Séminaires & Congrès
10, 2005, p. 39–59

SUR LES PAIRES SPECTRALES DE POLYNÔMES À DEUX VARIABLES

par

Thomas Brélivet

Résumé. — Steenbrink, Schrauwen et Stevens ont montré comment calculer les paires spectrales d'un germe analytique à l'aide de la résolution de la singularité. Ici on considère $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale et on montre comment calculer les paires spectrales associées à la monodromie à l'infini à l'aide de la résolution à l'infini. Une fois ces calculs effectués, on prouve la conjecture de Hertling et Dimca dans le cas d'un polynôme ayant un nœud comme entrelacs à l'infini.

***Abstract* (On the spectral pairs of polynomials of two variables).** — Steenbrink, Schrauwen and Stevens have computed the spectral pairs of an analytic germ in terms of the resolution of the singularity. Here we consider $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ a polynomial function and we show how we can compute the spectral pairs associated to the monodromy at infinity to f from the resolution at infinity. After we prove the conjecture of Hertling and Dimca on the variance of the spectrum for polynomial with knot at infinity.

1. Introduction

Dans la section 2, après avoir donné une définition des paires spectrales (et du spectre) on rappelle des résultats de Steenbrink et de Dimca qui nous serviront par la suite.

Dans la section 3, on donne une formule pour les paires spectrales qui fait intervenir la multiplicité des diviseurs dans la résolution à l'infini. Par la suite, on montre comment on peut calculer les paires spectrales (ou le spectre) à partir du diagramme de Eisenbud et Neumann de l'entrelacs à l'infini de la fibre générique (celui-ci détermine la topologie de la fibre générique en tant que courbe lisse plongée dans $\mathbb{C}^2$, voir [**N1**]). On donne aussi une autre description puis on finit par l'exemple du polynôme de Briançon.

Dans la section 4, on s'interesse à la variance du spectre. Cette variance fait l'objet de deux conjectures : conjecture de Hertling dans le cas local (pour les singularités

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14D05, 32S20, 14B05.
***Mots clefs*.** — Polynômes, spectre, conjecture de Hertling-Dimca.

isolées d'hypersurfaces) et conjecture de Dimca dans le cas global (pour les polynômes faiblement modérés).

On appelera ces deux conjectures la conjecture de Hertling-Dimca.

On sait que cette conjecture est vraie pour les singularités de polynômes quasi-homogènes (voir [**H**], [**Di**]) en dimension quelconque et en dimension 2 pour les singularités irréductibles (voir [**S**]) et pour les singularités ou les polynômes non dégénérés par rapport au polygone de Newton (voir [**Bre**]).

Ici, on prouve le cas où le polynôme a sa fibre générale qui a une seule branche l'infini. C'est l'analogue global du cas considéré par Saito. De plus la formule que l'on obtient dans la preuve nous permet de redémontrer en même temps le cas local. Notre résultat principal donne une réponse plus précise, exprimée par une égalité au lieu d'une inégalité, voir le Théorème 5.

2. Définition du spectre

2.1. Structure de Hodge mixte limite. — Soit $f : X \to S$ un morphisme de variétés algébriques complexes telles que $\dim X = n+1$ pour $n \geqslant 0$ et $\dim S = 1$. On suppose que X et S sont lisses et que $\overline{X}$ et $\overline{S}$ sont des compactifications lisses de S et X respectivement et telles que le prolongement $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{S}$ soit un morphisme.

Soit $B \subset S$ un ensemble fini tel que si on pose $S^* = S \smallsetminus B$ et $X^* = X \smallsetminus f^{-1}(B)$, alors $f^* : X^* \to S^*$ est une fibration topologique localement triviale avec comme fibre générique F.

On pose $\overline{B} = B \cup (\overline{S} \smallsetminus S)$ et $F_s = f^{-1}(s)$ pour chaque $s \in S$. F est homéomorphe à F_s pour chaque $s \in S^*$.

Pour tout $b \in \overline{B}$, il existe une structure de Hodge mixte limite sur la cohomologie $H^*(F, \mathbb{Q})$, voir [**SZ**]. Quand $H^*(F, \mathbb{Q})$ est équipé de cette structure de Hodge Mixte, la structure correspondante sera notée $H^*_{\mathrm{lim},b}(F, \mathbb{Q})$. S'il n'y a pas ambiguité suivant le contexte et pour simplifier les notations on la notera aussi tout simplement $H^*(F, \mathbb{Q})$. Les groupes $H^*(F_s, \mathbb{Q})$ seront équipés de la structure de Hodge mixte de Deligne, voir [**De0, De1, De2**].

2.2. Paires spectrales et spectre. — Soit (H, T, m) un triplet formé d'une structure de Hodge mixte (SHM) H sur $\mathbb{Q}$, d'un automorphisme d'ordre fini T de H et d'un entier m. On note W la filtration par le poids (filtration croissante) sur H et F la filtration de Hodge (filtration décroissante) sur $H_{\mathbb{C}} = H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. Les paires spectrales du triplet (H, T, m)

$$\mathrm{Spp}(H, T, m) = \sum_{\alpha, w} m_{\alpha, w}(H, T, m)(\alpha, w) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z})}$$

sont données par

$$m_{\alpha,w}(H,T,m) = \begin{cases} \dim \mathrm{Gr}_w^W \mathrm{Gr}_F^{[m-\alpha]} H_\lambda, & \text{si } \lambda \neq 1 \\ \dim \mathrm{Gr}_{w+1}^W \mathrm{Gr}_F^{[m-\alpha]} H_\lambda, & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}$$

où $\lambda = \exp(-2i\pi\alpha)$, $H_\lambda = \ker(T - \lambda I)$ et $[x]$ désigne la partie entière de x.

Le spectre du triplet (H,T,m)

$$\mathrm{Spp}(H,T,m) = \sum_\alpha m_\alpha(H,T,m)(\alpha) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Q})}$$

est donné par la projection sur la première composante des paires spectrales, c'est à dire $m_\alpha(H,T,m) = \sum_{w\in\mathbb{Z}} m_{\alpha,w}$, où $\mathrm{Spp}(H,T,m) = \sum_{\alpha,w} m_{\alpha,w}(H,T,m)(\alpha,w)$.

Dans [**Di**], A. Dimca (suivant C. Sabbah [**Sa2**]) donne une définition similaire. Pour passer de la définition donnée ici à celle de Dimca, il faut appliquer la transformation suivante pour chaque paire :

$$(\alpha,w) \longrightarrow \begin{cases} (\alpha+1,w) & \text{si } \exp(-2i\pi\alpha) \neq 1, \\ (\alpha+1,w+1) & \text{si } \exp(-2i\pi\alpha) = 1. \end{cases}$$

Si l'on prend f comme dans les hypothèses du départ, avec $b \in \overline{B}$, on pose

$$(H,T,m) = (\widetilde{H}^j_{\lim,b}(F,\mathbb{Q}), S_b, j), \ j \geqslant 1,$$

où S_b est la partie semi simple de l'opérateur de monodromie T_b (associé à un tour autour de $b \in \overline{S}$ dans le sens trigonométrique). On note $\mathrm{Spp}^j(f,b)$ les paires spectrales correspondantes et $\mathrm{Sp}^j(f,b)$ le spectre.

On pose de plus

$$\mathrm{Spp}(f,b) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j}\, \mathrm{Spp}^j(f,b),$$

et

$$\mathrm{Sp}(f,b) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j}\, \mathrm{Sp}^j(f,b).$$

Remarque 1. — Historiquement la première définition des paires spectrales a été donnée dans le cas d'une singularité isolée par Steenbrink dans [**Ste**]. La principale difficulté dans cette situation est de définir la structure de Hodge mixte sur la fibre de Milnor (voir [**Ste**] et [**SS**]).

