de $V_{-\alpha-k}(\mathscr{M})/V_{-\alpha-k-1}(\mathscr{M})$ a un polynôme minimal dont les racines sont supérieures ou égales à $k+\alpha-1$. Donc pour $k \geqslant 1$, cet endomorphisme E est bijectif. Si $k_0 \geqslant 1$, l'endomorphisme E de $V_{-\alpha-k_0}(\mathscr{M})/V_{-\alpha-k_0-1}(\mathscr{M})$ est bijectif. On en déduit : $V_{-\alpha-k_0}(\mathscr{M}) \subset tV_{-\alpha-k_0+1}(\mathscr{M}) + V_{-\alpha-k_0-1}(\mathscr{M})$. Il en résulte l'inclusion $V_{-\alpha-k_0}(\mathscr{M}) \subset V_{-1}(\mathscr{D}_X)V_{-\alpha-k_0+1}(\mathscr{M})$. Donc, $k_0 = 0$ et la proposition est démontrée.

4.4. Exemples et premières propriétés. — Soit (x, t) un système de coordonnées locales dans lequel $t = 0$ est une équation de Y. Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent.

On considère le $\mathscr{O}_X[s]$-module $\mathscr{M}[1/t, s]\, t^s$ isomorphe à $\mathscr{M}[1/t, s]$ par l'application $m \mapsto mt^s$. Il est muni d'une structure naturelle de $\mathscr{D}_X[s]$-module où l'action de ∂_t est définie par :

$$\forall\, m \in \mathscr{M}[1/t] \colon \partial_t(mt^s) = (\partial_t m)t^s + s(m/t)t^s$$

Lemme 4.4–1. — *Soit $m \in \mathscr{M}[1/t]$ et $b(s) \in \mathbb{C}[s]$. Les conditions locales suivantes sont équivalentes :*

1) $b(E)m \in V_{-1}(\mathscr{D}_X)m$;
2) $b(-s-1)mt^s \in \mathscr{D}_X[s]mt^{s+1}$.

Démonstration. — Montrons que 1) implique 2). Nous avons dans $\mathscr{M}[1/t]\, t^s$ l'identité suivante :

$$(*) \qquad (t\partial_t m)t^s = -(s+1)mt^s + \partial_t(mt^{s+1})$$

Il en résulte que pour tout entier k :

$$((t\partial_t)^k m)t^s - (-s-1)^k mt^s \in \mathscr{D}_X[s]mt^{s+1}$$

Par suite, $b(-s-1)mt^s \in \mathscr{D}_X[s]mt^{s+1}$.

Montrons que 2) implique 1). Reprenons la preuve déjà donnée dans le cours sur l'image inverse [**M-T**]. Il résulte de $(*)$ que

$$b(-s-1)mt^s - (b(t\partial_t)m)t^s \in \partial_t\mathscr{D}_X mt^{s+1}.$$

Par hypothèse, la section $b(-s-1)mt^s$ peut s'écrire :

$$b(-s-1)mt^s = \sum_{\text{finie}} \partial_t^j A_{i,j}(x, t, \partial_x)s^i mt^{s+1},$$

où les opérateurs différentiels $A_{i,j}(x, t, \partial_x)$ sont indépendants de ∂_t. On en déduit

$$(4) \qquad (b(E)m)t^s - \sum_{\text{finie}} A_{i,0}(x, t, \partial_x)(-t\partial_t - 1)^i mt^{s+1} \in \partial_t\mathscr{D}_X[s]mt^{s+1}$$

Or, si $(m_j)_{j\in\{1,\dots,k\}}$ une famille d'éléments de $\mathscr{M}[1/t]$, en faisant opérer les opérateurs ∂_t^j, on montre l'implication :

$$\sum_{j=0}^{k} \partial_t^j m_j t^s = 0 \implies \forall\, j \in \{1,\dots,k\} \colon m_j = 0$$

Il résulte alors de l'équation (4) que $b(E)m \in V_{-1}(\mathscr{D}_X)m$.

Proposition 4.4–2. — *Les $\mathscr{D}_X$-modules holonomes sont spécialisables le long de toute hypersurface lisse.*

Démonstration. — Soit m une section d'un module holonome $\mathscr{M}$. Dans le cours sur l'image inverse [**M-T**], nous avons montré qu'il existe un polynôme $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ non nul tel que :

$$b(s)mt^s \in \mathscr{D}_X[s]mt^{s+1}$$

Du lemme 4.4–1, on déduit l'existence d'un entier $\ell \in \mathbb{N}$ et d'un opérateur $P \in V_{-1}(\mathscr{D}_X)$ tel que $t^\ell(b(-E-1)m - Pm) = 0$. Comme $(\partial_t)^\ell t^\ell = \prod_{k=1}^{\ell}(t\partial_t + k)$, nous avons alors :

$$\prod_{k=1}^{\ell}(E+k)b(-E-1)m \in V_{-1}(\mathscr{D}_X)m$$

Ainsi, $\mathscr{M}$ est bien spécialisable le long de l'hypersurface d'équation $t = 0$.

Proposition 4.4–3. — *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module spécialisable le long de Y. Le $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}(*Y)$ est spécialisable le long de Y (donc en particulier cohérent). De plus, pour tout complexe $\alpha < 0$, le morphisme naturel de $V_0(\mathscr{D}_X)$-module :*

$$V_\alpha(\mathscr{M}) \longrightarrow V_\alpha(\mathscr{M}(*Y))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module spécialisable le long de Y. Commençons par établir la cohérence de $\mathscr{M}(*Y)$. C'est un problème local ; de plus, par récurrence sur le nombre de générateurs de $\mathscr{M}$, on peut supposer que $\mathscr{M}$ est engendré par une de ses sections $m \in \mathscr{M}$. D'après le lemme 4.4–1, il existe un polynôme $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ non nul tel que :

$$b(s)mt^s \in \mathscr{D}_X[s]mt^{s+1}$$

Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ un entier, tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k \geqslant k_0 + 1$, l'entier $-k$ ne soit pas racine de $b(s)$. Ainsi $mt^{-k} \in \mathscr{D}_X mt^{-k_0}$, pour $k \geqslant k_0+1$. À partir de l'identité $(\partial_t m)t^{-k} = \partial_t(mt^{-k}) + kmt^{-k-1}$, on montre alors que $\mathscr{M}[1/t] = \mathscr{D}_X(mt^{-k_0})$. Enfin, la filtration $(\mathscr{D}_X(\ell)(mt^{-k_0}))$, $\ell \in \mathbb{N}$, satisfaisant au critère de bonne filtration énoncé dans [**G-M**] (II.3 corollaire 1), le $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}[1/t]$ est bien $\mathscr{D}_X$ cohérent.

Soit m' une section de $\mathscr{M}(*Y)$. Localement, elle s'écrit $m' = m/t^k$ avec $m \in \mathscr{M}$. Le module $\mathscr{M}$ étant spécialisable, il existe un polynôme $b(s)$ non nul tel que :

$$b(E)m \in V_{-1}(\mathscr{D}_X)m$$

Nous en déduisons une identité de Bernstein pour $m' \in \mathscr{M}(*Y)$:

$$b(E+k)t^{-k}m \in V_{-1}(\mathscr{D}_X)t^{-k}m$$

Le module $\mathscr{M}(*Y)$ est donc spécialisable le long de Y.

Enfin, soit $T(\mathscr{M}) = \Gamma_{[Y]}\mathscr{M}$ le sous $\mathscr{D}_X$-module de $\mathscr{M}$ de ses sections supportées par Y. On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}(*Y) \longrightarrow \mathscr{M}(*Y)/\mathscr{M} \longrightarrow 0$$

Les modules $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}(*Y)$ sont spécialisables le long de Y ; il résulte de la proposition 4.2–4 que les $\mathscr{D}_X$-modules $T(\mathscr{M})$ et $\mathscr{M}(*Y)/\mathscr{M}$ le sont aussi. D'autre part, ces modules sont supportés par Y ; d'après l'exercice 4.3–6, les racines des polynômes de Bernstein de leurs sections sont donc des entiers strictement négatifs. Ainsi $V_\alpha(T(\mathscr{M})) = V_\alpha(\mathscr{M}(*Y)/\mathscr{M}) = 0$ pour tout complexe α strictement négatif, et on déduit du corollaire 4.2–7 l'isomorphisme naturel :

$$V_\alpha(\mathscr{M}) \longrightarrow V_\alpha(\mathscr{M}(*Y))$$

Proposition 4.4–4. — *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module spécialisable le long de Y. On note i : $Y \to X$ le morphisme d'inclusion. Si l'hypersurface Y admet comme une équation réduite globale $f = 0$ (ou quitte à diminuer X), le complexe $\mathbf{L}i^*(\mathscr{M})$ est fonctoriellement isomorphe au complexe de $\mathscr{D}_Y$-modules :*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gr}_0(\mathscr{M})_{|Y} \xrightarrow{f} \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M})_{|Y} \longrightarrow 0$$

En particulier, les faisceaux de cohomologie du complexe de $\mathscr{D}_Y$-modules $\mathbf{L}i^*(\mathscr{M})$ sont $\mathscr{D}_Y$-cohérents.

Démonstration. — Considérons le morphisme de multiplication par f :

$$V_{<0}(\mathscr{M}[1/f]) \xrightarrow{\phi} V_{<-1}(\mathscr{M}[1/f]) : \ m \longmapsto fm$$

La multiplication par f étant bijective dans $\mathscr{M}[1/f]$, l'application ϕ est injective. Montrons sa surjectivité. Soit $m \in V_{<-1}(\mathscr{M}[1/f])$ et $m' = (m/f) \in \mathscr{M}[1/f]$. À partir d'une équation réalisant le polynôme de Bernstein-Sato de m, on obtient :

$$fb_m(E+1)m' \in V_{-2}(\mathscr{D}_X)m'.$$

Après division par f, nous en déduisons que $b_m(s+1)$ est un multiple du polynôme de Bernstein-Sato de m'. Ainsi, $m' \in V_{<0}(\mathscr{M}[1/f])$ et ϕ est surjective et donc finalement bijective.

On déduit alors de la proposition 4.4–3 que le morphisme de multiplication par f :

$$V_{<0}(\mathscr{M}) \longrightarrow V_{<-1}(\mathscr{M})$$

est un isomorphisme. Les complexes :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gr}_0(\mathscr{M})_{|Y} \xrightarrow{f} \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M})_{|Y} \longrightarrow 0 \ \text{ et } \ 0 \longrightarrow V_0(\mathscr{M})_{|Y} \xrightarrow{f} V_{-1}(\mathscr{M})_{|Y} \longrightarrow 0$$

sont donc isomorphes. Or, sous l'hypothèse de la proposition, le complexe $Li^*(\mathscr{M})$ est représenté par complexe de $\mathscr{D}_Y$-modules ([**M-T**]) :

$$0 \longrightarrow \mathscr{M}_{|Y} \xrightarrow{f} \mathscr{M}_{|Y} \longrightarrow 0$$

Pour établir la proposition, il suffit de montrer que le morphisme :

$$\mathscr{M}/\mathrm{V}_0(\mathscr{M}) \xrightarrow{\phi'} \mathscr{M}/\mathrm{V}_{-1}(\mathscr{M}) \;:\; m \longmapsto fm$$

est un isomorphisme. On rappelle que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme E de $V_k(\mathscr{M})/V_{k-1}(\mathscr{M})$ est bijectif (voir la preuve de la proposition 4.3–11). Par récurrence sur k, tout élément de $\mathscr{M} = \cup_{k\in\mathbb{N}} V_k(\mathscr{M})$ appartient donc à $f\mathscr{M}$ modulo $V_0(\mathscr{M})$. Il en résulte que pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout élément de $V_k(\mathscr{M})$ appartient à fM modulo $V_0(\mathscr{M})$. L'application ϕ' est donc surjective. Il reste à montrer l'injectivité de ϕ'. Soit $m \in \mathscr{M}$ tel que $fm \in V_{-1}(\mathscr{M})$. Le polynôme $b_{fm}(s)$ a ses racines positives et vérifie : $b_{fm}(E)fm \in V_{-1}(\mathscr{D}_X)fm$. Appliquons l'opérateur ∂_t à cette identité. Il vient : $b_{fm}(E+1)(E+1)m \in V_{-1}(\mathscr{D}_X)m$. Ainsi, m appartient à $V_0(\mathscr{M})$ et ϕ' est injective.

La cohérence des faisceaux de cohomologie du complexe de $\mathscr{D}_Y$-modules $\mathbf{L}i^*(\mathscr{M})$ résulte alors du corollaire 4.3–10.

4.5. Les $\mathscr{D}_X$-modules élémentaires. — Dans cette sous-section, $X = \mathbb{C}^{n+1}$. On considère $(x_1, \ldots, x_n, t)$ un système de coordonnées locales de X dans lequel l'équation de Y est $t = 0$.

Définition 4.5–1. — Soit $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ un polynôme dont les racines sont dans l'intervalle complexe $[-1, 0[$, ℓ la multiplicité de la racine -1 de $b(s)$, Q une matrice $p \times q$ d'opérateurs de $V_0(\mathscr{D}_X)$ et P une matrice $q \times q$ d'opérateurs de $V_{-1}(\mathscr{D}_X)$. Notons $\Lambda = \Lambda(b, Q, P)$ la matrice carrée :

$$\begin{pmatrix} (E+1)^\ell \,\mathrm{Id}_p & -Q \\ 0 & b(E-1)\,\mathrm{Id}_q - P \end{pmatrix}$$

Le conoyau $\mathscr{E} = \mathscr{E}(b, Q, P)$ du morphisme de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche :

$$\mathscr{D}_X^p \oplus \mathscr{D}_X^q \xrightarrow{\cdot\Lambda} \mathscr{D}_X^p \oplus \mathscr{D}_X^q$$

est appelé $\mathscr{D}_X$-module élémentaire.

Lemme 4.5–2. — *Tout $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}$ spécialisable le long de Y est localement quotient d'un $\mathscr{D}_X$-module élémentaire.*

Démonstration. — Notons ℓ la multiplicité de la racine -1 du polynôme minimal $b_0(s)$ de l'endomorphisme E de $V_0(\mathscr{M})/V_{-1}(\mathscr{M})$. Nous avons la décomposition :

$$V_0(\mathscr{M})/V_{-1}(\mathscr{M}) = \ker(E+1)^\ell \oplus \mathrm{im}\,(E+1)^\ell$$

Soit $v_1, \ldots, v_p$ des sections de $V_0(\mathscr{M})$ dont les classes modulo $V_{-1}(\mathscr{M})$ engendrent $\ker(E+1)^\ell$. Soit $u_1, \ldots u_q$ un système de générateurs du $V_0(\mathscr{D}_X)$-module $V_{-1}(\mathscr{M})$. En remarquant que $E+1 = \partial_t t$, il résulte alors de la proposition 4.3–11 que $v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_q$ est un système de générateurs du $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}$. Explicitons des relations entre ces générateurs. Tout d'abord, on a :

$$(E+1)^\ell v_i \in V_{-1}(\mathscr{M}) \;\text{ pour }\; i = 1, \ldots, p$$

Ainsi, il existe des opérateurs $Q_{i,j} \in V_0(\mathscr{D}_X)$ tels que :

$$(E+1)^\ell v_i = \sum_{j=1}^{q} Q_{i,j} u_j$$

D'autre part, par définition de $b_0(s)$:

$$b_0(E-1)u_i \in V_{-2}(\mathscr{M}) = V_{-1}(\mathscr{D}_X)V_{-1}(\mathscr{M}) \;\text{ pour }\; i = 1, \ldots, q$$

Il en résulte l'existence d'opérateurs $P_{i,j} \in V_{-1}(\mathscr{D}_X)$ tels que :

$$b_0(E-1)u_i = \sum_{j=1}^{p} P_{i,j} u_j$$

De plus, le polynôme $b_0(s)$ a ses racines dans l'intervalle $[-1, 0[$. En conclusion, le module $\mathscr{M}$ est un quotient du $\mathscr{D}_X$-module élémentaire $\mathscr{E}(b, Q, P)$.

Étudions maintenant les premières propriétés des $\mathscr{D}_X$-modules élémentaires.

Proposition 4.5–3. — *Avec les notations de la définition 4.5–1, les assertions suivantes sont vérifiées :*

1) *La suite de $\mathscr{D}_X$-modules :* $0 \to \mathscr{D}_X^p \oplus \mathscr{D}_X^q \xrightarrow{\cdot\Lambda} \mathscr{D}_X^p \oplus \mathscr{D}_X^q \xrightarrow{\pi} \mathscr{E} \to 0$ *est exacte.*

2) *Le $\mathscr{D}_X$-module élémentaire $\mathscr{E}$ est spécialisable le long de Y.*

3) *L'image par π de la V-filtration décalée $V_k(\mathscr{D}_X)^p \oplus V_{k+1}(\mathscr{D}_X)^q$, $k \in \mathbb{Z}$ est la V-filtration $V_k(\mathscr{E})$, $k \in \mathbb{Z}$, où $V_k(\mathscr{E})$ est le terme d'ordre k de la V-filtration canonique de $\mathscr{E}$.*

4) *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$:*

$$\begin{aligned}\frac{V_k(\mathscr{E})}{V_{k-1}(\mathscr{E})} &= \Big(\frac{\mathrm{Gr}_k^V(\mathscr{D}_X)}{\mathrm{Gr}_k^V(\mathscr{D}_X)(E+1)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\frac{\mathrm{Gr}_{k+1}^V(\mathscr{D}_X)}{\mathrm{Gr}_{k+1}^V(\mathscr{D}_X)b(E-1)}\Big)^q \\ &= \Big(\frac{\mathrm{Gr}_k^V(\mathscr{D}_X)}{(E+k+1)^\ell\,\mathrm{Gr}_k^V(\mathscr{D}_X)}\Big)^p \oplus \Big(\frac{\mathrm{Gr}_{k+1}^V(\mathscr{D}_X)}{b(E+k)\,\mathrm{Gr}_{k+1}^V(\mathscr{D}_X)}\Big)^q\end{aligned}$$

En particulier, il existe un isomorphisme de $\mathscr{D}_Y[s]$-modules :

$$\frac{V_k(\mathscr{E})}{V_{k-1}(\mathscr{E})} \simeq \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+k+1)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b(s+k)}\Big)^q \tag{5}$$

où l'action de s sur $V_k(\mathscr{E})/V_{k-1}(\mathscr{E})$ correspond à celle de E.

Démonstration. — Soit $\Lambda = \Lambda(b, Q, P)$, une matrice de la forme introduite dans la définition 4.5–1. Soit $(A, B) \in (\mathscr{D}_X)^p \oplus (\mathscr{D}_X)^q$ tel que $(A, B) \cdot \Lambda = 0$, c'est-à-dire tel que

$$(A(E+1)^\ell, -AQ + B(b(E-1) - P) = 0$$

En considérant l'ordre des coefficients de A et B pour la V-filtration de $\mathscr{D}_X$, on montre aisément que $A = 0$, puis $B = 0$. La suite de morphismes de $\mathscr{D}_X$-modules suivante, où π désigne le morphisme de passage au quotient est donc exacte :

$$0 \longrightarrow \mathscr{D}_X^p \oplus \mathscr{D}_X^q \xrightarrow{\cdot\Lambda} \mathscr{D}_X^p \oplus \mathscr{D}_X^q \xrightarrow{\pi} \mathscr{E} \longrightarrow 0 \tag{6}$$

En particulier, cette suite définit une résolution $\mathscr{D}_X$-libre de $\mathscr{E} = \mathscr{E}(b, Q, P)$.

On peut alors munir le module placé au centre de la suite exacte (6) de la V-filtration décalée $V_k(\mathscr{D}_X)^p \oplus V_{k+1}(\mathscr{D}_X)^q$, $k \in \mathbb{Z}$. L'image par π de cette V-filtration définit une bonne V-filtration $U_k(\mathscr{E}) = \pi(V_k(\mathscr{D}_X)^p \oplus V_{k+1}(\mathscr{D}_X)^q)$, $k \in \mathbb{Z}$ de $\mathscr{E}$. D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le terme d'ordre k de la bonne V-filtration induite par le morphisme $\cdot\Lambda$ est définie par :

$$\{(A, B) \in (\mathscr{D}_X)^p \oplus (\mathscr{D}_X)^q \ ; \ (A, B) \cdot \Lambda \in V_k(\mathscr{D}_X)^p \oplus V_{k+1}(\mathscr{D}_X)^q\}$$

Vu l'ordre pour la V-filtration des coefficients de P et Q, on déduit que cette V-filtration est la filtration décalée $V_k(\mathscr{D}_X)^p \oplus V_{k+1}(\mathscr{D}_X)^q$, $k \in \mathbb{Z}$. En conséquence, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les suites de $\mathrm{Gr}_0^V(\mathscr{D}_X)$-modules suivantes :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Gr}_k^V(\mathscr{D}_X)^p \oplus \mathrm{Gr}_{k+1}^V(\mathscr{D}_X)^q \xrightarrow{.\,\mathrm{Gr}_k(\Lambda)} \mathrm{Gr}_k^V(\mathscr{D}_X)^p \oplus \mathrm{Gr}_{k+1}^V(\mathscr{D}_X)^q& \\ \longrightarrow \frac{U_k(\mathscr{E})}{U_{k-1}(\mathscr{E})} \longrightarrow 0& \end{aligned}$$

où

$$\mathrm{Gr}_k(\Lambda) = \begin{pmatrix} (E+1)^\ell \, \mathrm{Id}_p & 0 \\ 0 & b(E-1) \, \mathrm{Id}_q \end{pmatrix}$$

sont exactes. On a ainsi les égalités :

$$\begin{aligned} \frac{U_k(\mathscr{E})}{U_{k-1}(\mathscr{E})} &= \Big(\frac{\mathrm{Gr}_k^V(\mathscr{D}_X)}{\mathrm{Gr}_k^V(\mathscr{D}_X)(E+1)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\frac{\mathrm{Gr}_{k+1}^V(\mathscr{D}_X)}{\mathrm{Gr}_{k+1}^V(\mathscr{D}_X)b(E-1)}\Big)^q \\ &= \Big(\frac{\mathrm{Gr}_k^V(\mathscr{D}_X)}{(E+k+1)^\ell \, \mathrm{Gr}_k^V(\mathscr{D}_X)}\Big)^p \oplus \Big(\frac{\mathrm{Gr}_{k+1}^V(\mathscr{D}_X)}{b(E+k) \, \mathrm{Gr}_{k+1}^V(\mathscr{D}_X)}\Big)^q \end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'endomorphisme E de $U_k(\mathscr{E})/U_{k-1}(\mathscr{E})$ a pour polynôme minimal $b(s+k)$. Le $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{E}$ est donc spécialisable le long de Y et le polynôme $b(s)$ est le polynôme de Bernstein-Sato de la bonne V-filtration $U_k(\mathscr{E})$, $k \in \mathbb{Z}$. Ses racines étant dans l'intervalle $[-1, 0[$, la bonne V-filtration $U_k(\mathscr{E})$, $k \in \mathbb{Z}$, coïncide donc avec la bonne V-filtration (voir proposition 4.3–5) :

$$V_k^{\sigma_0}(\mathscr{E}) = V_k(\mathscr{E}) \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

Nous allons calculer le dual d'un module élémentaire. Faisons d'abord quelques rappels sur la dualité. Puisque, $X = \mathbb{C}^{n+1}$, tout $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{N}$ à droite est muni naturellement d'une structure de $\mathscr{D}_X$-module à gauche obtenue en posant :

$$\forall\, P \in \mathscr{D}_X\,,\ \forall\, m \in \mathscr{N} : P.m = m^t P$$

où ${}^tP$ est le transposé de l'opérateur P. De plus, si $\phi : \mathscr{N}_1 \to \mathscr{N}_2$ est un morphisme de $\mathscr{D}_X$-modules à droite, c'est alors un morphisme de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche lorsque $\mathscr{N}_1$ et $\mathscr{N}_2$ sont munis de leur structure naturelle de $\mathscr{D}_X$-module à gauche.

