Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1

УДК 517.9+531.19

О ТЕОРЕМАХ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЦЕПОЧКИ УРАВНЕНИЙ БОГОЛЮБОВА В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

М. А. Сташенко, Г. Н. Губаль

Аннотация: В задаче Коши для несимметричной цепочки уравнений Боголюбова доказано существование решения, представленного как разложение по группам (кластерам) частиц, эволюция которых определяется кумулянтом (семиинвариантом) эволюционного оператора этой группы частиц в пространстве последовательностей суммируемых и ограниченных функций.

Ключевые слова: уравнения Боголюбова, несимметричная система, кумулянт (семиинвариант).

Как известно [1–3], решение начальной задачи для цепочки уравнений Боголюбова многочастичных систем определяется разложением по группам (кластерам) возрастающего числа частиц в форме ряда итераций или некоторого функционального ряда.

В данной работе исследуются многочастичные несимметричные системы, т. е. системы одинаковых частиц, описываемые функцией Гамильтона и функциями распределения групп частиц, неинвариантными относительно замены нумерации частиц. Типичным примером несимметричной системы служит одномерная система частиц со взаимодействием ближайших соседей. При их описании использовано новое представление [4] решения начальной задачи для цепочки уравнений Боголюбова, позволяющее детально описать кластерный характер эволюции многочастичных систем.

Начальные данные $F(0)$ рассматриваются из пространства E_ξ двойных последовательностей f суммируемых ограниченных функций f_n с нормой

$$\|f\| = \sup_{n=n_1+n_2\geq 0} \xi^{-(n_1+n_2)} \sup_{x_{-n_2},\dots,x_{n_1}} |f_n(x_{-n_2},\dots,x_{n_1})| e^{\beta \sum\limits_{i=-n_2}^{n_1} \frac{p_i^2}{2}}, \qquad (1)$$

где $\xi, \beta > 0$ — числа.

Пространству E_ξ принадлежат последовательности функций распределения групп частиц, описывающих состояния систем бесконечного числа частиц [2]. В этом случае при построении решения возникает проблема, связанная с расходимостью интегралов по конфигурационным переменным в каждом члене ряда [3].

Решение $F(t) = \{F_{|Y|}(t,Y)\}_{|Y|=s=s_1+s_2\geq 0}$ задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова несимметричной системы частиц со взаимодействием ближайших соседей с начальными данными $F(0) = \{F_{|Y|}(0,Y)\}_{|Y|=s=s_1+s_2\geq 0}$ определяется таким разложением [4]:

$$F_{|Y|}(t,Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1,n_2\geq 0}} \int\limits_{(\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1)^{n_1+n_2}} d(X\backslash Y)\, \mathfrak{A}_{(n_2,n_1)}(t, X_Y) F_{|X|}(0,X), \tag{2}$$

где

$$Y = (x_{-s_2},\ldots,x_{s_1}), \quad X = (x_{-(n_2+s_2)},\ldots,x_{s_1+n_1}),$$
$$d(X\backslash Y) = dx_{-(n_2+s_2)}\ldots dx_{-(s_2+1)}dx_{s_1+1}\ldots dx_{s_1+n_1},$$

$\mathfrak{A}_{(n_2,n_1)}(t)$, $n_1+n_2\geq 0$, — кумулянты эволюционного оператора $S_{s+n}(-t)$. Заметим, что действие последнего определяется правилом

$$S_{s+n}(-t, x_{-(n_2+s_2)},\ldots,x_{s_1+n_1}) f_{s+n}(x_{-(n_2+s_2)},\ldots,x_{s_1+n_1})$$
$$= \begin{cases} f_{s+n}(X_{-(n_2+s_2)}(-t, x_{-(n_2+s_2)},\ldots,x_{s_1+n_1}),\ldots, \\ \qquad X_{s_1+n_1}(-t, x_{-(n_2+s_2)},\ldots,x_{s_1+n_1})), \quad \text{если} \\ \qquad (x_{-(n_2+s_2)},\ldots,x_{s_1+n_1}) \\ \qquad\quad \in \mathbb{R}^{n_1+s_1+n_2+s_2}\times(\mathbb{R}^{n_1+s_1+n_2+s_2}\setminus W_{n_1+s_1+n_2+s_2}); \\ 0, \quad \text{если } (q_{-(n_2+s_2)},\ldots,q_{s_1+n_1})\in W_{n_1+s_1+n_2+s_2}, \end{cases} \tag{3}$$

где $X_i(-t, x_{-(n_2+s_2)},\ldots,x_{s_1+n_1})$, $i=-(n_2+s_2),\ldots,s_1+n_1$, — решение начальной задачи для уравнений Гамильтона системы $n+s$ частиц с начальными данными $X_i(0, x_{-(n_2+s_2)},\ldots,x_{s_1+n_1}) = x_i$, $i = -(n_2+s_2),\ldots,s_1+n_1$, $W_{n_1+s_1+n_2+s_2} = \{(q_{-(n_2+s_2)},\ldots,q_{s_1+n_1})\in\mathbb{R}^{n_1+s_1+n_2+s_2} \mid \sigma+q_i > q_{i+1}$ хотя бы для одной пары $(i,i+1)\in(-(n_2+s_2), -(n_2+s_2)+1),\ldots,(-1,1),\ldots,(s_1+n_1-1, s_1+n_1)\}$ — запрещенные конфигурации.

Это решение представлено в виде разложений по группам (кластерам) частиц, эволюция которых определяется кумулянтом эволюционного оператора данной группы.

В работе детально рассмотрена проблема сходимости функционального ряда (2) для одномерной несимметричной системы твердых шаров диаметром σ с массой $m=1$ и потенциалом $\Phi(q)$: $\Phi\in C^2[\sigma,R]$, $0<\sigma<R<\infty$,

$$\Phi(|q|) = \begin{cases} +\infty, & |q|\in[0,\sigma), \\ 0, & |q|\in(R,+\infty), \end{cases} \qquad \Phi'(\sigma+0)=0, \tag{4}$$

удовлетворяющим условиям устойчивости

$$\sum_{i=-n_2}^{n_1-1} \Phi(q_i - q_{i+1}) \geq -B(n_1+n_2), \quad B>0,$$

в пространстве E_ξ последовательностей суммируемых ограниченных функций.

На разрешенных конфигурациях $\mathbb{R}^n\backslash W_n$ имеет место соотношение

$$\left|\sum_{i=-n_2}^{n_1-1} \Phi(q_i - q_{i+1})\right| \leq B(n_1+n_2). \tag{5}$$

Пусть $E_\xi^0 \subset E_\xi$ — множество последовательностей функций f_n, равных нулю в некоторой ε-окрестности запрещенных конфигураций или удовлетворяющих граничным условиям на границе запрещенных конфигураций. Для начальных данных $F(0)\in E_\xi^0$ получены условия сходимости функционального ряда (2). При этом обобщена оценка области взаимодействия [3] на случай решения в форме разложения по кумулянтам.

§ 1. Сужение области интегрирования в решении задачи Коши

Известно [4], что кумулянт $\mathfrak{A}_{(n_2,n_1)}(t, X_Y)$ имеет вид

$$\mathfrak{A}_{(n_2,n_1)}(t, X_Y) = \sum_{P: X_Y = \bigcup\limits_i X_i} (-1)^{|P|-1} \prod_{X_i \subset P} S_{|X_i|}(-t, X_i), \tag{6}$$

где $\sum\limits_P$ — сумма по всем упорядоченным разбиениям частично упорядоченного множества X_Y на $|P|$ непустых попарно не пересекающихся частично упорядоченных подмножеств, а множество Y содержится в одном из подмножеств X_i.

Пусть существует пара частиц (например, k и $k+1$), не взаимодействующих за время t. Тогда

$$\begin{aligned} &S_{s+n}(-t, x_{-(n_2+s_2)}, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{s_1+n_1}) \\ &\qquad = S_{s_2+n_2+k}(-t, x_{-(n_2+s_2)}, \ldots, x_k) S_{s_1+n_1-k}(-t, x_{k+1}, \ldots, x_{s_1+n_1}). \end{aligned} \tag{7}$$

Запишем кумулянт (6) в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{(n_2,n_1)}(t, X_Y) = \sum_{P_1} (-1)^{|P_1|-1} \prod_{X_i \subset P_1} S_{|X_i|}(-t, X_i) \\ + \sum_{P_2} (-1)^{|P_2|-1} \prod_{X_i \subset P_2} S_{|X_i|}(-t, X_i), \end{aligned} \tag{8}$$

где P_1 — те разбиения множества X_Y на X_i, в которых частицы k и $k+1$ принадлежат одному подмножеству X_i, а P_2 — те разбиения, в которых частицы k и $k+1$ принадлежат разным (соседним) подмножествам.

Очевидно, что $\mathfrak{A}_{(n_2,n_1)}(t, X_Y)$ имеет 2^n $(n = n_1 + n_2)$ слагаемых, так как есть ровно 2^n разных разбиений P.

Лемма. *Если частицы k и $k+1$ не взаимодействуют в течение времени t, то $\mathfrak{A}_{(n_2,n_1)}(t, X_Y) \equiv 0$.*

Доказательство. Покажем, что и число разбиений P_1, и число разбиений P_2 равно 2^{n-1}.

Для этого построим биекцию множества разбиений P_1 в множество разбиений P_2. Пусть $p = (X_1, X_2, \ldots, X_s)$ — некоторое разбиение из множества P_1. Частицы k и $k+1$ принадлежат одному подмножеству, пусть $x_k, x_{k+1} \in X_m = (x_{k-r}, x_{k-r+1}, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l})$. Образуем два непустых подмножества
$X_{m_1} = (x_{k-r}, x_{k-r+1}, \ldots, x_k)$, $X_{m_2} = (x_{k+1}, \ldots, x_{k+l})$ и рассмотрим разбиение $\tilde{p} = (X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}, X_{m_1}, X_{m_2}, X_{m+1}, \ldots, X_s)$.

