Séminaires & Congrès
9, 2004, p. 99–123

LE SYSTÈME DE NAVIER-STOKES INCOMPRESSIBLE SOIXANTE DIX ANS APRÈS JEAN LERAY

par

Jean-Yves Chemin

Résumé. — Ce texte commence par une analyse de l'article fondamental de Jean Leray sur les équations de Navier-Stokes et un bref survol du problème de la régularité globale. Puis, nous étudions les propriétés lagrangiennes des solutions des équations de Navier-Stokes. Dans une dernière section, nous établissons une estimation qui décrit en particulier l'effet régularisant de l'équation de Navier-Stokes en termes d'analyticité.

***Abstract* (The noncompressible Navier-Stokes system seventy years after Jean Leray)**
This text first analyzes the seminal paper of Jean Leray about Navier-Stokes equations. Then we present a brief overview of the problem of global regularity. Then we study lagrangian properties of the solutions of Navier-Stokes equations. In the last section, we establish an estimate which describes the regularization effect of the Navier-Stokes equations in terms of analyticity.

Introduction

Ce texte contient une première partie sur l'historique de la résolution des équations de Navier-Stokes et une seconde partie où nous présentons quelques méthodes ou résultats nouveaux sur les solutions de cette équation, notamment du point de vue de l'existence et de l'unicité de trajectoires et du point de vue de leur régularité analytique. Nous nous limiterons au cas de l'espace entier à trois dimensions, car comme le dit Jean Leray dans l'introduction de son article fondamental (voir [**19**]) « Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace » paru dans la revue Acta Mathematica en 1934 : « *l'absence de parois introduit certes quelques complications concernant l'allure à l'infini des fonctions inconnues, mais simplifie beaucoup l'exposé et met mieux en lumière les difficultés essentielles ; le rôle important que joue l'homogénéité des formules est plus évident ; (les équations aux dimensions permettent de prévoir a priori presque toutes les inégalités que nous écrivons)* ».

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 35Q30, 76D05, 34A12.
Mots clefs. — Fluide incompressible, théorie de Littlewood-Paley, équation différentielle ordinaire.

La première section du présent texte consiste en une analyse de l'article de Jean Leray. Elle est en partie reprise d'un texte paru dans le numéro spécial de la Gazette des Mathématiciens dédié à sa mémoire (voir [**9**]). Nous nous sommes attachés à montrer combien le texte de Jean Leray était novateur et combien les problèmes posés dans ce texte sont restés d'actualité. Nous espérons que cette section sera une incitation à sa lecture.

La deuxième section est un historique de l'unicité globale à petites données dans les normes invariantes par les changements d'échelle de l'équation. Nous irons du théorème de Fujita-Kato dans l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^{1/2}$ jusqu'à celui de Koch-Tataru dans l'espace des dérivées de fonctions BMO.

La troisième section est dévolue à l'étude des propriétés lagrangiennes de ses solutions. En d'autre termes, nous démontrons un théorème de type Cauchy-Lipschitz pour les solutions considérées dans la section précédente. Ceci s'inspire d'un article de N. Lerner et de l'auteur (voir [**10**]).

Enfin, dans la quatrième et dernière section nous étudions les propriétés d'analyticité des solutions dans le cadre de solutions associées à des données initiales dans l'espace de Sobolev $H^{1/2}$. Les résultats que nous obtenons dans ce domaine ne sont pas réellement nouveaux et ont déjà été démontré en particulier par P.-G. Lemarié-Rieusset dans [**17**]. Toutefois, la méthode de démonstration, basée sur l'utilisation d'une quantité non linéaire qui décrit la régularité analytique de la solution, nous a paru mériter d'être écrite.

Il va de soi que le présent texte n'est pas un exposé exhaustif sur le sujet. Pour des expositions plus complètes du sujet, le lecteur pourra consulter les ouvrages [**5, 11, 18, 24, 25, 29**].

1. L'article fondateur de Jean Leray

Avant de d'analyser le texte fondateur du sujet, nous allons esquisser le contexte dans lequel il a vu le jour. Au tout début du XX$^{\text{e}}$ siècle, la question de l'existence globale ou de la régularité des solutions des équations aux dérivées partielles de la mécanique des fluides ne semble pas hanter les esprits ; à cet égard, le court livre d'Henri Poincaré intitulé « Théorie des tourbillons » est exemplaire : traitant de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles, ce livre ne mentionne pas le problème de la régularité minimale nécessaire à l'existence de solutions, ni celui de leur existence globale qui sont les problèmes qui font aujourd'hui le pain quotidien de tout mathématicien étudiant les équations aux dérivées partielles non linéaires.

À la fin des années vingt, ce problème semble devenu d'une grande actualité. Parallèlement aux travaux d'Oseen sur l'équation de Navier-Stokes, publiés en 1911 et 1912 dans Acta Mathematica (voir [**27**] et [**28**]), le problème de l'existence et de l'unicité en temps petit des solutions de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles est abordé et résolu par Lichtenstein entre 1927 et 1930 dans la série d'articles [**20, 21, 22, 23**]. Puis l'existence globale en dimension deux est démontrée par Wolibner en 1933 dans [**32**]. Les travaux de Jean Leray participent de ce grand mouvement.

L'article de Jean Leray commence par une introduction de quatre pages dépourvue de tout symbole mathématique, où le but de l'article est clairement expliqué : il s'agit de valider mathématiquement la théorie de Navier (le nom de Stokes n'apparaît jamais dans l'article) relative au mouvement d'un fluide visqueux. Le programme consiste à démontrer (ou à nier) l'existence et l'unicité globale de solutions pour le système de Navier-Stokes incompressible(1). Cette introduction indique la source d'inspiration, à savoir les deux articles de C. Oseen de 1911 et 1912 (voir [**27**] et [**28**]) et annonce des résultats révolutionnaires : l'existence de solutions globales dites turbulentes, c'est-à-dire très irrégulières.

Le problème de leur régularité et donc de leur unicité, est posé et résolu par l'affirmative dans le cas d'une donnée « suffisamment voisine du repos ». Les problèmes de l'unicité globale et de l'apparition d'une singularité sont posés ; ils restent, comme nous le verrons, d'une très grande actualité.

Le premier chapitre de l'article commence par l'exposé des notations puis procède à divers rappels sur la théorie de l'intégration. Ces rappels nous montrent que la théorie de l'intégration n'était pas, pour le lecteur d'alors, aussi familière qu'elle l'est pour celui d'aujourd'hui.

Le paragraphe 6 de ce chapitre consiste en la démonstration, à l'aide d'intégrations par parties, d'une inégalité de Hardy, pour les fonctions u de classe C^1 telles que u et ses dérivées partielles soient de carré intégrable, à savoir

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|^2} |u(x)|^2 dx \leqslant 4\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Le paragraphe 7 de ce chapitre contient, ni plus ni moins la définition de l'espace que nous désignons aujourd'hui sous la vocable d'espaces de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^3)$. Jean Leray motive ainsi sa définition : considérons une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ telles qu'elles mêmes et leur dérivées partielles soient de carré intégrable. En supposant que la suite $\big(\partial u_n/\partial y_i\big)_{n\in\mathbb{N}}$ soit faiblement convergente vers $u_{,\,i}$ et en posant

$$u(x) \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^3}\, u_{,\,i}(y) dy,$$

Jean Leray démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement dans l'espace $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ et que de plus, on a, pour toute fonction a de classe C^1 de carré sommable ainsi que

(1) Nous adoptons ici l'usage contemporain qui veut que l'on nomme ainsi ce système d'équations aux dérivées partielles.

ses dérivées premières,

$$\int_{\mathbb{R}^3} u(y)\frac{\partial a}{\partial y_i}(y)dy = -\int_{\mathbb{R}^3} u_{,i}(y)a(y)dy. \tag{1}$$

Vient alors la définition suivante que je cite :

« ***Définition des quasi-dérivées***. — *Soient u et $u_{,i}$ deux fonctions de carrés sommables sur $\mathbb{R}^3$; nous dirons que $u_{,i}$ est la quasi-dérivée de $u(y)$ par rapport à y_i quand la relation* (1) *sera vérifiée ; rappelons que dans cette relation* (1) *$a(y)$ représente une quelconque des fonctions admettant des dérivées premières continues, qui sont, comme ces fonctions elles-mêmes, de carrés sommables sur $\mathbb{R}^3$.* »

Dans la présentation de cette définition, Jean Leray démontre au passage que l'inclusion de l'espace $H^1(\mathbb{R}^3)$ dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ est compacte, ce qui sera crucial dans la suite.

Ensuite, vient dans le paragraphe 8 l'exposé de la régularisation par convolution, puis dans le paragraphe 9, la démonstration du fait que régularisation et quasi-dérivation commutent et enfin la démonstration de la formule de Leibnitz pour les fonctions de $H^1(\mathbb{R}^3)$.

Le deuxième chapitre s'intitule « Mouvements infiniment lents ». Sous ce titre, se cache l'étude de l'équation linéarisée, c'est-à-dire l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \nabla p = X \\ \qquad\qquad \operatorname{div} v = 0 \\ \qquad\qquad v_{|t=0} = v_0. \end{cases}$$

Le fait de travailler sur l'espace tout entier simplifie grandement ce chapitre qui s'appuie essentiellement sur les travaux d'Oseen de 1911 et utilise la représentation explicite de la solution de l'équation de la chaleur et la projection sur les champs de vecteurs de divergence nulle définie au moyen d'une convolution. Il s'agit de démontrer toutes les inégalités qui seront utiles dans les chapitres suivants.