Remarque 2. — Pour une application polynomiale, on sait construire deux structures de Hodge mixtes sur $H^*(F,\mathbb{Q})$: celle définie précédemment et une autre définie à l'aide des D-modules. Dans le cas d'une application polynomiale cohomologiquement modérée (plus généralement faiblement modérée voir section 3.2, et [**NS**]) on sait que les paires spectrales associées à ces deux structures coïncident. De plus la deuxième définition nous permet de montrer que l'on a comme dans le cas local l'inclusion du support du spectre dans l'intervalle $]-1,n[$ et qu'il est symétrique par rapport à $\frac{n-1}{2}$ (voir [**Sa1**] section 5 et [**Sa2**]).

2.3. Construction de Steenbrink. — Soient $b \in \overline{B}$ fixé, $\mathbb{D}$ un petit disque autour de b (on peut supposer que c'est le disque unité), $\overline{N} = \overline{f}^{-1}(\mathbb{D})$ et $N^* = f^{-1}(\mathbb{D}^* \cap S)$. On suppose que $\overline{N} \smallsetminus N^*$ est un diviseur à croisements normaux et égal à $E_1 \cup \cdots \cup E_m$. Notons e_i la multiplicité de E_i et $e =$ ppcm $(e_0, \ldots, e_m)$.

Il est aussi utile de décomposer cette réunion sous la forme :

$$\overline{N} \smallsetminus N^* = \mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_{\mathrm{dic}},$$

où

– $\mathcal{E}_b$ est la réunion des composantes sur lesquelles $\overline{f}$ prend la valeur b,

– $\mathcal{E}_{\mathrm{dic}}$ est la réunion des composantes sur lesquelles $\overline{f}$ est surjective. Par définition, un dicritique est une composante de $\mathcal{E}_{\mathrm{dic}}$.

On notera aussi

$$\mathcal{E}_{\mathrm{dic},b} = \mathcal{E}_{\mathrm{dic}} \cap \overline{f}^{-1}(b).$$

On peut alors faire la construction suivante, cas particulier de celle de Steenbrink dans [**Ste**]. Soit $\widetilde{\mathbb{D}}$ une autre copie du disque unité et $\sigma : \widetilde{\mathbb{D}} \to \mathbb{D}$, $\sigma(t) = t^e$.

Notons $\widetilde{N}$ la normalisation de $N \times_{\mathbb{D}} \widetilde{\mathbb{D}}$ et soit $\pi : \widetilde{N} \to N$ et $\widetilde{f} : \widetilde{N} \to \widetilde{\mathbb{D}}$ les applications naturelles.

Notons $D_i = \pi^{-1}(E_i)$, $i = 1, \ldots, m$ et $D = \bigcup_{i=0}^m D_i$.

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \widetilde{N} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\pi"] & \widetilde{\mathbb{D}} \arrow[d, "\sigma"] \\ E_i \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & \mathbb{D} \end{tikzcd}$$

Cette construction nous permet d'avoir un diviseur réduit au dessus de la valeur b.

On note aussi $\widetilde{D}^p$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ l'union disjointe des intersections $D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_p}$, pour $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant m_b$.

D'après Steenbrink [**Ste**], on a le corollaire suivant

***Théorème 1* (Steenbrink [Ste] Corollaire 2.9).** — *Il existe une suite spectrale de structures de Hodge mixtes munies d'automorphismes d'ordre fini telle que*

$$E_1^{-r,q+r} = \bigoplus_{k \geqslant \max(0,-r)} H^{q-r-2k}(\widetilde{D}^{(2k+r+1)}, \mathbb{Q})(-r-k) \Longrightarrow (H^q_{\mathrm{lim},b}(F,\mathbb{Q}), S_b).$$

En effet, les groupes de cohomologie $H^q(\widetilde{D}^{(r)}, \mathbb{Q})$ sont munis d'une structure de Hodge pure (car $\widetilde{D}^{(r)}$ est réunion disjointe de variétés projectives lisses), ainsi que d'un automorphisme induit par la monodromie de certains revêtements cycliques $\pi : \widetilde{D}^r \to \widetilde{E}^r$, voir (*loc. cit.*) pour plus de détails.

2.4. Un résultat de A. Dimca en dimension 2. — En dimension 2, il est possible de comparer les deux types de paires spectrales $\mathrm{Spp}(f,b)$ et $\mathrm{Spp}(\overline{f},b)$. On a grâce à Dimca [**Di**] Proposition 3.5 le résultat suivant

Proposition 1. — *Pour $b \in \overline{B}$, on a*

$$\mathrm{Spp}^1(f,b) = \mathrm{Spp}^1(\overline{f},b) + B(f,b)$$

où

$$B(f,b) = (|\mathcal{E}_{\mathrm{dic},b}|-1)(0,1) + \sum_{\substack{D\subset\mathcal{E}_{\mathrm{dic},b}\\ D \text{ dicritique}\\ a\in D}} \left(\sum_{0<s<k_a} \left(-\frac{s}{k_a}, 2 \right) \right), \quad k_a = \mathrm{ord}_a f_{|D}.$$

3. Cas d'une application polynomiale $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$

3.1. Construction explicite d'une compactification. — Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une application polynomiale. On supposera pour toute la suite que f a une fibre générale connexe.

L'homogénéisé de f nous donne une fonction rationnelle de $\mathbb{P}^2$ dans $\mathbb{P}^1$ qui a un nombre fini de points d'indétermination sur la droite à l'infini L_∞. Il existe une suite finie d'éclatements qui nous permettent de prolonger f sur une compactification de $\mathbb{P}^2$. On construit ainsi X, π et $\overline{f}$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \mathbb{C} \arrow[d, hook] \\ \mathbb{P}^2 \arrow[r, dotted] & \mathbb{P}^1 \\ X \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

On se trouve maintenant dans les circonstances de la section 2.1 et on peut définir les paires spectrales $\mathrm{Spp}^1(f,\infty)$ (resp. le spectre $\mathrm{Sp}^1(f,\infty)$) de f au voisinage de l'infini, où $\{\infty\} = \mathbb{P}^1 \smallsetminus \mathbb{C}$.

Pour pouvoir utiliser la construction de Steenbrink on effectue des éclatements supplémentaires afin d'avoir $\overline{f}^{-1}(t)$ à croisements normaux pour tout t dans $\mathbb{P}^1$.

On classe les composantes de $\overline{f}^{-1}(L_\infty)$ de la façon suivante

$$f^{-1}(L_\infty) = \mathcal{E}_\infty \cup \mathcal{E}_{\mathrm{cte}} \cup \mathcal{E}_{\mathrm{dic}},$$

où

– $\mathcal{E}_\infty$ est la réunion des composantes sur lesquelles $\overline{f}$ prend la valeur ∞,

– $\mathcal{E}_{\mathrm{cte}}$ est la réunion des composantes sur lesquelles $\overline{f}$ prend une valeur constante finie,

– $\mathcal{E}_{\mathrm{dic}}$ est la réunion des composantes sur lesquelles $\overline{f}$ est surjective.