Exemple. — Notons ${}^g\mathscr{D}_X$, le faisceau d'anneaux $\mathscr{D}_X$ muni de sa structure de module à gauche induite par celle de module à droite. On a alors l'isomorphisme de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche :

$$\mathscr{D}_X \longrightarrow {}^g\mathscr{D}_X\ ,\ P \longmapsto {}^tP$$

De même si $A \in \mathscr{D}_X$, le quotient $\mathscr{D}_X/A\mathscr{D}_X$ est un $\mathscr{D}_X$-module à droite, donc à gauche. Et on a de même l'isomorphisme de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche :

$$\frac{\mathscr{D}_X}{\mathscr{D}_X\,{}^tA} \longrightarrow \frac{\mathscr{D}_X}{A\mathscr{D}_X}\ ,\ \dot{P} \longmapsto {}^t\dot{P}$$

Soit maintenant $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module à gauche. Le complexe $\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{D}_X)$ est un complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à droite. On peut donc le considérer comme un complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche. Décalé de la dimension de X, ce complexe est le complexe dual de $\mathscr{M}$:

$$\mathscr{M}^* = \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{D}_X)[\dim X]$$

Nous rappellerons comment étendre cette définition de dual d'un $\mathscr{D}_X$-module à une variété dans la section 4.6.

Nous allons maintenant calculer le complexe dual du $\mathscr{D}_X$-module élémentaire $\mathscr{E} = \mathscr{E}(b, Q, P)$. La suite de $\mathscr{D}_X$-modules suivante étant exacte (proposition 4.5–3) :

$$0 \longrightarrow \mathscr{D}_X^p \oplus \mathscr{D}_X^q \xrightarrow{\cdot\Lambda} \mathscr{D}_X^p \oplus \mathscr{D}_X^q \xrightarrow{\pi} \mathscr{E} \longrightarrow 0$$

le complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à droite $\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{D}_X)$ est donc isomorphe au complexe :

$$0 \longrightarrow \mathscr{D}_X^p \oplus \mathscr{D}_X^q \xrightarrow{\Lambda\cdot} \mathscr{D}_X^p \oplus \mathscr{D}_X^q \longrightarrow 0$$

où 0, le terme situé le plus à gauche, est placé en degré 0. Considéré comme complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche, il est alors isomorphe au complexe :

$$0 \longrightarrow \mathscr{D}_X^p \oplus \mathscr{D}_X^q \xrightarrow{\cdot{}^t\Lambda} \mathscr{D}_X^p \oplus \mathscr{D}_X^q \longrightarrow 0$$

où

$${}^t\Lambda = {}^t\Lambda(b, Q, P) = \begin{pmatrix} (-E)^\ell \operatorname{Id}_p & 0 \\ -{}^tQ & b(-E-2)\operatorname{Id}_q - {}^tP \end{pmatrix}$$

est la matrice transposée de la matrice Λ (par définition, la transposée d'une matrice d'opérateurs de termes général $A_{i,j}$ est la matrice de terme général ${}^tA_{i,j}$). En procédant comme dans la preuve de la proposition 4.5–3, on montre aisément que l'application $.^t\Lambda$ est injective. On obtient ainsi la proposition :

Proposition 4.5–4. — *Avec les notations de la définition 4.5–1, les assertions suivantes sont vérifiées :*

1) *Le morphisme de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche :*

$$\mathscr{D}_X^p \oplus \mathscr{D}_X^q \xrightarrow{.^t\Lambda} \mathscr{D}_X^p \oplus \mathscr{D}_X^q$$

où

$$^t\Lambda = {}^t\Lambda(b,Q,P) = \begin{pmatrix} (-E)^\ell \operatorname{Id}_p & 0 \\ -^tQ & b(-E-2)\operatorname{Id}_q - ^tP \end{pmatrix}$$

est la transposée de la matrice Λ, est injectif. On note $\widetilde{\mathscr{E}} := \widetilde{\mathscr{E}}(b,Q,P)$ son conoyau.

2) *Le complexe $\mathscr{E}^* = \mathscr{E}(b,Q,P)^*$ dual de $\mathscr{E}$ est isomorphe au complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à un terme : $\widetilde{\mathscr{E}}[\dim X - 1]$.*

Les propriétés de $\widetilde{\mathscr{E}}$ se montrent de la même façon que celles de $\mathscr{E}$.

Proposition 4.5–5. — *Avec les notations de la définition 4.5–1 et de la proposition 4.5–4, le $\mathscr{D}_X$-module $\widetilde{\mathscr{E}} = \widetilde{\mathscr{E}}(b,Q,P)$ vérifie les propriétés suivantes :*

1) *La suite de $\mathscr{D}_X$-modules : $0 \to \mathscr{D}_X^p \oplus \mathscr{D}_X^q \xrightarrow{.^t\Lambda} \mathscr{D}_X^p \oplus \mathscr{D}_X^q \xrightarrow{\pi} \widetilde{\mathscr{E}} \to 0$ est exacte.*

2) *Soit $U_k(\widetilde{\mathscr{E}})$, $k \in \mathbb{Z}$, l'image par π de la V-filtration décalée*

$$V_k(\mathscr{D}_X)^p \oplus V_{k-1}(\mathscr{D}_X)^q, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\frac{U_k(\widetilde{\mathscr{E}})}{U_{k-1}(\widetilde{\mathscr{E}})} &= \Big(\frac{\operatorname{Gr}_k^V(\mathscr{D}_X)}{\operatorname{Gr}_k^V(\mathscr{D}_X)(-E)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\frac{\operatorname{Gr}_{k-1}^V(\mathscr{D}_X)}{\operatorname{Gr}_{k-1}^V(\mathscr{D}_X) b(-E-2)}\Big)^q \\ &= \Big(\frac{\operatorname{Gr}_k^V(\mathscr{D}_X)}{(-E-k)^\ell \operatorname{Gr}_k^V(\mathscr{D}_X)}\Big)^p \oplus \Big(\frac{\operatorname{Gr}_{k-1}^V(\mathscr{D}_X)}{b(-E-k-1)\operatorname{Gr}_{k-1}^V(\mathscr{D}_X)}\Big)^q\end{aligned}$$

En particulier, il existe un isomorphisme de $\mathscr{D}_Y[s]$-modules :

$$\frac{U_k(\widetilde{\mathscr{E}})}{U_{k-1}(\widetilde{\mathscr{E}})} \simeq \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-k)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b(-s-k-1)}\Big)^q \tag{7}$$

où l'action de s sur $U_k(\widetilde{\mathscr{E}})/U_{k-1}(\widetilde{\mathscr{E}})$ correspond à celle de E.

3) La filtration $U_k(\widetilde{\mathscr{E}})$, $k \in \mathbb{Z}$, est une bonne V-filtration de $\widetilde{\mathscr{E}}$ admettant $b(-s-1)$ comme polynôme de Bernstein; les racines de ce polynôme sont dans l'intervalle $]-1,0]$. Le $\mathscr{D}_X$-module $\widetilde{\mathscr{E}}$ est spécialisable le long de Y, la filtration $U_k(\widetilde{\mathscr{E}})$, $k \in \mathbb{Z}$, coïncide avec la bonne V-filtration $V_{<k}(\widetilde{\mathscr{E}})$, $k \in \mathbb{Z}$.

Étudions maintenant les morphismes entre modules élémentaires.

Soit $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_1(b_1,Q_1,P_1)$ (resp. $\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_2(b_2,Q_2,P_2)$) un module élémentaire donné par la matrice $\Lambda_1 = \Lambda_1(b_1,Q_1,P_1)$ (resp. $\Lambda_2 = \Lambda_2(b_2,Q_2,P_2)$). On note ℓ_1 (resp. ℓ_2) la multiplicité de la racine -1 de $b_1(s)$ (resp. $b_2(s)$). On considère par la suite $\phi : \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$

un morphisme de modules élémentaires. Ce morphisme ϕ se relève en un morphisme de suites exactes de $\mathscr{D}_X$-modules :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{D}_X^{p_1} \oplus \mathscr{D}_X^{q_1} \arrow[r, "\cdot\Lambda_1"] \arrow[d, "\cdot C_\phi"] & \mathscr{D}_X^{p_1} \oplus \mathscr{D}_X^{q_1} \arrow[r] \arrow[d, "\cdot A_\phi"] & \mathscr{E}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{D}_X^{p_2} \oplus \mathscr{D}_X^{q_2} \arrow[r, "\cdot\Lambda_2"] & \mathscr{D}_X^{p_2} \oplus \mathscr{D}_X^{q_2} \arrow[r] & \mathscr{E}_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Par fonctorialité de $V_k(-)$ sur les modules spécialisables, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\phi(V_k(\mathscr{E}_1)) \subset V_k(\mathscr{E}_2)$. On vérifie alors que l'on peut choisir le relèvement de ϕ de telle façon que les matrices des applications $.A_\phi$ (resp. $.C_\phi$) (notées encore A_ϕ (resp. C_ϕ)) soient des matrices par blocs d'opérateurs différentiels :

$$A_\phi = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_\phi = \begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{pmatrix}$$

où les $A_{i,j}$ (resp. $C_{i,j}$) sont des matrices d'opérateurs de $V_{j-i}(\mathscr{D}_X)$.

D'après la proposition 4.5–3, le morphisme de suites exactes courtes défini par ϕ en induit un au niveau des gradués :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Gr}^V(\mathscr{D}_X)^{p_1} \oplus \mathrm{Gr}^V(\mathscr{D}_X)^{q_1} \arrow[r, "\cdot\,\mathrm{Gr}(\Lambda_1)"] \arrow[d, "\cdot\,\mathrm{Gr}(C_\phi)"] & \mathrm{Gr}^V(\mathscr{D}_X)^{p_1} \oplus \mathrm{Gr}^V(\mathscr{D}_X)^{q_1} \arrow[r] \arrow[d, "\cdot\,\mathrm{Gr}(A_\phi)"] & Gr(\mathscr{E}_1) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Gr}(\phi)"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Gr}^V(\mathscr{D}_X)^{p_2} \oplus \mathrm{Gr}^V(\mathscr{D}_X)^{q_2} \arrow[r, "\cdot\,\mathrm{Gr}(\Lambda_2)"] & \mathrm{Gr}^V(\mathscr{D}_X)^{p_2} \oplus \mathrm{Gr}^V(\mathscr{D}_X)^{q_2} \arrow[r] & Gr(\mathscr{E}_2) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Vu les coefficients de A_ϕ et C_ϕ, les matrices $\mathrm{Gr}(A_\phi)$ et $\mathrm{Gr}(C_\phi)$ s'écrivent :

$$\mathrm{Gr}(A_\phi) = \begin{pmatrix} \overline{A}_{00}(E) & \overline{A}_{01}(E)\,\partial_t \\ \overline{A}_{10}(E)\,t & \overline{A}_{11}(E) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Gr}(\overline{C}_\phi) = \begin{pmatrix} \overline{C}_{00}(E) & \overline{C}_{01}(E)\,\partial_t \\ \overline{C}_{10}(E)\,t & \overline{C}_{11}(E) \end{pmatrix}$$

où les coefficients des matrices $\overline{A}_{i,j}(E)$ et $\overline{C}_{i,j}(E)$ sont dans $\mathrm{Gr}_0^V(\mathscr{D}_X) = \mathscr{D}_Y[E]$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ϕ induit le morphisme : $\mathrm{Gr}_k(\phi) : V_k(\mathscr{E}_1)/V_{k-1}(\mathscr{E}_1) \to V_k(\mathscr{E}_2)/V_{k-1}(\mathscr{E}_2)$. Par l'isomorphisme donné dans la proposition 4.5–3, ce morphisme se lit :

$$\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+k+1)^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_1(s+k)}\Big)^{q_1} \xrightarrow{\cdot\overline{A}_k(s)} \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+k+1)^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_2(s+k)}\Big)^{q_2}$$

où, pour tout entier $k \geqslant 0$, $\overline{A}_k(s)$ est la matrice :

$$\overline{A}_k(s) = \begin{pmatrix} \overline{A}_{00}(s+k) & \overline{A}_{01}(s+k) \\ \overline{A}_{10}(s+k+1)(s+k+1) & \overline{A}_{11}(s+k+1) \end{pmatrix}$$

et pour tout entier $k < 0$:

$$\overline{A}_k(s) = \begin{pmatrix} \overline{A}_{00}(s+k) & \overline{A}_{01}(s+k)(s+k+1) \\ \overline{A}_{10}(s+k+1) & \overline{A}_{11}(s+k+1) \end{pmatrix}$$

Notons que l'égalité $\Lambda_1\, A_\phi = C_\phi\, \Lambda_2$ devient l'identité matricielle :

$$\begin{pmatrix} (s+1)^{\ell_1}\,\overline{A}_{00}(s) & (s+1)^{\ell_1}\,\overline{A}_{01}(s) \\ b_1(s-1)\,\overline{A}_{10}(s) & b_1(s-1)\,\overline{A}_{11}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{C}_{00}(s)\,(s+1)^{\ell_2} & \overline{C}_{01}(s)\,b_2(s) \\ \overline{C}_{10}(s)\,s^{\ell_2} & \overline{C}_{11}(s)\,b_2(s-1) \end{pmatrix} \tag{8}$$

Le morphisme ϕ induit alors le morphisme $\widetilde{\phi} : \widetilde{\mathscr{E}_2} \to \widetilde{\mathscr{E}_1}$ de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche défini par la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} 0 & \widetilde{\mathscr{E}_1} \arrow[l] & \mathscr{D}_X^{p_1} \oplus \mathscr{D}_X^{q_1} \arrow[l] & \mathscr{D}_X^{p_1} \oplus \mathscr{D}_X^{q_1} \arrow[l, "\cdot\, {}^t\Lambda_1"'] \\ 0 & \widetilde{\mathscr{E}_2} \arrow[l] \arrow[u, "\widetilde{\phi}"'] & \mathscr{D}_X^{p_2} \oplus \mathscr{D}_X^{q_2} \arrow[l] \arrow[u, "\cdot\, {}^tC_\phi"'] & \mathscr{D}_X^{p_2} \oplus \mathscr{D}_X^{q_2} \arrow[l, "\cdot\, {}^t\Lambda_2"'] \arrow[u, "\cdot\, {}^tA_\phi"'] \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\widetilde{\phi}$ est le morphisme de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche qui correspond au morphisme de $\mathscr{D}_X$-module à droite $Ext^1_{\mathscr{D}_X}(\phi, \mathscr{D}_X)$. Il est donc indépendant du relèvement de ϕ.

De même, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le morphisme $\widetilde{\phi}$ induit le morphisme :

$$\mathrm{Gr}_k^U(\widetilde{\phi}) U_k(\widetilde{\mathscr{E}_1})/U_{k-1}(\widetilde{\mathscr{E}_1}) \longrightarrow U_k(\widetilde{\mathscr{E}_2})/U_{k-1}(\widetilde{\mathscr{E}_2})$$

La matrice représentant $\cdot^t\,\mathrm{Gr}(C_\phi)$ est :

$${}^t\,\mathrm{Gr}(C_\phi) = \begin{pmatrix} {}^{t'}\overline{C}_{00}(-E-1) & t\; {}^{t'}\overline{C}_{10}(-E-1) \\ -\partial_t\; {}^{t'}\overline{C}_{01}(-E-1) & {}^{t'}\overline{C}_{11}(-E-1) \end{pmatrix}$$

où ${}^{t'}\cdot$ désigne l'opérateur de transposition relativement aux seules variables de Y. Par l'isomorphisme donné dans la proposition 4.5–5, ce morphisme se lit :

$$\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-k)^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_2(-E-k-1)}\Big)^{q_2} \xrightarrow{\cdot^{t'}\overline{C}_k(s)} \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-k)^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_1(-E-k-1)}\Big)^{q_1}$$

où pour tout entier $k \geqslant 1$ ${}^{t'}\overline{C}_k(s)$ est la matrice :

$${}^{t'}\overline{C}_k(s) = \begin{pmatrix} {}^{t'}\overline{C}_{00}(-s-k-1) & {}^{t'}\overline{C}_{10}(-s-k)(s+k) \\ -{}^{t'}\overline{C}_{01}(-s-k-1) & {}^{t'}\overline{C}_{11}(-s-k) \end{pmatrix}$$

et pour tout entier $k \leqslant 0$:

$${}^{t'}\overline{C}_k(s) = \begin{pmatrix} {}^{t'}\overline{C}_{00}(-s-k-1) & {}^{t'}\overline{C}_{10}(-s-k) \\ -(s+k)\,{}^{t'}\overline{C}_{01}(-s-k-1) & {}^{t'}\overline{C}_{11}(-s-k) \end{pmatrix}$$

L'objectif est maintenant d'expliciter une correspondance entre la V-filtration de $\mathscr{E}$ et de son dual. Pour cela, il est nécessaire de faire quelques rappels sur la dualité. Soit $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ un polynôme non nul et γ un lacet fermé entourant les racines de $b(s)$ et orienté dans le sens positif.

On vérifie facilement que l'application $\mathbb{C}$-bilinéaire :

$$\frac{\mathbb{C}[s]}{b(s)} \times \frac{\mathbb{C}[s]}{b(s)} \longrightarrow \mathbb{C} : \quad (u,v) \longmapsto \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{u(s)v(s)}{b(s)}ds$$

est non dégénérée. Elle définit donc un isomorphisme naturel :

$$\mathbb{C}[s]/b(s) \xrightarrow{\text{nat}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[s]/(b(s),\mathbb{C}) := (\mathbb{C}[s]/b(s))^*$$

Malgré son expression, on notera la nature purement algébrique de cet isomorphisme. Plus généralement, soit $b_1(s),\dots,b_r(s) \in \mathbb{C}[s]$ des polynômes non nuls et γ un grand cercle tournant dans le sens positif entourant leurs racines. Notons B la matrice diagonale :

$$B = \begin{pmatrix} b_1(s) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_r(s) \end{pmatrix}$$

On a de même un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire :

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i=1}^r \frac{\mathbb{C}[s]}{b_i(s)} &\xrightarrow{\text{nat}} \Big(\bigoplus_{i=1}^r \frac{\mathbb{C}[s]}{b_i(s)}\Big)^* \\ \dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{u_1} \\ \vdots \\ \dot{u_r} \end{pmatrix} &\longmapsto \Big[\dot{v} = (\dot{v_1},\dots,\dot{v_r}) \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma v(s)\cdot B^{-1}\cdot u(s)\,ds\Big] \end{aligned}$$

On obtient de même un isomorphisme de $\mathscr{D}_Y$-modules à gauche :

$$\bigoplus_{i=1}^r \frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{b_i(s)} \xrightarrow{\text{nat}} \Big(\bigoplus_{i=1}^r \frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_i(s)}\Big)^*[-\dim Y]$$

provenant du morphisme de $\mathscr{D}_Y$-modules à droite :

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i=1}^r \frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_i(s)} &\longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}\Big(\bigoplus_{i=1}^r \frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_i(s)}, \mathscr{D}_Y\Big) \\ \dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{u_1} \\ \vdots \\ \dot{u_r} \end{pmatrix} &\longmapsto \Big[\dot{v} = (\dot{v_1},\dots,\dot{v_r}) \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma v(s)\cdot B^{-1}\cdot u(s)\,ds\Big] \end{aligned}$$

Détaillons maintenant les propriétés de cet isomorphisme. Soient pour cela, $(b_{1,1},\dots,b_{1,r_1})$ et $(b_{2,1},\dots,b_{2,r_2})$ deux familles de polynômes non nuls, B_1 et B_2 les matrices diagonales associées :

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{1,1}(s) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_{1,r_1}(s) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_2 = \begin{pmatrix} b_{2,1}(s) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_{2,r_2}(s) \end{pmatrix}$$

et soit $f : \oplus_{i=1}^{r_1} \mathscr{D}_Y[s]/b_{1,i}(s) \to \oplus_{i=1}^{r_2} \mathscr{D}_Y[s]/b_{2,i}(s)$, un morphisme de $\mathscr{D}_Y[s]$-modules. Il se relève en un morphisme de suites exactes de $\mathscr{D}_Y[s]$-modules :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{D}_Y[s]^{r_1} \arrow[r, "\cdot B_1"] \arrow[d, "\cdot C"'] & \mathscr{D}_Y[s]^{r_1} \arrow[r] \arrow[d, "\cdot A"] & \bigoplus_{i=1}^{r_1} \mathscr{D}_Y[s]/b_{1,i}(s) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{D}_Y[s]^{r_2} \arrow[r, "\cdot B_2"] & \mathscr{D}_Y[s]^{r_2} \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{r_2} \mathscr{D}_Y[s]/b_{2,i}(s) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On applique alors à ce diagramme le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_Y[s]}(-, \mathscr{D}_Y[s])$ et on obtient le morphisme de suites exactes de $\mathscr{D}_Y[s]$-modules :

$$\begin{tikzcd}
0 & \bigoplus_{i=1}^{r_1} \mathscr{D}_Y[s]/b_{1,i}(s) \arrow[l] & \mathscr{D}_Y[s]^{r_1} \arrow[l] & \mathscr{D}_Y[s]^{r_1} \arrow[l, "B_1\cdot"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & \bigoplus_{i=2}^{r_2} \mathscr{D}_Y[s]/b_{2,i}(s) \arrow[l] \arrow[u, "\widetilde{f}"'] & \mathscr{D}_Y[s]^{r_2} \arrow[l] \arrow[u, "C\cdot"'] & \mathscr{D}_Y[s]^{r_2} \arrow[l, "B_2\cdot"'] \arrow[u, "A\cdot"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

où le morphisme $\widetilde{f}$ correspond au morphisme $Ext^1_{\mathscr{D}_Y[s]}(f, \mathscr{D}_Y[s])$. On peut alors vérifier que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^{r_1} ({}^g\mathscr{D}_Y)[s]/b_{1,i}(s) \arrow[r, "\mathrm{nat}"] & (\bigoplus_{i=1}^{r_1} \mathscr{D}_Y[s]/b_{1,i}(s))^*[-\dim Y] \\
\bigoplus_{i=1}^{r_2} ({}^g\mathscr{D}_Y)[s]/b_{2,i}(s) \arrow[r, "\mathrm{nat}"] \arrow[u, "C\cdot"] & (\bigoplus_{i=1}^{r_2} \mathscr{D}_Y[s]/b_{2,i}(s))^*[-\dim Y] \arrow[u, "{}^t(\cdot A)"']
\end{tikzcd}$$

Énonçons maintenant le premier résultat liant la V-filtration d'un module élémentaire à celle de son dual.