Le troisième chapitre dont le titre est « Mouvements réguliers » étudie les solutions dites classiques du système de Navier-Stokes, c'est-à-dire les solutions (v,p) de

$$(NS_\nu) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\cdot\nabla v - \nu\Delta v = -\nabla p \\ \qquad\qquad \operatorname{div} v = 0 \\ \qquad\qquad v_{|t=0} = v_0. \end{cases}$$

telles que v soit de classe C^2 et p de classe C^1. Dans tout ce chapitre, la notion de quasi-dérivée n'intervient pas. Après avoir démontré l'effet régularisant du système de Navier-Stokes, en d'autres termes après avoir démontré qu'une solution classique est de classe C^∞ juste après l'instant initial, Jean Leray démontre le théorème suivant :

Théorème. — *Soit v_0 une donnée initiale telle que v_0 et $\partial v_0/\partial y_i$ soient continues et de carrés sommables sur $\mathbb{R}^3$. On suppose de plus que v_0 est bornée. Il existe un unique temps maximal tel qu'il existe une solution classique sur l'intervalle $[0,T[$ telle que*

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla v(t')\|_{L^2}^2 dt' = \|v_0\|_{L^2}^2.$$

La démonstration repose sur un schéma itératif dont la convergence est démontrée dans les espaces convenables.

Le plus important dans ce chapitre est constitué par les « critères d'irrégularité ». La question est la suivante :

Que doit-il se passer pour que le temps maximal d'existence T soit fini ? Le problème est bien évidemment crucial, car si les solutions régulières étaient globales, (*i.e.* $T = \infty$), le concept de solutions « turbulentes » (c'est-à-dire irrégulières) que Jean Leray va définir dans la suite perdrait beaucoup de son intérêt. Les résultats obtenus sont les suivants : si le temps maximal d'existence T est fini, alors

– pour tout $t \leqslant T$, on a

$$\|\nabla v(t)\|_{L^2} \geqslant \frac{C\nu^{3/4}}{(T-t)^{1/4}},$$

– pour tout réel $p \in]3,\infty[$, il existe une constante C_p telle que l'on ait, pour tout réel $t \leqslant T$,

$$\|v(t)\|_{L^p} \geqslant \frac{C_p \nu^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{p}\right)}}{(T-t)^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{p}\right)}}. \tag{2}$$

Ces critères d'irrégularité sont obtenus par minoration du temps d'existence des solutions régulières.

Jean Leray pense que cette rupture de régularité se produit effectivement et propose une méthode pour produire des solutions singulières ; ce sont les solutions autosimilaires. Ce sont les solutions du type

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} V\left(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\right).$$

Des calculs aisés montrent d'une part que les champs de vecteurs v définis ci-dessus vérifient bien les conditions nécessaires d'apparition d'une singularité et d'autre part que, si v est solution du système de Navier-Stokes, alors V est solution du système

$$-\nu\Delta V + V + x\cdot\nabla V + V\cdot\nabla V = -\nabla P. \tag{3}$$

Jean Leray dit, à propos de ce système, « *Je n'ai malheureusement pas réussi à faire l'étude* [de ce] *système. Nous laisserons donc en suspens cette question de savoir si des irrégularités peuvent ou non se présenter* ».

En 1996, J. Neças, M. Ruczicka et V. Sverák ont démontré dans [**26**] que le système (3) n'avait pas de solution non triviale. Ainsi se trouvait ruiné l'espoir de construire des solutions singulières par cette méthode. La question de la possible apparition ou non d'une singularité est donc plus ouverte que jamais. Une question que l'on peut se poser au vu du résultat de J. Neças, M. Ruczicka et V. Sverák est la suivante : peut-on imaginer qu'une singularité apparaisse alors que la norme L^3 de la solution reste bornée ? La réponse à cette question vient d'être donnée très récemment L. Escauriaza, G. Seregin et V. Sverák qui démontrent dans [**13**] que s'il apparaît une singularité au temps T, alors

$$\limsup_{t\to T} \|v(t)\|_{L^3} = \infty.$$

Revenons à l'article de Jean Leray. Parallèlement à ces critères d'irrégularité, Jean Leray donne des conditions suffisantes à l'existence globale : il existe une constante c telle que, si la donnée initiale v_0 est telle que

$$\|v_0\|_{L^2}^2 \|v_0\|_{L^\infty} \leqslant c\nu^3 \quad \text{ou} \quad \|v_0\|_{L^2} \|\nabla v_0\|_{L^2} \leqslant c\nu^2,$$

alors la solution est globalement régulière.

L'évolution de ce type de résultats et le point sur les connaissances actuelles sur ce problème sont l'objet de la section suivante.

Le quatrième chapitre entreprend de considérer des données initiales moins régulières, l'effet régularisant permettant de rester dans le cadre des solutions classiques sitôt passé l'instant initial. Le théorème obtenu par Jean Leray est le suivant.

Théorème. — *Si la donnée initiale est dans l'espace $H^1(\mathbb{R}^3)$ et de quasi-divergence nulle, il existe alors un unique temps maximal strictement positif T tel qu'il existe une unique solution v qui soit de classe C^∞ sur $]0, T[$, continue en temps à valeurs $L^2(\mathbb{R}^3)$, telle que $v \in L^2_{\rm loc}([0, T[; L^\infty)$ et telle que*

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla v(t')\|_{L^2}^2 dt' = \|v_0\|_{L^2}^2.$$

Le cinquième chapitre, intitulé « Solutions turbulentes », est consacré à la construction de ces solutions que nous appelons aujourd'hui souvent « à la Leray » et qui sont associées à des données initiales appartenant à l'espace L^2.

La méthode utilisée par Jean Leray dans le paragraphe 26 consiste à remplacer le système originel par un système où le terme de transport $v \cdot \nabla$ est régularisé par convolution, c'est-à-dire remplacé par un terme du type $\chi_n \star v$ où χ est une fonction indéfiniment différentiable à support compact positive d'intégrale 1 et où $\chi_n(x) \stackrel{\text{déf}}{=} n^3\chi(nx)$. Le système devient alors le suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_n}{\partial t} + (\chi_n \star v_n) \cdot \nabla v_n - \nu \Delta v_n = -\nabla p_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \operatorname{div} v_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad v_{n|t=0} = \chi_n \star v_0. \end{cases}$$

Toutes les inégalités précédemment démontrées sur le système de Navier-Stokes sont valables sur ce système régularisé. L'existence d'une constante C telle que l'on ait

$$\|\chi_n \star v_n\|_{L^\infty} \leqslant Cn^{\frac{3}{2}} \|v_n(t)\|_{L^2}$$

jointe à la conservation de l'énergie permet de démontrer facilement que

$$\|v_n(t)\|_{L^\infty} \leqslant Cn^{3/2}\|v_0\|_{L^2} \int_0^t \frac{\|v_n(t')\|_{L^\infty}}{\sqrt{\nu(t-t')}}dt',$$

ce qui implique que, pour chaque n, la solution du système régularisé reste bornée, ce qui est incompatible avec la condition (2) d'apparition d'une singularité. Donc, le problème régularisé admet des solutions globales régulières. En langage moderne, il s'agit maintenant de passer à la limite faible dans le système régularisé. De nos jours, les termes linéaires ont cessé de poser problème, mais l'on sait que le passage à la limite faible peut être redoutablement difficile dans les termes non linéaires. C'est devenu l'un des grands types de problème des équations aux dérivées partielles non linéaires contemporaines.

Pour passer à la limite, il faut utiliser ce qui est indépendant de n, c'est-à-dire ici l'estimation d'énergie. En faisant une estimation d'énergie avec poids, Jean Leray surmonte les problèmes à l'infini en démontrant l'inégalité suivante

$$\frac{1}{2}\int_{|x|\geqslant R_2} |v_n(t,x)|^2 dx \leqslant \frac{1}{2}\int_{|x|\geqslant R_1} |v_{0,n}(x)|^2 dx + \frac{\|v_{0,n}\|_{L^2}^2\sqrt{\nu t}}{R_2-R_1} + \frac{\|v_{0,n}\|_{L^2}^3 t^{1/4}}{2^{1/4}\pi^{1/2}\nu^{3/4}(R_2-R_1)}.$$

De ceci, il est aisément déduit que, pour tout réel strictement positif η et pour tout temps t, il existe un réel $s(\eta,t)$, dépendant continûment de η et t, tel que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3\smallsetminus B(0,s(\eta,t))} |v_n(t,x)|^2 dx \leqslant \eta. \tag{4}$$

Ensuite, en utilisant le théorème de Helly et le fait que l'inclusion de $H^1(\mathbb{R}^3)$ dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ est compacte, Jean Leray démontre que, quitte à extraire, les propriétés suivantes sont satisfaites, pour tout t :

– la suite $(v_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un champ de vecteurs $v(t)$ dans L^2 ; la quasi-divergence de ce champ de vecteur étant nulle ;

– la suite $(\|v_n(t)\|_{L^2})_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers une fonction $W(t)$ qui domine $\|v(t)\|_{L^2}$.

De plus, l'estimation d'énergie implique que

$$\int_0^\infty \Big(\liminf_{n\to\infty} \|\nabla v_n(t)\|_{L^2}\Big)^2 dt \leqslant \frac{1}{2\nu}\|v_{0,n}\|_{L^2}^2.$$

Ainsi, pour presque tout t_1, on peut extraire une sous-suite $(v_{\varphi(n)}(t_1))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les dérivées partielles de $v_{\varphi(n)}(t_1)$ converge faiblement... vers les quasi-dérivées de $v(t_1)$ d'après le premier chapitre.