On définit le degré d'un dicritique D par le degré de l'application induite $\overline{f}_{|D} : D \to \mathbb{P}^1$. Plus tard, on va décrire cette compactification à l'aide d'un graphe. Pour décrire ce graphe, on indexe les composantes de $\overline{f}^{-1}(\infty)$ par $V \cup \{\infty\}$ et les composantes de $\mathcal{E}_{\mathrm{dic}}$ par A :

$$\overline{f}^{-1}(\infty) = \bigcup_{v \in V \cup \{\infty\}} E_v,$$

$E_\infty = L_\infty$ et

$$\mathcal{E}_{\mathrm{dic}} = \bigcup_{v \in A} E_v.$$

3.2. Polynômes « bons » à l'infini. — On va donner maintenant une propriété importante dont jouissent les polynômes dont leur fibre générique à une seule branche à l'infini. Pour cela, on va commencer par rappeler quelques définitions connues.

Définition 1 **([NR])**. — Soit $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ une application polynomiale. Une fibre $f^{-1}(c)$ de f (resp. c un nombre complexe) est dite régulière (resp. valeur régulière) s'il existe un voisinage D de c dans $\mathbb{C}$ tel que $f_{|f^{-1}(D)} : f^{-1}(D) \to D$ est une fibration $\mathcal{C}^\infty$ localement triviale et est dite régulière à l'infini (resp. valeur régulière à l'infini) si il existe un ensemble compact K dans $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $f_{|f^{-1}(D) \setminus K} : f^{-1}(D) \setminus K \to D$ est une fibration $\mathcal{C}^\infty$ loaclement triviale.

Le polynôme $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est dit bon si toutes ses fibres sont régulières à l'infini.

Définition 2 **([Bro])**. — Soit $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ un polynôme. Le polynôme f est dit modéré s'il existe un voisinage compact de ses points critiques tel que le gradient est minoré par une constante strictement positive en dehors de ce compact.

Il exite d'autres notions pour un « bon » comportement à l'infini :

– les polynômes M-modérés introduits par Néméthi et Zaharia, voir [**NZ1**],
– les polynômes sans singularités à l'infini définis par Siersma et Tibăr, voir [**ST**],
– les polynômes cohomologiquements modérés introduits par Sabbah, voir [**Sa2**].

Un polynôme qui vérifie l'une des cinq propriétés précédentes est aussi appelé un polynôme faiblement modéré par Néméthi et Sabbah, voir [**NS**].

En dimension 2, on sait que les valeurs irrégulières à l'infini sont données par la réunion de $\overline{f}(\mathcal{E}_{\mathrm{cte}})$ et des valeurs critiques des restrictions de $\overline{f}$ à chaque composante dicritique. D'après Broughton [**Bro**] on sait qu'un polynôme modéré n'a pas de valeurs irrégulières à l'infini. En outre en dimension 2 les notions de polynômes modérés et de polynômes bons sont exactement les mêmes, voir [**Ha**]. L'ensemble des polyômes modérés est inclus dans l'ensemble des polynômes bons. Cassou-Noguès et Ha [**CH**] ont exhibé un polynôme qui est bon mais pas modéré donc on a une inclusion stricte. Pour d'autres notions de bon comportement à l'infini des polynômes et de l'étude des relations entre ces notions, on peut regarder [**NZ2**] en plus de [**NZ1**].

On a quelques information générales sur le spectre de tels polynômes, en effet pour les polynômes cohomologiquement modérés Sabbah [**Sa2**] a montré que le spectre est contenu dans $]-1, n-1[$ et symétrique par rapport au point $\frac{n-2}{2}$. On a les même propriétés dans le cas M-modéré (voir [**NS**]) et dans le cas sans singularités à l'infini définis pas Siersma et Tibăr puisque ces polynômes sont des polynômes cohomologiquement modérés.

Douai [**Do**] a montré en explicitant des résultats de [**Sa2**] que dans le cas d'un polynôme non dégénéré par rapport à son polygone de Newton à l'infini et commode (en particulier modéré) on peut calculer le spectre à partir de la filtration de Newton.

Grâce au lemme suivant, on a parmi les polynômes bons un analogue global de la famille des singularités irréductibles de courbes planes.

Définition 3. — Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une application polynomiale. L'entrelacs à l'infini de f est l'entrelacs $f^{-1}(0) \cap S_R$ où S_R est une sphère de rayon R suffisamment grand.

***Lemme 1* ([NR] Lemma 7.1)**. — *Si $V \subset \mathbb{C}^2$ est une fibre de $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ qui est réduite et dont son entrelacs à l'infini est un nœud (V est connexe à l'infini) alors f est un polynôme bon.*

Dans la suite, on appelera un polynôme qui vérifie les hypothèses du lemme 1 un polynôme irréductible à l'infini.

3.3. Une formule pour les paires spectrales. — Dans ce paragraphe, on montre comment calculer les paires spectrales à partir de la compactification construite dans la section précédente. Au graphe dual Γ'_∞ de la décomposition de $\mathcal{E}_\infty$, on rajoute des flèches qui correspondent aux dicritiques. On note Γ_∞ le graphe ainsi obtenu. Les sommets de Γ_∞ sont indexés par l'ensemble $A \cup V \cup \{\infty\}$. Par construction Γ_∞ est un arbre connexe (voir [**LW**], [**N3**]). On notera de plus R l'ensemble des points de rupture de Γ'_∞, c'est l'ensemble des sommets de Γ'_∞ qui ont au moins deux arêtes incidentes.

Pour $v \in A \cup V$, on définit $p(v) \in V \cup \{\infty\}$ le premier sommet rencontré dans un chemin de v à ∞ dans V (il est unique car Γ_∞ est un arbre).

On note

- m_v la multiplicité de la tranformée totale de $\overline{f}$ le long de E_v pour $v \in A \cup V \cup \{\infty\}$ (les dicritiques étant de multiplicité 0),
- $\delta_v = \mathrm{pgcd}(m_v, m_{p(v)})$ pour $v \in V$ et δ_v est le degré du dicritique qui correspond à la flèche pour $v \in A$,
- $V_v = \{\mu \in V \cup \{\infty\} : \mu \text{ est connecté à } v\}$, pour $v \in V \cup \{\infty\}$,
- $r_v = \mathrm{pgcd}(m_\mu, \mu \in V_v)$, pour $v \in V \cup \{\infty\}$,
- $\{x\} \in [0,1[$ la partie fractionnaire de $x \in \mathbb{R}$.

On définit alors des éléments de $\mathbb{Z}^{(\mathbb{Q}\times\mathbb{Z})}$ par :

- $a_v = \displaystyle\sum_{\substack{0<s<m_v \\ m_v \nmid s r_v}} \Bigg(-1 + \sum_{\mu \in V_v} \left\{\frac{s m_\mu}{m_v}\right\}\Bigg) \left[\left(\frac{s}{m_v} - 1, 1\right) + \left(1 - \frac{s}{m_v}, 1\right)\right]$, $v \in V \cup \{\infty\}$,

- $b_v = \sum_{0<s<r_v} \left[\left(-\frac{s}{r_v}, 2\right) + \left(\frac{s}{r_v}, 0\right)\right], \ v \in V \cup \{\infty\},$
- $c_v = \sum_{0<s<\delta_v} \left[\left(-\frac{s}{\delta_v}, 2\right) + \left(\frac{s}{\delta_v}, 0\right)\right], \ v \in V,$
- $c'_v = \sum_{0<s<\delta_v} \left(-\frac{s}{\delta_v}, 2\right), \ v \in A.$

Théorème 2. — *On a*

$$\operatorname{Spp}^1(f, \infty) = \sum_{v\in R} a_v + \sum_{v\in R\smallsetminus\{\infty\}} (c_v - b_v) - b_\infty + \sum_{v\in A} c'_v + (|A| - 1)(0, 1).$$