Очевидно, что $\tilde{p}$ — разбиение из множества P_2, так как частицы k и $k+1$ принадлежат разным подмножествам: $x_k \in X_{m_1}$, $x_{k+1} \in X_{m_2}$; если разбиение p имеет s элементов, то разбиение $\tilde{p}$ имеет $s+1$ элементов; построенное отображение является биекцией множества разбиений P_1 в множество разбиений P_2.

Поскольку всего разбиений 2^n, то в P_1 и P_2 имеется по 2^{n-1} разбиений.

Согласно (8) кумулянт имеет следующую пару слагаемых:

$$(-1)^{s-1} S_{|X_1|}(-t, X_1) S_{|X_2|}(-t, X_2) \ldots S_{|X_m|}(-t, X_m) \ldots S_{|X_s|}(-t, X_s),$$

$$(-1)^s S_{|X_1|}(-t, X_1) S_{|X_2|}(-t, X_2) \dots S_{|X_{m-1}|}(-t, X_{m-1}) \\ \times S_{|X_{m_1}|}(-t, X_{m_1}) S_{|X_{m_2}|}(-t, X_{m_2}) \dots S_{|X_s|}(-t, X_s). \quad (9)$$

Поскольку частицы k и $k+1$ не взаимодействуют, то оператор $S_{|X_m|}(-t, X_m)$ факторизуется: $S_{|X_m|}(-t, X_m) = S_{|X_{m_1}|}(-t, X_{m_1}) S_{|X_{m_2}|}(-t, X_{m_2})$, следовательно, слагаемые (9) взаимно уничтожаются. Вследствие взаимно однозначного соответствия все 2^{n-1} пар слагаемых (9) кумулянта (8) взаимно уничтожаются. $\square$

§ 2. Область взаимодействия

В силу леммы подынтегральное выражение решения (2) вне области взаимодействия равно нулю. Поэтому интегрирование по конфигурационным переменным в (2) будем проводить по области взаимодействия.

Перепишем решение (2) задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова в виде

$$F_{|Y|}(t, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1,n_2 \geq 0}} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} dp_- \int_{\mathbb{R}^{n_1}} dp_+ \int_{\Omega_{n_2}} dq_- \int_{\Omega_{n_1}} dq_+ \mathfrak{A}_{(n_2,n_1)}(t) F_{|X|}(0, X),$$

где

$$q_- = (q_{-(n_2+s_2)}, \dots, q_{-(s_2+1)}), \quad p_- = (p_{-(n_2+s_2)}, \dots, p_{-(s_2+1)}),$$
$$q_+ = (q_{s_1+1}, \dots, q_{s_1+n_1}), \quad p_+ = (p_{s_1+1}, \dots, p_{s_1+n_1}),$$

а Ω_{n_1}, Ω_{n_2} — области взаимодействия n_1-х и n_2-х частиц соответственно.

Рассмотрим два новых метода оценки объема области взаимодействия. Для удобства заметим, что достаточно оценить лишь величину V_{n_1} области Ω_{n_1}.

Рассмотрим метод оценки объема области взаимодействия, который назовем *методом совокупного интервала.*

Пусть $q_{-s_2}, \dots, q_{s_1}, q_{s_1+1}, \dots, q_{s_1+n_1}$ — положение группы частиц $(q_{-s_2}, \dots, q_{s_1}, q_+)$ в начальный момент времени $t = 0$, Υ_k — максимальный интервал, на котором могут двигаться частицы $-s_2, \dots, s_1, \dots, s_1+k$ (назовем его *совокупным интервалом*). Тогда последовательность Υ_k монотонно возрастающая:

$$\Upsilon_k = \Upsilon_{k-1} + \Delta s_k,$$

где Δs_k — максимальное расстояние, на которое частица $s_1 + k$ увеличивает совокупный интервал Υ_{k-1}. Для оценки Δs_k разобьем движение частицы $s_1 + k$ за время t на два этапа:

на частицу $s_1 + k$ в течение времени τ действуют другие частицы с силой, ограниченной величиной D, тогда за это время ее скорость может возрасти до величины $|p_{s_1+k}| + D\tau$, но пробег относительно других частиц будет не больше, чем R;

свободное движение частицы с постоянной скоростью увеличивает совокупный интервал на $(|p_{s_1+k}| + D\tau)(t - \tau)$.

В итоге имеем

$$\Delta s_k = \begin{cases} R + |p_{s_1+k}|t, & \text{если } t \leq |p_{s_1+k}|/D, \\ R + \frac{D}{4}(t + |p_{s_1+k}|/D)^2, & \text{если } t \geq |p_{s_1+k}|/D, \end{cases}$$

откуда

$$\Delta s_k \leq R + \frac{3}{4}|p_{s_1+k}|t + \frac{D}{4}t^2.$$

Оценим объем области взаимодействия. Вычислим

$$V_{n_1}(t) \le \int\limits_0^{\Upsilon_1} dq_{s_1+1} \int\limits_{q_{s_1+1}}^{\Upsilon_2} dq_{s_1+2} \cdots \int\limits_{q_{s_1+n_1-1}}^{\Upsilon_{n_1}} dq_{s_1+n_1}$$
$$\le \int\limits_0^{\Upsilon_{n_1}} dq_{s_1+1} \int\limits_{q_{s_1+1}}^{\Upsilon_{n_1}} dq_{s_1+2} \cdots \int\limits_{q_{s_1+n_1-1}}^{\Upsilon_{n_1}} dq_{s_1+n_1} = \frac{1}{n_1!}\Upsilon_{n_1}^{n_1},$$

где

$$\Upsilon_{n_1} = |l_{s_1+s_2}(t)| + \sum_{i=1}^{n_1} \Delta s_i = |l_{s_1+s_2}(t)| + n_1\left(R + \frac{D}{4}t^2\right) + \frac{3}{4}t\sum_{i=1}^{n_1}|p_{s_1+i}|,$$

$$|l_{s_1+s_2}(t)| = |l_{s_1+s_2}(0)| + (s_1+s_2)\left(R + \frac{D}{4}t^2\right) + \frac{3}{4}t\sum_{i=-s_2}^{s_1}|p_i|,$$

тогда

$$V_{n_1}(t) \le \frac{1}{n_1!}\left(|l_{s_1+s_2}(t)| + n_1\left(R + \frac{D}{4}t^2\right) + \frac{3}{4}t\sum_{i=1}^{n_1}|p_{s_1+i}|\right)^{n_1}. \tag{10}$$

Таким образом,

$$V_{n_1+n_2}(t) \le \frac{1}{n_1!}\left(|l_{s_1+s_2}(t)| + n_1\left(R + \frac{D}{4}t^2\right) + \frac{3}{4}t\sum_{i=1}^{n_1}|p_{s_1+i}|\right)^{n_1}$$
$$\times \frac{1}{n_2!}\left(|l_{s_1+s_2}(t)| + n_2\left(R + \frac{D}{4}t^2\right) + \frac{3}{4}t\sum_{i=1}^{n_2}|p_{-(s_2+i)}|\right)^{n_2}.$$

Замечание 1. Улучшим оценку объема (10) области взаимодействия [5]. Положим

$$Z_k = \min(\Upsilon_k, q_{s_1+k-1} + \Delta s_{k-1} + \Delta s_k - R), \quad Z_k \le \Upsilon_k.$$

Поставим частицу с координатой q_{s_1} в локальное начало отсчета. Если координаты $q_{s_1+1}, \ldots, q_{s_1+k-1}$ очень близки к локальному началу отсчета, то координата q_{s_1+k} не может находиться около крайней точки интервала Υ_k. Следовательно, максимально допустимое расстояние между q_{s_1+k-1} и q_{s_1+k} равно $\Delta s_{k-1} + \Delta s_k - R$. Таким образом,

$$V_{n_1}(t) \le \int\limits_0^{Z_1} dq_{s_1+1} \cdots \int\limits_{q_{s_1+n_1-1}}^{Z_{n_1}} dq_{s_1+n_1}$$
$$= \int\limits_0^{Z_1} dq_{s_1+1} \cdots \int\limits_{q_{s_1+n_1-1}}^{q_{s_1+n_1-1}+\Delta s_{n_1-1}+\Delta s_{n_1}-R} dq_{s_1+n_1}$$
$$= \int\limits_0^{Z_1} dq_{s_1+1} \cdots \int\limits_{q_{s_1+n_1-2}}^{Z_{n_1-1}} dq_{s_1+n_1-1}\,(\Delta s_{n_1-1} + \Delta s_{n_1} - R)$$

или

$$V_{n_1}(t) \le V_{n_1-1}(t)(\Delta s_{n_1-1} + \Delta s_{n_1} - R). \tag{11}$$

Замечание 2. Рассмотрим еще один метод оценки объема области взаимодействия (назовем его *методом произведений*).

Запишем условие столкновения для k-й и $k+1$-й частиц за время t:

$$P_k(t) > P_{k+1}(t) \quad \text{или} \quad p_k + Dt \ge p_{k+1} - Dt,$$

условие на пройденное расстояние:

$$tp_k + \frac{D}{2}t^2 + R \ge s_{k+1} + tp_{k+1} - \frac{D}{2}t^2,$$

откуда

$$s_{k+1} \le (p_k - p_{k+1})t + R + Dt^2, \quad p_{k+1} \le p_k + 2Dt,$$

где s_{k+1} — расстояние между частицами с координатами q_k и q_{k+1}.