Proposition 4.5–6. — *Soit $\mathscr{E}$ un $\mathscr{D}_X$-module élémentaire. Pour tout nombre complexe $\alpha \in \mathbb{C}$ de l'intervalle $]-1,0[$, il existe un isomorphisme fonctoriel de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche :*

$$\delta_\alpha \colon \mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{E}^*) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{-1-\alpha}(\mathscr{E})^*$$

qui vérifie : $\delta_\alpha \circ (-E-1) = {}^tE \circ \delta_\alpha$, où ${}^tE$ désigne la transposée de l'endomorphisme E de $\mathrm{Gr}_{-1-\alpha}(\mathscr{E})$.

Démonstration. — Supposons que $\mathscr{E} = \mathscr{E}(b, Q, P)$. Sans perte de généralités, on peut supposer que α est une racine du polynôme $b(s)$. On désigne par $\mathscr{N}_{-1-\alpha}(\mathscr{E})$ le sous-espace propre généralisé pour la valeur propre α de l'endomorphisme E de $V_0(\mathscr{E})/V_{-1}(\mathscr{E})$. On note ℓ_α la multiplicité de la racine α du polynôme $b(s)$ et $b'_\alpha(s)$

le quotient de $b(s)$ par le polynôme $(s-\alpha)^{\ell_\alpha}$. D'après la proposition 4.3–9, le $\mathscr{D}_Y[s]$-module $\mathrm{Gr}_{-1-\alpha}(\mathscr{E})$ est isomorphe au $\mathscr{D}_Y[s]$-module $\mathscr{N}_{-1-\alpha}(\mathscr{E})$. Compte-tenu de l'isomorphisme de la proposition 4.5–3, nous avons le diagramme commutatif de $\mathscr{D}_Y$-modules à gauche suivant :

$$\begin{tikzcd}
\big(\mathscr{D}_Y[s]/(s-\alpha)^{\ell_\alpha}\big)^q \arrow[r, "0\oplus b'_\alpha(s)"] \arrow[d, "\wr"'] & \big(\mathscr{D}_Y[s]/(s+1)^{\ell}\big)^p \oplus \big(\mathscr{D}_Y[s]/b(s)\big)^q \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Gr}_{-1-\alpha}(\mathscr{E}) \simeq \mathscr{N}_{-1-\alpha}(\mathscr{E}) \arrow[r, hook] & V_0(\mathscr{E})/V_{-1}(\mathscr{E})
\end{tikzcd}$$

Le $\mathscr{D}_Y$-module $\mathrm{Gr}_{-1-\alpha}(\mathscr{E})$ est donc libre et $\mathrm{Gr}_{-1-\alpha}(\mathscr{E})^*$ est alors le complexe dont le seul terme non nul est $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathrm{Gr}_{-1-\alpha}(\mathscr{E}), \mathscr{D}_Y)$ placé en degré $\dim Y$. On obtient ainsi l'isomorphisme de $\mathscr{D}_Y$-modules à gauche :

$$\mathrm{Gr}_{-1-\alpha}(\mathscr{E})^*[-\dim Y] \simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}\big((\mathscr{D}_Y[s]/(s-\alpha)^{\ell_\alpha})^q, \mathscr{D}_Y\big)$$

Rappelons que $\mathscr{E}^* = \widetilde{\mathscr{E}}[\dim Y]$(la proposition 4.5–4). Notons maintenant $\mathscr{K}_\alpha(\widetilde{\mathscr{E}})$ le conoyau de l'endomorphisme $(E+\alpha+1)^{\ell_\alpha}$ de $U_0(\widetilde{\mathscr{E}})/U_{-1}(\widetilde{\mathscr{E}})$. Comme la filtration $U_k(\widetilde{\mathscr{E}})$, $k\in\mathbb{Z}$ coïncide avec le filtration $V_{<k}(\widetilde{\mathscr{E}})$, $k\in\mathbb{Z}$, une variante analogue de la proposition 4.3–9 assure que le $\mathscr{D}_Y[s]$-module $\mathrm{Gr}_\alpha(\widetilde{\mathscr{E}})$ est isomorphe à $\mathscr{K}_\alpha(\widetilde{\mathscr{E}})$. Compte-tenu de l'isomorphisme de la proposition 4.5–5, nous obtenons le diagramme commutatif de $\mathscr{D}_Y$-modules à gauche :

$$\begin{tikzcd}
\big(\mathscr{D}_Y[s]/(-s-\alpha-1)^{\ell_\alpha}s\big)^q \arrow[d, "\wr"'] & \big(\mathscr{D}_Y[s]/(-s)^{\ell}\big)^p \oplus \big(\mathscr{D}_Y[s]/b(-s-1)\big)^q \arrow[l, "0\oplus\pi"'] \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Gr}_\alpha(\widetilde{\mathscr{E}}) \simeq \mathscr{K}_\alpha(\widetilde{\mathscr{E}}) & U_0(\widetilde{\mathscr{E}})/U_{-1}(\widetilde{\mathscr{E}}) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

On obtient alors l'isomorphisme de $\mathscr{D}_Y$-modules à gauche :

$$\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{E}^*)[-\dim Y] \simeq \mathrm{Gr}_\alpha(\widetilde{\mathscr{E}}) \simeq \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-\alpha-1)^{\ell_\alpha}}\Big)^q$$

Considérons l'application τ définie par :

$$\Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-\alpha-1)^{\ell_\alpha}}\Big)^q \xrightarrow{\ \tau\ } \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(s-\alpha)^{\ell_\alpha}}\Big)^q \ :\ \dot{u}(s) \longmapsto \dot{u}(-s-1)$$

Du fait des rappels sur la dualité, l'application :

$$\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-\alpha-1)^{\ell_\alpha}}\Big)^q \xrightarrow{\ \mathrm{nat}\circ\tau\ } \Big(\Big(\frac{{}^g\mathscr{D}_Y[s]}{(s-\alpha)^{\ell_\alpha}}\Big)^q\Big)^*[-\dim Y]$$

est un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire qui transforme la multiplication par $-s-1$ en la transposée de la multiplication par s. On obtient ainsi un isomorphisme de $\mathscr{D}_Y$-modules à gauche :

$$\delta_\alpha \ :\ \mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{E}^*) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{-1-\alpha}(\mathscr{E})^*$$

qui vérifie $\delta_\alpha\circ(-E-1) = ({}^tE)\circ\delta_\alpha$.

Il reste maintenant à établir le caractère fonctoriel de l'isomorphisme δ_α. Reprenons les notations introduites lors de l'étude du morphisme $\phi : \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ entre modules élémentaires. On note $\ell_{1,\alpha}$ (resp. $\ell_{2,\alpha}$) la multiplicité de la racine α du polynôme $b_1(s)$ (resp. $b_2(s)$) et $b'_{1,\alpha}(s)$ (resp. $b'_{2,\alpha}(s)$) le quotient de $b_1(s)$ (resp. $b_2(s)$) par le polynôme $(s-\alpha)^{\ell_{1,\alpha}}$ (resp. $(s-\alpha)^{\ell_{2,\alpha}}$). Le morphisme de modules élémentaires ϕ induit le morphisme de $\mathscr{D}_Y[s]$-modules $\mathrm{Gr}_0(\phi) : V_0(\mathscr{E}_1)/V_{-1}(\mathscr{E}_1) \to V_0(\mathscr{E}_2)/V_{-1}(\mathscr{E}_2)$ qui se lit par l'isomorphisme de la proposition 4.5–3 :

$$\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_1(s)}\Big)^{q_1} \xrightarrow{\cdot \overline{A}_0(s)} \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_2(s)}\Big)^{q_2}$$

D'autre part, on déduit de l'égalité $b_1(s)\overline{A}_{11}(s+1) = b_2(s)\overline{C}_{11}(s+1)$ (voir l'équation (8)), l'identité matricielle :

$$b'_{1,\alpha}(s)\overline{A}_{1,1}(s+1) = (s-\alpha)^{\ell_{2,\alpha}-\ell_{1,\alpha}}\, b'_{2,\alpha}(s)\,\overline{C}_{1,1}(s+1)$$

En particulier, la matrice $\overline{M}_{11}(s+1) := (s-\alpha)^{\ell_{2,\alpha}-\ell_{1,\alpha}}\overline{C}_{11}(s+1)$ est une matrice à coefficients dans $\mathscr{D}_Y[s]$. On obtient alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_1(s)}\Big)^{q_1} \arrow[r, "\cdot \overline{A}_0(s)"] & \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_2(s)}\Big)^{q_2} \\
\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s-\alpha)^{\ell_{1,\alpha}}}\Big)^{q_1} \arrow[u, "0\oplus b'_{1,\alpha}(s)"] \arrow[r, "\cdot \overline{M}_{11}(s+1)"] & \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s-\alpha)^{\ell_{2,\alpha}}}\Big)^{q_2} \arrow[u, "0\oplus b'_{2,\alpha}(s)"']
\end{tikzcd}$$

On note que $(s-\alpha)^{\ell_{1,\alpha}}\overline{M}_{11}(s+1) = (s-\alpha)^{\ell_{2,\alpha}}\overline{C}_{11}(s+1)$. Il en résulte que l'application $\overline{C}_{11}(s+1)\cdot$ correspond au morphisme $Ext^1_{\mathscr{D}_Y[s]}(.\overline{M}_{11}(s+1), \mathscr{D}_Y[s])$. Ainsi,

$$\mathrm{nat} \circ (\overline{C}_{11}(s+1)\cdot) = {}^t(\cdot\overline{M}_{11}(s+1)) \circ \mathrm{nat}\,.$$

D'autre part, ϕ induit le morphisme $\mathrm{Gr}_0^U(\widetilde{\phi}) : U_0(\widetilde{\mathscr{E}})/U_{-1}(\widetilde{\mathscr{E}}) \to U_0(\widetilde{\mathscr{E}})/U_{-1}(\widetilde{\mathscr{E}})$ qui se lit par l'isomorphisme de la proposition 4.5–5 :

$$\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s)^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_2(-s-1)}\Big)^{q_2} \xrightarrow{.{}^{t'}\overline{C}_0(s)} \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s)^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_1(-s-1)}\Big)^{q_1}$$

On obtient alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s)^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_2(-s-1)}\Big)^{q_2} \arrow[r, ".{}^{t'}\overline{C}_0(s)"] \arrow[d, "0\oplus\pi"'] & \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s)^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_1(-s-1)}\Big)^{q_1} \arrow[d, "0\oplus\pi"] \\
\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-1-\alpha)^{\ell_{2,\alpha}}}\Big)^{q_2} \arrow[r, ".{}^{t'}\overline{C}_{1,1}(-s)"] & \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-1-\alpha)^{\ell_{1,\alpha}}}\Big)^{q_1}
\end{tikzcd}$$

Ainsi ϕ induit le morphisme $\mathrm{Gr}_\alpha(\widetilde{\phi})$ qui se lit :

$$\Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-\alpha-1)^{\ell_{2,\alpha}}}\Big)^{q_2} \xrightarrow{\overline{C}_{11}(-s)\cdot} \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-\alpha-1)^{\ell_{1,\alpha}}}\Big)^{q_1}$$

La fonctorialité de δ_α résulte alors de l'identité :

$$\tau\circ(\overline{C}_{11}(s+1)\cdot) = (\overline{C}_{11}(-s)\cdot)\circ\tau$$

Traitons maintenant le cas des gradués pour les valeurs entières de la V-filtration d'un module élémentaire.

Proposition 4.5–7. — *Soit $\mathscr{E}$ un $\mathscr{D}_X$-module élémentaire. Il existe des isomorphismes fonctoriels de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche :*

$$\delta_0\colon\ \mathrm{Gr}_0(\mathscr{E}^*)\longrightarrow \mathrm{Gr}_0(\mathscr{E})^*,\quad \delta_{-1}\colon\ \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{E}^*)\longrightarrow \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{E})^*$$

qui vérifient $\delta_0\circ(-E-2) = {}^tE\circ\delta_0$ et $\delta_{-1}\circ(-E) = {}^tE\circ\delta_{-1}$. De plus, par ces isomorphismes, la transposée du morphisme $\partial_t : \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{E})\to\mathrm{Gr}_0(\mathscr{E})$ correspond au morphisme $-t : \mathrm{Gr}_0(\mathscr{E}^*)\to\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{E}^*)$ et la transposée du morphisme $t : \mathrm{Gr}_0(\mathscr{E})\to\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{E})$ correspond au morphisme $\partial_t : \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{E}^*)\to\mathrm{Gr}_0(\mathscr{E}^*)$.

Démonstration. — Nous reprenons le même principe de la preuve de la proposition précédente. Les identifications données sont à nouveau imposées par la fonctorialité. Par exemple, $\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{E}^*)$ est également isomorphe à $\mathrm{Gr}_0(\mathscr{E}^*)$, mais cet isomorphisme n'est pas fonctoriel.

A) Commençons par traiter le cas de δ_0. Soit $b'(s)$ le quotient de $b(s)$ par $(s+1)^\ell$. Le module $\mathrm{Gr}_0(\mathscr{E})$ est isomorphe au noyau $\mathscr{N}_0$ de l'endomorphisme $(E+1)^\ell$ de $V_0(\mathscr{E})/V_{-1}(\mathscr{E})$. On obtient ainsi le diagramme commutatif de $\mathscr{D}_Y$-modules :

$$\begin{tikzcd}
\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^\ell}\Big)^p\oplus\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^\ell}\Big)^q \arrow[r, "\mathrm{Id}\oplus b'(s)"] \arrow[d, "\wr"'] & \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^\ell}\Big)^p\oplus\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b(s)}\Big)^q \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Gr}_0(\mathscr{E})\simeq\mathscr{N}_0(\mathscr{E}) \arrow[r, hook] & \frac{V_0(\mathscr{E})}{V_{-1}(\mathscr{E})}
\end{tikzcd}$$

Il en résulte l'isomorphisme de $\mathscr{D}_Y$-modules à gauche :

$$\text{(9)}\qquad \mathrm{Gr}_0(\mathscr{E})^*[-\dim Y]\simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}\big((\mathscr{D}_Y[s]/(s+1)^\ell)^p\oplus(\mathscr{D}_Y[s]/(s+1)^\ell)^q,\mathscr{D}_Y\big)$$

De même, $\mathrm{Gr}_0(\widetilde{\mathscr{E}})$ est isomorphe au conoyau $\mathscr{K}_0(\widetilde{\mathscr{E}})$ de l'endomorphisme $(-E-1)^\ell$ du quotient $U_1(\widetilde{\mathscr{E}})/U_0(\widetilde{\mathscr{E}})$. On obtient ainsi le diagramme commutatif de $\mathscr{D}_Y$-modules :

$$\begin{array}{ccc}
\Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-1)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-1)^\ell}\Big)^q & \xleftarrow{\mathrm{Id}\oplus\pi} & \Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-1)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{b(-s-2)}\Big)^q \\
\wr\big\downarrow & & \big\downarrow\wr \\
\mathrm{Gr}_0(\widetilde{\mathscr{E}}) \simeq \mathscr{K}_0(\widetilde{\mathscr{E}}) & \longleftarrow & \dfrac{U_1(\widetilde{\mathscr{E}})}{U_0(\widetilde{\mathscr{E}})}
\end{array}$$

Il en résulte l'isomorphisme de $\mathscr{D}_Y$-modules à gauche :

$$\mathrm{Gr}_0(\mathscr{E}^*)[-\dim Y] \simeq \mathrm{Gr}_0(\widetilde{\mathscr{E}}) \simeq \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-1)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-1)^\ell}\Big)^q \tag{10}$$

On considère alors l'application :

$$\begin{array}{c}
\Big(\dfrac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-1)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\dfrac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-1)^\ell}\Big)^q \xrightarrow{\ \tau'\ } \Big(\dfrac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-1)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\dfrac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-1)^\ell}\Big)^q \\
(\dot v(s), \dot u(s)) \longmapsto (\dot v(-s-2)\ \ -\dot u(-s-2))
\end{array}$$

Il résulte des rappels sur la dualité que le morphisme :

$$\Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-1)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-1)^\ell}\Big)^q \xrightarrow{\ \mathrm{nat}\circ\tau'\ } \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}\Big(\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^\ell}\Big)^q, \mathscr{D}_Y\Big)$$

est un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire qui transforme la multiplication par $-s-2$ en la transposée de la multiplication par s. On obtient alors un isomorphisme de $\mathscr{D}_Y$-modules à gauche :

$$\delta_0 \,:\, \mathrm{Gr}_0(\mathscr{E}^*) \longrightarrow \mathrm{Gr}_0(\mathscr{E})^*$$

qui vérifie $\delta_0\circ(-E-2) = {}^tE\circ\delta_0$. Il reste à montrer la fonctorialité de δ_0. On reprend pour cela le morphisme $\phi : \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ entre modules élémentaires. Soit $\overline{U}_0(s)$ la matrice à coefficients dans $\mathscr{D}_Y[s]$ suivante :

$$\begin{aligned}
\overline{U}_0(s) &= \begin{pmatrix} \overline{U}_{0,0}(s) & \overline{U}_{01}(s) \\ (s+1)\overline{U}_{10}(s+1) & \overline{U}_{11}(s+1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (s+1)^{\ell_2-\ell_1}\overline{C}_{0,0}(s) & (s+1)^{\ell_2-\ell_1}\overline{C}_{01}(s) \\ (s+1)(s+1)^{\ell_2-\ell_1}\overline{C}_{10}(s+1) & (s+1)^{\ell_2-\ell_1}\overline{C}_{11}(s+1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le diagramme de $\mathscr{D}_Y[s]$-modules suivant est alors commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_1(s)}\Big)^{q_1} & \xrightarrow{\cdot\overline{A}_0(s)} & \Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_2(s)}\Big)^{q_2} \\
{\scriptstyle \mathrm{Id}\oplus b_1'(s)}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{Id}\oplus b_2'(s)} \\
\Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^{\ell_1}}\Big)^{q_1} & \xrightarrow{\cdot\overline{U}_0(s)} & \Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^{\ell_2}}\Big)^{q_2}
\end{array}$$

De l'égalité $(s+1)^{\ell_1}\overline{U}_0(s) = (s+1)^{\ell_2}\overline{D}_0(s)$, où $\overline{D}_0(s)$ est la matrice :

$$\overline{D}_0(s) = \begin{pmatrix} \overline{C}_{0,0}(s) & \overline{C}_{01}(s) \\ (s+1)\overline{C}_{10}(s+1) & \overline{C}_{11}(s+1) \end{pmatrix}$$

on déduit que le morphisme $.\overline{D}_0(s)$ correspond au morphisme $Ext^1_{\mathscr{D}_Y[s]}(.\overline{U}_0(s), \mathscr{D}_Y[s])$.