Démonstration. — Il suffit de suivre la preuve de [**SSS**] dans le cas local. On applique le Théorème 1 qui nous donne une suite spectrale $E_1^{p,q}$ aboutissant à $H^*(\overline{F}, \mathbb{Q})$. On a

$$\begin{aligned} E_1^{-1,2} &= H^0(\widetilde{D}^{(2)}, \mathbb{Q})(-1), && \text{(pur de type } (1,1)),\\ E_1^{0,q} &= H^q(\widetilde{D}^{(1)}, \mathbb{Q}), \ q = 0,1,2 && \text{(pur de poids } q),\\ E_1^{1,0} &= H^0(\widetilde{D}^{(2)}, \mathbb{Q}), && \text{(pur de type } (0,0)), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} E_1^{-1,2} &= \bigoplus_{v\in V} \mathbb{Q}(-1)^{\delta_v}, && \text{(pur de type } (1,1)),\\ E_1^{0,q} &= \bigoplus_{v\in V\cup\{\infty\}} H^q(D_v, \mathbb{Q}), \ q = 0,1,2 && \text{(pur de poids } q),\\ E_1^{1,0} &= \bigoplus_{v\in V} \mathbb{Q}^{\delta_v}, && \text{(pur de type } (0,0)), \end{aligned}$$

tous les autres $E_1^{p,q}$ sont nuls. On en déduit

$$\begin{aligned} \operatorname{Spp}(E_1^{-1,2}) &= \sum_{v\in V} \Big(\sum_{0<s<\delta_v} \Big(-\frac{s}{\delta_v}, 2\Big) + (0,1)\Big),\\ \operatorname{Spp}(E_1^{0,2}) &= \sum_{v\in V\cup\{\infty\}} \Big(\sum_{0<s<r_v} \Big(-\frac{s}{r_v}, 2\Big) + (0,1)\Big),\\ \operatorname{Spp}(E_1^{0,0}) &= \sum_{v\in V\cup\{\infty\}} \Big(\sum_{0<s<r_v} \Big(\frac{s}{r_v}, 0\Big) + (1,-1)\Big),\\ \operatorname{Spp}(E_1^{1,0}) &= \sum_{v\in V} \Big(\sum_{0<s<\delta_v} \Big(\frac{s}{\delta_v}, 0\Big) + (1,-1)\Big),\\ \operatorname{Spp}(E_1^{0,1}) &= a_v. \end{aligned}$$

De la même façon, on a

$$\operatorname{Spp}(\overline{f}, \infty) = \sum_{r,s} (-1)^{r+s-1} \operatorname{Spp}(E_1^{r,s}) + (1, -1).$$

On peut conclure en utilisant la Proposition 1 qui implique

$$\mathrm{Spp}^1(f,\infty) = \mathrm{Spp}(\overline{f},\infty) + \mathrm{Spp}^0(\overline{f},\infty) + \mathrm{Spp}^2(\overline{f},\infty) + B(f,\infty). \qquad \square$$

Remarque 3

(1) Dans la définition que l'on donne des paires spectrales $\mathrm{Spp}^1(f,\infty)$ (resp. du spectre $\mathrm{Sp}^1(f,\infty)$), on fait un tour dans $\mathbb{P}^1$ autour du point ∞ dans le sens trigonométrique. Ramené à $\mathbb{C}$ ce petit cercle autour du point ∞ devient (à homotopie près dans $\mathbb{P}^1 \smallsetminus B$) un grand cercle qui contient B, orienté dans le sens opposé au sens trigonométrique. Ce changement d'orientation change les paires spectrales (resp. le spectre). Le Lemme 2.6 dans [**Di**] nous explique comment faire.

Si l'on note $\mathrm{Spp}^1_+(f,\infty)$ (resp. $\mathrm{Sp}^1_+(f,\infty)$) les paires spectrales ainsi obtenues alors, on a :

$$\mathrm{Spp}^1_+(f,\infty) = \sum_{v\in R} a_v^+ + \sum_{v\in R\smallsetminus\{\infty\}} (c_v - b_v) - b_\infty + \sum_{v\in A} c'_v + (|A|-1)(0,1),$$

où

$$a_v^+ = \sum_{\substack{0<s<m_v\\ m_v\nmid sr_v}} \Big(-1 + \sum_{\mu\in V_v}\Big\{\frac{sm_\mu}{m_v}\Big\}\Big)\Big[\Big(-\frac{s}{m_v},1\Big) + \Big(\frac{s}{m_v},1\Big)\Big],\ v\in R.$$

(2) Si $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ est homogène (ou quasi homogène) alors on a : $\mathrm{Spp}^1_+(f,\infty) = \mathrm{Spp}^n(f,0)$.

(3) Ici on a choisi le sommet qui correspond à la droite à l'infini comme point de base. On peut comme dans le cas local choisir n'importe quel sommet.

(4) Le spectre $\mathrm{Sp}^1(f,\infty)$ est symétrique par rapport à 0 si et seulement si la somme $\sum_{v\in A} c'_v$ est nulle c'est-à-dire tous les dicritiques sont de degré 1, fait déjà remarqué dans [**Di**].

3.4. Calcul des paires spectrales à partir du diagramme de Eisenbud et Neumann à l'infini de la fibre générique. — Pour la notion d'entrelacs ou de multientrelacs, on peut se référer à [**EN**] et pour ce qui est de la notion d'entrelacs à l'infini de la fibre générique d'un polynôme à [**N1**].

Pour les définitions, les détails et les notations de ce qui suit, on se réfère à [**N3**].

On va montrer ici comment calculer les paires spectrales $\mathrm{Spp}^1_+(f,\infty)$ à partir du diagramme de Eisenbud et Neumann de l'entrelacs à l'infini de la fibre générique noté $\Gamma(K_{f,\infty})$.

Notons $\Gamma'(K_{f,\infty})$ le graphe obtenu de $\Gamma(K_{f,\infty})$ en ajoutant les sommets qui correspondent aux dicritiques. Le degré d'un dicritique est le nombre de flèches attachées au sommet correspondant.

Si l'on ôte tous les sommets de $\Gamma'(K_{f,\infty})$ de multiplicité inférieure ou égale à 0 et que l'on remplace les sommets horizontaux par une flèche (dont la multiplicité est l'unique multiplicité qui laisse invariant les multiplicités des autres sommets) alors on obtient le diagramme de Eisenbud et Neumann du multientrelacs fibré K_0 défini dans [**N1**] et rappelé dans [**AC**].

Comme l'on remarqué [**SSS**], il est possible de donner une définition des paires spectrales pour les multientrelacs fibrés. On utilise ici cette définition et l'on note $\mathrm{Spp}(\Gamma(K_0))$ les paires spectrales ainsi obtenues.

L'objet de ce paragraphe est de montrer la proposition suivante.

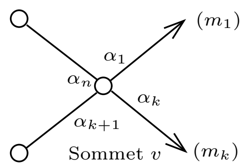
Proposition 2. — $\mathrm{Spp}^1_+(f,\infty) = \mathrm{Spp}(\Gamma(K_0))$.

Cela répond ainsi dans un cas particulier à la question posée dans [**SSS**] remarque 4.1 sur l'interprétation de $\mathrm{Spp}(\Gamma(K_0))$.

Indépendamment P. Cassou-Noguès [**C**] a considéré des formules similaires associées à un diagamme de Eisenbud et Neumann et elle a conjecturé implicitement une relation avec le spectre d'un polynôme.

Démonstration. — D'après [**N3**] section 6, on sait exactement comment passer du graphe dual de la résolution de f au diagramme de Eisenbud et Neumann de l'entrelacs à l'infini de la fibre générique de f.