В силу этих условий оценка объема $V_{n_1}(t)$ области взаимодействия запишется в виде

$$V_{n_1}(t) \le \prod_{i=1}^{s_1+n_1-1} (R + Dt^2 + (p_i - p_{i+1})t).$$

Используя неравенство Коши, получим

$$\begin{aligned} V_{n_1}(t) &\le \left(\frac{1}{s_1+n_1-1} \sum_{i=1}^{s_1+n_1-1} (R + Dt^2 + (p_i - p_{i+1})t) \right)^{s_1+n_1-1} \\ &= (R+Dt^2)^{s_1+n_1-1} \left(1 + \frac{t}{(R+Dt^2)(s_1+n_1-1)} (p_1 - p_{s_1+n_1}) \right)^{s_1+n_1-1} \\ &\le e^{\frac{t}{R+Dt^2}p_1} (R+Dt^2)^{s_1+n_1-1} e^{-\frac{t}{R+Dt^2}p_{s_1+n_1}}. \end{aligned}$$

Следовательно, для объема области взаимодействия, полученного методом произведений, имеем

$$V_{n_1+n_2}(t) \le e^{\frac{t}{R+Dt^2}(p_1-p_{-1})} (R+Dt^2)^{s+n-2} e^{\frac{t}{R+Dt^2}(p_{-(n_2+s_2)} - p_{s_1+n_1})}.$$

§ 3. О сходимости ряда, которым представляется решение начальной задачи для цепочки уравнений Боголюбова

Воспользуемся свойством инвариантности гиббсовского распределения относительно оператора $S(-t)$ (3):

$$S_n(-t, x_{n_2}, \dots, x_{n_1}) e^{-\beta \sum\limits_{i=-n_2}^{n_1} \frac{p_i^2}{2}} \le e^{2\beta Bn} e^{-\beta \sum\limits_{i=-n_2}^{n_1} \frac{p_i^2}{2}},$$

вытекающим из следующих соображений.

Используя инвариантность оператора эволюции относительно распределения Гиббса и условие устойчивости потенциала взаимодействия, находим

$$\begin{aligned} S_n(-t, x_{n_2}, \dots, x_{n_1}) & e^{-\beta \sum\limits_{i=-n_2}^{n_1} \frac{p_i^2}{2}} e^{-\beta \sum\limits_{i=-n_2}^{n_1-1} \Phi(q_i - q_{i+1})} \\ &= e^{-\beta \sum\limits_{i=-n_2}^{n_1} \frac{p_i^2}{2}} e^{-\beta \sum\limits_{i=-n_2}^{n_1-1} \Phi(q_i - q_{i+1})} \le e^{-\beta \sum\limits_{i=-n_2}^{n_1} \frac{p_i^2}{2}} e^{\beta Bn}. \end{aligned}$$

Учитывая условие (5), получим

$$S_n(-t, x_{n_2}, \ldots, x_{n_1}) e^{-\beta \sum\limits_{i=-n_2}^{n_1} \frac{p_i^2}{2}} \\ \leq e^{\beta B n} e^{\beta \sum\limits_{i=-n_2}^{n_1-1} \Phi(q_i - q_{i+1})} e^{-\beta \sum\limits_{i=-n_2}^{n_1} \frac{p_i^2}{2}} \leq e^{2\beta B n} e^{-\beta \sum\limits_{i=-n_2}^{n_1} \frac{p_i^2}{2}},$$

что и требовалось.

Из определения нормы (1) при $t = 0$ имеем

$$|F_{|X|}(0)| \leq \|F(0)\| \xi^{n+s} e^{-\beta \sum\limits_{i=-(n_2+s_2)}^{s_1+n_1} \frac{p_i^2}{2}}.$$

Оценим по модулю ряд (2), используя тот факт, что количество упорядоченных разбиений частично упорядоченного множества, состоящего из $n+1$ элементов, равно 2^n, оценку по модулю для начальных данных $F_{|X|}(0)$ и свойство инвариантности гиббсовского распределения относительно оператора $S(-t)$:

$$|F_{|Y|}(t, Y)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2=n} \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \Omega_n} d(X \backslash Y)\, 2^n e^{2\beta B(n+s)} \|F(0)\| \xi^{n+s} e^{-\beta \sum\limits_{i=-(n_2+s_2)}^{s_1+n_1} \frac{p_i^2}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2=n} 2^n e^{2\beta B(n+s)} \|F(0)\| \xi^{n+s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} dp_- \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} dp_+ V_n(t, p_-, p_+) e^{-\beta \sum\limits_{i=-(n_2+s_2)}^{s_1+n_1} \frac{p_i^2}{2}}.$$

Обозначив $b = 2\xi e^{2\beta B}$ и учтя, что $V_n(t) = V_{n_1+n_2}(t) = V_{n_1}(t) V_{n_2}(t)$, получим

$$|F_{|Y|}(t, Y)| \leq \|F(0)\| \xi^s e^{2\beta B s} e^{-\beta \sum\limits_{i=-s_2}^{s_1} \frac{p_i^2}{2}} L_{n_1} L_{n_2}, \tag{12}$$

где

$$L_{n_1} = \sum_{n_1=0}^{\infty} b^{n_1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} dp_+\, V_{n_1}(t, p_+) e^{-\beta \sum\limits_{i=s_1+1}^{s_1+n_1} \frac{p_i^2}{2}},$$

$$L_{n_2} = \sum_{n_2=0}^{\infty} b^{n_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} dp_-\, V_{n_2}(t, p_-) e^{-\beta \sum\limits_{i=-(n_2+s_2)}^{-(s_2+1)} \frac{p_i^2}{2}}.$$

Выясним, когда мажоранта (12) является сходящимся числовым рядом. Для этого должны сходиться обычные однократные числовые ряды L_{n_1}, L_{n_2}. Для удобства исследуем вопрос сходимости ряда L_{n_1}, ибо для ряда L_{n_2} условия сходимости будут такие же.

Найдем интервал равномерной сходимости ряда, которым представляется решение в рамках метода совокупного интервала. Интеграл из ряда L_{n_1} с использованием оценки объема, полученной методом совокупного интервала, запишется в виде

$$\widetilde{L}_{n_1} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} dp_+\, V_{n_1}(t, p_+) e^{-\beta \sum\limits_{i=s_1+1}^{s_1+n_1} \frac{p_i^2}{2}} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} dp_{s_1+1} \ldots dp_{s_1+n_1}\, e^{-\beta \sum\limits_{i=s_1+1}^{s_1+n_1} \frac{p_i^2}{2}} \\ \times \frac{1}{n_1!} \left(|l_{s_1+s_2}(t)| + n_1 \left(R + \frac{D}{4} t^2 \right) + \frac{3}{4} t \sum_{i=1}^{n_1} |p_{s_1+i}| \right)^{n_1}. \tag{13}$$

Поскольку

$$\left(|l_{s_1+s_2}(t)|+n_1\left(R+\frac{D}{4}t^2\right)+\frac{3}{4}t\sum_{i=1}^{n_1}|p_{s_1+i}|\right)^{n_1}$$
$$=\sum_{k=0}^{n_1}\frac{n_1!}{k!(n_1-k)!}\left(|l_{s_1+s_2}(t)|+n_1\left(R+\frac{D}{4}t^2\right)\right)^k\left(\frac{3}{4}t\sum_{i=1}^{n_1}|p_{s_1+i}|\right)^{n_1-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n_1}\frac{n_1!}{k!}\left(|l_{s_1+s_2}(t)|+n_1\left(R+\frac{D}{4}t^2\right)\right)^k\left(\frac{3}{4}t\right)^{n_1-k}$$
$$\times\sum_{\substack{l_1,\dots,l_{n_1}=0\\ l_1+\dots+l_{n_1}=n_1-k}}^{n_1-k}\frac{1}{l_1!\dots l_{n_1}!}|p_{s_1+1}|^{l_1}\dots|p_{s_1+n_1}|^{l_{n_1}},$$

то (13) имеет вид

$$\widetilde{L}_{n_1}\le\sum_{k=0}^{n_1}\frac{1}{k!}\left(|l_{s_1+s_2}(t)|+n_1\left(R+\frac{D}{4}t^2\right)\right)^k\left(\frac{3}{4}t\right)^{n_1-k}$$
$$\times\sum_{\substack{l_1,\dots,l_{n_1}=0\\ l_1+\dots+l_{n_1}=n_1-k}}^{n_1-k}\frac{1}{l_1!\dots l_{n_1}!}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}dp_{s_1+1}\dots dp_{s_1+n_1}\,|p_{s_1+1}|^{l_1}\dots|p_{s_1+n_1}|^{l_{n_1}}e^{-\beta\sum\limits_{i=s_1+1}^{s_1+n_1}\frac{p_i^2}{2}}. \tag{14}$$

Вычислим интегралы по импульсным переменным:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp_i\,|p_i|^{l_{i-s_1}}e^{-\beta\frac{p_i^2}{2}}$$
$$=\left(\sqrt{\frac{2}{\beta}}\right)^{l_{i-s_1}+1}\int\limits_0^{\infty}du_i\,e^{-u_i}u_i^{\frac{l_{i-s_1}-1}{2}}=\left(\sqrt{\frac{2}{\beta}}\right)^{l_{i-s_1}+1}\Gamma\left(\frac{l_{i-s_1}+1}{2}\right),$$

где $u_i=\beta\frac{p_i^2}{2}$, $i=s_1+1,\dots,s_1+n_1$.