D'autre part, le morphisme ϕ induit $\mathrm{Gr}_1^U(\widetilde{\phi}) : U_1(\widetilde{\mathscr{E}})/U_0(\widetilde{\mathscr{E}}) \to U_1(\widetilde{\mathscr{E}})/U_0(\widetilde{\mathscr{E}})$ qui se lit (par l'isomorphisme de la proposition 4.5–5) :

$$\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-1)^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_2(-s-2)}\Big)^{q_2} \xrightarrow{.{}^t\overline{C}_1(s)} \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-1)^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_1(-s-2)}\Big)^{q_1}$$

On obtient alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-1)^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_2(-s-2)}\Big)^{q_2} \arrow[r, ".{}^t\overline{C}_1(s)"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\oplus\pi"'] & \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-1)^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_1(-s-2)}\Big)^{q_1} \arrow[d, "\mathrm{Id}\oplus\pi"] \\
\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-1)^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-1)^{\ell_2}}\Big)^{q_2} \arrow[r, ".{}^t\overline{C}_1(s)"] & \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-1)^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-1)^{\ell_1}}\Big)^{q_1}
\end{tikzcd}$$

Ainsi ϕ induit le morphisme $\mathrm{Gr}_0(\widetilde{\phi})$ qui se lit par nos isomorphismes :

$$\Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-1)^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-1)^{\ell_2}}\Big)^{q_2} \xrightarrow{\overline{C}_1(s)} \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-1)^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-1)^{\ell_1}}\Big)^{q_1}$$

La fonctorialité de δ_0 résulte alors de l'égalité :

$$\tau' \circ (\cdot\overline{D}_0(s)) = (\cdot\overline{C}_1(s)) \circ \tau'$$

B) Traitons le cas de δ_{-1}. Le module $\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{E})$ est isomorphe au noyau $\mathscr{N}_{-1}$ de l'endomorphisme E^ℓ de $V_{-1}(\mathscr{E})/V_{-2}(\mathscr{E})$. On obtient ainsi le diagramme commutatif de $\mathscr{D}_Y$-modules :

$$\begin{tikzcd}
\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{s^\ell}\Big)^{p} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{s^\ell}\Big)^{q} \arrow[r, "\mathrm{Id}\oplus b'(s-1)"] \arrow[d, "\wr"'] & \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{s^\ell}\Big)^{p} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b(s-1)}\Big)^{q} \arrow[d, "\wr"'] \\
\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{E}) \simeq \mathscr{N}_{-1}(\mathscr{E}) \arrow[r, hook] & \frac{V_{-1}(\mathscr{E})}{V_{-2}(\mathscr{E})}
\end{tikzcd}$$

Il en résulte l'isomorphisme de $\mathscr{D}_Y$-modules à gauche :

$$\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{E})^*[-\dim Y] \simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}\big((\mathscr{D}_Y[s]/(s)^\ell)^p \oplus (\mathbb{C}[s]/(s)^\ell)^q, \mathscr{D}_Y\big) \tag{11}$$

De même, $\mathrm{Gr}_{-1}(\widetilde{\mathscr{E}})$ est isomorphe au conoyau $\mathscr{K}_{-1}(\widetilde{\mathscr{E}})$ de l'endomorphisme $(-E)^\ell$ du quotient $U_0(\widetilde{\mathscr{E}})/U_{-1}(\widetilde{\mathscr{E}})$. On obtient ainsi le diagramme commutatif de $\mathscr{D}_Y$-modules :

$$\begin{tikzcd}
\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s)^\ell}\Big)^q \arrow[d, "\wr"'] & \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b(-s-1)}\Big)^q \arrow[l, "\mathrm{Id}\oplus\pi"'] \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Gr}_{-1}(\widetilde{\mathscr{E}}) \simeq \mathscr{K}_{-1}(\widetilde{\mathscr{E}}) & \dfrac{U_0(\widetilde{\mathscr{E}})}{U_{-1}(\widetilde{\mathscr{E}})} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Il en résulte l'isomorphisme de $\mathscr{D}_Y$-modules à gauche :

$$\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{E}^*)[-\dim Y] \simeq \mathrm{Gr}_{-1}(\widetilde{\mathscr{E}}) \simeq \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s)^\ell}\Big)^q \tag{12}$$

On considère alors l'application :

$$\Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s)^\ell}\Big)^q \xrightarrow{\ \tau''\ } \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s)^\ell}\Big)^q$$
$$(\dot v(s), \dot u(s)) \longmapsto (\dot v(-s), \dot u(-s))$$

Il résulte des rappels sur la dualité que le morphisme :

$$\Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s)^\ell}\Big)^q \xrightarrow{\ \mathrm{nat}\circ\tau''\ } \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}\big((\mathscr{D}_Y[s]/(s)^\ell)^p \oplus (\mathbb{C}[s]/(s)^\ell)^q, \mathscr{D}_Y\big)$$

est un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire qui transforme la multiplication par $-s$ en la transposée de la multiplication par s. On obtient ainsi un isomorphisme de $\mathscr{D}_Y$-modules à gauche :

$$\delta_{-1}\colon\ \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{E}^*) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{E})^*$$

qui vérifie $\delta_{-1}\circ(-E) = {}^tE\circ\delta_{-1}$. Il reste à montrer la fonctorialité de δ_{-1}. On reprend pour cela le morphisme $\phi : \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ entre modules élémentaires. Le morphisme ϕ induit le morphisme $\mathrm{Gr}_{-1}(\phi)$ qui se lit par l'isomorphisme de la proposition 4.5–3

$$\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{s^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_1(s-1)}\Big)^{q_1} \xrightarrow{\ \cdot\overline{A}_{-1}(s)\ } \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{s^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_2(s-1)}\Big)^{q_2}$$

On vérifie que le diagramme suivant de $\mathbb{C}[s]$-modules est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{s^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_1(s-1)}\Big)^{q_1} \arrow[r, "\cdot\overline{A}_{-1}(s)"] & \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{s^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_2(s-1)}\Big)^{q_2} \\
\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{s^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{s^{\ell_1}}\Big)^{q_1} \arrow[r, "\cdot\overline{U}_{-1}(s)"] \arrow[u, "\mathrm{Id}\oplus b_1'(s-1)"] & \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{s^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{s^{\ell_2}}\Big)^{q_2} \arrow[u, "\mathrm{Id}\oplus b_2'(s-1)"']
\end{tikzcd}$$

où

$$\overline{U}_{-1}(s) = \begin{pmatrix} \overline{U}_{00}(s-1) & \overline{U}_{01}(s-1)s \\ \overline{U}_{10}(s) & \overline{U}_{11}(s) \end{pmatrix}$$

On remarque que morphisme $.D_{-1}(s)$ où $D_{-1}(s)$ est la matrice :

$$\overline{D}_{-1}(s) = \begin{pmatrix} C_{00}(s-1) & C_{01}(s-1)s \\ C_{10}(s) & C_{11}(s) \end{pmatrix}$$

correspond au morphisme $Ext^1_{\mathscr{D}_Y[s]}(.\overline{U}_{-1}(s), \mathscr{D}_Y[s])$ (car $s^{\ell_1}\overline{U}_{-1}(s) = s^{\ell_2}\overline{D}_{-1}(s)$). D'autre part, le morphisme ϕ induit $\mathrm{Gr}_0^U(\widetilde{\phi}) : U_0(\widetilde{\mathscr{E}})/U_{-1}(\widetilde{\mathscr{E}}) \to U_0(\widetilde{\mathscr{E}})/U_{-1}(\widetilde{\mathscr{E}})$ qui se lit par l'isomorphisme de la proposition 4.5–5

$$\Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s)^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_2(-s-1)}\Big)^{q_2} \xrightarrow{.{}^t\overline{C}_0(s)} \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s)^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_1(-s-1)}\Big)^{q_1}$$

On obtient alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s)^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_2(-s-1)}\Big)^{q_2} & \xrightarrow{.{}^t\overline{C}_0(s)} & \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s)^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b_1(-s-1)}\Big)^{q_1} \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}\oplus\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}\oplus\pi} \\ \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s)^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s)^{\ell_2}}\Big)^{q_2} & \xrightarrow{.{}^t\overline{C}_0(s)} & \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s)^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s)^{\ell_1}}\Big)^{q_1} \end{array}$$

Ainsi ϕ induit le morphisme $\mathrm{Gr}_{-1}(\widetilde{\phi})$ qui se lit :

$$\Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s)^{\ell_2}}\Big)^{p_2} \oplus \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s)^{\ell_2}}\Big)^{q_2} \xrightarrow{\overline{C}_0(s)} \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s)^{\ell_1}}\Big)^{p_1} \oplus \Big(\frac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s)^{\ell_1}}\Big)^{q_1}$$

La fonctorialité de δ_{-1} résulte alors de l'identité :

$$\tau'' \circ (\cdot\overline{D}_{-1}(s)) = (\cdot\overline{C}_0(s)) \circ \tau''$$

C) Pour achever la preuve de la proposition, il reste à montrer comment les morphismes t et ∂_t se transposent par δ_0 et δ_{-1}. Le morphisme :

$$\partial_t : V_{-1}(\mathscr{E})/V_{-2}(\mathscr{E}) \longrightarrow V_0(\mathscr{E})/V_{-1}(\mathscr{E})$$

se lit par l'isomorphisme de la proposition 4.5–3 :

$$\begin{aligned} \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{s^{\ell}}\Big)^{p} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b(s-1)}\Big)^{q} &\longrightarrow \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^{\ell}}\Big)^{p} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b(s)}\Big)^{q} \\ (\dot v(s), \dot u(s)) &\longmapsto ((s+1)\dot v(s+1), \dot u(s+1)) \end{aligned}$$

De même le morphisme $t : V_{-1}(\mathscr{E})/V_{-2}(\mathscr{E}) \leftarrow V_0(\mathscr{E})/V_{-1}(\mathscr{E})$ se lit :

$$\begin{aligned} \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s)^{\ell}}\Big)^{p} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b(s-1)}\Big)^{q} &\longleftarrow \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^{\ell}}\Big)^{p} \oplus \Big(\frac{\mathscr{D}_Y[s]}{b(s)}\Big)^{q} \\ (\dot v(s-1), s\dot u(s-1)) &\longleftarrow\!\shortmid (\dot v(s), \dot u(s)) \end{aligned}$$

Le morphisme $\partial_t : U_0(\widetilde{\mathscr{E}})/U_{-1}(\widetilde{\mathscr{E}}) \to U_1(\widetilde{\mathscr{E}})/U_0(\widetilde{\mathscr{E}})$ se lit par l'isomorphisme de la proposition 4.5–5 :

$$\begin{array}{c}\Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{b(-s-1)}\Big)^q \longrightarrow \Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-1)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{b(-s-2)}\Big)^q \\ (\dot v(s), \dot u(s)) \longmapsto (\dot v(s+1), (s+1)\dot u(s+1))\end{array}$$

De même le morphisme $t : U_0(\widetilde{\mathscr{E}})/U_{-1}(\widetilde{\mathscr{E}}) \leftarrow U_1(\widetilde{\mathscr{E}})/U_0(\widetilde{\mathscr{E}})$ se lit :

$$\begin{array}{c}\Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{b(-s-1)}\Big)^q \longleftarrow \Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{(-s-1)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{b(-s-2)}\Big)^q \\ (s\dot v(s-1), \dot u(s-1)) \longleftarrow\!\shortmid (\dot v(s), \dot u(s))\end{array}$$

Les morphismes induits sur $\mathrm{Gr}_0(\mathscr{E})$, $\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{E})$, $\mathrm{Gr}_0(\widetilde{\mathscr{E}})$ et $\mathrm{Gr}_{-1}(\widetilde{\mathscr{E}})$ se lisent de façon analogue par les isomorphismes (9), (10), (11) et (12). La correspondance cherchée résulte alors de la commutativité des deux diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}\Big(\dfrac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\dfrac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s)^\ell}\Big)^q \arrow[r, "\mathrm{nat}\circ\tau''"] \arrow[d, "\partial_t"'] & \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}\Big(\Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\dfrac{\mathscr{D}[s]}{(s)^\ell}\Big)^q, \mathscr{D}_Y\Big) \arrow[d, "{}^tt"] \\ \Big(\dfrac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-1)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\dfrac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-1)^\ell}\Big)^q \arrow[r, "\mathrm{nat}\circ\tau'"] & \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}\Big(\Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\dfrac{\mathscr{D}[s]}{(s+1)^\ell}\Big)^q, \mathscr{D}_Y\Big)\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}\Big(\dfrac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\dfrac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s)^\ell}\Big)^q \arrow[r, "\mathrm{nat}\circ\tau''"] & \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}\Big(\Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\dfrac{\mathscr{D}[s]}{(s)^\ell}\Big)^q, \mathscr{D}_Y\Big) \\ \Big(\dfrac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-1)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\dfrac{({}^g\mathscr{D}_Y)[s]}{(-s-1)^\ell}\Big)^q \arrow[r, "\mathrm{nat}\circ\tau'"] \arrow[u, "-t"] & \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}\Big(\Big(\dfrac{\mathscr{D}_Y[s]}{(s+1)^\ell}\Big)^p \oplus \Big(\dfrac{\mathscr{D}[s]}{(s+1)^\ell}\Big)^q, \mathscr{D}_Y\Big) \arrow[u, "{}^t\partial_t"']\end{tikzcd}$$

4.6. La V-Filtration et la dualité. — On suppose que $Y \subset X$ est une hypersurface lisse de X admettant une équation réduite globale.

Soit ω_X le faisceau des formes différentielles de degré maximum. On rappelle que le dual d'un $\mathscr{D}_X$-module à gauche $\mathscr{M}$ est le complexe :

$$\mathscr{M}^* = \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{D}_X) \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X[\dim X]$$

D'autre part, si $\mathscr{N}$ est un $\mathscr{D}_X$-module à droite, le produit tensoriel $\mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X$ est muni d'une structure naturelle de $\mathscr{D}_X$-module à gauche (voir [**G-M**], proposition 1.6 section II.2). Localement ω_X s'identifie à $\mathscr{O}_X$ et $\mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X$ à $\mathscr{N}$. La structure de $\mathscr{D}_X$-module à gauche induite sur $\mathscr{N}$ est alors définie par $\forall\, P \in \mathscr{D}_X$, $\forall\, m \in N \colon P \cdot m = m\,{}^tP$. On peut constater que cette définition du dual étend celle donnée en coordonnées locales au paragraphe 4.5

Lemme 4.6–1. — *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module spécialisable. Localement, au voisinage de tout point de Y, il existe un complexe exact de $\mathscr{D}_X$-modules :*

$$\cdots\ \mathscr{E}_k \xrightarrow{d_k} \mathscr{E}_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} \mathscr{E}_0 \xrightarrow{d_0} \mathscr{M} \longrightarrow 0$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{E}_k$ est un module élémentaire.

Démonstration. — Si K est un polycylindre assez petit, $\Gamma(K, V_0(\mathscr{M}))\cup\Gamma(K, V_{-1}(\mathscr{M}))$ sont des $V_0(\mathscr{D}_X)(K)$-modules de type fini et engendrent $\Gamma(K,\mathscr{M})$ comme $\mathscr{D}_X(K)$-modules. En reprenant la preuve du lemme 4.5–2 et en utilisant que les faisceaux d'anneaux $V_0(\mathscr{D}_X)$ et $\mathscr{D}_X$ vérifient localement les théorèmes A et B de Cartan, on montre l'existence d'un module élémentaire $\mathscr{E}_0$ défini par une matrice d'opérateurs définis sur K et d'un morphisme surjectif :

$$\mathscr{E}_0 \xrightarrow{d_0} \mathscr{M}$$

Soit $\mathscr{L}_0$ le noyau de d_0. On montre de même l'existence d'un module élémentaire $\mathscr{E}_1$ défini par une matrice d'opérateurs définis sur K qui se surjecte dans $\mathscr{L}_0$. En itérant ce procédé, on obtient le complexe cherché.

Proposition 4.6–2. — *Soit $\mathscr{M}$ un module spécialisable le long de Y. Son complexe dual $\mathscr{M}^*$ est à cohomologie spécialisable le long de Y ; et pour tout $j \in \mathbb{N}$, il y a des isomorphismes fonctoriels :*

1) $\delta_{-1}\colon\ \mathrm{Gr}_{-1}(h^j(\mathscr{M}^*)) \to h^j(\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M})^*)$
2) $\delta_0\colon\ \mathrm{Gr}_0(h^j(\mathscr{M}^*)) \to h^j(\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M})^*)$
3) $\delta_\alpha\colon\ \mathrm{Gr}_\alpha(h^j(\mathscr{M}^*)) \to h^j(\mathrm{Gr}_{-1-\alpha}(\mathscr{M})^*)$, *pour tout nombre complexe* $\alpha \in\ ]-1,0[$.

De plus, $\delta_{-1}\circ(-E) = {}^tE\circ\delta_{-1}$, $\delta_0\circ(-E-2) = {}^tE\circ\delta_0$ *et* $\delta_\alpha\circ(-E-1) = {}^tE\circ\delta_\alpha$, *où* ${}^tE$ *désigne la transposée de l'endomorphisme* E *de* $\mathrm{Gr}_{-1-\alpha}(\mathscr{E})$. *Enfin par cet isomorphisme,* ${}^t\partial_t : h^j(\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M})^*) \to h^j(\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M})^*)$, *transposée du morphisme* ∂_t, *correspond au morphisme* $-t : \mathrm{Gr}_0(h^j(\mathscr{M}^*)) \to \mathrm{Gr}_{-1}(h^j(\mathscr{M}^*))$ *et* ${}^tt : h^j(\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M})^*) \to h^j(\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M})^*)$, *la transposée du morphisme* t, *correspond au morphisme* $\partial_t : \mathrm{Gr}_0(h^j(\mathscr{M}^*)) \to \mathrm{Gr}_{-1}(h^j(\mathscr{M}^*))$

Démonstration. — D'après le lemme 4.6–1, il existe localement une résolution de $\mathscr{M}$ par des modules élémentaires : $\mathscr{E}^\bullet \to \mathscr{M} \to 0$. Les isomorphismes suivants résultent alors de la proposition 4.5–4 :

$$\begin{aligned}\mathscr{M}^* &= \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{E}^\bullet,\mathscr{D}_X)\otimes_{\mathscr{O}_X}\omega_X[\dim X]\\ &\simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{E}^\bullet,\mathscr{D}_X)\otimes_{\mathscr{O}_X}\omega_X[\dim Y]\\ &\simeq \widetilde{\mathscr{E}}^\bullet[\dim Y]\end{aligned}$$

où $\widetilde{\mathscr{E}}$ est défini à partir de $\mathscr{E}$ comme à la proposition 4.5–4. Pour tout nombre complexe $\alpha \in\ ]-1,0[$, on obtient la suite exacte (par exactitude du foncteur $\mathrm{Gr}_{-\alpha-1}(-)$) :

$$\mathrm{Gr}_{-\alpha-1}(\mathscr{E}^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{-\alpha-1}(\mathscr{M}) \longrightarrow 0$$

qui est, d'après la proposition 4.5–3, une résolution par des $\mathscr{D}_Y$-modules libres de $\mathrm{Gr}_{-\alpha-1}(\mathscr{M})$. Ainsi, on a l'isomorphisme :

$$(\mathrm{Gr}_{-\alpha-1}(\mathscr{E}^\bullet))^* \simeq (\mathrm{Gr}_{-\alpha-1}(\mathscr{M}))^*$$

De même, par exactitude du foncteur $\mathrm{Gr}_\alpha(-)$, on obtient une résolution de $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}^*)$ par des $\mathscr{D}_Y$-modules libres :

$$\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{E}^{*\bullet}) \longrightarrow \mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}^*) \longrightarrow 0$$

On déduit alors de la proposition 4.5–6 un isomorphisme δ_α qui vérifie les propriétés demandées, mais qui est défini localement. Il faut alors montrer que ce morphisme est la restriction d'un morphisme défini globalement. Pour cela, on remarque que si $\mathscr{E}_1^\bullet, \mathscr{E}_2^\bullet$ sont des résolutions de $\mathscr{M}$ par des modules élémentaires, on peut construire une résolution $\mathscr{E}_3^\bullet$ qui les dominent. De la fonctorialité des isomorphismes δ_α de la proposition 4.5–6, on déduit que nos isomorphismes construits localement se recollent. On procède de même pour δ_0 et δ_1.

Corollaire 4.6–3. — *Soit $\mathscr{M}$ un module holonome. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, le $\mathscr{D}_Y$-module $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$ est holonome.*

Démonstration. — D'après la proposition 4.3–11, il suffit de montrer ce corollaire pour les nombres complexes α de l'intervalle $[-1, 0]$. Le résultat se déduit alors de la proposition 4.6–2, car un $\mathscr{D}_Y$-module cohérent est holonome si et seulement si son complexe dual n'a de la cohomologie qu'en degré zéro ([**G-M**], théorème 6 section 5.6).

Désignons par $i : Y \to X$ l'inclusion de Y dans X. Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module. Le complexe de $\mathscr{D}_Y$-modules

$$i^!(\mathscr{M}) := (\mathbf{L}i^*(\mathscr{M}^*))^*$$

est appelé l'image inverse extraordinaire de $\mathscr{M}$. Soit $f = 0$, une équation globale réduite de Y. La classe dans $V_1(\mathscr{D}_X)/V_0(\mathscr{D}_X)$ d'un champ de vecteurs sur X prenant la valeur 1 sur f définit une section globale de $V_1(\mathscr{D}_X)/V_0(\mathscr{D}_X)$ que l'on notera ∂_f.

Proposition 4.6–4. — *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome. Le complexe $i^!(\mathscr{M})$ est fonctoriellement isomorphe au complexe :*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\partial_f} \mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}) \longrightarrow 0$$

Démonstration. — Comme $\mathscr{M}$ est supposé holonome, $\mathscr{M}^* = h^0(\mathscr{M}^*)$ est un module holonome. D'après la proposition 4.4–4, $\mathbf{L}i^*(\mathscr{M}^*)$ est isomorphe au complexe :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}^*) \xrightarrow{f} \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}^*) \longrightarrow 0$$

Or, d'après le corollaire 4.6–3, les modules $\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}^*)$ et $\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}^*)$ sont holonomes; et puisque $(\mathscr{M}^*)^*$ est isomorphe à $\mathscr{M}$, on déduit de la proposition 4.6–2 que le dual du complexe précédent est isomorphe au complexe :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\partial_f} \mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}) \longrightarrow 0$$

4.7. Les gradués d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome. — Soit Y une hypersurface lisse d'une variété X. Nous supposons que Y admet $f = 0$ comme équation globale réduite.

Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome, donc spécialisable le long de Y. Nous allons donner, une expression des modules $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$, $\alpha \in \mathbb{C}$ en terme d'image inverse extraordinaire de $\mathscr{M}$ tordu par des fonctions multiformes. Nous en déduirons que si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier, les modules gradués $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$ sont des $\mathscr{D}_Y$-modules holonomes réguliers. En fait, cette expression des $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$ sera la clef de la construction algébrique des cycles évanescents d'un faisceau pervers.