Ainsi donc, pour presque tout t_1, le champ de vecteurs $v(t_1)$ appartient à $H^1(\mathbb{R}^3)$. À nouveau, la compacité de l'injection de $H^1(\mathbb{R}^3)$ dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ jointe à l'inégalité (4) implique que, pour presque tout t, la suite $(v_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $v(t)$ fortement dans L^2, et que, pour tout couple de réels (t, t') tels que $t \leqslant t'$

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_t^{t'} \|\nabla v(t'')\|_{L^2}^2 dt'' \leqslant \|v(t')\|_{L^2}^2,$$

l'égalité ayant lieu pour presque tout couple (t, t').

Le sixième et dernier chapitre est consacré à l'étude de ces solutions turbulentes. Le premier paragraphe est consacré à ce que l'on appelle un théorème d'unicité « forte-faible ». Voici ce dont il s'agit. Lorsqu'il existe une solution turbulente et une solution régulière (ou semi-régulière au sens du quatrième chapitre) associées à une même donnée initiale, ces deux solutions coïncident. La méthode de démonstration consiste à estimer la distance, pour la norme d'énergie entre une solution turbulente $\widetilde{v}$ et une solution semi-régulière v, c'est-à-dire la quantité suivante :

$$\|\widetilde{v}(t) - v(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla(\widetilde{v}(t') - v(t'))\|_{L^2}^2 dt'.$$

En utilisant les propriétés de régularité de $\widetilde{v}$ et v, Jean Leray démontre que

$$\|\widetilde{v}(t) - v(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla(\widetilde{v}(t') - v(t'))\|_{L^2}^2 dt' \leqslant \|\widetilde{v}(0) - v(0)\|_{L^2}^2 \exp\left(\frac{1}{2\nu} \int_0^t \|\nabla v(t')\|_{L^2}^2 dt'\right).$$

Plus qu'un résultat d'unicité, c'est en fait un résultat de stabilité.

Cette méthode de démonstration fournit les meilleurs résultats d'unicité « forte-faible » actuellement connus comme le montre le livre de Von Wahl (voir [**30**]), où il est démontré que, si l'on a une solution continue en temps à valeurs $L^3 \cap L^2$, alors, cette solution coïncide avec toute solution turbulente.

Ensuite, la régularité des solutions turbulentes est précisément décrite ; elles sont indéfiniment différentiables sur $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^3$, où $\mathcal{O}$ est le complémentaire d'un fermé de mesure nulle.

Un très grand nombre de travaux ont été consacrés à la description de la régularité de ces solutions. On peut considérer que le plus précis est l'article de L. Caffarelli, R. Kohn et L. Nirenberg publié de 1982 (voir [**4**]). Dans cet article, les auteurs obtiennent une majoration extrêmement précise de la dimension de l'ensemble singulier en construisant une théorie de la mesure géométrique anisotrope en (t, x) et adaptée à la structure de l'équation de la chaleur.

L'article se conclut par un paragraphe intitulé « Compléments relatifs aux intervalles de régularité et à l'allure d'une solution des équations de Navier pour les grandes valeurs de temps ».

Le premier résultat concerne les instants de possible apparition d'une singularité. Soit $]t_0, t_1[$ un intervalle sur lequel la solution est régulière et supposons t_1 soit un instant singulier. D'après la condition nécessaire d'apparition d'une singularité (2), on a, pour tout t dans l'intervalle $]t_0, t_1[$,

$$\|\nabla v(t)\|_{L^2}^2 \geqslant C\nu^{3/2}(t_1 - t)^{-1/2}.$$

L'estimation d'énergie permet alors affirmer que

$$t_1 \leqslant \theta \stackrel{\text{déf}}{=} c\nu^5 \|v_0\|_{L^2}^4.$$

Ainsi donc, comme le dit Jean Leray « *il existe un intervalle de régularité qui contient cette époque θ et qui s'étend jusqu'à $+\infty$. Un mouvement régulier jusqu'à l'époque θ ne devient jamais irrégulier* ». Ensuite, les questions de décroissance à l'infini sont abordées. Par des techniques analogues, Jean Leray démontre que, si $t \leqslant \theta$ alors

$$\|\nabla v(t)\|_{L^2} \leqslant c\|v_0\|_{L^2}(\nu t)^{-1/2} \quad \text{et} \quad \|v(t)\|_{L^\infty} \leqslant C\|v_0\|_{L^2}(\nu t)^{-3/4}.$$

L'article se conclut ainsi : « *J'ignore si* $[\|v(t)\|_{L^2}]$ *tend nécessairement vers* 0 *quand t augmente indéfiniment ?* »

La réponse est oui, et le problème de la décroissance de l'énergie a été résolu par M. Wiegner dans [**31**]. Sous des hypothèses d'appartenance à un espace de Sobolev d'indice négatif pour la donnée initiale, M. Wiegner démontre, en utilisant l'analyse de Fourier, que la norme L^2 décroît comme $t^{-5/4}$ à l'infini et que ce résultat est essentiellement optimal. La difficulté provient du fait que, dans tout l'espace, il n'y a pas d'inégalité de Poincaré et donc les solutions de l'équation de la chaleur ne sont pas nécessairement exponentiellement décroissantes en temps.

Des résultats très récents de L. Brandolese (voir [**3**]) montrent que sous des contraintes fortes sous les données initiales (notamment des contraintes de symétrie), il est possible d'améliorer le taux de décroissance en temps.

Cet article de Jean Leray était pionnier. La définition des quasi-dérivées, des champs de vecteurs L^2 de divergence nulle et la définition des solutions turbulentes ouvraient une voie royale aux espaces de Sobolev et à la théorie des distributions ; c'est un pas en avant fondamental dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Les solutions d'une équation aux dérivées partielles d'évolution du deuxième ordre ne sont pas des fonctions de classe C^2, ni même de classe C^1, ni même bornées ! On perçoit très bien la force de cette innovation au soin qu'apporte Jean Leray à préciser où ces solutions turbulentes sont singulières ; elles ne peuvent l'être que sur un ensemble de mesure nulle.

2. De l'espace $H^{1/2}$ jusqu'à ∂BMO.

Tout d'abord, H. Fujita et T. Kato ont démontré dans [**14**] l'existence d'une constante c telle que, si la donnée initiale v_0 est telle que

$$\|v_0\|_{\dot H^{1/2}}^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|\, |\widehat{v}_0(\xi)|^2 d\xi \leqslant c\nu^2,$$

alors la solution est globale. Ici, comme dans toute la suite, $\widehat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f. Cette norme est la norme de l'espace de Sobolev homogène d'indice $1/2$ et l'on a bien sûr $\|v_0\|^2_{\dot{H}^{1/2}} \leqslant \|v_0\|_{L^2}\|\nabla v_0\|_{L^2}$.

En 1983, T. Kato généralise les résultats précédents en démontrant l'existence d'une constante c telle que, si la donnée initiale v_0 est telle que

$$\|v_0\|^3_{L^3} \leqslant c\nu^3,$$

alors la solution est globale. Remarquons que l'on a clairement $\|v_0\|^3_{L^3} \leqslant \|v_0\|^2_{L^2}\|v_0\|_{L^\infty}$ et qu'il existe une constante C telle que $\|v_0\|_{L^3} \leqslant C\|v_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}$.

La méthode de démonstration utilisée par T. Kato est, comme celle de Jean Leray, basée sur un théorème de point fixe de type contraction. Le point important, et décisif pour les résultats qui suivront dans cette lignée, est que la norme L^2 en temps à valeurs L^∞ introduite par Jean Leray est remplacée par le supremum de $\sqrt{t}\|v(t)\|_{L^\infty}$.

En 1994, M. Cannone, F. Planchon et Y. Meyer généralisent ce résultat dans [**6**]. Introduisons, pour un réel strictement positif s, la norme des espaces de Besov B_p^{-s}. Pour ce faire, considérons une fonction χ dont la transformée de Fourier est une fonction indéfiniment différentiable à support compact valant 1 près de l'origine. On pose

$$\chi_\lambda(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda^{-3}\chi(\lambda^{-1}x) \quad \text{et} \quad \|u\|_{B_p^{-s}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\lambda>0} \lambda^{-s}\|\chi_\lambda \star u\|_{L^p}. \tag{5}$$

Il est clair qu'il existe une constante C telle que, pour tout $p \in\,]3,\infty]$, on ait

$$\|u\|_{B_p^{-1+\frac{3}{p}}} \leqslant C\|u\|_{L^3}.$$

De plus, les espaces $B_p^{\frac{3}{p}-1}$ forment une suite croissance par rapport à p.

M. Cannone, F. Planchon et Y. Meyer démontrent que, pour tout p, il existe une constante c_p telle que, si $\|u\|_{B_p^{\frac{3}{p}-1}} \leqslant c_p\nu$, alors la solution est globale. L'importance de ce résultat tient à ceci : le fait que l'indice de régularité soit négatif entraîne la diminution de la norme en présence d'oscillations. En effet, soit φ une fonction indéfiniment différentiable à support compact sur $\mathbb{R}^3$ dont l'intégrale par rapport à la troisième variable est nulle. Posons

$$\Phi(x_1,x_2,x_3) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{-\infty}^{x_3} \varphi(x_1,x_2,y_3)dy_3.$$

Soit α un réel strictement plus petit que 1 ; considérons alors la famille de champs de vecteurs de divergence nulle $v_{0,\varepsilon}$ défini par

$$v_{0,\varepsilon}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon^{-\alpha}\bigg(\cos\Big(\frac{x_2}{\varepsilon}\Big)\varphi(x), \cos\Big(\frac{x_1}{\varepsilon}\Big)\varphi(x), -\cos\Big(\frac{x_2}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(x) - \cos\Big(\frac{x_1}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}(x)\bigg).$$

La norme de $v_{0,\varepsilon}$ dans l'espace $L^3(\mathbb{R}^3)$ est minorée par $\varepsilon^{-\alpha}$ tandis qu'une intégration par parties permet de majorer la norme $B_4^{-\frac{1}{4}}$ à une constante multiplicative près, par

$\varepsilon^{1-\alpha}$. Ceci montre que de fortes oscillations (*i.e.* d'amplitude $\varepsilon^{-\alpha}$), mais de fréquences ε^{-1} dans la donnée initiale, loin d'être un obstacle à la régularité globale, l'impliquent.