Si on calcule les nombres s_j associés à un sommet v comme dans le cas local (après désatellisation, voir [**C**])



où $m_j = 0$ pour $i = k+1,\dots,n$ et β_j, $j = 1,\dots,n$ tels que

$$\beta_j \alpha_1 \cdots \widehat{\alpha_j} \cdots \alpha_n \equiv 1 \bmod \alpha_j$$

et

$$s_j = \frac{m_j - \beta_j m_v}{\alpha_j}$$

alors les s_j nous donnent l'opposé des multiplicités des sommets voisins au sommet v modulo m_v. Cela est dû au fait que au diagramme de résolution correspond (avec même sommets et même arêtes) un diagramme de Eisenbud et Neumann dont les arêtes ont pour déterminant -1, voir [**N3**] section 6.

D'après ce qui précède, les seules parties des paires spectrales $\mathrm{Spp}^1_+(f,\infty)$ et $\mathrm{Spp}(\Gamma(K_0))$ qui peuvent être différentes sont celles qui correspondent aux termes a_v.

Dans le premier cas, on a :

$$a_v = \sum_{\substack{0<s<m_v \\ m_v \nmid s r_v}} \Big(-1 + \sum_{\mu \in V_v} \Big\{ \frac{s m_\mu}{m_v} \Big\} \Big) \Big[\Big(\frac{s}{m_v}, 1 \Big) + \Big(\frac{s}{m_v}, 1 \Big) \Big]$$

et dans le deuxième cas, on a :

$$a_v = \sum_{\substack{0<s<m_v \\ m_v \nmid s r_v}} \Big(-1 + \sum_{\mu \in V_v} \Big\{ \frac{-s m_\mu}{m_v} \Big\} \Big) \Big[\Big(\frac{s}{m_v} - 1, 1 \Big) + \Big(1 - \frac{s}{m_v}, 1 \Big) \Big].$$

Pour conclure, on remarque que les deux sommes précédentes sont égales. □

3.5. Autre description des paires spectrales. — On a une équivalence entre la donnée des paires spectrales de $H^1(F, \mathbb{Q})$ et la donnée de trois polynômes avec certains nombres entiers. Plus précisément, on a équivalence entre la donnée de

$$\mathrm{Spp}^1_+(F, \infty) = \sum_{\alpha, w} m_{\alpha,w}(\alpha, w)$$

et la donnée de

$$\begin{cases} \Delta(t) = \prod_{\alpha,w} (t-\lambda)^{m_{\alpha,w}}, \\ \Delta^1(t) = \prod_{0<\alpha<1} (t-\lambda)^{m_{\alpha,0}}, \\ \Delta'(t) = \prod_{-1<\alpha<0} (t-\lambda)^{m_{\alpha,2} - m_{-\alpha,0}}, \\ \sigma_\lambda = m_{\alpha,1} - m_{\alpha+1,1},\ \lambda = \exp(-2i\pi\alpha), \\ r \text{ le nombre de branches à l'infini.} \end{cases}$$

Réciproquement, si on connait les multiplicités des trois polynômes précédents ainsi que σ_λ et r, on peut calculer les paires spectrales comme suit. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on lui associe ses multiplictés m_λ, m^1_λ et m'_λ dans $\Delta(t)$, $\Delta^1(t)$ et $\Delta'(t)$ respectivement. Avec $\lambda = \exp(2i\pi\alpha)$, on a

$$\begin{cases} m_{\alpha,2} = m^1_\lambda + m'_\lambda & \text{pour } -1<\alpha<0, \\ m_{\alpha,1} = (m_\lambda - m'_\lambda - 2m^1_\lambda + \sigma_\lambda)/2 & \text{pour } -1<\alpha<0, \\ m_{\alpha,1} = (m_\lambda - m'_\lambda - 2m^1_\lambda - \sigma_\lambda)/2 & \text{pour } 0<\alpha<1, \\ m_{\alpha,0} = m_{-\alpha,2} & \text{pour } 0<\alpha<1, \\ m_{0,1} = r-1. \end{cases}$$

On remarque que

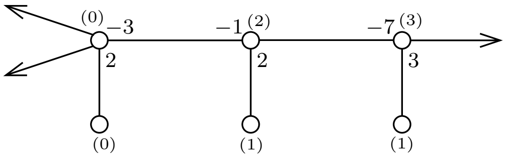
- $\Delta(t)$ est le polynôme caractéristique de la monodromie,
- $\Delta^1(t)$ est le polynôme de la monodromie restreinte à $\mathrm{Im}(I - (T^1_\infty)^q)$ (q est étant un multiple commun aux ordres des valeurs propres de la monodromie).

Pour le calcul explicite de $\Delta(t)$, on peut regarder la proposition 3.7 de [**AC**] ou le théorème 12.1 de [**EN**].

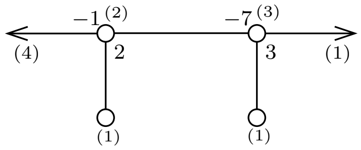
Pour le calcul explicite de $\Delta^1(t)$, on peut regarder la proposition 3.10 de [**AC**] ou le théorème 14.1 de [**EN**].

Pour le polynôme $\Delta'(t)$ Dimca [**Di**] donne une description de $\Delta'(t)$ (description qui est en fait donnée par la Proposition 1).

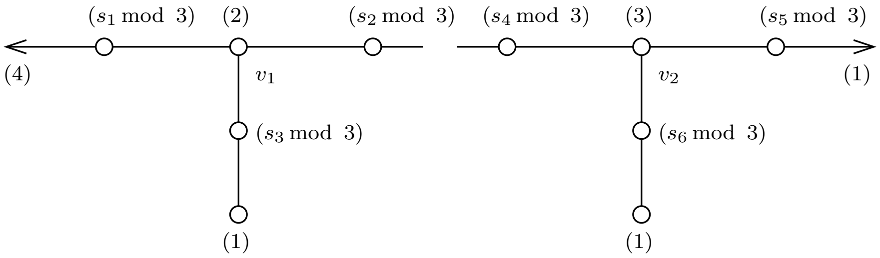
3.6. Exemple : Le polynôme de Briançon. — Le diagramme de Eisenbud et Neumann de l'entrelacs à l'infini de la fibre générique du polynôme de Briançon (voir [**ACD**] pour une définition) est donné par le diagramme suivant :



Le diagramme de K_0 est :



On calcule les multiplicités modulo m_v des sommets voisins à l'aide de la section précédente.



On peut prendre :

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 0, \quad s_1 = -4 \equiv 0 \bmod 2,\\
\beta_2 &= 0, \quad s_2 = 3 \equiv 1 \bmod 2,\\
\beta_3 &= 1, \quad s_3 = -1 \equiv 1 \bmod 2,\\
\beta_4 &= 5, \quad s_4 = 1 \equiv 1 \bmod 3,\\
\beta_5 &= 0, \quad s_5 = 1 \equiv 1 \bmod 3,\\
\beta_6 &= 2, \quad s_6 = -2 \equiv 1 \bmod 3.
\end{aligned}$$

On a alors $a^+_{v_1} = 0$, $a^+_{v_2} = \left(-\frac{1}{3}, 1\right) + \left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

On a :

$$\mathrm{Spp}_+(f,\infty) = \left(-\frac{1}{3}, 1\right) + \left(\frac{1}{3}, 1\right) + \left(-\frac{1}{2}, 2\right) + (0,1)$$

et

$$\mathrm{Sp}_+(f,\infty) = \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + (0).$$

4. Sur la conjecture de Hertling-Dimca

Soit $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ un germe de fonction analytique en 0 ou une application polynomiale. Dans la section 2, on a défini le spectre de f ($\mathrm{Sp}^n(f,0)$ dans le cas d'un germe et $\mathrm{Sp}^n_+(f,\infty)$ dans le cas d'un polynôme) que l'on note et que l'on écrit ici sous la forme

$$\mathrm{Sp}^n(f) = (\alpha_1) + \cdots + (\alpha_\mu),$$

avec $-1 < \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_\mu \leqslant n$ (voir [**Ste**], [**Sa2**] et [**Di**] pour l'encadrement).