Soit α un nombre complexe de l'intervalle $[-1, 0[$ et $k \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Notons $\mathscr{N}_{\alpha,k}$ le fibré à connexion de rang k sur le plan complexe :

$$\mathscr{N}_{\alpha,k} = \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant k} \mathscr{O}_{\mathbb{C}}[1/z] z^{\alpha+1} \operatorname{Log}^\ell z$$

Pour $\ell = 0, \ldots, k$, on note $e_{\alpha,\ell}$ la section globale de $\mathscr{N}_{\alpha,k}$ définie par $e_{\alpha,\ell} = (1/\ell!) z^{\alpha+1} \operatorname{Log}^\ell z$. L'application :

$$\frac{\mathscr{D}_{\mathbb{C}}}{\mathscr{D}_{\mathbb{C}}(z\partial - \alpha - 1)^{k+1}} \longrightarrow \mathscr{N}_{\alpha,k} \quad : \quad \dot{P} \longmapsto P e_{\alpha,k}$$

est bien définie et est un isomorphisme de $\mathscr{D}_{\mathbb{C}}$-modules. Il en résulte que, pour tout entier k, $\mathscr{N}_{\alpha,k}$ est un $\mathscr{D}_{\mathbb{C}}$-module holonome régulier. Soit T le morphisme de monodromie défini sur les fonctions multiformes sur $\mathbb{C}^*$ par prolongement analytique le long d'un lacet orienté dans le sens direct. Le morphisme T commute aux dérivations et induit donc sur $\mathscr{N}_{\alpha,k}$ un morphisme de $\mathscr{D}_{\mathbb{C}}$-module. On pose alors :

$$\mathscr{M}_{\alpha,k} = \mathscr{M} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_{\mathbb{C}}} f^{-1}(\mathscr{N}_{\alpha,k}) = \mathscr{M}[1/f] \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_{\mathbb{C}}} f^{-1}(\mathscr{N}_{\alpha,k}) = \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} f^*(\mathscr{N}_{\alpha,k})$$

Le produit tensoriel $\mathscr{M}_{\alpha,k}$ est muni d'une structure naturelle de $\mathscr{D}_X$-module. Sa restriction à Y est munie d'un morphisme T induit par la monodromie et défini par :

$$\forall\, m \in \mathscr{M}_{|Y} \quad : \quad T(m \otimes e_{\alpha,k}) = m \otimes T(e_{\alpha,k})$$

Proposition 4.7–1. — *Soient $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module spécialisable le long de Y, α un nombre complexe de l'intervalle $[-1, 0[$ et $k \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Le $\mathscr{D}_Y$-module $\mathscr{M}_{\alpha,k} = \mathscr{M} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_{\mathbb{C}}} f^{-1}(\mathscr{N}_{\alpha,k})$ est spécialisable le long de Y. De plus, pour tout $\beta \in \mathbb{C}$, on a :*

$$V_\beta(\mathscr{M}_{\alpha,k}) = \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant k} V_{\alpha+\beta+1}(\mathscr{M}[1/f])\, e_{\alpha,\ell}$$

Démonstration. — Le $\mathscr{D}_{\mathbb{C}}$-module quotient $\mathscr{N}_{\alpha,k}/\mathscr{N}_{\alpha,k-1}$ s'identifie naturellement au module $\mathscr{N}_{\alpha,0}$. On obtient ainsi la suite exacte de $\mathscr{D}_{\mathbb{C}}$-module à gauche :

$$0 \longrightarrow \mathscr{N}_{\alpha,k-1} \longrightarrow \mathscr{N}_{\alpha,k} \longrightarrow \mathscr{N}_{\alpha,0} \longrightarrow 0$$

Comme $f^{-1}\mathscr{N}_{\alpha,k}$ est un $f^{-1}\mathscr{O}_{\mathbb{C}}$-module à fibres plates, on en déduit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathscr{M}_{\alpha,k-1} \longrightarrow \mathscr{M}_{\alpha,k} \longrightarrow \mathscr{M}_{\alpha,0} \longrightarrow 0$$

Ainsi, pour montrer que $\mathscr{M}_{\alpha,k}$ est spécialisable, il suffit de montrer que $\mathscr{M}_{\alpha,0}$ l'est. Soit alors, $m \in \mathscr{M}[1/f]$ une section locale. D'après le lemme 4.4–1, il existe localement une équation fonctionnelle :

$$b(s)mt^s \in \mathscr{D}_X[s]mt^{s+1}$$

où $b(s) \in \mathbb{C}[s] - \{0\}$. On en déduit l'équation :

$$b(s+\alpha+1)(m \otimes t^{\alpha+1})t^s \in \mathscr{D}_X[s](m \otimes t^{\alpha+1})t^{s+1}$$

En reprenant la preuve de la proposition 4.4–3, on déduit que $\mathscr{M}_{\alpha,0}$ est $\mathscr{D}_X$-cohérent. Cette équation assure alors que $\mathscr{M}_{\alpha,0}$ est spécialisable le long de Y.

Pour tout $\beta \in \mathbb{C}$ et pour tout entier k, notons provisoirement :

$$U_\beta(\mathscr{M}_{\alpha,k}) = \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant k} V_{\alpha+\beta+1}(\mathscr{M}[1/f])e_{\alpha,\ell}$$

Constatons que pour tout section $m \in \mathscr{M}$, pour tout nombre complexe γ et pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}$, on a l'égalité :

$$(t\partial_t + \gamma + 1)(m \otimes e_{\alpha,\ell}) = ((t\partial_t + \alpha + \gamma + 1)m) \otimes e_{\alpha,\ell} + m \otimes e_{\alpha,\ell-1}$$

Ainsi, $U_\beta(\mathscr{M}_{\alpha,k})$ est un $V_0(\mathscr{D}_X)$-module. Considérons alors la suite exacte de $V_0(\mathscr{D}_X)$-modules :

$$0 \longrightarrow U_\beta(\mathscr{M}_{\alpha,k-1}) \longrightarrow U_\beta(\mathscr{M}_{\alpha,k}) \longrightarrow U_\beta(\mathscr{M}_{\alpha,0}) \longrightarrow 0$$

L'inclusion : $U_\beta(\mathscr{M}_{\alpha,k}) \subset V_\beta(\mathscr{M}_{\alpha,k})$ résulte du lemme 4.4–1. Pour montrer que $U_\beta(\mathscr{M}_{\alpha,k})$ coïncide avec $V_\beta(\mathscr{M}_{\alpha,k})$ il suffit alors de le faire pour $k=0$, ce qui résulte à nouveau du lemme 4.4–1.

Soit $i : Y \to X$ le morphisme d'inclusion. On suppose que $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module holonome. Les modules $\mathscr{M}_{\alpha,k}$, produit tensoriel de $\mathscr{D}_X$-modules holonomes, sont holonomes. L'image inverse extraordinaire $i^!(\mathscr{M}_{\alpha,k})$ est alors représentée par le complexe (proposition 4.6–4) :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}_{\alpha,k}) \xrightarrow{\partial_f} \mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}_{\alpha,k}) \longrightarrow 0$$

Ses faisceaux de cohomologie sont alors munis de l'action induite par T.

Théorème 4.7–2. — *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome et α un nombre complexe de l'intervalle $[-1,0[$. Alors, localement, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ strictement supérieur à* *l'indice de nilpotence de l'endomorphisme $E+\alpha+1$ de $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$, il existe un isomorphisme naturel de $\mathscr{D}_Y$-modules :*

$$\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}) \simeq h^0(i^!\mathscr{M}_{\alpha,k})$$

Par cet isomorphisme, l'action de l'exponentielle de l'endomorphisme $-2i\pi E$ de $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$ correspond à l'action de la monodromie sur $h^0(i^!\mathscr{M}_{\alpha,k})$. De plus, $\varinjlim h^1(i^!\mathscr{M}_{\alpha,k}) = 0$.

Démonstration. — La multiplication par f dans $\mathscr{M}_{\alpha,k}$ est bijective, il résulte alors de la proposition 4.3–11 que la multiplication à gauche par $f : \mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}_{\alpha,k}) \to \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}_{\alpha,k})$ est bijective. Ainsi :

$$h^0(i^!\mathscr{M}_{\alpha,k}) = \ker\left[t\partial_t \ : \ \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}_{\alpha,k}) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}_{\alpha,k})\right]$$

Déterminons ce noyau. Soit $\{m_\ell\}_{0\leqslant \ell\leqslant k}$, une suite d'éléments de $V_\alpha(\mathscr{M}[1/f])$. La somme $\sum_{0\leqslant\ell\leqslant k} m_\ell\otimes e_{\alpha,\ell}$ définit alors un élément de $V_{-1}(\mathscr{M}_{\alpha,k})$. On a l'égalité :

$$t\partial_t\Big(\sum_{0\leqslant\ell\leqslant k} m_\ell\otimes e_{\alpha,\ell}\Big) = \big((t\partial_t+\alpha+1)m_k\big)\otimes e_{\alpha,k}\sum_{0\leqslant\ell\leqslant k-1}\big((t\partial_t+\alpha+1)m_\ell+m_{\ell+1}\big)\otimes e_{\alpha,\ell}$$

Ainsi, $\sum_{0\leqslant\ell\leqslant k} m_\ell\otimes e_{\alpha,\ell}$ est dans le noyau de $t\partial_t$ si et seulement si pour $0\leqslant\ell\leqslant k-1$, on a $m_\ell = (-1)^\ell(t\partial_t+\alpha+1)^\ell m_0$ et $(t\partial_t+\alpha+1)^{k+1}m_0 = 0$. Donc, pour k strictement plus grand que l'indice de nilpotence de $t\partial_t+\alpha+1$ sur $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}[1/f])$, on obtient l'isomorphisme de $\mathscr{D}_Y$-modules :

$$\begin{aligned}\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}[1/f]) &\xrightarrow{\ \phi\ } h^0(i^!\mathscr{M}_{\alpha,k})\\ m_0 &\longmapsto \sum_0^k(-1)^\ell(t\partial_t+\alpha+1)^\ell m_0\otimes e_{\alpha,\ell}\end{aligned}$$

Rappelons (voir proposition 4.4–3) que le morphisme naturel $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})\to\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}[1/f])$ est un isomorphisme pour $\alpha<0$.

L'endomorphisme $E+\alpha+1$ est nilpotent sur $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$. Soit $m_0\in\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})\simeq\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}[1/f])$. On a $T(\phi(m_0))\in\ker(t\partial_t)$. Pour déterminer $T\phi(m_0)$, il suffit donc de connaître le coefficient de $e_{\alpha,0}$ dans sa décomposition. Le calcul montre alors que $T\phi(m_0) = \phi(e^{-2i\pi E}m_0)$. Ainsi, l'action de $e^{-2i\pi E}$ sur $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$ correspond à celle de la monodromie sur $h^0(i^!\mathscr{M}_{\alpha,k})$.

Il reste à montrer que $\varinjlim h^1(i^!\mathscr{M}_{\alpha,k}) = 0$. De la bijectivité de la multiplication par f dans $\mathscr{M}_{\alpha,k}$, on déduit que $\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}_{\alpha,k}) = t\,\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}_{\alpha,k})$. On obtient ainsi, l'isomorphisme :

$$\frac{\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}_{\alpha,k})}{\partial_t\mathscr{M}_{\alpha,k})}\simeq\frac{\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}_{\alpha,k})}{\partial_t t\,\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}_{\alpha,k})}$$

Soit $m\in\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}[1/f])$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\partial_t t(m\otimes e_{\alpha,k+1}) &= (t\partial_t+1)(m\otimes e_{\alpha,k+1})\\ &= ((t\partial_t+\alpha+2)m)\otimes e_{\alpha,k+1}+m\otimes e_{\alpha,k}\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\partial_t t\Big(\sum_0^N(-1)^\ell\big((t\partial_t+\alpha+2)^\ell m\big)\otimes e_{\alpha,k+\ell+1}\Big)$$
$$= m\otimes e_{\alpha,k}+(-1)^N(t\partial_t+\alpha+2)^{N+1}m\otimes e_{\alpha,k+N+1}$$

Il en résulte la nullité de $\varinjlim h^1(i^!\mathscr{M}_{\alpha,k})$.

Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome. Pour tout entier k, le complexe $i^!(\mathscr{M}\to\mathscr{M}_{-1,k})$ est isomorphe au cône du morphisme naturel de complexe : $i^!(\mathscr{M})\to i^!(\mathscr{M}_{-1,k})$. Du fait de la proposition 4.6–4, ce cône est le complexe simple associé au complexe double :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}) & \xrightarrow{\partial_t} & \mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}) & \longrightarrow & 0\\
 & & \Big\downarrow j & & \Big\downarrow j & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}_{-1,k}) & \xrightarrow{\partial_t} & \mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}_{-1,k}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où j est le morphisme naturel de $\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M})\to\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}_{-1,k})$ (resp. $\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M})\to\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}_{-1,k})$). Ainsi, $i^!(\mathscr{M}\to\mathscr{M}_{-1,k})$ est isomorphe au complexe à trois termes :

$$0\longrightarrow\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M})\xrightarrow{(\partial_t,j)}\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M})\oplus\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}_{-1,k})\xrightarrow{(j,-\partial_t)}\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}_{-1,k})\longrightarrow 0 \tag{13}$$

où le terme central est le terme placé en degré 0.

Théorème 4.7–3. — *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome.*

- *En degré différent de 0 et 1, les faisceaux de cohomologies du complexe $i^!(\mathscr{M}\to\mathscr{M}_{-1,k})$ sont nuls.*
- $\varinjlim h^1(i^!(\mathscr{M}\to\mathscr{M}_{-1,k}))=0$
- *Pour $k\in\mathbb{N}$ strictement supérieur à l'indice de nilpotence de E sur $\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M})$, il existe un isomorphisme naturel :*

$$\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M})\longrightarrow h^0(i^!(\mathscr{M}\to\mathscr{M}_{-1,k})).$$

Démonstration. — Le morphisme naturel $j:\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M})\to\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}_{-1,k})$ étant injectif, de l'expression (13) du complexe $i^!(\mathscr{M}\to\mathscr{M}_{-1,k})$, nous déduisons que $h^{-1}(i^!(\mathscr{M}\to\mathscr{M}_{-1,k})=0$. Le premier point du théorème en résulte. D'autre part, d'après le théorème 4.7–2, $\varinjlim h^1(i^!\mathscr{M}_{-1,k})=0$. Il en résulte :

$$\varinjlim h^1(i^!(\mathscr{M}\to\mathscr{M}_{-1,k})=0.$$

Calculons maintenant le $0^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie du complexe

$$i^!(\mathscr{M}\longrightarrow\mathscr{M}_{-1,k})$$

représenté par le complexe (13). Soient $k\in\mathbb{N}$ et $\ell\in\mathbb{N}$ tel que $0\leqslant\ell\leqslant k$, m_ℓ un élément de $V_1(\mathscr{M}[1/f])$ et a une section de $V_0(\mathscr{M})$. Traduisons que la classe de

$(a, m_0 \otimes e_{-1,0} + \cdots + m_k \otimes e_{-1,k})$ dans $\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}) \oplus \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}_{-1,k})$ appartient au noyau de $(j, -\partial_t)$. On obtient :

$$\begin{aligned} j(a) - \partial_t m_0 - m_1/t &= 0 \mod V_{<0}(\mathscr{M}_{-1,k}) \\ \partial_t m_1 - m_2/t &= 0 \mod V_{<0}(\mathscr{M}_{-1,k}) \\ &\vdots \\ \partial_t m_k &= 0 \mod V_{<0}(\mathscr{M}_{-1,k}) \end{aligned}$$

Ce système d'équations est équivalent au suivant :

$$\begin{cases} m_1 = j(ta) - (t\partial_t)m_0 & \mod V_{<-1}(\mathscr{M}_{-1,k}) \\ m_2 = -(t\partial_t)m_1 & \mod V_{<-1}(\mathscr{M}_{-1,k}) \\ \qquad\vdots & \\ (t\partial_t)m_k = 0 & \mod V_{<-1}(\mathscr{M}_{-1,k}) \end{cases}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier supérieur à l'indice de nilpotence de E sur $\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M})$. Il résulte du calcul précédent que le morphisme de $\mathscr{D}_Y$-modules :

$$\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}) \oplus \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M})[1/f] \xrightarrow{\overline{\Psi}} \ker(j, -\partial_t)$$

défini par :

$$\overline{\Psi}(a, m_0) = \Big(a, \sum_{\ell=1}^{k} (-t\partial)^{\ell-1}(ta) \otimes e_{-1,\ell} + \sum_{\ell=0}^{k} (-t\partial)^{\ell} m_0 \otimes e_{-1,\ell}\Big)$$

est un isomorphisme. On constate alors que :

$$\overline{\Psi}(a - \partial_t m_0, 0) - \overline{\Psi}(a, m_0) = (-\partial_t m_0, -j(m_0)) \in \mathrm{Im}\,(\partial_t, j)$$

Le morphisme de $\mathscr{D}_Y$-modules :

$$\begin{aligned} \Psi\colon\ \mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}) &\longrightarrow h^0(i^!(\mathscr{M} \to \mathscr{M}_{-1,k})) \\ a &\longmapsto \text{classe de } \overline{\Psi}(a, 0) \end{aligned}$$

est donc surjectif. Il est clairement injectif, c'est donc un isomorphisme.

Soit

$$\mathrm{can}\colon i^!(\mathscr{M}_{-1,k}) \longrightarrow i^!(\mathscr{M} \to \mathscr{M}_{-1,k})$$

le morphisme naturel de complexe. Ce morphisme induit des morphismes sur les faisceaux de cohomologie que nous notons toujours par can. Le morphisme $T - \mathrm{Id}$ sur le complexe $i^!(\mathscr{M})$ est le morphisme nul. Le morphisme $T - \mathrm{Id}$ sur le complexe (13) représentant $i^!(\mathscr{M} \to \mathscr{M}_{-1,k})$ se factorise donc de manière canonique par un morphisme noté

$$\mathrm{var}\colon i^!(\mathscr{M} \to \mathscr{M}_{-1,k}) \longrightarrow i^!(\mathscr{M}_{-1,k})$$

tel que $T - \mathrm{Id} = \mathrm{can} \circ \mathrm{var}$. Le morphisme var induit des morphismes sur les faisceaux de cohomologie que l'on note toujours par var.

Proposition 4.7–4. — *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome. Soit $k \in \mathbb{N}$ strictement supérieur à l'indice de nilpotence de E sur* $\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M})$. *Par les isomorphismes des théorèmes 4.7–2 et 4.7–3 :*

1) *le morphisme* can: $h^0(i^!(\mathscr{M}_{-1,k}) \to h^0(i^!(\mathscr{M} \to \mathscr{M}_{-1,k}))$ *correspond au morphisme :*

$$-\partial_t\colon \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathrm{Gr}_0(\mathscr{M})$$

2) *le morphisme* var: $h^0(i^!(\mathscr{M} \to \mathscr{M}_{-1,k})) \to h^0(i^!(\mathscr{M}_{-1,k}))$ *correspond au morphisme :*

$$\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M})\colon \quad a \longmapsto [(e^{-2i\pi t\partial_t} - 1)/(-t\partial_t)]ta.$$

Démonstration. — Soit λ l'isomorphisme naturel $\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}) \to h^0(i^!(\mathscr{M}_{-1,k}))$ détaillé au théorème 4.7–2 et μ l'isomorphisme naturel :

$$\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}) \longrightarrow h^0(i^!(\mathscr{M} \to \mathscr{M}_{-1,k}))$$

détaillé au théorème 4.7–3.

Soit $m_0 \in \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M})$. On rappelle que $\lambda(m_0) = \sum_{\ell=0}^{k}(-t\partial_t)^\ell m_0 \otimes e_{-1,\ell}$. D'autre part, $\mu(-\partial_t m_0)$ est la classe modulo $\mathrm{Im}(\partial_t, j)$ de

$$\Big(-\partial_t m_0, \sum_{\ell=1}^{k}(-t\partial_t)^{\ell-1}t(-\partial_t m_0) \otimes e_{-1,\ell}\Big)$$

ou encore de $(0, \sum_{\ell=0}^{\ell}(-t\partial_t)^\ell m_0 \otimes e_{-1,\ell})$. On a ainsi : $\mathrm{can}(\lambda(m_0)) = \mu(-\partial_t m_0)$.

Soit maintenant $a \in \mathrm{Gr}_0(\mathscr{M})$, $(T - \mathrm{id})(\mu(a))$ est la classe de

$$\Big(0, \sum_{\ell=1}^{k}(-t\partial_t)^{\ell-1}ta \otimes e_{-1,\ell}\Big)$$

La classe de $\sum_{\ell=1}^{k}(-t\partial_t)^{\ell-1}ta \otimes e_{-1,\ell}$ est un élément de $h^0(i^!(\mathscr{M}_{-1,k}))$. On constate que le coefficient de $e_{-1,0}$ est $[(e^{-2i\pi t\partial_t} - 1)/(-t\partial_t)]ta$; d'où le dernier point de la proposition.

Corollaire 4.7–5. — *Si $\mathscr{M}$ est module holonome régulier sur X alors les $\mathscr{D}_Y$-modules* $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$ *sont réguliers sur Y pour tout α.*

Démonstration. — En effet pour $\alpha \in [-1, 0[$ on a l'isomorphisme pour k assez grand :

$$\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}) \simeq h^0(i^!\mathscr{M}_{\alpha,k}).$$

Si $\mathscr{M}$ est régulier le complexe $i^!\mathscr{M}_{\alpha,k}$ est régulier en vertu du théorème 3.2–5. D'autre part la régularité passe à la cohomologie en vertu du théorème 3.2–4. Pour $\alpha = 0$ on a un raisonnement similaire.

5. Le théorème de comparaison pour les cycles évanescents d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier

Soit Y une hypersurface lisse d'une variété analytique complexe X. On suppose que Y admet une équation globale réduite $f = 0$. On rappelle les égalités :

$$\Psi_f^m(\mathscr{O}_X) = \bigoplus_{-1\leqslant\alpha<0} \Psi_{f,\alpha}^m(\mathscr{O}_X)$$
$$\Phi_f^m(\mathscr{O}_X) = \Psi_f^m(\mathscr{O}_X)/i^{-1}(\mathscr{O}_X) = \bigoplus_{-1<\alpha<0} \Psi_{f,\alpha}^m(\mathscr{O}_X) \oplus (\Psi_{f,-1}^m(\mathscr{O}_X)/i^{-1}(\mathscr{O}_X))$$

5.1. Cas d'un exposant non nul. — On désigne par $\mathbf{DR}_X(\mathscr{M})$ le complexe de De Rham d'un $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}$.

Théorème 5.1–1. — *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier et $\alpha \in \mathbb{C}$ dans l'intervalle $[-1, 0[$. Alors, il existe un isomorphisme fonctoriel :*

$$\mathbf{DR}_Y(\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})) \simeq i^{-1}(\mathbf{DR}_X(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Psi_{f,\alpha}^m(\mathscr{O}_X)))$$

Par cet isomorphisme, l'endomorphisme $\exp(-2i\pi E)$ *correspond à l'endomorphisme de monodromie agissant sur* $i^{-1}(\mathbf{DR}_X(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Psi_{f,\alpha}^m(\mathscr{O}_X)))$.