Так как $\Gamma\big(\frac{l_{i-s_1}+1}{2}\big)/l_{i-s_1}!\le\sqrt{\pi}$ и $C_{2n_1-k-1}^{n_1-k}\le 2^{2n_1-k-1}$, неравенство (14) запишется в виде

$$\widetilde{L}_{n_1}\le\sum_{k=0}^{n_1}\frac{1}{k!}\left(|l_{s_1+s_2}(t)|+n_1\left(R+\frac{D}{4}t^2\right)\right)^k\left(\frac{3}{4}t\right)^{n_1-k}$$
$$\times\sum_{\substack{l_1,\dots,l_{n_1}=0\\ l_1+\dots+l_{n_1}=n_1-k}}^{n_1-k}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{n_1-\frac{k}{2}}\pi^{\frac{n_1}{2}}\le\sum_{k=0}^{n_1}\frac{1}{k!}\left(|l_{s_1+s_2}(t)|+n_1\left(R+\frac{D}{4}t^2\right)\right)^k$$
$$\times\left(\frac{3}{4}t\right)^{n_1-k}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{n_1-\frac{k}{2}}2^{2n_1-k-1}\pi^{\frac{n_1}{2}}.$$

В силу неравенства $\big(R+\frac{D}{4}t^2\big)(t\sqrt{RD})^{-1}\ge 1$ получим

$$\widetilde{L}_{n_1}\le\sum_{k=0}^{n_1}\frac{n_1^k}{k!}\left(\frac{|l_{s_1+s_2}(t)|}{n_1}+\left(R+\frac{D}{4}t^2\right)\right)^k\left(\left(R+\frac{D}{4}t^2\right)(t\sqrt{RD})^{-1}\right)^{n_1-k}$$

$$\times\left(\frac{3}{4}t\right)^{n_1-k}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{n_1-\frac{k}{2}}2^{2n_1-k-1}\pi^{\frac{n_1}{2}}\le\left(\frac{|l_{s_1+s_2}(t)|}{n_1}+\left(R+\frac{D}{4}t^2\right)\right)^{n_1}$$

$$\times\sum_{k=0}^{n_1}\frac{n_1^k}{k!}\left(\frac{3}{4}\right)^{n_1-k}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{n_1-\frac{k}{2}}2^{2n_1-k-1}\pi^{\frac{n_1}{2}}(\sqrt{RD})^{k-n_1}\le 2^{n_1-1}\left(\frac{3}{\beta}\sqrt{\frac{\pi}{RD}}\right)^{n_1}$$

$$\times\left(\frac{|l_{s_1+s_2}(t)|}{n_1}+\left(R+\frac{D}{4}t^2\right)\right)^{n_1}e^{\frac{2}{3}n_1\sqrt{\frac{RD\beta}{2}}}.$$

Таким образом, получаем следующую мажоранту для (12):

$$|F_{|Y|}(t,Y)|\le\|F(0)\|(\xi e^{2\beta B})^s e^{-\beta\sum\limits_{i=-s_2}^{s_1}\frac{p_i^2}{2}}$$

$$\times\sum_{n_1=0}^{\infty}(\xi e^{2\beta B})^{n_1}2^{2n_1-1}\left(\frac{3}{\beta}\sqrt{\frac{\pi}{RD}}\right)^{n_1}\left(\frac{|l_{s_1+s_2}(t)|}{n_1}+\left(R+\frac{D}{4}t^2\right)\right)^{n_1}e^{\frac{2}{3}n_1\sqrt{\frac{RD\beta}{2}}}$$

$$\times\sum_{n_2=0}^{\infty}(\xi e^{2\beta B})^{n_2}2^{2n_2-1}\left(\frac{3}{\beta}\sqrt{\frac{\pi}{RD}}\right)^{n_2}\left(\frac{|l_{s_1+s_2}(t)|}{n_2}+\left(R+\frac{D}{4}t^2\right)\right)^{n_2}e^{\frac{2}{3}n_2\sqrt{\frac{RD\beta}{2}}}, \tag{15}$$

и ряды в (15) сходятся при

$$2^2\xi e^{2\beta B}\frac{3}{\beta}\sqrt{\frac{\pi}{RD}}\left(R+\frac{D}{4}t^2\right)e^{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{RD\beta}{2}}}<1$$

или

$$0\le t<t_0=2\sqrt{\frac{R}{D}\left(\frac{\beta\sqrt{D}}{12\sqrt{\pi R}\xi e^{2\beta B+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{RD\beta}{2}}}}-1\right)}. \tag{16}$$

В силу оценки (11)

$$\widetilde{L}_{n_1}\le\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1-1}}dp_{s_1+1}\dots dp_{s_1+n_1-1}\,V_{n_1-1}(t,p_+)e^{-\beta\sum\limits_{i=s_1+1}^{s_1+n_1-1}\frac{p_i^2}{2}}$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}}dp_{s_1+n_1}\,(\Delta s_{n_1-1}+\Delta s_{n_1}-R)e^{-\beta\frac{p^2_{s_1+n_1}}{2}}$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1-1}}dp_{s_1+1}\dots dp_{s_1+n_1-1}\left(\left(\frac{D}{2}t^2+R\right)K_0+\frac{3}{4}tK_1\right)V_{n_1-1}(t,p_+)e^{-\beta\sum\limits_{i=s_1+1}^{s_1+n_1-1}\frac{p_i^2}{2}}$$

$$+K_0\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1-1}}dp_{s_1+1}\dots dp_{s_1+n_1-1}\,V_{n_1-1}(t,p_+)\frac{3}{4}t|p_{s_1+n_1-1}|e^{-\beta\sum\limits_{i=s_1+1}^{s_1+n_1-1}\frac{p_i^2}{2}}$$

$$=\left(\left(\frac{D}{2}t^2+R\right)K_0+\frac{3}{4}tK_1\right)\widetilde{L}_{n_1-1}+K_0\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1-1}}dp_{s_1+1}\dots dp_{s_1+n_1-1}\,V_{n_1-1}(t,p_+)$$

$$\times\frac{3}{4}t|p_{s_1+n_1-1}|e^{-\beta\sum\limits_{i=s_1+1}^{s_1+n_1-1}\frac{p_i^2}{2}},$$

где

$$K_0=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta\frac{p^2}{2}}\,dp=\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}},$$

$$K_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |p| e^{-\beta \frac{p^2}{2}}\, dp = \frac{2}{\beta}.$$

Функция $V_{n_1-1}(t, p_+)$ имеет вид $V_{n_1-1}(t,p_+) = \zeta + \eta|p_{s_1+n_1-1}|$, где ζ, η не зависят от $p_{s_1+n_1-1}$. Тогда

$$K_0 \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1-1}} dp_{s_1+1}\dots dp_{s_1+n_1-1}\, V_{n_1-1}(t,p_+)\frac{3}{4}t|p_{s_1+n_1-1}| e^{-\beta \sum\limits_{i=s_1+1}^{s_1+n_1-1} \frac{p_i^2}{2}}$$

$$= \frac{3}{4}tK_0(MK_1 + NK_2),$$

$$\widetilde{L}_{n_1-1} = MK_0 + NK_1, \quad \text{где} \quad K_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p^2 e^{-\beta\frac{p^2}{2}}\, dp = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}},$$

$$M = \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1-2}} dp_{s_1+1}\dots dp_{s_1+n_1-2}\, \zeta e^{-\beta \sum\limits_{i=s_1+1}^{s_1+n_1-2} \frac{p_i^2}{2}},$$

$$N = \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1-2}} dp_{s_1+1}\dots dp_{s_1+n_1-2}\, \eta e^{-\beta \sum\limits_{i=s_1+1}^{s_1+n_1-2} \frac{p_i^2}{2}}.$$

Очевидно, что $MK_1 + NK_2 \le \kappa(MK_0 + NK_1)$, где $\kappa = \max\bigl(\frac{K_1}{K_0}, \frac{K_2}{K_1}\bigr) = \frac{K_0}{2}$. Таким образом,

$$\widetilde{L}_{n_1} \le \left(\left(\frac{D}{2}t^2 + R\right)K_0 + \frac{3}{4}tK_1 + \frac{3}{4}t\kappa K_0\right)\widetilde{L}_{n_1-1}.$$

Ряды L_{n_1}, L_{n_2} сходятся при условии

$$b\left(\left(\frac{D}{2}t^2 + R\right)K_0 + \frac{3}{4}tK_1 + \frac{3}{4}t\kappa K_0\right) < 1,$$

или

$$0 \le t < t_0 = -\frac{3(2K_1 + K_0^2)}{8DK_0} + \sqrt{\frac{1}{DK_0}\left(\frac{e^{-2\beta B}}{\xi} - 2RK_0\right) + \left(\frac{3(2K_1+K_0^2)}{8DK_0}\right)^2},$$

т. е.

$$0 \le t < t_0$$

$$= \frac{1}{D\sqrt{2\pi\beta}}\left(-\frac{3}{4}(2+\pi) + 2\sqrt{\pi RD\beta\left(\frac{16D\beta\sqrt{2\pi\beta} + 9(2+\pi)^2\xi e^{2\beta B}}{64\pi\xi RD\beta e^{2\beta B}} - 1\right)}\right). \tag{17}$$