On note

$$V = V(f) = \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{\mu}\left(\alpha_i - \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_\mu}{\mu}\right)^2$$

la variance du spectre $\mathrm{Sp}(f)$.

Conjecture 1 **(Hertling [H] Conjecture 1.2)**. — *Pour toute singularité isolée d'hypersurface, on a*

$$V \leqslant \frac{\alpha_\mu - \alpha_1}{12}.$$

Conjecture 2 **(Dimca [Di] Conjecture 5.3)**. — *Pour tout polynôme faiblement modéré, on a*

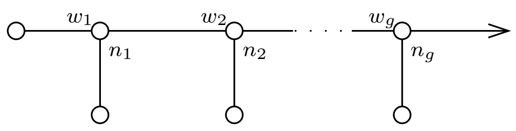
$$V \geqslant \frac{\alpha_\mu - \alpha_1}{12}.$$

Ici, c'est sous le nom de conjecture de Hertling-Dimca que l'on appelera les deux conjectures précédentes.

La conjecture de Hertling-Dimca a été prouvée dans le cas des singularités d'un polynôme quasi-homogène (voir [**Di**], [**H**]), d'un germe de courbe irréductible (voir [**S**]) et dans le cas où le polynôme ou le germe est à singularité isolée et non dégénéré par rapport à son polygone de Newton (voir [**Bre**]).

Remarque 4. — Jusqu'à présent tous les polynômes $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ testés vérifient la conjecture 2 même s'ils ne sont pas modérés.

Considérons le diagramme de Eisenbud et Neumann suivant



que l'on note $\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g)$ avec $(n_k, w_k) \in \mathbb{Z}^2$ pour $1 \leqslant k \leqslant g$.

On pose aussi $\Delta_k(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g) = w_k - w_{k-1}n_{k-1}n_k$ pour $2 \leqslant k \leqslant g$ et $n'_k = n_{k+1}\cdots n_g$ pour $2 \leqslant k \leqslant g$ et $n'_g = 1$.

On a le théorème suivant (voir [**EN**] pour le cas local et [**N1**] pour l'entrelacs à l'infini)

Théorème 3. — *Le nœud d'un germe irréductible a un diagramme de Eisenbud et Neumann de la forme*

$$\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g)$$

avec $n_k > 1$, $w_k > 1$, $\mathrm{pgcd}(n_k, w_k) = 1$, *pour* $1 \leqslant k \leqslant g$ *et* $\Delta_k > 0$ *pour* $2 \leqslant k \leqslant g$.

Réciproquement un diagramme

$$\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g)$$

avec $n_k > 1$, $w_k > 1$, $\mathrm{pgcd}(n_k, w_k) = 1$, *pour* $1 \leqslant k \leqslant g$ *et* $\Delta_k > 0$ *pour* $2 \leqslant k \leqslant g$ *provient du nœud d'un germe irréductible de courbe plane.*

Un nœud à l'infini d'une courbe algébrique plane a un diagramme de Eisenbud et Neumann de la forme

$$\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g)$$

avec

$$\begin{cases} n_k > 1, \quad w_k > 1, \quad \mathrm{pgcd}(n_k, w_k) = 1, \ \textit{pour}\ 1 \leqslant k \leqslant g, \\ \Delta_k < 0, \ \textit{pour}\ 2 \leqslant k \leqslant g, \ \textit{et}\ w_1 < n_1, \\ w_{k+1} \in n_1 n_2 \cdots n_k \mathbb{N} \oplus w_1 n_2 \cdots n_k \mathbb{N} \oplus \cdots \oplus w_{k-1} n_k \mathbb{N} \oplus w_k \mathbb{N}, \\ \hfill \textit{pour}\ 0 \leqslant k \leqslant g-1. \end{cases}$$

Comme dans le cas local, on a la réciproque.

Définition 4. — Les paires spectrales associées au diagramme $\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g)$ avec $(n_k, w_k) \in \mathbb{Z}^2$ pour $1 \leqslant k \leqslant g$ sont

$$\begin{aligned} &\mathrm{Spp}(\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g)) \\ &\qquad = \sum \left(1 - \frac{1}{n'_k}\left(\frac{i}{n_k} + \frac{j}{w_k} + r\right), 1\right) + \left(\frac{1}{n'_k}\left(\frac{i}{n_k} + \frac{j}{w_k} + r\right) - 1, 1\right) \end{aligned}$$

où la somme porte sur $1 \leqslant k \leqslant g,\ 0 < i < n_k,\ 0 < j < w_k,\ \frac{i}{n_k} + \frac{j}{w_k} < 1,\ 0 \leqslant r < n'_k$.

On pose

- $\mu = \mu(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g) = \mathrm{card}(\mathrm{Sp}(\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g)))$,
- $\alpha = \alpha(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g) = \max(\mathrm{Sp}(\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g)))$,
- $S = S(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g)$ la somme des carrés des valeurs spectrales

et

$$E_k(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g) = \frac{(n'_{k-1} - 1)\left(w_{k-1} w_k n'_k \left(\frac{n'_0}{n'_{k-1}} w_1 - n_1 - w_1\right) + \frac{n'_0}{n'_{k-2}} w_1\right)}{n'_0 w_1 w_{k-1} w_k}.$$

Remarque 5. — On a $\mu = \sum_{k=1}^{g} (n_k - 1)(w_k - 1) n'_k$, et $\alpha = 1 - \frac{w_1 + n_1}{n'_0 w_1}$.

Alors,

Théorème 4. — *Soit $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ (resp. $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$) un germe irréductible (resp. un polynôme irréductible à l'infini) dont le diagramme du nœud associé est $\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g)$ alors*

$$\mathrm{Spp}^1(f, 0) = \mathrm{Spp}(\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g))$$

(resp. $\mathrm{Spp}^1_+(f, \infty) = \mathrm{Spp}(\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g))$*).*

Démonstration. — A un sommet v_k du diagramme auquel il correspond le couple (n_k, w_k), on peut montrer que l'on a $\delta_k = n'_{k-1}$, $r_k = n'_k$. Donc pour $1 \leqslant k \leqslant g$, on a

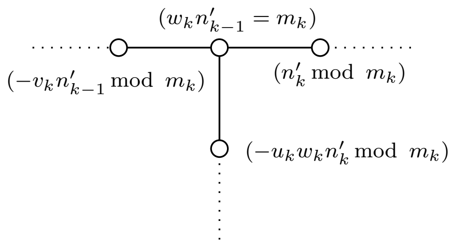
$$c_{v_k} = \sum_{0<s<n'_{k-1}} \Big(-\frac{s}{n'_{k-1}}, 2\Big) + \Big(\frac{s}{n'_{k-1}}, 0\Big), \quad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant g$$

et

$$b_{v_k} = \sum_{0<s<n'_k} \Big(-\frac{s}{n'_k}, 2\Big) + \Big(\frac{s}{n'_k}, 0\Big), \quad \text{pour } 0 \leqslant k \leqslant g.$$

On remarque donc que $\mathrm{Spp}(f) = \sum_{v \in R} a_v$.