Démonstration. — Construisons tout d'abord localement un morphisme

$$\mu\colon\ \mathbf{DR}_Y(\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})) \longrightarrow i^{-1}(\mathbf{DR}_X(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Psi_{f,\alpha}^m(\mathscr{O}_X)))$$

dans la catégorie dérivée des complexes d'espaces vectoriels. Comme $\mathscr{M}$ est supposé holonome régulier, le morphisme $\mathrm{can}(k)$ de Cauchy-Kovalevska (voir le cours de Ph. Maisonobe et T. Torrelli dans ce volume) :

$$\mathrm{can}(k)\colon i^{-1}\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_{\alpha,k}^*, \mathscr{O}_X) \longrightarrow \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathbf{L}i^*(\mathscr{M}_{\alpha,k}^*), \mathscr{O}_Y)$$

est un isomorphisme par définition du faisceau $\mathrm{Irr}_Y^*(\mathscr{M})$. Par dualité, il en résulte un isomorphisme fonctoriel :

$$\mathrm{can}^*(k)\colon i^{-1}\,\mathbf{DR}_X(\mathscr{M}_{\alpha,k}) \longrightarrow \mathbf{DR}_Y(i^!\mathscr{M}_{\alpha,k})$$

Or, pour k strictement plus grand que l'indice de nilpotence de $E+\alpha+1$ sur $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$, nous avons construit un morphisme naturel :

$$\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}) \xrightarrow{\lambda(k)} i^!\mathscr{M}_{\alpha,k}$$

Nous en déduisons donc localement un morphisme naturel :

$$\mathbf{DR}_Y(\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})) \xrightarrow{\mathbf{DR}((\mathrm{can}^*)^{-1}\lambda(k))} i^{-1}\,\mathbf{DR}_X(\mathscr{M}_{\alpha,k})$$

On considère enfin le morphisme naturel :

$$i^{-1}\mathscr{M}_{\alpha,k} \longrightarrow \varinjlim i^{-1}\mathscr{M}_{\alpha,k} = i^{-1}(\mathscr{M}) \otimes_{i^{-1}\mathscr{O}_X} \Psi_{f,\alpha}^m(\mathscr{O}_X)$$

Nous obtenons par composition le morphisme μ cherché. Les morphismes induits en cohomologie sont les compositions des isomorphismes :

$$\begin{gathered}\mathscr{E}xt^j_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{O}_Y, \mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})) \longrightarrow \varinjlim \mathscr{E}xt^j_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{O}_Y, i^! \mathscr{M}_{\alpha,k}) \\ \varinjlim \mathscr{E}xt^j_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{O}_Y, i^! \mathscr{M}_{\alpha,k}) \longrightarrow \varinjlim i^{-1}\, \mathscr{E}xt^j_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{O}_X, \mathscr{M}_{\alpha,k})\end{gathered}$$

Le morphisme μ construit localement est donc un isomorphisme.

Il reste à le globaliser. Cet isomorphisme local ne dépend pas de l'entier k plus grand que l'indice de nilpotence choisi et satisfait aux conditions de compatibilité. Les faisceaux

$$\mathscr{E}xt^j_{\mathbb{C}_Y}(\mathbf{DR}_Y(\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})), i^{-1}\, \mathbf{DR}_X(\mathscr{M} \otimes \Psi^m_{f,\alpha}(\mathscr{O}_X))$$

sont localement isomorphes aux faisceaux

$$\mathscr{E}xt^j_{\mathbb{C}_Y}(\mathbf{DR}_Y(\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})), \mathbf{DR}_Y(\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})))$$

qui en vertu du théorème de comparaison [**Me3**] sont isomorphes aux faisceaux

$$\mathscr{E}xt^j_{\mathscr{D}_Y}(\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}), \mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}))$$

(puisque $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$ est holonome régulier). Ces faisceaux sont donc nuls pour $j < 0$. On en déduit donc l'isomorphisme naturel entre :

$$Hom_{\mathbb{C}_Y}(\mathbf{DR}_Y(\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})), i^{-1}\, \mathbf{DR}_X(\mathscr{M} \otimes \Psi^m_{f,\alpha}(\mathscr{O}_X))$$

et les sections globales du faisceau

$$\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_Y}(\mathbf{DR}_Y(\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})), i^{-1}\, \mathbf{DR}_X(\mathscr{M} \otimes \Psi^m_{f,\alpha}(\mathscr{O}_X)).$$

Le préfaisceau des morphismes locaux est donc un faisceau et l'isomorphisme précédent se globalise. Enfin l'assertion sur la monodromie résulte de la fonctorialité des morphismes et du théorème 4.7–2.

5.2. Cas d'un exposant nul

Théorème 5.2–1. — *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier. Alors, il existe un isomorphisme fonctoriel :*

$$\mathbf{DR}_Y(\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M})) \longrightarrow i^{-1}(\mathbf{DR}(\mathscr{M}) \otimes^L_{\mathscr{O}_X} (\Psi^m_{f,-1}(\mathscr{O}_X) \,/\, i^{-1}\mathscr{O}_X)))$$

Par cet isomorphisme, l'endomorphisme $\exp(-2i\pi E)$ correspond à l'endomorphisme de monodromie agissant sur $i^{-1}(\mathbf{DR}(\mathscr{M} \otimes^L (\Psi^m_{f,-1}(\mathscr{O}_X) \,/\, i^{-1}\mathscr{O}_X))$.

Démonstration. — Comme précédemment, on construit tout d'abord ce morphisme localement. Pour k entier strictement supérieur à l'ordre de nilpotence de E sur $\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M})$, notons encore

$$\nu(k)\colon\ \mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}) \longrightarrow i^!(\mathscr{M} \to \mathscr{M}_{-1,k})$$

le morphisme construit dans la preuve du théorème 4.7–3. Comme précédemment avec le morphisme de Cauchy-Kovalevska, on obtient localement par composition un morphisme :

$$\mathbf{DR}_Y(\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M})) \longrightarrow i^{-1}(\mathbf{DR}_X(\mathscr{M} \to \mathscr{M}_{-1,k}))$$

On considère alors le morphisme naturel :

$$\begin{aligned} i^{-1}(\mathbf{DR}_X(\mathscr{M} \to \mathscr{M}_{-1,k})) &\longrightarrow \varinjlim i^{-1}(\mathbf{DR}_X(\mathscr{M} \to \mathscr{M}_{-1,k})) \\ &= i^{-1}(\mathbf{DR}_X(\mathscr{M} \to \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Psi^m_{f,-1}(\mathscr{O}_X))) \end{aligned}$$

Ce dernier complexe n'est autre que $i^{-1}(\mathbf{DR}(\mathscr{M} \otimes^L_{\mathscr{O}_X} (\Psi^m_{f,-1}(\mathscr{O}_X)/i^{-1}\mathscr{O}_X)))$ puisque

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \Psi^m_{f,-1}(\mathscr{O}_X) \longrightarrow \Psi^m_{f,-1}(\mathscr{O}_X)/i^{-1}\mathscr{O}_X \longrightarrow 0$$

est une résolution plate de $\Psi^m_{f,-1}(\mathscr{O}_X)/i^{-1}(\mathscr{O}_X)$. Par composition, on obtient le morphisme cherché. Le reste de la preuve est analogue à celle du théorème précédent. L'assertion sur la monodromie qui est égale à $\mathrm{can} \circ \mathrm{var} + \mathrm{Id}$ résulte de la proposition 4.7–4.

5.3. Cas général

Définition 5.3–1. — Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier. On appelle module des cycles proches associés à $\mathscr{M}$ le $\mathscr{D}_Y$-module :

$$\Psi_Y(\mathscr{M}) = \bigoplus_{-1 \leqslant \alpha < 0} \mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$$

On appelle module des cycles évanescents associés à $\mathscr{M}$ le $\mathscr{D}_Y$-module :

$$\Phi_Y(\mathscr{M}) = \bigoplus_{-1 < \alpha \leqslant 0} \mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$$

À la section 4.7, nous avons montré que $\mathscr{M} \to \Psi_Y(\mathscr{M})$ et $\mathscr{M} \to \Phi_Y(\mathscr{M})$ sont des foncteurs de la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes réguliers vers celle des $\mathscr{D}_Y$-modules holonomes réguliers.

Théorème 5.3–2. — *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier. Le triangle :*

$$i^{-1}\,\mathbf{DR}_X(\mathscr{M}) \longrightarrow \Psi_f(\mathbf{DR}_X(\mathscr{M})) \xrightarrow{\ \mathrm{can}\ } \Phi_f(\mathbf{DR}_X(\mathscr{M}))$$

est naturellement isomorphe au triangle obtenu en appliquant le foncteur de de Rham au triangle de $\mathscr{D}_Y$-modules holonomes réguliers :

$$i^!\mathscr{M} \longrightarrow \Psi_Y(\mathscr{M}) \longrightarrow \Phi_Y(\mathscr{M})$$

Le morphisme $i^{-1}\,\mathbf{DR}_X(\mathscr{M}) \to \Psi_f(\mathbf{DR}_X(\mathscr{M}))$ *est induit par le morphisme naturel* $i^!\mathscr{M} = (\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}) \to \mathrm{Gr}_0(\mathscr{M})) \to \Psi_Y(\mathscr{M})$. *Le morphisme canonique est induit par le morphisme* $\Psi_Y(\mathscr{M}) \to \Phi_Y(\mathscr{M})$ *défini par :*

$$m \longmapsto \begin{cases} m \quad si\ m \in \mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})\ et\ -1<\alpha<0 \\ \partial_f m\ si\ m \in \mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}) \end{cases}$$

Les morphismes de monodromie sur $\Psi_Y(\mathscr{M})$ *et* $\Phi_Y(\mathscr{M})$ *sont induits par le morphisme* $\exp(-2i\pi E)$. *Le morphisme de variation est induit par le morphisme de* $\Phi_Y(\mathscr{M}) \to \Psi_Y(\mathscr{M})$ *défini par*

$$m \longmapsto \begin{cases} [(\exp(-2i\pi E)-1)/(-E)]fm & si\ m \in \mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}) \\ (\exp(-2i\pi E)-1)m & si\ m \in \mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})\ et\ -1<\alpha<0 \end{cases}$$

Démonstration. — Les théorèmes 2.1–3, 3.1–4 et 3.3–1 montrent que le triangle

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}^*, i^{-1}\mathscr{O}_X) \to (\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}^*, \Psi_f^m\mathscr{O}_X)) \to \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}^*, \Phi_f^m(\mathscr{O}_X)$$

est canoniquement isomorphe au triangle

$$i^{-1}\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}^*, \mathscr{O}_X) \to \Psi_f(\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}^*, \mathscr{O}_X)) \to \Phi_f(\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}^*, \mathscr{O}_X)).$$

Cet isomorphisme fournit ([**Me3**], proposition 3.5.8) l'isomorphisme du triangle

$$\mathbf{DR}_X(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} i^{-1}\mathscr{O}_X) \longrightarrow \mathbf{DR}_X(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Psi_f^m\mathscr{O}_X) \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathbf{DR}_X(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Phi_f^m\mathscr{O}_X)$$

au triangle

$$i^{-1}\,\mathbf{DR}_X(\mathscr{M}) \longrightarrow \Psi_f(\mathbf{DR}_X(\mathscr{M})) \xrightarrow{\mathrm{can}} \Phi_f(\mathbf{DR}_X(\mathscr{M})).$$

Les théorèmes 5.1–1 et 5.2–1 montre que le triangle

$$\mathbf{DR}_Y(i^!\mathscr{M}) \longrightarrow \mathbf{DR}_Y(\Psi_f^m\mathscr{M}) \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathbf{DR}_Y(\Phi_f^m\mathscr{M})$$

est isomorphe au triangle

$$\mathbf{DR}_X(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} i^{-1}\mathscr{O}_X) \longrightarrow \mathbf{DR}_X(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Psi_f^m\mathscr{O}_X) \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathbf{DR}_X(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Phi_f^m\mathscr{O}_X).$$

Les autres assertions suivent immédiatement.

On peut appliquer le théorème 5.3–2 au module $\mathscr{M}^*$. Compte-tenu de la proposition 4.6–2, nous obtenons :

Théorème 5.3–3. — *Soit* $\mathscr{M}$ *un* $\mathscr{D}_X$*-module holonome régulier. Le triangle :*

$$i^{-1}\mathbf{S}(\mathscr{M}) \longrightarrow \Psi_f(\mathbf{S}(\mathscr{M})) \xrightarrow{\mathrm{can}} \Phi_f(\mathbf{S}(\mathscr{M}))$$

est naturellement isomorphe au triangle obtenu en appliquant le foncteur solution au triangle de $\mathscr{D}_Y$*-modules holonomes réguliers :*

$$\mathbf{L}i^*\mathscr{M} \longleftarrow \Psi_Y(\mathscr{M}) \longleftarrow \Phi_Y(\mathscr{M})$$

Le morphisme $i^{-1}\mathbf{S}(\mathscr{M}) \to \Psi_f(\mathbf{S}(\mathscr{M}))$ *est induit par le morphisme naturel. Le morphisme canonique est induit par le morphisme* $\Psi_Y(\mathscr{M}) \leftarrow \Phi_Y(\mathscr{M})$ *défini par*

$$m \longmapsto \begin{cases} m & \textit{si } m \in \mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}) \textit{ et } -1 < \alpha < 0 \\ fm & \textit{si } m \in \mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}) \end{cases}$$

On laisse au lecteur le soin de détailler l'analogue du morphisme de variation.

Corollaire 5.3–4. — *Pour tout faisceau pervers* $\mathscr{F}$ *sur* X *le morphisme canonique*

$$\Psi_Y(\mathscr{F}) \longrightarrow \Phi_Y(\mathscr{F})$$

est un morphisme de faisceaux pervers sur Y.

En effet un tel faisceau est la forme $\mathbf{DR}_X(\mathscr{M})$ pour un module holonome régulier $\mathscr{M}$ [**Me3**] et donc en vertu du théorème précédent le morphisme

$$\Psi_Y(\mathscr{F}) \longrightarrow \Phi_Y(\mathscr{F})$$

est de la forme

$$\mathbf{DR}_Y(\Psi_Y(\mathscr{M})) \longrightarrow \mathbf{DR}_Y(\Phi_Y(\mathscr{M})).$$

Naturellement le corollaire est aussi conséquence de la commutation de la dualité avec le foncteur Ψ, ce qui est tout de même plus élémentaire.

Remarque. — Il résulte de l'exercice 4.2–5 que si $\mathscr{M}$ est un module holonome régulier supporté par Y (resp. admettant Y comme hypersurface non caractéristique) $\Psi_Y(\mathscr{M}) = 0$ (resp. $\Phi_Y(\mathscr{M}) = 0$).

6. Exemple d'une fonction monomiale (avec la collaboration de T. Torrelli)

Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Considérons le $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}}$-module $\mathscr{M}$ supporté par le graphe Γ_f de f :

$$\mathscr{M} = \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}}[1/t-f]}{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}}}$$

Nous notons $\delta(t-f)$ la classe de $1/(t-f)$ dans $\mathscr{M}$; elle engendre $\mathscr{M}$ comme $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}}$-module. Le module $\mathscr{M}$ est isomorphe au $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}}$-module :

$$R^1\Gamma_{[\Gamma_f]}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})$$

Il est donc holonome, ce qui est évident dans ce cas là parce que Γ_f est lisse. En vertu du théorème 3.2–3 le fibré $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}}$ est régulier et en vertu de la définition même de la régularité le complexe $\mathbf{R}\Gamma_{[\Gamma_f]}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})$ de cohomologie locale qui est concentré en un seul degré est régulier. On peut donc appliquer le théorème de comparaison précédent à $\mathscr{M} := \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}}[1/t-f]/\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}}$.

En vertu du lemme de Poincaré le complexe des solutions holomorphes

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}}}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})$$

est isomorphe au complexe $j_*\underline{\mathbb{C}}[-1]$ où j désigne l'inclusion fermée de Γ_f dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. Désignons par π la projection : $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $(x,t) \mapsto t$ et par i l'immersion de $\pi^{-1}(0)$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. D'après le lemme 2.1–4, la donnée du triangle de complexes de faisceaux d'espaces vectoriels supportés par $f^{-1}(0)$:

$$(\underline{\mathbb{C}})_{f^{-1}(0)} \longrightarrow \Psi_f \underline{\mathbb{C}} \longrightarrow \Phi_f \underline{\mathbb{C}}$$

correspond à celle du triangle :

$$i^{-1}(j_*\underline{\mathbb{C}}) \longrightarrow \Psi_\pi(j_*\underline{\mathbb{C}}) \longrightarrow \Phi_\pi(j_*\underline{\mathbb{C}})$$

Décalons ce triangle de -1 :

$$i^{-1}(j_*\underline{\mathbb{C}})\,[-1] \longrightarrow \Psi_\pi(j_*\underline{\mathbb{C}}\,[-1]) \longrightarrow \Phi_\pi(j_*\underline{\mathbb{C}}\,[-1])$$

D'après le théorème 5.3–3, ce triangle décalé s'obtient par l'application du foncteur

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\pi^{-1}(0)}}(-, \mathscr{O}_{\pi^{-1}(0)})$$

au triangle de complexes de $\mathscr{D}_{\pi^{-1}(0)}$-modules :

$$\Phi_\pi(\mathscr{M}) \longrightarrow \Psi_\pi(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathbf{L}i^*\mathscr{M}$$

Nous identifierons l'hypersurface $\pi^{-1}(0)$ d'équation $t=0$ avec $\mathbb{C}^n$. Nous nous proposons d'expliciter ce dernier triangle dans le cas d'une fonction monomiale.

6.1. Équations fonctionnelles. — Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un n-uplet d'entiers naturels non nuls. Nous considérons la fonction :

$$f\ :\ \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C},\ x = (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto x^a = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$$

Notation 6.1–1. — Pour $i = 2, \ldots, n$ et $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{N}^n$, posons :

$$\begin{aligned}\Delta_i &= (x_1/a_1)\partial_{x_1} - (x_i/a_i)\partial_{x_i}\\ \Delta_i(\ell) &= (x_1/a_1)\partial_{x_1} - (x_i/a_i)\partial_{x_i} - (\ell_1/a_1) + (\ell_i/a_i)\end{aligned}$$

Nous débutons par l'étude du $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-module $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}\delta(t-f)$. La filtration naturelle de ce $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-module est une bonne filtration. Ainsi, par les arguments classiques, il est cohérent. Notons W_f l'adhérence dans $T^*\mathbb{C}^n$ de l'ensemble :

$$\{(x_1, \ldots, x_n, a_1 s/x_1, \ldots, a_n s/x_n)\ ;\ s \in \mathbb{C} \text{ et } x_1 \ldots x_n \neq 0\}$$

C'est un sous-espace analytique de $T^*\mathbb{C}^n$ irréductible de dimension $n+1$. Il est défini par l'idéal réduit :

$$\mathscr{J} = ((x_1/a_1)\xi_1 - (x_2/a_2)\xi_2, \ldots, (x_1/a_1)\xi_1 - (x_n/a_n)\xi_n)\mathscr{O}_{T^*\mathbb{C}^n}$$

Soit $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{N}^n$ et $P \in \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$ non nul annulant $x_1^{\ell_1} \cdots x_n^{\ell_n}\delta(t-f)$. D'une part, un calcul algébrique élémentaire montre :

$$\sigma(P)(x, \partial_{x_1} f(x), \ldots, \partial_{x_n} f(x)) = 0$$

où $\sigma(P)(x,\xi)$ désigne le symbole principal de P. Il en résulte que $\sigma(P)(x,\xi)$ s'annule sur W_f. Ainsi, W_f est contenu dans la variété caractéristique de $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n} x_1^{\ell_1}\cdots x_n^{\ell_n}\delta(t-f)$. D'autre part, pour $i=2,\ldots,n$:

$$\Delta_i(\ell)\, x_1^{\ell_1}\ldots x_n^{\ell_n}\delta(t-f)=0$$

L'autre inclusion en résulte. D'où le lemme :

Lemme 6.1–2. — *Soit $\ell=(\ell_1,\ldots,\ell_n)\in\mathbb{N}^n$. Le $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-module $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n} x_1^{\ell_1}\cdots x_n^{\ell_n}\delta(t-f)$ est cohérent de variété caractéristique W_f.*

Avec les mêmes notations, soit $P\in\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$ annulant $x_1^{\ell_1}\cdots x_n^{\ell_n}\delta(t-f)$. Alors son symbole $\sigma(P)(x,\xi)$ s'annule sur W_f et appartient donc à l'idéal $\mathscr{J}$. Les générateurs de $\mathscr{J}$ forment une suite régulière et se relèvent en des opérateurs différentiels annulant $x_1^{\ell_1}\cdots x_n^{\ell_n}\delta(t-f)$. Nous pouvons construire un opérateur T de l'idéal $J=\mathscr{D}(\Delta_2(\ell),\ldots,\Delta_n(\ell))$ tel que le degré de l'opérateur $P-T$ soit strictement inférieur à celui de P. Nous en déduisons :

Lemme 6.1–3. — *Soit $\ell=(\ell_1,\ldots,\ell_n)\in\mathbb{N}^n$. L'idéal de $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$ des opérateurs différentiels annulant $x_1^{\ell_1}\cdots x_n^{\ell_n}\delta(t-f)$ est :*

$$J=(\Delta_2(\ell),\ldots,\Delta_n(\ell))$$

Déterminons maintenant le polynôme de Bernstein des sections :

$$x_1^{\ell_1}\cdots x_n^{\ell_n}\delta(t-f)$$

Lemme 6.1–4. — *Soit $\ell=(\ell_1,\ldots,\ell_n)\in\mathbb{N}^n$, $m=x_1^{\ell_1}\cdots x_n^{\ell_n}\delta(t-f)$. Nous avons :*

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{a_i-1}\Big(t\partial_t+\frac{j-\ell_i}{a_i}\Big)m=\Big(\prod_{i=1}^{n}(-1/a_i)^{a_i}\partial_{x_i}^{a_i}\Big)tm$$

De plus, le polynôme de Bernstein de m à l'origine de $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}$ est le polynôme :

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{a_i-1}\Big(s+\frac{j-\ell_i}{a_i}\Big)$$

Démonstration. — Pour tout indice i, $1\leqslant i\leqslant n\}$, un calcul simple montre l'égalité entre opérateurs différentiels :

$$\partial_{x_i}^{a_i}x_i^{a_i+\ell_i}=x_i^{\ell_i}\prod_{j=1}^{a_i}(x_i\partial_{x_i}+\ell_i+j)$$

Nous en déduisons l'identité :

$$(-1/a_i)^{a_i}\partial_{x_i}^{a_i}{x_i}^{a_i}x_i^{\ell_i}\delta(t-f)=(-1/a_i)^{a_i}{x_i}^{\ell_i}\prod_{j=1}^{a_i}(x_i\partial_{x_i}+\ell_i+j)\delta(t-f)$$

Or $((1/a_i)x_i\partial_{x_i}+t\partial_t+1)\delta(t-f)=0$. Par suite :

$$(-1/a_i)^{a_i}\partial_{x_i}^{a_i}{x_i}^{a_i}x_i^{\ell_i}\delta(t-f)=x_i^{\ell_i}\prod_{j=1}^{a_i}(t\partial_t-\ell_i/a_i-j/a_i+1)\delta(t-f)$$
$$=\prod_{j=0}^{a_i-1}(t\partial_t+(j-\ell_i)/a_i)x_i^{\ell_i}\delta(t-f)$$

La première partie du lemme en résulte. Supposons maintenant que le polynôme de Bernstein soit un diviseur strict de $\prod_{i=1}^n\prod_{j=0}^{a_i-1}(s+(j-\ell_i)/a_i)$; il existe donc une équation fonctionnelle :

$$e(t\partial_t)m=Ptm$$

où $P\in V_0(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})$ et $e(s)\in\mathbb{C}[s]$ est un polynôme de degré r strictement inférieur à $a_1+\cdots+a_n$. Quitte à utiliser les relations :

$$(a_1t\partial_t+x_1\partial x_1-\ell_1)tm=0 \text{ et } tm=fm$$

nous pouvons supposer que l'opérateur P ne dépend pas de ∂_t et de t. Si le degré de cet opérateur est strictement supérieur à celui du polynôme $e(s)$, son symbole s'annule sur W_f. Alors, par division, nous pouvons nous ramener au cas où le degré de P est inférieur ou égal à celui de $e(s)$. Le symbole de l'opérateur $e(-(1/a_1)x_1\partial x_1+\ell_1/a_1)-Pf$ s'annule donc sur W_f. Il en résulte l'équation :

$$f^r-\sigma(P)(a_1/x_1,\ldots,a_n/x_n)f^{r+1}=0$$

ou encore : $1/f=\sigma(P)(a_1/x_1,\ldots,a_n/x_n)$. Ce qui est impossible compte-tenu du degré de P. Par suite, le polynôme donné est bien le polynôme de Bernstein de m.