Замечание 3 (об интервале равномерной сходимости ряда, которым представляется решение в случае метода произведений). Найдем условие сходимости рядов L_{n_1}, L_{n_2}, используя оценку объема, полученную методом произведений. Имеем

$$\widetilde{L}_{n_1} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} dp_+ \, V_{n_1}(t, p_+) e^{-\beta \sum\limits_{i=s_1+1}^{s_1+n_1} \frac{p_i^2}{2}}$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} dp_{s_1+1} \ldots dp_{s_1+n_1} \, e^{-\beta \sum\limits_{i=s_1+1}^{s_1+n_1} \frac{p_i^2}{2}} e^{\frac{t}{R+Dt^2} p_1} (R + Dt^2)^{s_1+n_1-1} e^{-\frac{t}{R+Dt^2} p_{s_1+n_1}}$$

$$= e^{\frac{t}{R+Dt^2} p_1} (R + Dt^2)^{s_1+n_1-1} K_0^{n_1-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t}{R+Dt^2} p_{s_1+n_1} - \beta \frac{p_{s_1+n_1}^2}{2}} \, dp_{s_1+n_1}$$

$$= e^{\frac{t}{R+Dt^2} p_1} (R + Dt^2)^{s_1+n_1-1} e^{\frac{t^2}{(R+Dt^2)^2 2\beta}} K_0^{n_1}.$$

Таким образом, мы получили следующую мажоранту для (13):

$$|F_{|Y|}(t, Y)| \leq \|F(0)\| (\xi e^{2\beta B})^s e^{-\beta \sum\limits_{i=-s_2}^{s_1} \frac{p_i^2}{2}} e^{\frac{t}{R+Dt^2}(p_1 - p_{-1})} (R + Dt^2)^{s-2} e^{\frac{t^2}{(R+Dt^2)^2 \beta}}$$
$$\times \sum_{n_1=0}^{\infty} (2\xi e^{2\beta B})^{n_1} (R + Dt^2)^{n_1} \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{\frac{n_1}{2}} \sum_{n_2=0}^{\infty} (2\xi e^{2\beta B})^{n_2} (R + Dt^2)^{n_2} \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{\frac{n_2}{2}}, \tag{18}$$

и ряды в (18) сходятся при

$$2\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \xi e^{2\beta B} (R + Dt^2) < 1,$$

или

$$0 \leq t < t_0 = \sqrt{\frac{R}{D} \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2\sqrt{2\pi} R \xi e^{2\beta B}} - 1 \right)}. \tag{19}$$

В силу оценок (16), (17) и (19) имеет место

Теорема 1. *Если потенциал взаимодействия $\Phi(q)$ удовлетворяет условиям (4), а начальные данные $F(0)$ принадлежат E_ξ^0, то ряд, которым представляется решение (2), равномерно сходится по Y на любом компакте при*

$$0 \leq t < t_0 = 2\sqrt{\frac{R}{D} \left(\frac{\beta \sqrt{D}}{12\sqrt{\pi R} \xi e^{2\beta B + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{RD\beta}{2}}}} - 1 \right)},$$

или

$$0 \leq t < t_0$$
$$= \frac{1}{D\sqrt{2\pi\beta}} \left(-\frac{3}{4}(2 + \pi) + 2\sqrt{\pi R D \beta \left(\frac{16 D \beta \sqrt{2\pi\beta} + 9(2 + \pi)^2 \xi e^{2\beta B}}{64\pi \xi R D \beta e^{2\beta B}} - 1 \right)} \right)$$

(в рамках метода совокупного интервала), или

$$0 \leq t < t_0 = \sqrt{\frac{R}{D} \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2\sqrt{2\pi} R \xi e^{2\beta B}} - 1 \right)}$$

(в рамках метода произведений).

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2 (локальная теорема существования). *Если потенциал взаимодействия $\Phi(q)$ удовлетворяет условиям (4), а начальные данные $F(0)$ принадлежат E^0_ξ, то последовательность $F(t)$ (2) существует при $t \in [0, t_0)$ и является слабым решением задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова.*

Доказательство последнего факта теоремы 2 проведено в теореме 4.

Для построения глобального по времени решения воспользуемся методом термодинамического предела.

Если частицы движутся в области $\Lambda \subset \mathbb{R}^1$, то решение

$$F_\Lambda(t) = \{F_{\Lambda,|Y|}(t, Y)\}_{|Y|=s=s_1+s_2\geq 0}$$

задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова с начальными данными $F_\Lambda(0) = \{F_{\Lambda,|Y|}(0, Y)\}_{|Y|=s=s_1+s_2\geq 0}$ представляется разложением

$$F_{\Lambda,|Y|}(t, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1,n_2\geq 0}} \int d(X\backslash Y)\, \mathfrak{A}_{\Lambda,(n_2,n_1)}(t, X_Y) F_{\Lambda,|X|}(0, X). \tag{20}$$

Теорема 3. *Если начальные данные $F_{\Lambda,|Y|}(0, Y)$ сходятся к $F_{|Y|}(0, Y)$ при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^1$ равномерно по Y на каждом компакте для произвольного $|Y| = s \geq 0$ и $F_\Lambda(0) \in E^0_\xi$, $F(0) \in E^0_\xi$, то решение $F_{\Lambda,|Y|}(t, Y)$ сходится в том же смысле к $F_{|Y|}(t, Y)$ при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^1$ на интервале $t \in [0, t_0)$.*

Доказательство. Используя оценку, полученную методом совокупного интервала, имеем

$$\begin{aligned} &|F_{\Lambda,|Y|}(t, Y) - F_{|Y|}(t, Y)| \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0} \sum_{n_1+n_2=n} \int d(X \setminus Y)\, |\mathfrak{A}_{\Lambda,(n_2,n_1)}(t) F_{\Lambda,|X|}(0, X) - \mathfrak{A}_{(n_2,n_1)}(t) F_{|X|}(0, X)| \\ &\qquad + (\|F_\Lambda(0)\| + \|F(0)\|)\mathscr{R}_{n_0}(t), \end{aligned} \tag{21}$$

где $\mathscr{R}_{n_0}(t)$ — остаточный член сходящихся рядов мажоранты (15).

Если $t \in [0, t_0)$, то второе слагаемое в неравенстве (21) можно сделать сколь угодно малым для любой области Λ объемом V при достаточно большом n_0. В первом слагаемом этого неравенства представим область интегрирования по импульсным переменным в виде объединения конечного шара радиусом p_0 и дополнения к нему. Часть первого слагаемого, где интегрирование хотя бы по одному импульсному переменному ведется по значениям, большим p_0, при заданном n_0 может быть сделана сколь угодно малой. Для этого надо при фиксированном n_0 увеличить радиус p_0. Это касается любой области Λ, так как Λ была построена по конфигурационным переменным.

Оценим часть первого слагаемого, в котором интегрирование ведется по шару радиусом p_0. Предположим, что Y принадлежит фиксированному компакту, $X\backslash Y$ — области взаимодействия. Выберем область Λ достаточно большой, чтобы частицы, находящиеся в начальный момент времени в X, не успели достичь границы $\partial\Lambda$ за $t \in [0, t_0)$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{n_0} \sum_{n_1+n_2=n} \int d(X \setminus Y) \mathfrak{A}_{(n_2,n_1)}(t) |F_{\Lambda,|X|}(0, X) - F_{|X|}(0, X)|$$

$$\le \varepsilon(\Lambda)(\xi e^{2\beta B})^s e^{-\beta\sum\limits_{i=-s_2}^{s_1}\frac{p_i^2}{2}} \sum_{n=0}^{n_0}\sum_{n_1+n_2=n}(\xi e^{2\beta B})^{n_1+n_2}$$
$$\times 2^{2(n_1+n_2)}\left(\frac{3}{\beta}\sqrt{\frac{\pi}{RD}}\right)^{n_1+n_2}\left(\frac{|l_{s_1+s_2}(t)|}{n_1}+\left(R+\frac{D}{4}t^2\right)\right)^{n_1}$$
$$\times\left(\frac{|l_{s_1+s_2}(t)|}{n_2}+\left(R+\frac{D}{4}t^2\right)\right)^{n_2} e^{\frac{2}{3}(n_1+n_2)\sqrt{\frac{RD\beta}{2}}},$$

где

$$\varepsilon(\Lambda)=\sup_{n\le n_0}\sup_{\substack{Y\in\mathscr{K}^s\times\mathscr{M}^s_{p_0},\\(X\setminus Y)\in\Omega_n(t)\times\mathscr{M}^s_{p_0}}}\Biggl(\xi^{-(s+n)}e^{\beta\sum\limits_{i=-(n_2+s_2)}^{s_1+n_1}\frac{p_i^2}{2}}$$
$$\times\prod_{X_i\subset P}S_{|X_i|}(-t,X_i)|F_{\Lambda,|X|}(0,X)-F_{|X|}(0,X)|\Biggr),$$

здесь $\mathscr{K}^s$ — s-частичная область конфигурационного пространства, которая состоит из точек, находящихся на отрезке конечной длины в начальный момент времени, $\mathscr{M}^s_{p_0}$ — s-измеримая сфера радиусом p_0.