Nous allons ici présenter une version un peu différente de ce théorème. Les espaces utilisés sont mieux adaptés au problème de l'existence des trajectoires. Nous aborderons ce problème dans la section suivante. L'énoncé ainsi que la démonstration de ce résultat requiert l'usage de la théorie de Littlewood-Paley. Rappelons en brièvement les bases. L'idée consiste à échantillonner les fréquences à l'aide d'un découpage de leur espace en couronnes de taille 2^q, q décrivant l'ensemble des entiers naturels. Définissons maintenant une partition de l'unité dyadique. La proposition suivante est démontrée par exemple dans [**10**].

Proposition 2.1. — *Désignons par $\mathcal{C}$ la couronne de centre 0, de petit rayon $3/4$ et de grand rayon $8/3$. Il existe alors deux fonctions positives radiales χ et φ appartenant respectivement à $\mathcal{D}(B(0,4/3))$ et à $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ telles que :*

$$\chi(\xi)+\sum_{q\geqslant 0}\varphi(2^{-q}\xi)=1 \quad \textit{et} \quad \forall\,\xi\in\mathbb{R}^d\smallsetminus\{0\},\sum_{q\in\mathbb{Z}}\varphi(2^{-q}\xi)=1,$$

$$|p-q|\geqslant 2\Rightarrow \operatorname{Supp}\varphi(2^{-q}\cdot)\cap\operatorname{Supp}\varphi(2^{-p}\cdot)=\varnothing,$$

$$q\geqslant 1\Rightarrow \operatorname{Supp}\chi\cap\operatorname{Supp}\varphi(2^{-q}\cdot)=\varnothing,$$

si $\widetilde{\mathcal{C}}=B(0,2/3)+\mathcal{C}$, alors $\widetilde{\mathcal{C}}$ est une couronne et l'on a

$$|p-q|\geqslant 5\Rightarrow 2^p\widetilde{\mathcal{C}}\cap 2^q\mathcal{C}=\varnothing,$$

Fixons maintenant quelques notations :

$$\Delta_q u=\mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-q}\xi)\widehat{u})=2^{qd}h(2^q\cdot)\star u \quad \text{avec} \quad h=\mathcal{F}^{-1}\varphi \quad \text{et}$$

$$S_q u=\sum_{p\leqslant q-1}\Delta_p u=\mathcal{F}^{-1}(\chi(2^{-q}\xi)\widehat{u})=2^{qd}\widetilde{h}(2^q\cdot)\star u \quad \text{avec} \quad \widetilde{h}=\mathcal{F}^{-1}\chi.$$

Définissons les espaces de Besov homogènes de la manière suivante.

Définition 2.1. — *Soient s un nombre réel et p un élément de $[1,+\infty]$. On pose*

$$\|u\|_{\dot B^s_p}\stackrel{\text{déf}}{=}\sup_{q\in\mathbb{Z}}2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^p}.$$

L'espace $\dot B^s_p$ est l'ensemble des distributions tempérées u telle qu'il existe une suite $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions de L^p telle que

i) $(\|f_j\|_{\dot B^s_p})_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée,

ii) pour tout j, $\operatorname{Supp}\widehat{f_j}$ est compact,

iii) $\lim_{j\to\infty}f_j=u$ dans l'espace $\mathcal{S}'$.

Lorsque $s<d/p$, l'espace $\dot B^s_p$ est un espace de Banach. De plus, on vérifie aisément que la définition ci-dessus coïncide bien avec celle donnée par (5). Dans toute la suite, nous désignerons par $\mathcal{B}_p$ l'espace $\dot B_p^{\frac{3}{p}-1}$ et par $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_p}$ la norme $\|\cdot\|_{\dot B_p^{\frac{3}{p}-1}}$.

Définition 2.2. — *Soient s un nombre réel et (ρ, p) un couple d'éléments de $[1, +\infty]$. On définit alors la famille de semi-normes suivantes*

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\rho(\dot{B}^s_p)} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{q\in\mathbb{Z}} 2^{qs} \|\Delta_q u\|_{L^\rho(\mathbb{R}_+;L^p)}.$$

Remarque. — Il est clair que $\|u\|_{\widetilde{L}^\rho(\dot{B}^s_p)} \leqslant \|u\|_{L^\rho(\mathbb{R}_+;\dot{B}^s_p)}$. Le lemme suivant, démontré dans [**8**], montre que ces semi-normes sont adaptées à la description de l'effet régularisant de l'équation de la chaleur.

Lemme 2.1. — *Il existe une constante c telle que, pour tout entier q, on ait*

$$\|\Delta_q e^{\nu t\Delta} u\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{c} e^{-c\nu t 2^{2q}} \|\Delta_q u\|_{L^p}.$$

Dans toute la suite, nous travaillerons avec la famille d'espaces définie ci-après.

Définition 2.3. — *L'espace E_p est l'espace des fonctions bornées de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathcal{B}_p$, continues à valeurs $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ et telles que*

$$\|u\|_{E_p} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{q\in\mathbb{Z}} \Big(2^{q(\frac{3}{p}-1)} \|\Delta_q u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;L^p)} + \nu 2^{q(\frac{3}{p}+1)} \|\Delta_q u\|_{L^1(\mathbb{R}_+;L^p)} \Big).$$

Le théorème suivant est démontré dans [**8**] en utilisant le calcul paradifférentiel introduit par J.-M. Bony dans [**2**].

Théorème 2.1. — *Soit p un réel supérieur ou égal à 1. Il existe une constante c telle que, si v_0 est une donnée initiale appartenant à $\mathcal{B}_p$ telle que $\|v_0\|_{\mathcal{B}_p} \leqslant c\nu$, alors il existe une unique solution de (NS_ν) dans la boule de centre 0 et de rayon $c\nu$ de l'espace E_p.*

En 1998, H. Koch et D. Tataru ont généralisé dans [**16**] ce résultat de la manière suivante. Considérons l'espace BMO des fonctions u localement intégrables telles que

$$\|u\|_{BMO} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_B |B|^{-1/2} \Big(\int_B |u - \overline{u}_B|^2 dx \Big)^{1/2} < \infty$$

où B décrit l'ensemble des boules euclidiennes et $\overline{u}_B$ désigne la valeur moyenne de la fonction u sur la boule B. On définit alors l'espace ∂BMO comme étant l'espace des distributions u telles qu'il existe une famille $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant 3}$ de fonctions de BMO telle que

$$u = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\cdot$$

La norme ∂BMO d'une distribution de ∂BMO est alors la borne inférieure des sommes des $\|u_j\|_{BMO}$ pour les familles $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant 3}$ vérifiant la relation ci-dessus.

Le théorème de Koch-Tataru affirme que, si la norme ∂BMO de la donnée initiale est suffisamment petite, alors la solution est globale. Remarquons que, pour tout réel p strictement plus grand que 3, l'espace $\dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1}$ est inclus dans ∂BMO.

On peut raisonnablement penser que ce résultat est optimal car une estimation de type Carleson dit essentiellement qu'une fonction est dans ∂BMO si et seulement si, d'une part $\sqrt{t}e^{\nu t\Delta}a$ est borné en espace-temps et d'autre part $e^{\nu t\Delta}a$ est localement de carré intégrable sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^3$.

Il a été récemment remarqué par I. Gallagher, D. Iftimie et F. Planchon dans [**15**] que toute solution globale continue à valeurs $\mathcal{B}_p$ devient petite (en norme $\mathcal{B}_p$) au bout d'un certain temps. Contrairement aux résultats précédents de M. Cannone, F. Planchon et Y. Meyer ou bien H. Koch et D. Tataru, celui-ci utilise de manière cruciale la forme particulière de l'équation. Ce résultat a été généralisé par P. Auscher, S. Dubois et P. Tchamitchian dans [**1**] au cas des solutions continues à valeurs ∂BMO.

3. Quelques propriétés lagrangiennes des solutions

Pour des raisons de simplicité technique, nous nous limiterons dans cette section au cas des solutions données par le théorème 2.1.

3.1. Le théorème de Cauchy-Lipschitz revisité. — Rappelons la classique généralisation liée au lemme d'Osgood.

Définition 3.1. — *Une fonction μ d'un intervalle du type $[0,a]$ dans $\mathbb{R}_+$ est un module de continuité si μ est une fonction continue croissante telle que $\mu(0)=0$.*

Soit μ un tel module de continuité et (X,d) un espace métrique. L'espace C_μ est l'espace des fonctions continues et bornées u telles que

$$\|u\|_{C_\mu} \stackrel{\text{déf}}{=} \|u\|_{L^\infty(X)} + \sup_{0<d(x,y)\leqslant a} \frac{\|u(x)-u(y)\|}{\mu(d(x,y))} < \infty.$$

Donnons des exemples tels que $\mu(r) = r^\alpha$ avec $\alpha \in \,]0,1[$ ou $\mu(r) = r(-\log r)$ ou $\mu(r) = r(-\log r)\log(-\log r)$. Le théorème suivant généralise le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 3.1. — *Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert de E, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et (t_0,x_0) un point de $I\times\Omega$. Soit $F \in L^1_{\text{loc}}(I;\mathcal{C}_\mu(\Omega;E))$. Supposons que μ satisfasse*

$$\int_0^1 \frac{dr}{\mu(r)} = +\infty. \tag{6}$$

Il existe alors un sous-intervalle ouvert J de I contenant t_0 tel que l'équation

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s,x(s))ds \tag{EDO}$$

ait une unique solution continue définie sur J.