6.2. V-filtration. — D'après le lemme 6.1–4, $b_{\delta(t-f)}(s)=\prod_{i=1}^n\prod_{j=0}^{a_i-1}(s+j/a_i)$. Compte-tenu de la définition 4.2–3, ce polynôme est le polynôme de Bernstein de la bonne V-filtration de $\mathscr{M}$ de terme général :

$$V_k(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})\delta(t-f),\ k\in\mathbb{Z}$$

Alors ses racines sont dans l'intervalle $[-1,0[$. Il résulte alors du corollaire 4.3–7 que, pour tout $k\in\mathbb{Z}$:

$$V_{<k}(\mathscr{M})=V_k(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})\delta(t-f)$$

Grâce aux identités :

$$((1/a_1)x_1\partial_{x_1}+t\partial_t+1)\delta(t-f)=0\ ;\ (t-f)\delta(t-f)=0$$

nous avons :

$$V_{<k}(\mathscr{M})=V_k(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})\delta(t-f)=\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}f^k\delta(t-f) \text{ pour } k\leqslant 0$$
$$V_{<k}(\mathscr{M})=V_k(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})\delta(t-f)=\sum_{j=0}^k\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}\partial_t^j\delta(t-f) \text{ pour } k>0$$

D'après la définition 5.3–1 :

$$\Psi_\pi(\mathscr{M}) = \bigoplus_{-1\leqslant\alpha<0} \mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$$

Comme il résulte de la proposition 4.3–9 :

$$V_{<0}(\mathscr{M})/V_{<-1}(\mathscr{M}) \simeq \bigoplus_{\alpha\in[-1,0[} \mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$$

Nous obtenons :

Proposition 6.2–1. — $\Psi_\pi(\mathscr{M}) \simeq \dfrac{V_0(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})\delta(t-f)}{V_{-1}(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})\delta(t-f)} = \dfrac{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}\delta(t-f)}{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}f\delta(t-f)}$

D'après la définition 5.3–1 :

$$\Phi_\pi(\mathscr{M}) = \bigoplus_{-1<\alpha\leqslant 0} \mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$$

Comme pour $-1<\alpha<0$, la multiplication par t identifie $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$ et $\mathrm{Gr}_{\alpha+1}(\mathscr{M})$, nous avons :

$$\Phi_\pi(\mathscr{M}) \simeq \bigoplus_{0\leqslant\alpha<1} \mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}) \simeq V_{<1}(\mathscr{M})/V_{<0}(\mathscr{M})$$

Le morphisme canonique $\Phi_\pi(\mathscr{M}) \to \Psi_\pi(\mathscr{M})$ s'identifie alors au morphisme :

$$V_{<1}(\mathscr{M})/V_{<0}(\mathscr{M}) \xrightarrow{t} V_{<0}(\mathscr{M})/V_{<-1}(\mathscr{M})$$

Rappelons que le complexe de $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-module $\mathbf{L}i^*(\mathscr{M})$ est $0\to\mathscr{M}\xrightarrow{t}\mathscr{M}\to 0$. Or, la multiplication par t est injective dans $\mathscr{M}$. D'après la proposition 4.4–4, il est isomorphe au complexe $\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}) \xrightarrow{t} \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M})$. Mais ce dernier complexe est lui-même isomorphe au complexe :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V_{<1}(\mathscr{M})/V_{<0}(\mathscr{M}) \arrow[r, "t"] \arrow[d, equal] & V_{<0}(\mathscr{M})/V_{<-1}(\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \dfrac{V_1(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})\delta(t-f)}{V_0(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})\delta(t-f)} \arrow[r, "t"] & \dfrac{V_0(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})\delta(t-f)}{V_{-1}(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})\delta(t-f)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

qui n'a donc de la cohomologie qu'en degré un. Du plus, l'image du morphisme de ce complexe est égal au $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-module :

$$t\partial_t \frac{V_0(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})\delta(t-f)}{V_{-1}(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})\delta(t-f)}$$

Nous obtenons ainsi :

Proposition 6.2–2. — *Le triangle de $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-modules :*

$$\Phi_\pi(\mathscr{M}) \longrightarrow \Psi_\pi(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathbf{L}i^*\mathscr{M}$$

s'identifie au triangle associé à la suite exacte de $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-modules :

$$0 \longrightarrow t\partial_t \frac{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}\delta(t-f)}{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}f\delta(t-f)} \xrightarrow{\ \mathrm{can}\ } \frac{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}\delta(t-f)}{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}f\delta(t-f)} \xrightarrow{\ \pi\ } \operatorname{coker}\mathrm{can} \longrightarrow 0$$

Corollaire 6.2–3. — *Nous avons les isomorphismes naturels de $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-modules :*

a) $\Psi_\pi(\mathscr{M}) \simeq \dfrac{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}\delta(t-f)}{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}f\delta(t-f)} \simeq \dfrac{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}}{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(f,\Delta_2,\ldots,\Delta_n)}$

b) $\Phi_\pi(\mathscr{M}) \simeq t\partial_t\dfrac{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}\delta(t-f)}{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}f\delta(t-f)} \simeq \dfrac{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}}{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(\partial f/\partial x_1,\ldots,\partial f/\partial x_n,\Delta_2,\ldots,\Delta_n)}$

c) $Li^*\mathscr{M} \simeq \operatorname{coker}\operatorname{can} \simeq \dfrac{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}}{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}, x_1\partial_{x_1}+a_1,\ldots,x_n\partial_{x_n}+a_n)}$

Démonstration. — Le point a) résulte directement du lemme 6.1–3.

Montrons le point b). Soit $P \in \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$ tel que la classe de $Pt\partial_t\delta(t-f)$ soit nulle dans $\Phi_\pi(\mathscr{M})$. Nous avons alors :

$$Pt\partial_t\delta(t-f) = Qf\delta(t-f) = Qt\delta(t-f)$$

où $Q \in \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$. Comme la multiplication par t est injective dans M, nous en déduisons :

$$P\partial_t\delta(t-f) = Q\delta(t-f)$$

Nous en déduisons alors que Q est dans l'idéal $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(\partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_n)$; il existe donc des oprérateurs différentiels $Q_1,\ldots,Q_n \in \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$ tels que

$$Pt\partial_t\delta(t-f) = \sum_{i=1}^n Q_i\partial/\partial x_i t\delta(t-f)$$

La multiplication par $t\partial_t$ étant injective dans $\mathscr{M}$, il vient :

$$P\delta(t-f) = \sum_{i=1}^n Q_i\partial f/\partial x_i\delta(t-f)$$

Nous concluons alors avec le lemme 6.1–3.

Montrons enfin le point c). Soit $P \in \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$ tel que la classe $P\delta(t-f)$ appartienne à l'image du morphisme can. Nous avons alors :

$$P\delta(t-f) = t\partial_t A\delta(t-f) + Bf\delta(t-f)$$

où $A, B \in \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$. Comme $t\partial_t\delta(t-f) = (-(1/a_1)x_1\partial_{x_1} - 1)\delta(t-f)$, il résulte du lemme 6.1–3 que $P \in \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(f,(1/a_1)x_1\partial_{x_1}+1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n)$. Le point c) résulte alors de l'égalité de cet idéal avec l'idéal :

$$\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}, x_1\partial_{x_1}+a_1,\ldots,x_n\partial_{x_n}+a_n)$$

Remarque. — Considérons le $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-module $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}[1/f]/\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$. Il est isomorphe à $R^1\Gamma_{\{f=0\}}\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$ et engendré par la classe de $1/f$. Nous vérifions alors que l'annulateur dans $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$ de la classe de $1/f$ est l'idéal :

$$\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}, x_1\partial_{x_1}+a_1,\ldots,x_n\partial_{x_n}+a_n)$$

Nous retrouvons donc bien :

$$\mathbf{R}\Gamma_{\{f=0\}}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}) \simeq \mathbf{L}i^*\mathbf{R}\Gamma_{\{t-f=0\}}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}}) = \mathbf{L}i^*\mathscr{M}[-1]$$

D'autre part suivant [**G-G-M**], nous pouvons considérer le germe à l'origine de $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n,0}$-module : $R^n\Gamma_{(\mathbf{R}^+)^n,0}\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ qui est isomorphe à la limite inductive suivant ε de

$$\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}\Big(\prod_{i=1}^{n}(B_\varepsilon-\mathbb{R}^+)\Big)\Big/\sum_{i=1}^{n}\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}\Big(\prod_{j=1}^{i-1}(B_\varepsilon-\mathbb{R}^+)\times B_\varepsilon\times\Big(\prod_{j=i+1}^{n}B_\varepsilon-\mathbb{R}^+\Big)\Big)$$

où B_ε est une boule de rayon ε centrée à l'origine. Au voisinage de l'origine, nous vérifions alors que l'annulateur de la classe de $(\operatorname{Log} f)^{n-1}/f$ dans le module $R^n\Gamma_{(\mathbb{R}^+)^n}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n})_{,0}$ est l'idéal $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n,0}(f,\Delta_2,\ldots,\Delta_n)$. Il en résulte l'isomorphisme :

$$(\Psi_\pi(\mathscr{M}))_0\simeq\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n,0}(\operatorname{Log}\dot{f})^{n-1}/f\subset R^n\Gamma_{(\mathbb{R}^+)^n}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n})_{,0}$$

Nous allons maintenant calculer pour $\alpha\in[0,1]$, le $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-module : $\operatorname{Gr}_\alpha\mathscr{M}$.

Notation 6.2–4. — Pour $1\leqslant i\leqslant n$, nous notons :

$$\mathscr{R}_i=\{0;-1/a_i;\ldots;-(a_i-1)/a_i\}\qquad\text{et } \mathscr{R}=\textstyle\bigcup_{i=1}^n\mathscr{R}_i$$

$$\widetilde{\mathscr{R}}_i=-1-\mathscr{R}_i=\{-1;(-a_i+1)/a_i;\ldots;-1/a_i\}\qquad\text{et } \widetilde{\mathscr{R}}=\textstyle\bigcup_{i=1}^n\widetilde{\mathscr{R}}_i$$

En particulier $\mathscr{R}$ est l'ensemble des racines de $b_{\delta(t-f)}(s)$. Ainsi, d'après la proposition 4.3–9 :

$$\Psi_\pi(\mathscr{M})=\bigoplus_{\alpha\in\widetilde{\mathscr{R}}}\operatorname{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$$

Commençons par déterminer $V_\alpha(\mathscr{M})$ pour $\alpha\in\widetilde{\mathscr{R}}$.

Notation 6.2–5. — Pour $y\in\mathbb{R}$, désignons par $\overline{E}(y)$ le plus grand entier relatif strictement inférieur à y.

Proposition 6.2–6. — *Pour $\alpha\in\widetilde{\mathscr{R}}$:*

$$V_\alpha(\mathscr{M})=V_0(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})\Big(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\overline{E}(-a_i\alpha)}\Big)\delta(t-f)=\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}\Big(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\overline{E}(-a_i\alpha)}\Big)\delta(t-f)$$

Démonstration. — Notons :

$$c_\alpha(s)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{\alpha<\beta_i\in\widetilde{\mathscr{R}}_i}(s+1+\beta_i)$$

Nous avons alors :

$$c_\alpha(s)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{1\leqslant j<-a_i\alpha}(s+1-j/a_i)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{\overline{E}(-a_i\alpha)}(s+1-j/a_i)$$

Il résulte de la proposition 4.3–9, que pour $\alpha\in\widetilde{\mathscr{R}}$:

$$\frac{V_\alpha(\mathscr{M})}{V_{<-1}(\mathscr{M})}\simeq c_\alpha(t\partial_t)\frac{V_{<0}(\mathscr{M})}{V_{<-1}(\mathscr{M})}$$

Or, nous avons :

$$\begin{aligned}c_\alpha(t\partial_t)\delta(t-f) &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{\overline{E}(-a_i\alpha)}(-1/a_i)(x_i\partial_{x_i}+j)\delta(t-f)\\ &= \prod_{i=1}^{n}(-1/a_i)^{\overline{E}(-a_i\alpha)}\partial_{x_i}^{\overline{E}(-a_i\alpha)}x_i^{\overline{E}(-a_i\alpha)}\delta(t-f)\end{aligned}$$

Il en résulte que $V_\alpha(\mathscr{M})/V_{<-1}(\mathscr{M})$ est le $V_0(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})$-module engendré par la classe de l'élément :

$$\Big(\prod_{i=1}^{n}\partial_{x_i}^{\overline{E}(-a_i\alpha)}x_i^{\overline{E}(-a_i\alpha)}\Big)\delta(t-f)\in V_{<0}(\mathscr{M})$$

Par homogénéité, c'est encore le $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-module engendré par le même élément. Or, d'après le lemme 6.1–4, l'élément $(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\overline{E}(-a_i\alpha)})\delta(t-f)\in V_\alpha(\mathscr{M})$. Ainsi, $V_\alpha(\mathscr{M})/V_{<-1}(\mathscr{M})$ est le $V_0(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})$-module engendré par la classe de l'élément :

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{\overline{E}(-a_i\alpha)}\delta(t-f)$$

La proposition résulte alors du fait que $V_{<-1}(\mathscr{M})=\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i})\delta(t-f)$.

Corollaire 6.2–7. — *Pour $\alpha\in\widetilde{\mathscr{R}}$: $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$ est le $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-module engendré par la classe de $(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\overline{E}(-a_i\alpha)})\delta(t-f)$ dans $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$. De plus, l'annulateur dans $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$ de $(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\overline{E}(-a_i\alpha)})\delta(t-f)$ est l'idéal :*

$$J_\alpha=\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}\Big(\{\Delta_j(\overline{E}(-a_1\alpha),\dots,\overline{E}(-a_n\alpha))\}_{2\leqslant j\leqslant n},\prod_{i=1}^{n}x_i^{\overline{E}(-a_i\mathrm{pred}(\alpha))-\overline{E}(-a_i\alpha)}\Big)$$

où $\mathrm{pred}(\alpha)=\sup\{\beta\in\widetilde{\mathscr{R}}\ ;\ \beta<\alpha\}$ si $-1<\alpha<0$ et $\overline{E}(-a_i\alpha')=a_i$ si $\alpha=-1$. En d'autres termes :

$$\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})\simeq\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}/J_\alpha$$

Démonstration. — Le corollaire se déduit de la proposition 6.2–6 par le lemme 6.1–3.

Nous pouvons noter que les valeurs $\overline{E}(-a_i\mathrm{pred}(\alpha))-\overline{E}(-a_i\alpha)$ intervenant dans le corollaire sont égales à un ou zéro.

Notation 6.2–8. — Notons $d\in\mathbb{N}$ le p.g.c.d. des éléments $(a_1,\dots,a_n)$, et pour $1\leqslant i\leqslant n$, posons : $b_i=a_i/d$

Nous notons que pour $\beta\in\mathbb{R}$: $\overline{E}(-a_i(\beta+(1/d)))=\overline{E}(-a_i\beta)-b_i$. Il en résulte que pour $\alpha\in\widetilde{\mathscr{R}}$, $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})=\mathrm{Gr}_{\alpha+1/d}(\mathscr{M})$. Nous avons en particulier :

Proposition 6.2–9. — $\Psi_\pi(M)\simeq(\bigoplus_{-(1/d)\leqslant\alpha<0}\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}))^d$.

Remarque. — Les modules $\Psi_\pi(M)$, $\Phi_\pi(M)$ et $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$ sont des $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-modules holonomes réguliers supportés par le croisement normal $x_1\cdots x_n = 0$. Nous suivons [**G-G-M**] pour les préciser et les plonger dans des espaces de fonctions associés au croisement normal. Soit $\alpha \in \widetilde{\mathscr{R}}$. Notons $K_\alpha = \{j \in \{1,\dots,n\}; \alpha \in \widetilde{\mathscr{R}}_j\}$ et k_α son cardinal. Considérons le germe à l'origine de $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-module : $R^{k_\alpha}\Gamma_{Z_{K_\alpha}}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n})_{,0}$ limite inductive suivant ε où B_ε est une boule de rayon ε centrée à l'origine de

$$\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}\Big(\prod_{i=1}^n(B_\varepsilon - \mathbf{R}^+)\Big)\Big/\sum_{j\in K_\alpha}\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(W_j\cap B_\varepsilon)$$

où $W_j = \prod_{i=1}^n W_{j,i}$ avec $W_{j,j} = \mathbb{C}$ et $W_{j,i} = \mathbb{C}-\mathbb{R}^+$ si $i \neq j$. Au voisinage de l'origine, nous constatons que l'annulateur de :

$$\Big(\prod_{i=1}^n x_i^{\overline{E}(-a_i\alpha)}\Big)f^\alpha(\operatorname{Log} f)^{k_\alpha-1} \in R^{k_\alpha}\Gamma_{Z_{K_\alpha},0}\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$$

est l'idéal J_α. Il en résulte l'isomorphisme :

$$\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})_0 \simeq \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n,0}\Big(\prod_{i=1}^n x_i^{\overline{E}(-a_i\alpha)}\Big)f^\alpha(\operatorname{Log} f)^{k_\alpha-1} \in R^{k_\alpha}\Gamma_{Z_{K_\alpha}}\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$$

Il nous reste à déterminer $\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M})$. Nous avons :

$$\begin{aligned}V_{<1}(\mathscr{M}) &= (V_0(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}}) + \partial_t V_0(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}}))\delta(t-f)\\ V_{<0}(\mathscr{M}) &= V_0(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})\delta(t-f)\end{aligned}$$

Si $\alpha \in\ ]-1,0[$, l'endomorphisme $t\partial t$ est bijectif sur $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$; en particulier si m appartient à $\in V_\alpha(\mathscr{M}) - V_{<\alpha}(\mathscr{M})$, alors $\partial_t m \in V_{\alpha+1}(\mathscr{M}) - V_{<\alpha+1}(\mathscr{M})$. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}V_0(\mathscr{M}) &= V_0(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}})\delta(t-f) + \partial_t V_{-1}(\mathscr{M})\\ &= \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}\delta(t-f) + \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}\Big(\prod_{i=1}^n x_i^{a_i-1}\Big)\partial_t\delta(t-f)\end{aligned}$$

Nous en déduisons (en utilisant la proposition 6.2–6) que $\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M})$ est le $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-module monogène engendré par $(\prod_{i=1}^n x_i^{a_i-1})\partial_t\delta(t-f)$. Déterminons l'annulateur de ce générateur. Soit $P \in \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$ tel que la classe de $P(\prod_{i=1}^n x_i^{a_i-1})\partial_t\delta(t-f)$ soit nulle dans $\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M})$. Il existe donc un opérateur $Q \in \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$ tel que :

$$P\Big(\prod_{i=1}^n x_i^{a_i-1}\Big)\partial_t\delta(t-f) = Q\delta(t-f)$$

Nous en déduisons que Q est dans l'idéal à gauche engendré par les dérivations ∂_{x_i}, $1 \leqslant i \leqslant n$. L'identité devient :

$$P\Big(\prod_{i=1}^n x_i^{a_i-1}\Big)\partial_t\delta(t-f) = \sum_{i=1}^n Q_i(\partial f/\partial x_i)\partial_t\delta(t-f)$$

où $Q = \sum Q_i \partial_{x_i} \in \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$. En utilisant que l'action sur $\mathscr{M}$ de ∂_t est injective, nous en déduisons que :

$$P \in \sum_{j=1}^{n} \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}\big(\prod_{i=1,i\neq j}^n x_i\big) + \mathrm{Ann}_{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}}\big(\prod_{i=1}^n x_i^{a_i-1}\big)\delta(t-f)$$

Nous avons ainsi montré :

Proposition 6.2–10

$$\begin{aligned}\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}) &= \frac{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}\delta(t-f) + \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(\prod_{i=1}^n x_i^{a_i-1})\partial_t\delta(t-f)}{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}\delta(t-f)}\\ &\simeq \frac{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}}{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(\dots,\{\prod_{i=1,i\neq j}^n x_i\}_{1\leqslant j\leqslant n},\dots,\{\Delta_j(a_1-1,\dots,a_n-1)\}_{1\leqslant j\leqslant n},\dots)}\end{aligned}$$

Exemple. — Dans cet exemple, nous prenons $n = 3$ et pour fonction :

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^4x_2^6x_3^8$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \tfrac{1}{4}x_1\partial_{x_1} - \tfrac{1}{6}x_2\partial_{x_2}, \quad \Delta_3 = \tfrac{1}{4}x_1\partial_{x_1} - \tfrac{1}{8}x_3\partial_{x_3}, \quad d = 2\\ \widetilde{\mathscr{R}}_{x_1} &= \{-1;-\tfrac{3}{4};-\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{4}\}\\ \widetilde{\mathscr{R}}_{x_2} &= \{-1;-\tfrac{5}{6};-\tfrac{2}{3};-\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{3};-\tfrac{1}{6}\}\\ \widetilde{\mathscr{R}}_3 &= \{-1,-\tfrac{7}{8};-\tfrac{3}{4};-\tfrac{5}{8};-\tfrac{1}{2};-\tfrac{3}{8};-\tfrac{1}{4};-\tfrac{1}{8}\}\\ \widetilde{\mathscr{R}} &= \{-1;-\tfrac{7}{8};-\tfrac{5}{6};-\tfrac{3}{4};-\tfrac{2}{3};-\tfrac{5}{8};-\tfrac{1}{2};-\tfrac{3}{8};-\tfrac{1}{3};-\tfrac{1}{4};-\tfrac{1}{6};-\tfrac{1}{8}\}\end{aligned}$$