Поскольку $\lim\limits_{\Lambda\nearrow\mathbb{R}^1}\varepsilon(\Lambda)=0$, на каждом компакте при $t\in[0,t_0)$ имеем

$$\lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{R}^1}|F_\Lambda(t,Y)-F(t,Y)|=0. \qquad \square$$

Рассмотрим решение (20) в случае начальных данных — локально возмущенных равновесных функций распределения

$$F_\Lambda(0)=F^0_\Lambda=((I-\mathfrak{a}_{(+)})^{-1}(I-\mathfrak{a}_{(-)})^{-1}\Psi_\Lambda\delta\Psi_\Lambda)_0^{-1}$$
$$\times(I-\mathfrak{a}_{(+)})^{-1}(I-\mathfrak{a}_{(-)})^{-1}\Psi_\Lambda\delta\Psi_\Lambda, \quad (22)$$

где $\mathfrak{a}_{(+)},\mathfrak{a}_{(-)}$ — операторы интегрирования по последним аргументам с положительными и отрицательными номерами, т. е.

$$(\mathfrak{a}_{(+)}f)_s(x_{-s_2},\dots,x_{s_1})=\int dx_{s_1+1}\,f_{s_1+1+s_2}(x_{-s_2},\dots,x_{s_1+1}),$$
$$(\mathfrak{a}_{(-)}f)_s(x_{-s_2},\dots,x_{s_1})=\int dx_{-(s_2+1)}\,f_{s_1+s_2+1}(x_{-(s_2+1)},\dots,x_{s_1}),$$

$\Psi_\Lambda=\{\Psi_{\Lambda,s}(x_{-s_2},\dots,x_{s_1})\}_{s\ge0},\ \Psi_{\Lambda,s}(x_{-s_2},\dots,x_{s_1})=e^{-\beta\sum\limits_{i=-s_2}^{s_1}\frac{p_i^2}{2}-\beta\sum\limits_{i=-s_2}^{s_1-1}\Phi(q_i-q_{i+1})}$

— равновесные функции Больцмана, $\delta\Psi_\Lambda=\{\delta\Psi_{\Lambda,s}(x_{-s_2},\dots,x_{s_1})\}_{s\ge0}$ — локальные возмущения равновесных функций Больцмана. Наложим условия на $\delta\Psi_\Lambda$:

1) $\delta\Psi_{\Lambda,s}(x_{-s_2},\dots,x_{s_1})\ge0$,

2) $\sup\limits_{x_{-s_2},\dots,x_{s_1}}\delta\Psi_{\Lambda,s}(x_{-s_2},\dots,x_{s_1})\le C$,

3) термодинамические свойства равновесной и локально возмущенной равновесной систем эквивалентны:

$$\lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{R}^1}((I-\mathfrak{a}_{(+)})^{-1}(I-\mathfrak{a}_{(-)})^{-1}\Psi_\Lambda\delta\Psi_\Lambda)_0^{-1}((I-\mathfrak{a}_{(+)})^{-1}(I-\mathfrak{a}_{(-)})^{-1}\Psi_\Lambda)_0$$
$$=\lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{R}^1}C_1(\Lambda)=C_1<+\infty,$$

4) $\delta\psi$ таковы, что определяемые ими функции распределения сходятся равномерно при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^1$ к предельным на каждом компакте.

Введем равновесные функции распределения

$$F_\Lambda^{eq} = \left((I-\mathfrak{a}_{(+)})^{-1}(I-\mathfrak{a}_{(-)})^{-1}\Psi_\Lambda\right)_0^{-1}(I-\mathfrak{a}_{(+)})^{-1}(I-\mathfrak{a}_{(-)})^{-1}\Psi_\Lambda. \qquad (23)$$

Очевидно, что $F_\Lambda^0, F_\Lambda^{eq} \in E_\xi^0$. Пусть F^0 — равномерный покомпонентный предел F_Λ^0 при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^1$, тогда $F^0 \in E_\xi^0$.

Имеет место следующая

Теорема 4 (глобальная теорема существования). *Пусть начальные данные F^0 для цепочки уравнений Боголюбова принадлежат классу локально возмущенных равновесных функций распределения пространства E_ξ^0. Тогда ее решение — последовательность $F(t)$ (2) — существует в слабом смысле в E_ξ^0 для любого $t \in \mathbb{R}^1$.*

Доказательство. Приведем решение $F_\Lambda(t)$ (20) задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова, которое имеет в качестве начальных данных локально возмущенные равновесные функции распределения F_Λ^0 (22), к виду

$$\begin{aligned}F_\Lambda(t) = ((I-\mathfrak{a}_{(+)})^{-1}(I-\mathfrak{a}_{(-)})^{-1}\Psi_\Lambda\delta\Psi_\Lambda)_0^{-1}((I-\mathfrak{a}_{(+)})^{-1}(I-\mathfrak{a}_{(-)})^{-1}\Psi_\Lambda)_0 \\ \times ((I-\mathfrak{a}_{(+)})^{-1}(I-\mathfrak{a}_{(-)})^{-1}\Psi_\Lambda)_0^{-1}(I-\mathfrak{a}_{(+)})^{-1}(I-\mathfrak{a}_{(-)})^{-1}\mathfrak{A}_\Lambda(t) \\ \times (I-\mathfrak{a}_{(+)})^{-1}(I-\mathfrak{a}_{(-)})^{-1}\Psi_\Lambda\delta\Psi_\Lambda.\end{aligned}$$

Тогда из определения (23) равновесных функций и условий 1–4 на локальные возмущения $\delta\Psi_\Lambda$ получим оценку

$$|F_{\Lambda,|Y|}(t,Y)| \le CC_1(\Lambda)\xi^s e^{-\beta\sum\limits_{i=-s_2}^{s_1}\frac{p_i^2}{2}}\left\|F_\Lambda^{eq}\right\|, \qquad (24)$$

из которой следует, что $F_\Lambda(t) \in E_\xi^0$ при любых $\Lambda \subset \mathbb{R}^1$, $t \in \mathbb{R}^1$. Отсюда и из теоремы 3 вытекает, что $F(t)$ принадлежит E_ξ^0 (как равномерный покомпонентный предел $F_\Lambda(t)$) при $t \in [0, t_0)$.

Решение $F_\Lambda(t)$ при $t \in [t_0-\varepsilon, t_0-\varepsilon+t_0)$ имеет вид

$$F_\Lambda(t) = (I-\mathfrak{a}_{(+)})^{-1}(I-\mathfrak{a}_{(-)})^{-1}\mathfrak{A}_\Lambda(t+t_0-\varepsilon)F_\Lambda(t_0-\varepsilon), \qquad (25)$$

кроме того, $F(t)$ при $t \in [t_0-\varepsilon, t_0-\varepsilon+t_0)$ имеет вид

$$F(t) = (I-\mathfrak{a}_{(+)})^{-1}(I-\mathfrak{a}_{(-)})^{-1}\mathfrak{A}(t+t_0-\varepsilon)F(t_0-\varepsilon), \qquad (26)$$

где ε — достаточно малое число.

Так как $F_\Lambda(t_0-\varepsilon), F(t_0-\varepsilon) \in E_\xi^0$, то для последовательностей (25), (26) справедливы теоремы 1, 2. Кроме того, поскольку $F_\Lambda(t_0-\varepsilon)$ сходится к $F(t_0-\varepsilon)$ в том же смысле, что и F_Λ^0 к F^0, теорема 3 имеет место для $F_\Lambda(t)$ и $F(t)$ при $t \in [t_0-\varepsilon, t_0-\varepsilon+t_0)$. Эту процедуру можно повторять неограниченное число раз.

Таким образом, если начальные данные — локально возмущенные равновесные функции распределения (22) из пространства E_ξ^0, то разложение $F(t)$ вида (2) существует и $F(t) \in E_\xi^0$ для любого $t \in \mathbb{R}^1$.

Докажем, что для начальных данных, являющихся локально возмущенными равновесными функциями распределения, решение (2) удовлетворяет уравнениям Боголюбова в слабом смысле.

Действительно, пусть $\varphi = \{\varphi_{|Y|}(Y)\}_{|Y|=s=s_1+s_2\geq 1}$ — финитная последовательность непрерывно дифференцируемых ограниченных функций с компактными носителями. Рассмотрим функционал

$$(\varphi, F_\Lambda(t)) = \sum_{s_1=0}^{\infty}\sum_{s_2=0}^{\infty}\int dY\,\varphi_s(Y)F_{\Lambda,s}(t,Y). \tag{27}$$

В силу неравенства (24) функции $F_{\Lambda,s}(t,Y)$ почти всюду определены по Y, а поскольку функции $\varphi_s(Y)$ ограничены, функционал (27) существует. Так как

$$U_\Lambda(t) = (I-\mathfrak{a}_{(+)})^{-1}(I-\mathfrak{a}_{(-)})^{-1}(I-(I+S_\Lambda(-t))^{-1_*}),$$

запишем функционал (27) в виде

$$\begin{aligned}(\varphi, F_\Lambda(t)) &= \big(\varphi, U_\Lambda(t)F_\Lambda^0\big) = \big(U_\Lambda^+(t)\varphi, F_\Lambda^0\big) = \sum_{s_1=0}^{\infty}\sum_{s_2=0}^{\infty}\int dY\,F_{\Lambda,s}^0(Y)\\ &\times\sum_{n_1=0}^{s_1}\sum_{n_2=0}^{s_2}\mathfrak{A}^+_{\Lambda,(n_2,n_1)}(t,Y\backslash X;X)\varphi_{s-n}(Y\backslash X) = \sum_{s_1=0}^{\infty}\sum_{s_2=0}^{\infty}\int dY\,F_{\Lambda,s}^0(Y)\\ &\times\sum_{n_1=0}^{s_1}\sum_{n_2=0}^{s_2}\sum_{P:Y_{Y\backslash X}=\bigcup\limits_i Y_i}(-1)^{|P|-1}\prod_{Y_i\subset P}S_{\Lambda,|Y_i|}(t,Y_i)\varphi_{s-n}(Y\backslash X),\end{aligned} \tag{28}$$

здесь $\sum\limits_P$ — сумма по всем упорядоченным разбиениям частично упорядоченного множества $Y_{Y\backslash X}$ на $|P|$ непустых взаимно не пересекающихся частично упорядоченных подмножеств $Y_i \subset Y_{Y\backslash X}$, где множество $Y\backslash X$ содержится в одном из подмножеств Y_i.