Considérons un sommet v_k fixé, on va calculer a_{v_k}. On choisit u_k, $v_k \in \mathbb{Z}$ tels que $w_k u_k + n_k v_k = 1$.



En faisant une division euclidienne de s par $n_k w_k$ et en utilisant le théorème de Bezout, on obtient

$$a_{v_k} = \sum_{\substack{0<s<w_k n'_{k-1} \\ n_k w_k \nmid s}} A_k(s) \Big[\Big(\frac{s}{w_k n'_j} - 1, 1\Big) + \Big(1 - \frac{s}{w_k n'_k}, 1\Big)\Big].$$

avec

$$A_k(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } s = \alpha w_k + \beta n_k + r n_k w_k,\ 0 < \alpha < n_k,\ 0 < \beta < w_k,\ 0 \leqslant r < n'_k, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

Théorème 5. — *On a*

$$6S - \mu\alpha = -\sum_{k=2}^{g} E_k \Delta_k.$$

De cette formule, avec $E_k \geqslant 0$, pour $2 \leqslant k \leqslant g$, on en déduit immédiatement le corollaire suivant comme une conséquence du changement de signe des quantités Δ_k.

Corollaire 1. — *Si f est un germe analytique de courbe irréductible ou un polynôme irréductible à l'infini et à deux variables alors la conjecture de Hertling-Dimca est vraie pour f. De plus, on a égalité si et seulement si $g = 1$.*

Avant de commencer, on a besoin de quelques résultats d'arithmétique. Pour $a > 1$, $b > 1$, $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$, on pose

$$\Lambda(a,b) = \left\{ (i,j) \in \mathbb{Z}^2 : i, j > 0, \frac{i}{a} + \frac{j}{b} < 1 \right\}.$$

Lemme 2. — $\operatorname{card}(\Lambda(a,b)) = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$.

Démonstration. — C'est un cas très particulier du théorème de Pick (voir [**F**]). □

Lemme 3. — $$12 \sum_{(i,j)\in\Lambda(a,b)} \left(1 - \frac{i}{a} - \frac{j}{b}\right)^2 = (a-1)(b-1)\left(1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Démonstration. — C'est un cas particulier de la Proposition 5.2 de [**Di**]. □

Lemme 4. — $$12 \sum_{(i,j)\in\Lambda(a,b)} \left(1 - \frac{i}{a} - \frac{j}{b}\right) = (a-1)(b-1)\left(2 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{ab}\right).$$

Démonstration. — Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$, on définit la somme de Dedekind

$$s(p,q) = \sum_{k=1}^{q-1} \left(\left(\frac{k}{q}\right)\right) \left(\left(\frac{pk}{q}\right)\right)$$

où

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2}, & \text{si } x \notin \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

et x est un réel. Les sommes de Dedekind vérifient la loi de réciprocité suivante

$$s(p,q) + s(q,p) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} + \frac{1}{pq}\right).$$

Alors, on a d'après [**Bre**]

$$\sum_{(i,j)\in\Lambda(a,b)} i = \frac{-b}{6}(a-1)(2a-1) + (b-1/2)\frac{a(a-1)}{2} + as(b,a)$$

et

$$\sum_{(i,j)\in\Lambda(a,b)} j = \frac{-a}{6}(b-1)(2b-1) + (a-1/2)\frac{b(b-1)}{2} + bs(a,b).$$

Il reste à utiliser la loi de réciprocité de sommes de Dedekind pour trouver le résultat. □

On en déduit :

Lemme 5

$$12\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{(i,j)\in\Lambda(a,b)}\left(1-\frac{i}{a}-\frac{j}{b}+k\right)^2$$
$$= (a-1)(b-1)\left(2c-1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}\right).$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer directement les lemmes précédents. □

Lemme 6. — $\mu(n_1,w_1;\cdots;n_g,w_g) = (n_1'w_1-1)(n_0'-1)+\sum_{k=2}^{g}(n_{k-1}'-1)n_k'\Delta_k$.

Démonstration. — Par une récurrence sur g. □

Preuve du théorème. — On procède par récurrence sur g sachant que le résultat a déjà été démontré dans le cas $g=1$, il reste à passer du cas g au cas $g+1$.

Pour $1 \leqslant k \leqslant g+1$, on pose

$$S_k(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})$$
$$= 2\sum_{r=0}^{n_{k+1}\cdots n_{g+1}-1}\sum_{(i,j)\in\Lambda(n_k,w_k)}\left(\frac{1}{n_{k+1}\cdots n_{g+1}}\left(1-\frac{i}{n_k}-\frac{j}{w_k}+r\right)\right)^2$$

On a

$$S(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1}) = \sum_{k=1}^{g+1}S_k(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})$$

et

$$S_k(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1}) = S_{k-1}(n_2,w_2;\cdots;n_{g+1},w_{g+1}) \text{ pour } 2\leqslant k\leqslant g+1.$$

Par hypothèse de récurrence,

$$6S(n_1,w_1\,;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})$$
$$= -\sum_{k=3}^{g+1}E_{k-1}(n_2,w_2;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})\Delta_k - E_2'(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})$$
$$+\,\mu(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})\alpha(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1}).$$

avec

$$E_2'(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})$$
$$= +\,\mu(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})\alpha(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})$$
$$-\,\mu(n_2,w_2;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})\alpha(n_2,w_2;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})$$
$$-\,6S_1(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1}).$$

On a

$$\begin{aligned}
&E_2'(n_1, w_1; \cdots ; n_{g+1}, w_{g+1})\\
&= \big((n_1-1)(w_1-1)n_1' + \cdots + (n_{g+1}-1)(w_{g+1}-1)n_{g+1}'\big)\left(1-\frac{w_1+n_1}{n_0'w_1}\right)\\
&\quad - \big((n_2-1)(w_2-1)n_2' + \cdots + (n_{g+1}-1)(w_{g+1}-1)n_{g+1}'\big)\left(1-\frac{w_2+n_2}{n_1'w_2}\right)\\
&\quad - (n_1-1)(w_1-1)\left(2n_1' - 1 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{w_1} - \frac{1}{n_1w_1} + \frac{1}{n_0'w_1}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
E_2'(n_1,&w_1; \cdots ; n_{g+1}, w_{g+1})\\
&=(n_1-1)(w_1-1)\left(n_1' - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{w_1}\right)\\
&\quad - \left(\sum_{k=2}^{g+1}(n_k-1)(w_k-1)n_k'\right)\left(\frac{w_1w_2+n_1w_2-n_1w_1w_2-n_1n_2w_1}{n_0'w_1w_2}\right)\\
&\quad - (n_1-1)(w_1-1)\left(2n_1' - 1 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{w_1} - \frac{1}{n_1w_1} + \frac{1}{n_0'w_1}\right).
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 6 et en simplifiant un peu, on a :

$$\begin{aligned}
&E_2'(n_1, w_1; \cdots ; n_{g+1}, w_{g+1})\\
&= -\left((n_2'w_2-1)(n_1'-1) + \sum_{k=3}^{g+1}(n_{k-1}'-1)n_k'\Delta_k\right)\left(\frac{w_1w_2+n_1w_2-n_1w_1w_2-n_1n_2w_1}{n_0'w_1w_2}\right)\\
&\quad - (n_1-1)(w_1-1)\left(n_1' - 1 - \frac{1}{n_1w_1} + \frac{1}{n_0'w_1}\right).
\end{aligned}$$