Donnons le tableau des $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$ pour $\alpha \in]0,-1]$:

$\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$	$(\prod_{i=1}^n x_i^{\overline{E}(-a_i\alpha)})\delta(t-f)$	J_α
$\mathrm{Gr}_{-1/8}(\mathscr{M})$	$\delta(t-f)$	(x_3,Δ_2,Δ_3)
$\mathrm{Gr}_{-1/6}(\mathscr{M})$	$x_3\delta(t-f)$	$(x_2,\Delta_2,\Delta_3+1/8)$
$\mathrm{Gr}_{-1/4}(\mathscr{M})$	$x_2x_3\delta(t-f)$	$(x_1x_3,\Delta_2+1/6,\Delta_3+1/8)$
$\mathrm{Gr}_{-1/3}(\mathscr{M})$	$x_1x_2x_3^2\delta(t-f)$	$(x_2,\Delta_2-1/4+1/6,\Delta_3)$
$\mathrm{Gr}_{-3/8}(\mathscr{M})$	$x_1x_2^2x_3^2\delta(t-f)$	$(x_3,\Delta_2-1/4+2/6,\Delta_3)$
$\mathrm{Gr}_{-1/2}(\mathscr{M})$	$x_1x_2^2x_3^3\delta(t-f)$	$(x_1x_2x_3,\Delta_2-1/4+2/6,\Delta_3+1/8)$
$\mathrm{Gr}_{-5/8}(\mathscr{M})$	$x_1^2x_2^3x_3^4\delta(t-f)$	(x_3,Δ_2,Δ_3)
$\mathrm{Gr}_{-2/3}(\mathscr{M})$	$x_1^2x_2^3x_3^5\delta(t-f)$	$(x_2,\Delta_2,\Delta_3+1/8)$
$\mathrm{Gr}_{-3/4}(\mathscr{M})$	$x_1^2x_2^4x_3^5\delta(t-f)$	$(x_1x_3,\Delta_2+1/6,\Delta_3+1/8)$
$\mathrm{Gr}_{-5/6}(\mathscr{M})$	$x_1^3x_2^4x_3^6\delta(t-f)$	$(x_2,\Delta_2-1/4+1/6,\Delta_3)$
$\mathrm{Gr}_{-7/8}(\mathscr{M})$	$x_1^3x_2^5x_3^6\delta(t-f)$	$(x_3,\Delta_2-1/4+2/6,\Delta_3)$
$\mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M})$	$x_1^3x_2^5x_3^7\delta(t-f)$	$(x_1x_2x_3,\Delta_2-1/4+2/6,\Delta_3+1/8)$

Pour finir détaillons, l'action de la monodromie T sur $\Psi_\pi(\mathscr{M})$. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, nous avons constaté que l'opérateur différentiel $(1/a_i)x_i\partial_{x_i} + t\partial_t + 1$ annulait $\delta(t-f) = 0$. D'après le théorème 5.3–2, le morphisme T de $\Psi_\pi(\mathscr{M})$ correspondant à la monodromie géométrique est $\exp(-2i\pi t\partial_t)$. C'est un morphisme de $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-module ;

il est donc déterminé par sa valeur sur des générateurs $\Psi_\pi(\mathscr{M})$ comme $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-module. Soit $\alpha \in \widetilde{\mathscr{R}}$. Constatons que l'action de $t\partial_t + 1 + \alpha$ sur $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$ est nilpotente d'indice k_α. Ainsi, sur $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$, nous avons :

$$\exp(-2i\pi t\partial_t) = \exp(2i\pi\alpha)\sum_{j=0}^{k_\alpha}(1/j!)(-2i\pi)^j(t\partial_t + 1 + \alpha)^j$$

Pour déterminer T, il reste ainsi à calculer son action sur chaque générateur $(\prod_{i=1}^n x_i^{\overline{E}(-a_i\alpha)})\delta(t-f)$ de $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$, pour $\alpha \in \widetilde{R}$.

Pour obtenir une expression plus explicite de la monodromie, reprenons l'identification :

$$\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})_0 \simeq \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n,0}\Big(\prod_{i=1}^n x_i^{\overline{E}(-a_i\alpha)}\Big)f^\alpha(\mathrm{Log}\, f)^{k_\alpha - 1} \in R^{k_\alpha}\Gamma_{Z_{K_\alpha}}\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$$

Nous constatons :

$$T\Big(\Big(\prod_{i=1}^n x_i^{\overline{E}(-a_i\alpha)}\Big)f^\alpha(\mathrm{Log}\, f)^{k_\alpha-1}\Big) = \exp(2i\pi\alpha)\Big(\prod_{i=1}^n x_i^{\overline{E}(-a_i\alpha)}\Big)f^\alpha(\mathrm{Log}(f) + 2i\pi)^{k_\alpha-1}$$

Nous en déduisons l'action de la monodromie sur $\mathrm{Gr}_\alpha\mathscr{M}$ sous une forme élémentaire.

6.3. Calcul des solutions holomorphes. — Le calcul de $\Psi_f\mathbb{C}$ peut bien sûr se faire directement à partir de sa définition topologique. Par exemple, par un argument de constructibilité, nous pouvons montrer que $(\Psi_f\mathbb{C})_0$ est isomorphe au complexe $R\Gamma(f^{-1}(t),\mathbb{C})$ pour tout $t \in \mathbb{C}$ non nul. Nous vérifions alors que $f^{-1}(t)$ est homéomorphe à d exemplaires de $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ où d désigne toujours le p.g.c.d de $(a_1,\ldots,a_n)$.

Dans ce paragraphe, nous allons déterminer les complexes des solutions holomorphes des modules $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$ pour $0 < \alpha \leqslant -1$ et $\Psi_\pi(\mathscr{M})$ à partir de leurs présentations comme $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-modules. Nous obtenons ainsi explicitement $\Psi_f\mathbb{C}$ à partir de $\Psi_\pi(\mathscr{M})$.

Notation 6.3–1. — Soit $\ell \in \mathbb{N}^n$. Soit $K^\bullet(\ell)$ le complexe de Koszul associé aux opérateurs $\Delta_2(\ell),\ldots,\Delta_n(\ell)$: c'est le complexe $0 \to K^{-n+1}(\ell) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} K^0(\ell) \to 0$, où

$$K^{-i} = \bigoplus_{1\leqslant k_1<\cdots<k_i\leqslant n-1}\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}\, e_{k_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_i}$$

et si $P \in \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$:

$$d(Pe_{k_1}\wedge\ldots\cdots\wedge e_{k_i}) = \textstyle\sum_{j=1}^i(-1)^{j+1}P\Delta_{j+1}(\ell)e_{k_1}\wedge\cdots\wedge \check{e_{k_j}}\wedge\cdots\wedge e_{k_i}$$

Lemme 6.3–2. — *Soit $\ell \in \mathbb{N}^n$. Le complexe $K^\bullet(\ell)$ est une résolution libre du $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-module $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}/\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(\Delta_2(\ell),\ldots,\Delta_n(\ell))$.*

Démonstration. — Le lemme se déduit du fait que les opérateurs $\Delta_j(\ell)$ commutent et que leurs symboles principaux forment une suite régulière.

Soit $\ell, \widetilde{\ell} \in \mathbb{N}^n$. Pour $2 \leqslant j \leqslant n$, nous avons : $\Delta_j(\ell+\widetilde{\ell})x^{\widetilde{\ell}} = x^{\widetilde{\ell}}\Delta_j(\ell)$, où si $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$, $x^\ell = x_1^{\ell_1} \ldots x_n^{\ell_n}$. Par suite le diagramme :

$$\begin{tikzcd} K^{-n+1}(\ell+\widetilde{\ell}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\cdot x^{\widetilde{\ell}}"'] & \cdots \arrow[r, "d"] & K^0(\ell+\widetilde{\ell}) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot x^{\widetilde{\ell}}"] & \dfrac{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}}{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(\Delta_2(\ell+\widetilde{\ell}), \ldots, \Delta_n(\ell+\widetilde{\ell}))} \arrow[d, "\cdot x^{\widetilde{\ell}}"] \\ K^{-n+1}(\ell) \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & K^0(\ell) \arrow[r] & \dfrac{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}}{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(\Delta_2(\ell), \ldots, \Delta_n(\ell))} \end{tikzcd}$$

est commutatif. Nous avons alors :

Lemme 6.3–3. — *Soit $\ell, \widetilde{\ell} \in \mathbb{N}^n$. Le cône du morphisme de complexe :*

$$\begin{tikzcd} K^{-n+1}(\ell+\widetilde{\ell}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\cdot x^{\widetilde{\ell}}"'] & \cdots \arrow[r, "d"] & K^0(\ell+\widetilde{\ell}) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot x^{\widetilde{\ell}}"] & 0 \\ K^{-n+1}(\ell) \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & K^0(\ell) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est une résolution libre du $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}$-module : $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}/\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(x^{\widetilde{\ell}}, \Delta_2(\ell), \ldots, \Delta_n(\ell))$.

Proposition 6.3–4. — *Soit $-1 \leqslant \alpha < 0$ tel que $\alpha \in \widetilde{\mathscr{R}}$ et $\alpha \notin (1/d)\mathbb{Z}$. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$:*

$$\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}}(\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}), \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n})_0 = 0$$

Pour $-1 \leqslant \alpha < 0$ et $\alpha \in (1/d)\mathbb{Z}$:

$$\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}}(\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}), \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n})_0 = 0 \qquad \textit{pour } i \leqslant 0 \textit{ ou } i > n$$
$$\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}}(\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}), \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n})_0 \simeq \Lambda^{i-1}(\mathbb{C}^{n-1}) \qquad \textit{pour } 1 \leqslant i \leqslant n$$

Démonstration. — Soit $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{N}^n$. D'après le lemme 6.3–2, le complexe :

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}}(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}/\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n}(\Delta_2(\ell), \ldots, \Delta_n(\ell)), \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n})$$

est isomorphe au complexe : $0 \to L^0(\ell) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} L^{n-1}(\ell) \to 0$, où

$$L^i(\ell) = \bigoplus_{1 \leqslant k_1 < \cdots < k_i \leqslant n-1} \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}\, e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_i}$$

$$d(ge_{k_1} \wedge \ldots \cdots \wedge e_{k_i}) = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j+1} \Delta_{j+1}(\ell)(g)\, e_{j-1} \wedge e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_i}$$

Supposons $0 \leqslant \ell_i \leqslant b_i - 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Considérons le complexe :

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\} \xrightarrow{\Delta_2(\ell)} \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\} \longrightarrow 0$$

Soit $d_2 \in \mathbb{N}$ le p.g.c.d. de a_1 et a_2. Un calcul élémentaire montre que le complexe précédent est isomorphe au complexe :

$$0 \longrightarrow x_1^{\ell_1}x_2^{\ell_2}\mathbb{C}\{x_1^{a_1/d_2}x_2^{a_2/d_2}, x_3, \ldots, x_n\} \xrightarrow{0} x_1^{\ell_1}x_2^{\ell_2}\mathbb{C}\{x_1^{a_1/d_2}x_2^{a_2/d_2}, x_3, \ldots, x_n\} \longrightarrow 0$$

Le complexe $L^\bullet(\ell)$ est un complexe de Koszul et par itération, nous obtenons que $L^\bullet(\ell)$ est isomorphe au complexe :

$$0 \longrightarrow x^\ell\mathbb{C}\{x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}\} \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} x^\ell\mathbb{C}\{x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}\}\otimes_{\mathbb{C}}\Lambda^{n-1}(\mathbb{C}^{n-1}) \longrightarrow 0$$

De même, nous obtenons que le complexe $L^\bullet(b_1,\ldots,b_n)$ est isomorphe au complexe :

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}\{x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}\} \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} \mathbb{C}\{x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}\}\otimes_{\mathbb{C}}\Lambda^{n-1}(\mathbb{C}^{n-1}) \longrightarrow 0$$

Constatons que si $\ell' \in \mathbb{N}^n$ est tel que $0 \leqslant \ell_i \leqslant \ell'_i \leqslant b_i - 1$, alors le morphisme de complexe $L^\bullet(\ell) \to L^\bullet(\ell')$ de multiplication par $x^{\ell'-\ell}$ est un isomorphisme ; et si $\ell_i < \ell'_i = b_i$, son cône est isomorphe au complexe :

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{0} \Lambda^1(\mathbb{C}^{n-1}) \xrightarrow{0} \Lambda^2(\mathbb{C}^{n-1}) \xrightarrow{0} \cdots$$

D'après la proposition 6.2–9, nous pouvons supposer $\alpha \in \widetilde{\mathscr{R}}$ et $-1/d \leqslant \alpha < 0$. Il en résulte pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\overline{E}(-a_i\alpha) \leqslant b_i - 1$ et avec les notations du corollaire 6.2–7 que $\overline{E}(-a_i\mathrm{pred}\,(-1/d)) = b_i$. La proposition résulte alors du lemme 6.3–3.

La monodromie géométrique T agit sur les complexes des solutions holomorphes de chaque $\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M})$ pour $\alpha \in \widetilde{\mathscr{R}}$. L'opérateur $T - \exp(2i\pi(-\alpha))$ est nilpotent d'indice de nilpotence égal à $k_\alpha - 1$ où k_α est le cardinal de $K_\alpha = \{i \in \{1,\ldots,n\} ; \alpha \in \widetilde{\mathscr{R}}_i\}$.

6.4. Le cas d'une fonction d'une seule variable. — Soit $a \in \mathbb{N}^*$, un entier naturel non nul. Nous considérons dans ce paragraphe la fonction :

$$f\ :\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\ :\ x \longmapsto x^a$$

Les complexes $\Psi_f\underline{\mathbb{C}}$ et $\Phi_f\underline{\mathbb{C}}$ sont des complexes de faisceaux d'espaces vectoriels supportés par l'origine de $\mathbb{C}$ et correspondent donc à des complexes d'espaces vectoriels. Par un calcul élémentaire, nous obtenons les faits suivants :

i) Le complexe $\Psi_f\underline{\mathbb{C}}$ n'a de la cohomologie qu'en degré 0.

ii) Le triangle $\underline{\mathbb{C}}_{f^{-1}(0)} \to \Psi_f\underline{\mathbb{C}} \to \Phi_f\underline{\mathbb{C}}$ est isomorphe au triangle défini par la suite exacte d'espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{i} \mathbb{C}^a \xrightarrow{p} \frac{\mathbb{C}^a}{\mathbb{C}(1,\ldots,1)} \longrightarrow 0$$

où p est le morphisme de passage au quotient et i celui défini par $i(\lambda) = (\lambda,\ldots,\lambda)$.

iii) Le morphisme de monodromie sur $\Psi_f\underline{\mathbb{C}}$ correspond à l'endomorphisme de $\mathbb{C}^a$ qui a pour matrice dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Posons $\mathscr{M} = \mathscr{O}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}}[1/t-f]/\mathscr{O}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}}$. Le calcul algébrique du triangle :

$$\Phi_\pi(\mathscr{M}) \longrightarrow \Psi_\pi(\mathscr{M}) \longrightarrow Li^*\mathscr{M}$$

se déduit des calculs du paragraphe 6.2. Dans ce cas particulier, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gr}_\alpha(\mathscr{M}) &= 0 \quad \text{pour } \alpha \notin (1/a)\mathbb{Z}\\
\mathrm{Gr}_{j/a}(\mathscr{M}) &\simeq \mathscr{D}_{\mathbb{C}}/\mathscr{D}_{\mathbb{C}}x \quad \text{pour } j \in \mathbb{Z}-\{0\}\\
\mathrm{Gr}_0(\mathscr{M}) &= 0\\
\Psi_\pi(\mathscr{M}) &= \bigoplus_{0\leqslant j\leqslant a-1} \mathrm{Gr}_{-j/a}(\mathscr{M}) \simeq (\mathscr{D}_{\mathbb{C}}/(\mathscr{D}_{\mathbb{C}}x))^a\\
\Phi_\pi(\mathscr{M}) &= \bigoplus_{1\leqslant j\leqslant a-1} \mathrm{Gr}_{-j/a}(\mathscr{M}) \simeq (\mathscr{D}_{\mathbb{C}}/\mathscr{D}_{\mathbb{C}}x)^{a-1}
\end{aligned}$$

Le triangle : $\Phi_\pi(\mathscr{M}) \to \Psi_\pi(\mathscr{M}) \to \mathbf{L}i^*\mathscr{M}$ correspond à la suite exacte naturelle de $\mathscr{D}_{\mathbb{C}}$-modules :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigoplus_{1\leqslant j\leqslant a-1} \mathrm{Gr}_{-j/a}(\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \bigoplus_{0\leqslant j\leqslant a-1} \mathrm{Gr}_{-j/a}(\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Gr}_{-1}(\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0\\
0 \arrow[r] & (\mathscr{D}_{\mathbb{C}}/\mathscr{D}_{\mathbb{C}}x)^{a-1} \arrow[r] & (\mathscr{D}_{\mathbb{C}}/(\mathscr{D}_{\mathbb{C}}x))^a \arrow[r] & \mathscr{D}_{\mathbb{C}}/\mathscr{D}_{\mathbb{C}}x \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Détaillons enfin l'action de la monodromie sur $\Psi_\pi(\mathscr{M})$. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$(t\partial_t + (1/a)\partial_x x + 1 - (\ell+1)/a)x^\ell\delta(t-x^a) = 0.$$

Ainsi l'action de l'opérateur $t\partial_t$ dans $\mathrm{Gr}_{-(1+\ell)/a}(\mathscr{M})$ correspond à celle de la multiplication par $(\ell+1)/a$. D'après le théorème 5.3–2, le morphisme de $\Psi_\pi(\mathscr{M})$ correspondant à la monodromie géométrique est $\exp(-2i\pi t\partial_t)$. Il en résulte que ce morphisme agit sur $\mathrm{Gr}_{-(1+\ell)/a}(\mathscr{M})$ comme la multiplication par $e^{-2i\pi(\ell+1)/a}$. Compte-tenu de la décomposition de $\Psi_\pi(\mathscr{M})$, le morphisme de monodromie s'exprime à l'aide de la matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & e^{-2i\pi(2/a)} & \\ 0 & & & e^{-2i\pi(1/a)} \end{pmatrix}$$

Références

[G-G-M] A. Galligo, M. Granger & Ph. Maisonobe – « $\mathscr{D}$-modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal II », in *Systèmes différentiels et singularités*, Astérisque, vol. 130, Société Mathématique de France, 1985, p. 240–259.

[G-M] M. Granger & Ph. Maisonobe – « A basic course on differential modules », in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels*, Les cours du CIMPA, Travaux en cours, vol. 45, Hermann, Paris, 1993, p. 103–168.

[Gr] P.A. Griffiths – « Periods of integrals on algebraic manifolds : summary and discussion of open problems », *Bull. Amer. Math. Soc.* **76** (1970), p. 228–296.

[G] A. Grothendieck – « Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets », in *Dix exposés sur la Cohomologie des Schémas*, Advanced Studies in pures Math., vol. 3, North-Holland, 1968, p. 215–305.

[SGA7] A. Grothendieck, P. Deligne & N. Katz – *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1967-69, Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique I, II*, Lect. Notes in Math., vol. 280, 340, Springer-Verlag, 1972-1973.

[K1] M. Kashiwara – « B-functions and holonomic systems », *Invent. Math.* **38** (1976), p. 33–53.

[K2] ______, « Vanishing cycles sheaves and holonomic systems of differential equations », in *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, Lect. Notes in Math., vol. 1016, Springer-Verlag, 1983, p. 134–142.

[Ka1] N. Katz – « Nilpotent connections and the monodromy theorem », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **39** (1971), p. 175–232.

[Ka2] ______, « The regularity theorem in algebraic geometry », in *C.I.M. Nice (1970)*, vol. I, 1970, p. 437–443.

[Le] Lê D.T. – « The geometry of the monodromy theorem », in *C.P. Ramanujan, a Tribute*, Tata Inst., Bombay, 1978, p. 157–173.

[M-T] Ph. Maisonobe & T. Torrelli – « Image inverse en théorie des $\mathscr{D}$-modules », ce volume.

[M1] B. Malgrange – « Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée », Lect. Notes in Math., vol. 459, Springer-Verlag, 1975, p. 98–119.

[M2] ______, « Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente », in *Analyse et topologie sur les espaces singuliers*, Astérisque, vol. 101-102, Société Mathématique de France, 1983, p. 243–267.

[Me1] Z. Mebkhout – « Le théorème de positivité de l'irrégularité pour les $\mathscr{D}_X$-modules », in *The Grothendieck Festschrift*, Progress in Math., vol. 88, no. 3, Birkhäuser, Basel, Boston, 1990, p. 83–131.

[Me2] ______, « Le théorème de comparaison entre cohomologies de de Rham d'une variété algébrique complexe et le théorème d'existence de Riemann », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **69** (1989), p. 47–89.

[Me3] ______, « Le Théorème de Positivité, le Théorème de Comparaison et le Théorème d'existence de Riemann », ce volume.

[M-N] Z. Mebkhout & L. Narváez-Macarro – « Le théorème de constructibilité de Kashiwara », in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels*, Les cours du CIMPA, Travaux en cours, vol. 46, Hermann, Paris, 1993, p. 47–98.

[M-S] Z. Mebkhout & C. Sabbah – « $\mathscr{D}$-modules et cycles évanescents », (Paris), Travaux en cours, vol. 35, Hermann, 1989, p. 201–238.

[Mi] J. Milnor – *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. studies, vol. 61, Princeton University Press, 1968.

[S] C. Sabbah – « $\mathscr{D}$-modules et cycles évanescents (d'après B. Malgrange et M. Kashiwara) », in *Conférence de La Rábida 1984*, vol. III, Hermann, Paris, 1987, p. 53–98.

Ph. Maisonobe, UFR des Sciences, Université de Nice, Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 2
E-mail : phma@math.unice.fr

Z. Mebkhout, UFR de Mathématiques, Université de Paris 7, 175 rue du Chevaleret, F-75013 Paris
E-mail : mebkhout@math.jussieu.fr