Функция $\big(U_\Lambda^+(t)\varphi\big)_s(Y)$ дифференцируема по t, причем

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\big(U_\Lambda^+(t+\Delta t)\varphi - U_\Lambda^+(t)\varphi\big)\\ &\qquad= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\big(U_\Lambda^+(\Delta t)-I\big)U_\Lambda^+(t)\varphi = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}U_\Lambda^+(t)\big(U_\Lambda^+(\Delta t)-I\big)\varphi,\end{aligned}$$

или

$$\mathscr{B}_\Lambda^+U_\Lambda^+(t)\varphi = U_\Lambda^+(t)\mathscr{B}_\Lambda^+\varphi,$$

где $\mathscr{B}_\Lambda^+$ — инфинитезимальный оператор группы $U_\Lambda^+(t)$.

Положим

$$\begin{aligned}\big(\mathscr{B}_\Lambda^+\varphi\big)_s &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\big(\big(U_\Lambda^+(\Delta t)-I\big)\varphi\big)_s = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Bigg(\big(\mathfrak{A}^+_{\Lambda,(0,0)}(\Delta t)-\mathfrak{A}^+_{\Lambda,(0,0)}(0)\big)\varphi_s\\ &+\sum_{n_1=1}^{s_1}\sum_{n_2=0}^{s_2}\big(\mathfrak{A}^+_{\Lambda,(n_2,n_1)}(\Delta t)-\mathfrak{A}^+_{\Lambda,(n_2,n_1)}(0)\big)\varphi_{s-n}\\ &+\sum_{n_2=1}^{s_2}\big(\mathfrak{A}^+_{\Lambda,(n_2,0)}(\Delta t)-\mathfrak{A}^+_{\Lambda,(n_2,0)}(0)\big)\varphi_{s-n_2}\Bigg).\end{aligned}$$

Если $Y_i \cap Y\backslash X = \varnothing$, то

$$S_{\Lambda,|Y_i|}(t,Y_i)\varphi_{|Y\backslash X|}(Y\backslash X) = \varphi_{|Y\backslash X|}(Y\backslash X).$$

Обозначим через R_i те подмножества Y_i разбиения P, которым принадлежит $Y\backslash X$, тогда

$$\left(\mathscr{B}^+_\Lambda\varphi\right)_s=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Bigg((S_{\Lambda,|Y|}(\Delta t)-S_{\Lambda,|Y|}(0))\varphi_s$$
$$+\sum_{n_1=1}^{s_1}\sum_{n_2=0}^{s_2}\sum_{P:Y_{Y\backslash X}=\bigcup\limits_i R_i}(-1)^{|P|-1}(S_{\Lambda,|R_i|}(\Delta t)-S_{\Lambda,|R_i|}(0))\varphi_{s-n}$$
$$+\sum_{n_2=1}^{s_2}\sum_{P:Y_{Y\backslash X}=\bigcup\limits_i R_i}(-1)^{|P|-1}(S_{\Lambda,|R_i|}(\Delta t)-S_{\Lambda,|R_i|}(0))\varphi_{s-n_2}\Bigg).$$

Поскольку

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}((S_\Lambda(\Delta t)-I)\varphi)_s=-(\mathscr{H}_\Lambda\varphi)_s=-\left\{H^\Lambda_s,\varphi_s\right\},$$

где $\mathscr{H}_\Lambda=\{H^\Lambda,\cdot\}$ — скобка Пуассона, имеем

$$\left(\mathscr{B}^+_\Lambda\varphi\right)_s=-\Bigg((\mathscr{H}_\Lambda\varphi)_s+\sum_{n_1=1}^{s_1}\sum_{n_2=0}^{s_2}\sum_{P:Y_{Y\backslash X}=\bigcup\limits_i R_i}(-1)^{|P|-1}\mathscr{H}_{\Lambda,|R_i|}\varphi_{s-n}$$
$$+\sum_{n_2=1}^{s_2}\sum_{P:Y_{Y\backslash X}=\bigcup\limits_i R_i}(-1)^{|P|-1}\mathscr{H}_{\Lambda,|R_i|}\varphi_{s-n_2}\Bigg).$$

Обозначим $\mathscr{D}^\Lambda_{(n_2,n_1)}=\sum\limits_{P:Y_{Y\backslash X}=\bigcup\limits_i R_i}(-1)^{|P|-1}H^\Lambda_{|R_i|}$, тогда

$$\left(\mathscr{B}^+_\Lambda\varphi\right)_s=-\Bigg((\mathscr{H}_\Lambda\varphi)_s+\sum_{n_1=1}^{s_1}\left\{\mathscr{D}^\Lambda_{(0,n_1)},\varphi_{s-n_1}\right\}+\sum_{n_1=1}^{s_1}\sum_{n_2=1}^{s_2}\left\{\mathscr{D}^\Lambda_{(n_2,n_1)},\varphi_{s-n}\right\}$$
$$+\sum_{n_2=1}^{s_2}\left\{\mathscr{D}^\Lambda_{(n_2,0)},\varphi_{s-n_2}\right\}\Bigg).$$

Так как

$$\mathscr{D}^\Lambda_{(0,0)}=H^\Lambda_{s_1+s_2},\quad \mathscr{D}^\Lambda_{(0,n_1)}=H^\Lambda_{s_1+s_2}-H^\Lambda_{(s_1-1)+s_2},\quad n_1>0,$$
$$\mathscr{D}^\Lambda_{(n_2,0)}=H^\Lambda_{s_1+s_2}-H^\Lambda_{s_1+(s_2-1)},\quad n_2>0,$$
$$\mathscr{D}^\Lambda_{(n_2,n_1)}=H^\Lambda_{s_1+s_2}-H^\Lambda_{(s_1-1)+s_2}-H^\Lambda_{s_1+(s_2-1)}+H^\Lambda_{(s_1-1)+(s_2-1)},\quad n_1,n_2>0,$$

то

$$\left(\mathscr{B}^+_\Lambda\varphi\right)_s=-\left((\mathscr{H}_\Lambda\varphi)_s+\left\{\mathscr{D}^\Lambda_{(0,1)},\varphi_{s-1}\right\}+\left\{\mathscr{D}^\Lambda_{(1,0)},\varphi_{s-1}\right\}\right).$$

Если $q_{i+1}-q_i=\sigma$, то в случае, когда $p_i>p_{i+1}$, нужно в скобке Пуассона от импульсов (p_i,p_{i+1}) перейти к импульсам (p^*_i,p^*_{i+1}): $p^*_i=p_{i+1}$, $p^*_{i+1}=p_i$.

Найдем

$$\left\{\mathscr{D}^\Lambda_{(0,1)},\varphi_{s-1}\right\}=\left\{H^\Lambda_{s_1+s_2}-H^\Lambda_{(s_1-1)+s_2},\varphi_{s-1}\right\}=\frac{\partial\Phi(q_{s_1-1}-q_{s_1})}{\partial q_{s_1-1}}\frac{\partial\varphi_{s-1}}{\partial p_{s_1-1}}$$
$$-\left(\frac{\partial H_{s_1+s_2}}{\partial p_{s_1-1}}\frac{\partial\varphi_{s-1}}{\partial q_{s_1-1}}-\frac{\partial H_{(s_1-1)+s_2}}{\partial p_{s_1-1}}\frac{\partial\varphi_{s-1}}{\partial q_{s_1-1}}\right)\Bigg|_{q_{s_1}-q_{s_1-1}=\sigma}$$
$$=\frac{\partial\Phi(q_{s_1-1}-q_{s_1})}{\partial q_{s_1-1}}\frac{\partial\varphi_{s-1}}{\partial p_{s_1-1}}-(p_{s_1}-p_{s_1-1})\delta(q_{s_1}-q_{s_1-1}-\sigma)\varphi_{s-1}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned}&\left\{\mathscr{D}^{\Lambda}_{(1,0)}, \varphi_{s-1}\right\}\\&= \frac{\partial\Phi(q_{-(s_2-1)} - q_{-s_2})}{\partial q_{-(s_2-1)}}\frac{\partial\varphi_{s-1}}{\partial p_{-(s_2-1)}} - (p_{-s_2} - p_{-(s_2-1)})\delta(q_{-(s_2-1)} - q_{-s_2} - \sigma)\varphi_{s-1}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\left(\mathscr{B}^{+}_{\Lambda}\varphi\right)_s(Y) &= -(\mathscr{H}_{\Lambda}\varphi)_s(Y) - \frac{\partial\Phi(q_{s_1-1} - q_{s_1})}{\partial q_{s_1-1}}\frac{\partial\varphi_{s-1}(Y\backslash x_{s_1})}{\partial p_{s_1-1}}\\&+ (p_{s_1} - p_{s_1-1})\delta(q_{s_1} - q_{s_1-1} - \sigma)\varphi_{s-1}(Y\backslash x_{s_1}) - \frac{\partial\Phi(q_{-(s_2-1)} - q_{-s_2})}{\partial q_{-(s_2-1)}}\frac{\partial\varphi_{s-1}(Y\backslash x_{-s_2})}{\partial p_{-(s_2-1)}}\\&+ (p_{-s_2} - p_{-(s_2-1)})\delta(q_{-(s_2-1)} - q_{-s_2} - \sigma)\varphi_{s-1}(Y\backslash x_{-s_2}).\end{aligned}$$

Поскольку функция $\left(\mathscr{B}^{+}_{\Lambda}U^{+}_{\Lambda}(t)\varphi\right)_s(Y)$ ограничена, существует функционал $\left(\mathscr{B}^{+}_{\Lambda}U^{+}_{\Lambda}(t)\varphi, F^0_{\Lambda}\right)$.