La démonstration est faite dans [**10**] ou bien [**7**] et repose sur le lemme d'Osgood qui est une généralisation du lemme de Gronwall.

3.2. Le cas des solutions de (NS_ν) dans des espaces invariants par changement d'échelle. — Comme nous l'avons observé dans la section 2, les solutions de (NS_ν) données par le théorème 2.1 n'appartiennent pas nécessairement à $L^1([0,T];\dot{B}^1_\infty)$. Il semble par ailleurs sans espoir de démontrer qu'elles appartiennent à un espace $L^1([0,T];C_\mu)$ pour un module de continuité μ satisfaisant la condition d'Osgood (6). Ceci nous conduit à démontrer une version du théorème 3.1 dans le cadre des espaces $\widetilde{L}^1([0,T];\dot{B}^1_\infty)$.

Théorème 3.2. — *Il existe une constante C telle que, pour tout champ de vecteurs v de l'espace $L^1([0,T];B^{-r}_\infty)$ pour un réel positif r et tel qu'il existe un entier positif q_0 tel que*

$$N_{q_0}(T,v) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{q\geqslant q_0} 2^q\|\Delta_q v\|_{L^1([0,T];L^\infty)} < \frac{1}{C},$$

il existe une unique application continue ψ de $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\psi(t,x) = x + \int_0^t v(t',\psi(t',x))dt'$$

et

$$\psi(t,\cdot) - \mathrm{Id} \in C^{1-CN_{q_0}(t,v)} \quad \forall\, t \leqslant T.$$

Comme il est d'usage, nous allons commencer par démontrer l'unicité qui est une conséquence immédiate du lemme suivant.

Lemme 3.1. — *Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, si γ_j sont deux fonctions continues telles que*

$$\gamma_j(t) = x_j + \int_0^t v(t',\gamma_j(t'))dt',$$

nous avons, lorsque $|x_1-x_2| \leqslant 2^{-q_0}$,

$$\forall\, t_0 \leqslant T, |\gamma_1(t_0)-\gamma_2(t_0)| \leqslant C|x_1-x_2|^{1-CN_{q_0}(t_0,v)} \exp\Big(2^{q_0(r+1)}\int_0^{t_0}\|v(t,\cdot)\|_{B^{-r}_\infty}dt\Big).$$

Décomposons le champ de vecteurs v en une partie basses fréquences et une partie hautes fréquences. Ceci conduit à

$$\begin{aligned}|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)| \leqslant |x_1-x_2| &+ \int_0^t |S_qv(t',\gamma_1(t'))-S_qv(t',\gamma_2(t'))|dt'\\ &+ 2\int_0^t\sum_{p\geqslant q}\|\Delta_pv(t')\|_{L^\infty}dt'\\ \leqslant |x_1-x_2| &+ \int_0^t \|\nabla S_qv(t',\cdot)\|_{L^\infty}|\gamma_1(t')-\gamma_2(t')|dt'\\ &+ 2^{1-q}\sum_{p\geqslant q}2^{q-p}2^p\int_0^t\|\Delta_pv(t')\|_{L^\infty}dt'.\end{aligned}$$

Définissons, pour $0 \leqslant t \leqslant t_0 \leqslant T$,

$$D_q(t) \stackrel{\text{déf}}{=} |x_1 - x_2| + 2^{2-q} N_{q_0}(t_0, v) + \int_0^t \|\nabla S_q v(t', \cdot)\|_{L^\infty} |\gamma_1(t') - \gamma_2(t')| dt'$$

et

$$\rho(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t' \leqslant t} |\gamma_1(t') - \gamma_2(t')|.$$

Par définition de $N_{q_0}(t, v)$, pour tout entier $q \geqslant q_0$, nous avons $\rho(t) \leqslant D_q(t)$. Écrivons alors que, pour tout $t \leqslant t_0$,

$$D_q(t) \leqslant |x_1 - x_2| + 2^{2-q} N_{q_0}(t_0, v) + \int_0^t \|\nabla S_q v(t', \cdot)\|_{L^\infty} D_q(t') dt'.$$

Le lemme de Gronwall implique que, pour tout $t \leqslant t_0$,

$$D_q(t) \leqslant \Big(|x_1 - x_2| + 2^{2-q} N_{q_0}(t_0, v)\Big) \exp\Big(\int_0^t \|\nabla S_q v(t', \cdot)\|_{L^\infty} dt'\Big).$$

D'après les inégalités de Bernstein, nous avons, pour tout $t \leqslant t_0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|\nabla S_q v(t', \cdot)\|_{L^\infty} dt' &\leqslant \int_0^t \sum_{q' < q_0} 2^{q'} \|\Delta_{q'} v(t', \cdot)\|_{L^\infty} dt' + \sum_{q'=q_0}^{q} \int_0^t 2^{q'} \|\Delta_{q'} v(t', \cdot)\|_{L^\infty} dt' \\
&\leqslant 2^{q_0(r+1)} \int_0^t \|v(t', \cdot)\|_{B^{-r}_\infty} dt' + q N_{q_0}(t, v). \qquad (7)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $q \geqslant q_0$ et pour tout $t \leqslant t_0$, avons nous

$$D_q(t) \leqslant \Big((|x_1 - x_2| + 2^{2-q} N_{q_0}(t_0, v)\Big) \exp\Big(2^{q_0(r+1)} \int_0^t \|v(t', \cdot)\|_{B^{-r}_\infty} dt' + q N_{q_0}(t, v)\Big)$$

En choisissant $2^q \equiv |x_1 - x_2|^{-1}$, on trouve que

$$\rho(t_0) \leqslant C |x_1 - x_2|^{1 - C N_{q_0}(t_0, v)} \exp\Big(2^{q_0(r+1)} \int_0^{t_0} \|v(t', \cdot)\|_{B^{-r}_\infty} dt'\Big)$$

et le lemme est ainsi démontré.

En ce qui concerne l'existence, on pourrait conclure en utilisant un argument de type « Peano ». Nous préférons donner une preuve proche de celle du théorème 3.1 telle qu'elle est faite dans [**10**] ou bien [**7**], c'est-à-dire démontrer que le classique schéma de Picard

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t v(t', x_k(t')) dt'$$

converge. Pour ce faire, posons $\rho_k(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t' \leqslant t, n \geqslant 0} |x_{k+n}(t') - x_k(t')|$. Nous avons, en séparant les hautes et basses fréquences,

$$\begin{aligned}
\rho_{k+1}(t) &\leqslant \int_0^t |v(t', x_{k+n}(t')) - v(t', x_k(t'))| dt' \\
&\leqslant 2^{2-q} N_{q_0}(T, v) + \int_0^t \|\nabla S_q v(t', \cdot)\|_{L^\infty} \rho_k(t') dt'
\end{aligned}$$

et ce pour tout $q \geqslant q_0$. En posant

$$\rho(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \limsup_{k\to\infty} \rho_k(t)$$

et

$$D_q(t) \stackrel{\text{déf}}{=} 2^{2-q} N_{q_0}(T,v) + \int_0^t \|\nabla S_q v(t',\cdot)\|_{L^\infty} \rho(t')dt',$$

par passage à la limite supérieure, on obtient

$$D_q(t) \leqslant 2^{2-q} N_{q_0}(T,v) + \int_0^t \|\nabla S_q v(t',\cdot)\|_{L^\infty} D_q(t')dt'.$$

Le lemme de Gronwall assure alors que

$$D_q(T) \leqslant C2^{-q} \exp\Big(\int_0^T \|\nabla S_q v(t',\cdot)\|_{L^\infty} dt'\Big).$$

D'après (7), ceci se traduit par le fait que, pour tout q,

$$D_q(T) \leqslant C2^{-q(1-CN_{q_0}(T,v))} \exp\Big(2^{q_0(r+1)} \int_0^T \|v(t',\cdot)\|_{B^{-r}_\infty} dt'\Big).$$

Le théorème est démontré.

L'application de ce qui précède aux solutions de (NS_ν) du théorème 2.1 donne immédiatement le théorème suivant.

Théorème 3.3. — *Il existe une constante c telle que, si $\|v_0\|_{\mathcal{B}_p} \leqslant c\nu$ et si v est la solution globale de (NS_ν) donnée par le théorème 2.1, il existe alors une unique fonction continue ψ de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle*

$$\psi(t,x) = x + \int_0^t v(t',\psi(t',x))dt'.$$

De plus

$$\psi(t,\cdot) - \mathrm{Id} \in C^{r_0} \quad \textit{avec} \quad r_0 = 1 - \frac{1}{2c\nu}\|v_0\|_{\mathcal{B}_p}.$$

3.3. Une propriété lagrangienne des solutions faibles. — Le propos de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant.