D'où finalement

$$E_2'(n_1, w_1; \cdots ; n_{g+1}, w_{g+1}) = \sum_{k=2}^{g+1} E_k''(n_1, w_1; \cdots ; n_{g+1}, w_{g+1})$$

avec

$$\begin{aligned}
E_2''(n_1, &w_1; \cdots ; n_{g+1}, w_{g+1})\\
&= -(n_1'-1)\Big[(n_2'w_2-1)\frac{w_1w_2+n_1w_2-n_1w_1w_2-n_1n_2w_1}{n_0'w_1w_2}\\
&\qquad\qquad + (n_1-1)(w_1-1)(1-\frac{1}{n_0'w_1})\Big]
\end{aligned}$$

et

$$E_k''(n_1, w_1; \cdots ; n_{g+1}, w_{g+1}) = -(n_{k-1}'-1)n_k'\Delta_k\frac{w_1w_2+n_1w_2-n_1w_1w_2-n_1n_2w_1}{n_0'w_1w_2}$$

pour $3 \leqslant k \leqslant g+1$. Il suffit de remarquer que

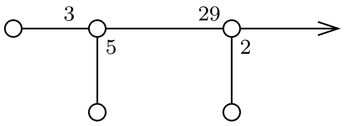
$$E_2''(n_1, w_1; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1}) = E_2(n_1, w_1; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1})\Delta_2$$

et

$$\begin{aligned} E_k''(n_1, w_1; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1}) + E_{k-1}(n_2, w_2, \ldots, n_{g+1}, w_{g+1})\Delta_k \\ = E_k(n_1, w_1, \ldots, n_{g+1}, w_{g+1})\Delta_k, \end{aligned}$$

pour $3 \leqslant k \leqslant g+1$.

Exemple 1. — Considérons l'exemple $f := (y^5 - x^3)^2 + xy^8$. Alors le diagramme de Eisenbud et Neumann est



Les paires spectrales sont

$$\begin{aligned} &(1/30,1)+(-1/30,1)+(1/15,1)+(-1/15,1)+(2/15,1)+(-2/15,1)\\ &+(7/30,1)+(-7/30,1)+(8/15,1)+(-8/15,1)+(17/30,1)+(-17/30,1)\\ &+(19/30,1)+(-19/30,1)+(11/15,1)+(-11/15,1)+(1/58,1)+(-1/58,1)\\ &+(3/58,1)+(-3/58,1)+(5/58,1)+(-5/58,1)+(7/58,1)+(-7/58,1)\\ &+(9/58,1)+(-9/58,1)+(11/58,1)+(-11/58,1)+(13/58,1)+(-13/58,1)\\ &+(15/58,1)+(-15/58,1)+(17/58,1)+(-17/58,1)+(19/58,1)+(-19/58,1)\\ &+(21/58,1)+(-21/58,1)+(23/58,1)+(-23/58,1)+(25/58,1)+(-25/58,1)\\ &+(27/58,1)+(-27/58,1). \end{aligned}$$

On trouve directement ou par le théorème que $6S - \mu\alpha = 34/145$.

Références

[AC] E. Artal-Bartolo & P. Cassou-Noguès – « Polynôme d'Alexander à l'infini d'un polynôme à deux variables », *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid* **13** (2000), no. 2, p. 267–285.

[ACD] E. Artal-Bartolo, P. Cassou-Noguès & A. Dimca – « Sur la topologie des polynômes complexes », in *Singularities (the Brieskorn anniversary volume)*, Progress in Math., vol. 162, Birkhäuser, 1998, p. 317–343.

[Bre] T. Brélivet – « Variance of the spectral number and Newton polygons », *Bull. Sci. Math.* **126** (2002), no. 4, p. 332–342.

[Bro] S.A. Broughton – « Milnor number and the topology of polynomial hypersurfaces », *Invent. Math.* **92** (1988), p. 217–241.

[C] P. Cassou-Noguès – « Entrelacs toriques itérés et intégrales associées à une courbe plane », *Sémin. Théor. Nombres Bordx. Sér. II* **2** (1990), p. 273–331.

[CH] P. Cassou-Noguès & Ha Huy Vui – « Théorèmes de Kuiper-Kuo-Bochnack-Lojasiewicz à l'infini », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **3** (1996), p. 387–406.

[De0] P. DELIGNE – « Théorie de Hodge I », in *Actes Congrès Intern. Math., vol. 1*, Gauthier-Villars, 1970, p. 425–430.

[De1] ———, « Théorie de Hodge II », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **40** (1971), p. 5–57.

[De2] ———, « Théorie de Hodge III », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **44** (1974), p. 5–77.

[Di] A. DIMCA – « Monodromy and Hodge theory of regular functions », in *New developments in singularity theory (Cambridge 2000)*, p. 257–278.

[Do] A. DOUAI – « Trés bonnes bases du réseau de Brieskorn d'un polynôme modéré », *Bull. Soc. math. France* **127** (1999), p. 255–287.

[EN] D. EISENBUD & W. NEUMANN – *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*, Annals of Mathematics Studies, vol. 110, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.

[F] W. FULTON – *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[Ha] HA HUY VUI – « On the irregular at infinity algebraic plane curves », Preprint Institute of Mathematics National Center for Scientific Rechearch of Vietnam.

[H] C. HERTLING – *Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 151, Cambridge University Press, 2002.

[LW] LÊ D.T. & C. WEBER – « Polynômes à fibres rationnelles et conjecture jacobienne à 2 variables », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **320** (1995), no. 5, p. 581–584.

[NS] A. NÉMETHI & C. SABBAH – « Semicontinuity of the spectrum at infinity », *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **69** (1999), p. 25–35.

[NZ2] A. NÉMETHI & A. ZAHARIA – « On the bifurcation set of a polynomial function and Newton boundary », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **26** (1990), p. 681–689.

[NZ1] ———, « Milnor fibration at infinity », *Indag. Math.* **3** (1992), p. 323–335.

[N1] W. NEUMANN – « Complex algebraic plane curves via their link at infinity », *Invent. Math.* **98** (1989), p. 445–489.

[N3] ———, « Irregular links at infinity of complex affine plane curves », *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **50** (1999), no. 199, p. 301–320.

[NR] W. NEUMANN & L. RUDOLPH – « Unfolding in Knot Theory », *Math. Ann.* **278** (1987), p. 409–439, Corrigendum, **282** (1988), p. 349-351.

[Sa1] C. SABBAH – « Monodromy at infinity and Fourier transform », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **33** (1997), no. 4, p. 643–685.

[Sa2] ———, « Hypergeometric periods for a tame polynomial », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **328** (1999), p. 603–608.

[S] M. SAITO – « Exponents of an irreducible curve singularity », preprint AG/0009133.

[SS] J. SCHERK & J. STEENBRINK – « On the mixed Hodge structure on the cohomology of the Milnor fiber », *Math. Ann.* **271** (1985), p. 641–665.

[SSS] R. SCHRAUWEN, J.H.M. STEENBRINK & J. STEVENS – « Spectral pairs and the topology of curve singularities », Proc. Sympos. Pure Math., vol. 53, American Mathematical Society, 1991, p. 305–328.

[ST] D. SIERSMA & M. TIBĂR – « Singularities at infinity and their vanishing cycles », *Duke Math. J.* **80** (1995), p. 771–783.

[Ste] J.H.M. STEENBRINK – « Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology », in *Real and Complex Singularities, Oslo 1976* (P. Holm, éd.), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977, p. 525–563.

[SZ] J.H.M. Steenbrink & S. Zucker – « Variation of mixed Hodge structure I », *Invent. Math.* **80** (1985), p. 489–542.

T. Brélivet, Laboratoire de Mathématiques Pures de Bordeaux, 351, cours de la Libération, 33405 Talence • *E-mail :* Thomas.Brelivet@math.u-bordeaux.fr