Итак, (28) можно дифференцировать по t под знаком интеграла:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\varphi, F_{\Lambda}(t)) &= \left(\mathscr{B}^{+}_{\Lambda}U^{+}_{\Lambda}(t)\varphi, F^0_{\Lambda}\right) = \left(U^{+}_{\Lambda}(t)\mathscr{B}^{+}_{\Lambda}\varphi, F^0_{\Lambda}\right)\\&= \left(\mathscr{B}^{+}_{\Lambda}\varphi, U_{\Lambda}(t)F^0_{\Lambda}\right) = \left(\mathscr{B}^{+}_{\Lambda}\varphi, F_{\Lambda}(t)\right).\end{aligned}$$

Для достаточно большой области $\Lambda \subset \mathbb{R}^1$ имеем $\left\{H^{\Lambda}_s, \varphi_s\right\} = \{H_s, \varphi_s\}$, ибо носитель φ_s содержится в Λ. Функционалы $(\varphi, F_{\Lambda}(t))_s$ непрерывно дифференцируемы по t, поэтому

$$\begin{aligned}(\varphi, F_{\Lambda}(t))_s &= \int_0^t d\tau\,(\mathscr{B}^{+}\varphi, F_{\Lambda}(\tau))_s = \int_0^t d\tau\,\Big(-(\mathscr{H}\varphi, F_{\Lambda}(\tau))_s\\&- \left(\left[\mathscr{H}^{\Phi}, \mathfrak{a}^{+}_{(+)}\right]\varphi, F_{\Lambda}(\tau)\right)_s - \left(\left[\mathscr{H}^{\Phi}, \mathfrak{a}^{+}_{(-)}\right]\varphi, F_{\Lambda}(\tau)\right)_s\\&+ \left(\left[\mathscr{H}^{hc}, \mathfrak{a}^{+}_{(+)}\right]\varphi, F_{\Lambda}(\tau)\right)_s + \left(\left[\mathscr{H}^{hc}, \mathfrak{a}^{+}_{(-)}\right]\varphi, F_{\Lambda}(\tau)\right)_s\Big),\end{aligned} \tag{29}$$

где

$$(\mathscr{H}\varphi, F_{\Lambda}(t))_s = \int dY\,\{H_s, \varphi_s\}F_{\Lambda,s}(t, Y),$$

$$\left(\left[\mathscr{H}^{\Phi}, \mathfrak{a}^{+}_{(+)}\right]\varphi, F_{\Lambda}(t)\right)_s = \int dY\,\frac{\partial\Phi(q_{s_1-1} - q_{s_1})}{\partial q_{s_1-1}}\frac{\partial\varphi_{s-1}(Y\backslash x_{s_1})}{\partial p_{s_1-1}}F_{\Lambda,s}(t, Y),$$

$$\left(\left[\mathscr{H}^{\Phi}, \mathfrak{a}^{+}_{(-)}\right]\varphi, F_{\Lambda}(t)\right)_s = \int dY\,\frac{\partial\Phi(q_{-(s_2-1)} - q_{-s_2})}{\partial q_{-(s_2-1)}}\frac{\partial\varphi_{s-1}(Y\backslash x_{-s_2})}{\partial p_{-(s_2-1)}}F_{\Lambda,s}(t, Y),$$

$$\left(\left[\mathscr{H}^{hc}, \mathfrak{a}^{+}_{(+)}\right]\varphi, F_{\Lambda}(t)\right)_s = \int dY\,(p_{s_1} - p_{s_1-1})\delta(q_{s_1} - q_{s_1-1} - \sigma)\varphi_{s-1}(Y\backslash x_{s_1})F_{\Lambda,s}(t, Y),$$

$$\begin{aligned}&\left(\left[\mathscr{H}^{hc}, \mathfrak{a}^{+}_{(-)}\right]\varphi, F_{\Lambda}(t)\right)_s\\&\quad= \int dY\,(p_{-s_2} - p_{-(s_2-1)})\delta(q_{-(s_2-1)} - q_{-s_2} - \sigma)\varphi_{s-1}(Y\backslash x_{-s_2})F_{\Lambda,s}(t, Y),\end{aligned}$$

здесь $\mathscr{H}^{hc}$ — скобка Пуассона для системы частиц с твердой сердцевиной, операторы $\mathfrak{a}^{+}_{(\pm)}$ — сопряженные к операторам $\mathfrak{a}_{(\pm)}$, которые действуют по правилу

$$\left(\mathfrak{a}^{+}_{(+)}f\right)_n(x_{-n_2}, \ldots, x_{n_1}) = f_{n-1}(x_{-n_2}, \ldots, x_{n_1-1}),$$

$$\left(\mathfrak{a}^{+}_{(-)} f\right)_n (x_{-n_2}, \ldots, x_{n_1}) = f_{n-1}(x_{-(n_2-1)}, \ldots, x_{n_1}).$$

Функции $F_{\Lambda,s}(t)$ сильно непрерывны по t в $L_\alpha(\Lambda)$, следовательно, функционалы $(\varphi, F_\Lambda(t))_s$ непрерывны по t и функции $F_s(t)$ непрерывны по t и определены почти всюду по Y на компактах, будучи равномерным покомпонентным пределом функций $F_{\Lambda,s}(t)$ при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^1$ (по Y и t).

Так как непрерывные по t функционалы

$$(\varphi, F_\Lambda(t))_s, \quad (\mathscr{H}\varphi, F_\Lambda(t))_s, \left(\left[\mathscr{H}^\Phi, \mathfrak{a}^{+}_{(+)}\right]\varphi, F_\Lambda(t)\right)_s,$$

$$\left(\left[\mathscr{H}^\Phi, \mathfrak{a}^{+}_{(-)}\right]\varphi, F_\Lambda(t)\right)_s, \quad \left(\left[\mathscr{H}^{hc}, \mathfrak{a}^{+}_{(+)}\right]\varphi, F_\Lambda(t)\right)_s, \quad \left(\left[\mathscr{H}^{hc}, \mathfrak{a}^{+}_{(-)}\right]\varphi, F_\Lambda(t)\right)_s$$

равномерно по t сходятся при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^1$ к функционалам

$$(\varphi, F(t))_s, \quad (\mathscr{H}\varphi, F(t))_s, \quad \left(\left[\mathscr{H}^\Phi, \mathfrak{a}^{+}_{(+)}\right]\varphi, F(t)\right)_s,$$

$$\left(\left[\mathscr{H}^\Phi, \mathfrak{a}^{+}_{(-)}\right]\varphi, F(t)\right)_s, \quad \left(\left[\mathscr{H}^{hc}, \mathfrak{a}^{+}_{(+)}\right]\varphi, F(t)\right)_s, \quad \left(\left[\mathscr{H}^{hc}, \mathfrak{a}^{+}_{(-)}\right]\varphi, F(t)\right)_s,$$

последние тоже непрерывны по t. Переходя к термодинамическому пределу в (29), получим

$$\begin{aligned}(\varphi, F(t))_s = \int_0^t d\tau \Big(&-(\mathscr{H}\varphi, F(\tau))_s \\ &- \left(\left[\mathscr{H}^\Phi, \mathfrak{a}^{+}_{(+)}\right]\varphi, F(\tau)\right)_s - \left(\left[\mathscr{H}^\Phi, \mathfrak{a}^{+}_{(-)}\right]\varphi, F(\tau)\right)_s \\ &+ \left(\left[\mathscr{H}^{hc}, \mathfrak{a}^{+}_{(+)}\right]\varphi, F(\tau)\right)_s + \left(\left[\mathscr{H}^{hc}, \mathfrak{a}^{+}_{(-)}\right]\varphi, F(\tau)\right)_s\Big).\end{aligned}$$

Поскольку функционалы $(\varphi, F(t))_s$ непрерывно дифференцируемы по t, то

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\varphi, F(t))_s = &-(\mathscr{H}\varphi, F(t))_s - \left(\left[\mathscr{H}^\Phi, \mathfrak{a}^{+}_{(+)}\right]\varphi, F(t)\right)_s \\ &- \left(\left[\mathscr{H}^\Phi, \mathfrak{a}^{+}_{(-)}\right]\varphi, F(t)\right)_s + \left(\left[\mathscr{H}^{hc}, \mathfrak{a}^{+}_{(+)}\right]\varphi, F(t)\right)_s + \left(\left[\mathscr{H}^{hc}, \mathfrak{a}^{+}_{(-)}\right]\varphi, F(t)\right)_s.\end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова в форме разложений по кумулянтам

$$F(t) = (I - \mathfrak{a}_{(+)})^{-1}(I - \mathfrak{a}_{(-)})^{-1}(I - (I + S(-t))^{-1_*})F^0$$

($*$ — тензорное произведение) является слабым. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.)* Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984.
2. *Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya.* Many-particle dynamics and kinetic equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
3. *Petrina D. Ya., Gerasimenko V. I., Malyshev P. V.* Mathematical foundations of classical statistical mechanics. Continuous systems. London; New York: Taylor and Francis Sci. Publ., 2002.
4. *Gerasimenko V. I., Ryabykha T. V., Stashenko M. O.* On the structure of the expansions for the BBGKY hierarchy solution // J. Phys. A: Math. Gen. 2004. V. 37, N 42. P. 9861–9872.
5. *Stashenko M. O., Hubal H. M.* A local existence theorem of the solution of the Cauchy problem for BBGKY chain of equations represented in cumulant expansions in the space E_ξ // Opuscula Math. 2004. V. 24, N 1. P. 161–168.

Статья поступила 29 декабря 2004 г.

Сташенко Михаил Александрович, Губаль Галина Николаевна
Волынский гос. университет им. Леси Украинки, пр. Воли, 13, Луцк 43025, Украина
smo@univer.lutsk.ua, hhm@lt.ukrtel.net