Théorème 3.4. — *Soit v une solution de Leray de (NS_ν). Alors $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; L^\infty)$. De plus v appartient à l'adhérence forte des fonctions régulières pour la topologie $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; L^\infty)$. Il existe donc (au moins) une trajectoire de v issue de chaque point x de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire une fonction continue γ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que*

$$\gamma(t) = x + \int_0^t v(t',\gamma(t'))dt'.$$

Remarque. — La théorie de Di Perna-Lions sur les équations différentielles ordinaires associées à des champs de vecteurs très peu réguliers fondée dans [**12**] laisse à penser que, pour presque tout x de $\mathbb{R}^3$, la trajectoire γ est unique.

La démonstration du théorème repose sur le résultat suivant, qui est une petite amélioration du lemme 5.1 de [**8**].

Lemme 3.2. — *Soit v une solution de Leray de (NS_ν). Alors v appartient à $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}_+;\dot B^{3/2}_{2,1})$ où $\dot B^{3/2}_{2,1}$ désigne l'adhérence des fonctions régulières pour la norme*

$$\|u\|_{\dot B^{3/2}_{2,1}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{3}{2}q}\|\Delta_q u\|_{L^2}.$$

Remarques

– Les inégalités de Bernstein impliquent que $\dot B^{3/2}_{2,1}$ est inclus dans l'espace des fonctions continues nulles à l'infini.

– Une fois le lemme ci-dessus établi, il ne reste, pour démontrer l'intégralité du théorème, qu'à reprendre la démonstration classique du théorème de Peano. Nous omettons ce point.

Démontrons le lemme. D'après la formule de Duhamel, nous avons

$$v(t) = e^{\nu t\Delta}v_0 + \int_0^t e^{\nu(t-t')\Delta}Q(v(t'),v(t'))dt'$$

avec

$$Q^j(v,v) \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{div}(v^j v) + \mathcal{F}^{-1}\Big(i\xi^j\sum_{k,\ell}\frac{\xi_k\xi_\ell}{|\xi|^2}\mathcal{F}(v^jv^k)(\xi)\Big). \tag{8}$$

D'après le lemme 2.1, nous avons

$$\int_0^\infty \|\Delta_q e^{\nu t\Delta}v_0\|_{L^2}dt \leqslant \frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-c\nu t2^{2q}}\|\Delta_q v_0\|_{L^2}dt \leqslant \frac{1}{c^2\nu}2^{-2q}\|\Delta_q v_0\|_{L^2}.$$

Ainsi donc, nous avons, d'après les inégalités de Bernstein,

$$\begin{aligned}\int_0^T\sum_{q\in\mathbb{Z}}2^{\frac{3}{2}q}\|\Delta_q e^{\nu t\Delta}v_0\|_{L^2}dt &\leqslant \Big(\sum_{q\leqslant q_0}2^{\frac{3}{2}q}T + \frac{1}{c\nu}\sum_{q>q_0}2^{-\frac{q}{2}}\Big)\|v_0\|_{L^2}\\ &\leqslant \Big(2^{\frac{3}{2}q_0}T+\frac{1}{c\nu}2^{-\frac{q_0}{2}}\Big)\|v_0\|_{L^2}.\end{aligned}$$

En choisissant $2^{-2q_0}\equiv \nu T$, on trouve que

$$\|\Delta_q e^{\nu t\Delta}v_0\|_{L^1([0,T];\dot B^{\frac{3}{2}}_{2,1})} \leqslant \frac{C}{\nu}(\nu T)^{\frac14}\|v_0\|_{L^2}.$$

Étudions maintenant le terme non linéaire. On utilise pour cela l'idée fondamentale du calcul paradifférentiel, à savoir la décomposition de Bony. Écrivons que

$$v^kv^j = \sum_{q'\in\mathbb{Z}}\Big(S_{q'+1}v^k\Delta_{q'}v^j + S_{q'}v^j\Delta_{q'}v^k\Big).$$

Chacun des deux termes du membre de droite se traite de façon identique. Comme le support de la transformée de Fourier de $S_{q'}v^j\Delta_{q'}v^k$ est inclus dans une boule de type $2^{q'}B$, on a

$$\Delta_q \sum_{q'\in\mathbb{Z}} S_{q'}v^j\Delta_{q'}v^k = \sum_{q'\geqslant q-N} \Delta_q(S_{q'}v^j\Delta_{q'}v^k).$$

Grâce aux inégalités de Bernstein et de Sobolev, nous avons

$$\begin{aligned}\|\Delta_q(S_{q'}v^j\Delta_{q'}v^k)\|_{L^2} &\leqslant \|S_{q'}v\|\Delta_{q'}v\|_{L^2}{}_{L^\infty}\\ &\leqslant \Big(\sum_{q''\leqslant q'-1} 2^{q''/2}\|\Delta_{q''}v\|_{L^6}\Big)\|\Delta_{q'}v\|_{L^2}\\ &\leqslant \Big(\sum_{q''\leqslant q'-1} 2^{q''/2}c_{q''}\Big)\|\nabla v\|_{L^2}\|\Delta_{q'}v\|_{L^2}\end{aligned}$$

où, comme dans toute la suite de ce paragraphe, $(c_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ désignera génériquement une suite positive de $\ell^2(\mathbb{Z})$ de norme 1.

Nous avons, par convolution,

$$2^{-q'/2}\sum_{q''\leqslant q'} 2^{q''/2}c_{q''} \leqslant Cc_{q'}.$$

On en déduit que

$$\Big\|\Delta_q \sum_{q'\in\mathbb{Z}} S_{q'}v^j\Delta_{q'}v^k\Big\|_{L^2} \leqslant C2^{-q/2}c_q^2(t)\|\nabla v(t)\|_{L^2}^2. \tag{9}$$

Grâce au lemme 2.1 et à l'inégalité (9), nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(v) &\stackrel{\text{déf}}{=} \Big\|\int_0^t e^{\nu(t-t')\Delta}Q(v(t'),v(t'))dt'\Big\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\dot B^{3/2}_{2,1})}\\ &\leqslant \int_0^\infty \sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{\frac32 q}\Big\|\int_0^t \Delta_q e^{\nu(t-t')\Delta}Q(v(t'),v(t'))dt'\Big\|_{L^2}dt\\ &\leqslant C\int_{(\mathbb{R}_+)^2}\sum_{q\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{\{t'\leqslant t\}}e^{-c\nu 2^{2q}(t-t')}2^{2q}c_q^2(t')\|\nabla v(t')\|_{L^2}^2dt'dt.\end{aligned}$$

En intégrant en t, puis en sommant en q et enfin en intégrant en t', nous trouvons que

$$\Big\|\int_0^t e^{\nu(t-t')\Delta}Q(v(t'),v(t'))dt'\Big\|_{L^1(\mathbb{R}_+;B^{\frac32}_{2,1})} \leqslant \frac{C}{\nu}\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)}^2.$$

Le lemme est ainsi démontré.

4. Une estimation de type analytique

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.1. — *Soit v_0 dans $H^{1/2}$, il existe un temps T strictement positif tel qu'il existe une unique solution de (NS_ν) satisfaisant*

$$\forall\, t \leqslant T, \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 e^{(\nu s)^{1/2}|\xi|} |\widehat{v}(s,\xi)|^2 ds d\xi \leqslant 4\|\nabla e^{s\frac{\nu}{2}\Delta} v_0\|^2_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^3)}.$$

De plus, il existe une constante c telle que, si v_0 vérifie $\|v_0\|_{\dot{H}^{1/2}} \leqslant c\nu$, alors

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3} |\xi|^2 e^{(\nu t)^{1/2}|\xi|} |\widehat{v}(t,\xi)|^2 dt d\xi \leqslant \frac{4}{\nu}\|v_0\|^2_{L^2}.$$

On procède de manière très classique en utilisant la méthode de Friedrichs de troncature en fréquences. Posons $J_n a \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,n)}\widehat{a})$. Cet opérateur n'est rien d'autre que la projection orthogonale sur l'espace L^2_n des fonctions de L^2 dont la transformée de Fourier est à support dans $B(0,n)$. Résolvons

$$(NS_{\nu,n}) \begin{cases} \partial_t v_n - \nu\Delta J_n v_n = J_n Q(v_n, v_n) \\ v_{n|t=0} = J_n v_0. \end{cases}$$

où Q est définie par (8). Ce système ci-dessus est une équation différentielle ordinaire sur L^2_n ayant, grâce à l'estimation d'énergie, des solutions globales. Nous allons maintenant démontrer des estimations a priori sur v_n en omettant l'indice n pour alléger les notations.

Étant donné un réel strictement positif λ et v une solution d'un système $(NS_{\nu,n})$, considérons la fonction $\mathcal{V}_\lambda$ définie par

$$\mathcal{V}_\lambda \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \quad (t,x) \quad \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{v}(t,\xi)|^2 e^{2(\nu t)^{1/2}|\xi| - \lambda x|\xi|} d\xi. \end{cases}$$

Comme la transformée de Fourier de $v(t,\cdot)$ est, pour tout t positif, supportée dans une boule $B(0,n)$, il existe une constante C_n telle que, pour tout $t \geqslant 0$, on ait

$$\|\mathcal{V}_\lambda(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leqslant C_n e^{2(\nu t)^{1/2}} \quad \text{et} \quad |\mathcal{V}_\lambda(t,x) - \mathcal{V}_\lambda(t,y)| \leqslant C_n e^{2(\nu t)^{1/2}} \lambda |x-y|.$$

L'équation différentielle ordinaire suivante (EDO_λ) a alors une solution sur $\mathbb{R}^+$.

$$(EDO_\lambda) \qquad \begin{cases} \varphi'_\lambda(t) = \mathcal{V}_\lambda(t, \varphi_\lambda(t)) \\ \varphi_\lambda(0) = 0. \end{cases}$$

Comme la fonction φ_λ est de classe C^1 et que $\varphi_\lambda(0) = 0$, il existe un temps maximal T_λ tel que, pour tout $t \leqslant T_\lambda$, on ait

$$\varphi_\lambda(t) \leqslant \frac{(\nu t)^{1/2}}{\lambda}\cdot$$

Comme T_λ dépend a priori de n, la proposition suivante est très utile.

Proposition 4.1. — *Il existe une constante C strictement positive telle que, si $\lambda_0 = C/\nu$, alors*

$$\forall\, t \in [0, T_{\lambda_0}], \quad \varphi_{\lambda_0}(t) \leqslant 4\|\nabla v_{L,\nu/2}\|^2_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^3)},$$

où $v_{L,\nu/2}$ est solution de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t w - \dfrac{\nu}{2}\Delta w = 0 \\ w_{|t=0} = v_0. \end{cases}$$

Il est très facile de voir que cette proposition implique le théorème. En effet, si $v_0 \in H^{1/2}$, on a

$$\|\nabla v_{L,\nu/2}\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)} \leqslant \frac{1}{\nu}\|v_0\|^2_{L^2}, \tag{10}$$

$$\frac{1}{(\nu t)^{1/2}}\|\nabla v_{L,\nu/2}\|^2_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^3)} \leqslant \frac{1}{\nu}\|v_0\|^2_{\dot H^{1/2}} \tag{11}$$

et

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{(\nu t)^{1/2}}\|\nabla v_{L,\nu/2}\|^2_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^3)} = 0. \tag{12}$$

D'après (12), il existe un réel strictement positif $T(v_0)$, indépendant de n, tel que

$$\forall\, t \leqslant T(v_0), \quad \|\nabla v_{L,\nu/2}\|^2_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^3)} \leqslant \frac{(\nu t)^{1/2}}{8\lambda_0}\cdot$$

D'après la proposition 4.1, on a

$$\forall\, t \in [0, \min\{T(v_0), T_{\lambda_0}\}], \quad \varphi_{\lambda_0}(t) \leqslant \frac{(\nu t)^{1/2}}{2\lambda_0}$$

ce qui implique que $T_{\lambda_0} \geqslant T(v_0)$. De plus, d'après l'inégalité (11), on a

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad \|\nabla v_{L,\nu/2}\|^2_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^3)} \leqslant (\nu t)^{1/2}\frac{1}{\nu}\|v_0\|^2_{\dot H^{1/2}}.$$

Donc si $\|v_0\|^2_{\dot H^{1/2}} \leqslant c_0\nu^2$, on a, pourvu que la constante c_0 soit choisie assez petite,

$$\|\nabla v_{L,\nu/2}\|^2_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^3)} \leqslant (\nu t)^{\frac12} c_0\nu \leqslant \frac{(\nu t)^{1/2}}{\lambda_0}\cdot$$

Il en résulte que

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{(\nu t)^{1/2}|\xi|}|\xi|^2|\widehat{v}(t,\xi)|^2 d\xi \leqslant \int_{\mathbb{R}^3} e^{2(\nu t)^{1/2}|\xi| - \lambda_0\varphi_\lambda(t)|\xi|}|\xi|^2|\widehat{v}(t,\xi)|^2 d\xi = \varphi'_\lambda(t).$$

Par intégration, il vient

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} e^{(\nu s)^{1/2}|\xi|}|\xi|^2|\widehat{v}(s,\xi)|^2 d\xi ds \leqslant \varphi_{\lambda_0}(t).$$

D'où le théorème 4.1, d'après les inégalités (10) et (11).

Remarque. — La quantité φ_λ qui nous sert à contrôler la régularité de la solution n'est pas une norme de la solution, mais une fonction très non linéaire de cette solution. C'est ici que réside l'originalité de la démonstration.

Nous allons maintenant nous attacher à démontrer la proposition 4.1. Ceci utilise bien sûr le fait que v est solution de $(NS_{\nu,n})$. Nous allons en fait démontrer l'existence d'une constante C telle que l'on ait

$$t \leqslant T_\lambda \Longrightarrow \varphi_\lambda(t) \leqslant 2\|v_{L,\nu/2}\|^2_{L^2([0,t];\dot H^1)} + \frac{C}{\lambda\nu}\varphi_\lambda(t). \tag{13}$$

La formule de Duhamel nous dit que

$$\widehat{v}(t,\xi) = \widehat{v}_0(\xi)e^{-\nu t|\xi|^2} + \int_0^t e^{-\nu(t-s)|\xi|^2}\mathcal{F}J_nQ(v(s),v(s))(\xi)ds,$$

ce qui implique que

$$|\widehat{v}(t,\xi)|^2 \leqslant 2|\widehat{v}_0(\xi)|^2e^{-2\nu t|\xi|^2} + 2\bigg(\int_0^t e^{-\nu(t-s)|\xi|^2}|\mathcal{F}J_nQ(v(s),v(s))(\xi)|ds\bigg)^2. \tag{14}$$

Introduisons maintenant la fonction Φ_λ définie par

$$\Phi_\lambda(s,t,\xi) \overset{\text{déf}}{=} |\xi|\int_s^t (\nu^{1/2}\tau^{-1/2} - \lambda\varphi'_\lambda(\tau))d\tau. \tag{15}$$

Les inégalités suivantes nous seront utiles dans la suite.

$$\Phi_\lambda(0,t,\xi) \leqslant \nu t|\xi|^2 + 1 \tag{16}$$

et

$$\Phi_\lambda(s,t,\xi) \leqslant \nu(t-s)|\xi|^2 + 4 - \lambda|\xi|\int_s^t \varphi'_\lambda(\tau)d\tau \quad \text{si} \quad s \leqslant t. \tag{17}$$

La première inégalité résulte du fait que $2a \leqslant a^2+1$ et que, par définition,

$$\Phi_\lambda(0,t,\xi) = 2(\nu t)^{1/2}|\xi| - \lambda\varphi_\lambda(t)|\xi|.$$

Pour obtenir la seconde inégalité, il suffit d'observer que, si $\nu^{1/2}(t^{1/2}+s^{1/2})|\xi| \leqslant 2$, alors bien sûr $2\nu^{1/2}(t^{1/2}-s^{1/2})|\xi| \leqslant 4$. Si par contre $\nu^{1/2}(t^{1/2}+s^{1/2})|\xi| \geqslant 2$, alors, on a

$$\begin{aligned}2\nu^{1/2}(t^{1/2}-s^{1/2})|\xi| &\leqslant \nu(t-s)|\xi|^2 - \nu^{1/2}(t^{1/2}-s^{1/2})|\xi|(\nu^{1/2}(t^{1/2}+s^{1/2})|\xi|-2)\\ &\leqslant \nu(t-s)|\xi|^2.\end{aligned}$$

D'où les inégalités (16) et (17).

Multiplions maintenant l'inégalité (14) par $e^{\Phi_\lambda(0,t,\xi)}$. En utilisant le fait que

$$\Phi_\lambda(0,t,\xi) = \Phi_\lambda(0,s,\xi) + \Phi_\lambda(s,t,\xi)$$

et les inégalités (16) et (17), on obtient que

$$\begin{aligned}&e^{\Phi_\lambda(0,t,\xi)}|\widehat{v}(t,\xi)|^2 \leqslant 2|\widehat{v}_{L,\nu/2}(t,\xi)|^2\\ &\qquad + 2\bigg(\int_0^t e^{-\nu(t-s)|\xi|^2+\frac12\Phi_\lambda(s,t,\xi)+\frac12\Phi_\lambda(0,s,\xi)}|\mathcal{F}J_nQ(v(s),v(s))(\xi)|ds\bigg)^2.\end{aligned} \tag{18}$$

Comme $t \leqslant T_\lambda$, la définition de la fonction Φ implique que $\Phi_\lambda(0,s,\xi)$ est du type $|\xi|f(s)$ où f est une fonction positive ou nulle. Le lemme suivant est alors important.

Lemme 4.1. — *Soient σ_1 et σ_2 deux réels strictement inférieurs à $3/2$ et tels que $\sigma_1+\sigma_2$ soit strictement positif. Il existe alors une constante C telle que, pour tout réel positif a, on ait*

$$\|e^{a|D|}(uv)\|_{\dot H^{\sigma_1+\sigma_2-\frac32}} \leqslant C\|e^{a|D|}u\|_{\dot H^{\sigma_1}}\|e^{a|D|}v\|_{\dot H^{\sigma_2}}.$$

Pour démontrer ce lemme, commençons par écrire que, grâce à l'inégalité triangulaire et aux propriétés de l'exponentielle, on a

$$\begin{aligned}\Big|\mathcal{F}(e^{a|D|}(uv))(\xi)\Big| &= e^{a|\xi|}\Big|\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{u}(\xi-\eta)\widehat{v}(\eta)d\eta\Big|\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} e^{a|\xi-\eta|}|\widehat{u}(\xi-\eta)|e^{a|\eta|}|\widehat{v}(\eta)|d\eta.\end{aligned}$$

Posons alors $u_a \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}^{-1}(e^{a|\xi|}|\widehat{u}(\xi)|)$ et $v_a \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}^{-1}(e^{a|\xi|}|\widehat{v}(\xi)|)$. Il est clair que

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2\sigma_1+2\sigma_2-3}|\mathcal{F}(e^{a|D|}(uv))(\xi)|^2d\xi \leqslant C\|u_av_a\|^2_{\dot H^{\sigma_1+\sigma_2-\frac32}}.$$

Or, il est bien connu que

$$\|u_av_a\|_{\dot H^{\sigma_1+\sigma_2-\frac32}} \leqslant C\|u_a\|_{\dot H^{\sigma_1}}\|v_a\|_{\dot H^{\sigma_2}};$$

ceci implique que

$$\|e^{a|D|}(uv)\|_{\dot H^{\sigma_1+\sigma_2-\frac32}} \leqslant C\|u_a\|_{\dot H^{\sigma_1}}\|v_a\|_{\dot H^{\sigma_2}},$$

ce qui, vu la définition de u_a et v_a, n'est rien d'autre que le lemme.

D'après ce lemme, et par définition de φ_λ, il existe une fonction $f(s,\xi)$ et une constante C telles que

$$e^{\frac12\Phi_\lambda(0,s,\xi)}|\mathcal{F}J_nQ(v(s),v(s))(\xi)| \leqslant C|\xi|^{1/2}\varphi'_\lambda(s)f(s,\xi) \quad\text{avec}\quad \forall\, s\leqslant t, \|f(s,\cdot)\|_{L^2}=1.$$

D'après l'inégalité (18), on en déduit que

$$\begin{aligned}&e^{(2(\nu t)^{1/2}-\lambda\varphi_\lambda(t))|\xi|}|\widehat{v}(t,\xi)|^2\\ &\qquad\leqslant 2|\widehat{v}_{L,\nu/2}(\xi)|^2 + C|\xi|\bigg(\int_0^t e^{-\frac{\nu}{2}(t-s)|\xi|^2-\lambda|\xi|\int_s^t\varphi'_\lambda(\tau)d\tau}\varphi'_\lambda(s)f(s,\xi)ds\bigg)^2.\end{aligned}$$

Par définition de φ_λ et de $v_{L,\nu/2}$, et après multiplication par $|\xi|^2$ et intégration, il vient

$$\varphi'_\lambda(t) \leqslant 2\|\widehat{v}_{L,\nu/2}(t,\cdot)\|^2_{\dot H^1} + C\int_{\mathbb{R}^3} I(t,\xi)d\xi \tag{19}$$

avec

$$I(t,\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} |\xi|^3\bigg(\int_0^t e^{-\frac{\nu}{2}(t-s)|\xi|^2-\lambda|\xi|\int_s^t\varphi'_\lambda(\tau)d\tau}\varphi'_\lambda(s)f(s,\xi)ds\bigg)^2.$$

Majorons $I(t,\xi)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz avec la mesure $\varphi'_\lambda(s)ds$ implique que

$$I(t,\xi) \leqslant |\xi|^3\bigg(\int_0^t f^2(s,\xi)e^{-\nu(t-s)|\xi|^2}\varphi'_\lambda(s)ds\bigg)\bigg(\int_0^t e^{-2\lambda|\xi|\int_s^t\varphi'_\lambda(\tau)d\tau}\varphi'_\lambda(s)ds\bigg).$$

Mais comme
$$\int_0^t e^{-2\lambda|\xi|\int_s^t \varphi'_\lambda(\tau)d\tau}\varphi'_\lambda(s)ds \leqslant \frac{1}{2\lambda|\xi|},$$
on en déduit que
$$I(t,\xi) \leqslant \frac{|\xi|^2}{2\lambda}\int_0^t f^2(s,\xi)e^{-\nu(t-s)|\xi|^2}\varphi'_\lambda(s)ds.$$
Ainsi donc, en intégrant en variables (t,ξ) l'inégalité ci-dessus, on obtient
$$\begin{aligned}\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^3} I(t,\xi)dtd\xi &\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_{[0,T]^2\times\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_{s\leqslant t}|\xi|^2 e^{-\nu(t-s)|\xi|^2} f^2(s,\xi)\varphi'_\lambda(s)dsdtd\xi\\ &\leqslant \frac{1}{\lambda\nu}\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^3} f^2(s,\xi)\varphi'_\lambda(s)dsd\xi.\end{aligned}$$
En se souvenant que $\|f(s,\cdot)\|_{L^2} = 1$, on en déduit alors que, pour tout $T \leqslant \widetilde{T}$,
$$\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^3} I(t,\xi)dtd\xi \leqslant \frac{1}{\lambda\nu}\varphi_\lambda(T).$$
En intégrant en temps l'inégalité (19), il vient alors
$$\varphi_\lambda(t) \leqslant 2\|\nabla v_{L,\nu/2}\|^2_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^3)} + \frac{C}{\lambda\nu}\varphi_\lambda(t),$$
et ce pour tout $t \leqslant T_\lambda$. On conclut la démonstration de la proposition en choisissant $\lambda_0 \stackrel{\text{déf}}{=} 2C/\nu$.

Références

[1] P. Auscher, S. Dubois & P. Tchamitchian – « On the stability of global solutions to Navier-Stokes equations in the space », à paraître *J. Math. Pures Appl.*, 2004.

[2] J.-M. Bony – « Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires », *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **14**, p. 209–246.

[3] L. Brandolese – « Lcalisation, oscillations et comportement asymptotique pour les équations de Navier-Stokes », Thèse, ÉNS Cachan, 2001.

[4] L. Caffarelli, R. Kohn & L. Nirenberg – « Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations », *Commun. Pure Appl. Math.* **35** (1982), p. 771–831.

[5] M. Cannone – *Ondelettes, paraproduits, et Navier-Stokes*, Nouveaux Essais, Diderot, Paris, 1995.

[6] M. Cannone, Y. Meyer & F. Planchon – « Solutions auto-similaires des équations de Navier-Stokes », in *Sémin. Équations Dérivées Partielles, 1993-1994, Éc. Polytechnique, Palaiseau, Exp. No.8*, 1994, p. 10.

[7] J.-Y. Chemin – *Fluides parfaits incompressibles*, vol. 230, Société Mathématique de France, Paris, 1995, [version anglaise : *Perfect incompressible fluids*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 14, 187 p., Oxford University Press, Oxford, 1998].

[8] ———, « Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel », *J. Analyse Math.* **77** (1999), p. 27–57.

[9] ______, « Jean Leray et Navier–Stokes », *Gazette des mathématiciens* **84** (2000), p. 71–82, supplément à la mémoire de Jean Leray.

[10] J.-Y. Chemin & N. Lerner – « Flot de champs de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier-Stokes », *J. Differ. Equations* **121** (1995), no. 2, p. 314–328.

[11] P. Constantin & C. Foias – *Navier-Stokes equations*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, 1988.

[12] R. J. Di Perna & P.-L. Lions – « Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces », *Invent. Math.* **98** (1989), p. 511–547.

[13] L. Escauriaza, G. Seregin & V. Sverák – « On the $L_{3,\infty}$ solutions to the Navier-Stokes equations and backward uniqueness », *Russ. Math. Surv.* **58** (2003), p. 211–250.

[14] H. Fujita & T. Kato – « On the Navier-Stokes initial value problem. I », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **16** (1964), p. 269–315.

[15] I. Gallagher, D. Iftimie & F. Planchon – « Asymptotics and stability for global solutions to the Navier-Stokes equations », *Ann. Inst. Fourier* **53** (2003), p. 1387–1424.

[16] H. Koch & D. Tataru – « Well-posedness for the Navier-Stokes equations », *Adv. Math.* **157** (2001), no. 1, p. 22–35.

[17] P.-G. Lemarié-Rieusset – « Une remarque sur l'analyticité des solutions milds des équations de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^3$ », *C. R. Acad. Sci. Paris* **330** (2000), no. 3, p. 183–186.

[18] ______, *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, Research Notes in Mathematics, vol. 431, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2002.

[19] J. Leray – « Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace », *Acta Math.* **63** (1934), p. 193–248.

[20] L. Lichtenstein – « Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmoltzschen Wirbelsätze », *Math. Z.* **23** (1925), p. 89–154.

[21] ______, « Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. Zweite Abhandlung. Nichthomogene, unzusammendrückbare, reibungslose Flüssigkeiten », *Math. Z.* **26** (1927), p. 196–323.

[22] ______, « Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. Dritte Abhandlung. Permanente Bewegungen einer homogenen, inkompressiblen, zähen Flüssigkeit », *Math. Z.* **28** (1928), p. 387–415.

[23] ______, « Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. Vierte Abhandlung. Stetigkeitssätze. Eine Begründung der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie geradliniger Wirbelfäden », *Math. Z.* **32** (1930), p. 608–725.

[24] P.-L. Lions – *Mathematical topics in fluid mechanics. vol. 1 : Incompressible models*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 3, Clarendon Press, Oxford, 1996.

[25] Y. Meyer – « Wavelets, paraproducts, and Navier-Stokes equations », in *Current developments in mathematics, 1996* (R. Bott, éd.), International Press, Cambridge, 1997, p. 105–212.

[26] J. Neças, M. Ruczicka & V. Sverák – « On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations », *Acta Math.* **176** (1996), no. 2, p. 283–294.

[27] C. Oseen – « Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelques unes de leurs applications (première partie) », *Acta Math.* **34** (1911), p. 205–284.

[28] ———, « Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelques unes de leurs applications (deuxième partie) », *Acta Math.* **35** (1912), p. 97–192.

[29] R. Temam – *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*, Studies in Mathematics and its Applications, vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[30] W. von Wahl – « The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations », in *Aspekte der Mathematik*, Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 1985.

[31] M. Wiegner – « Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on $\mathbb{R}^n$ », *J. Lond. Math. Soc., Ser. II* **35** (1987), p. 303–313.

[32] W. Wolibner – « Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long », *Math. Z.* **37** (1933), p. 698–726.

J.-Y. Chemin, Centre de Mathématiques, École polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex, France
E-mail : chemin@math.polytechnique.fr