Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2006. Том 47, № 2

УДК 517.95

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ С ДАННЫМИ НА ТРЕХ ПОВЕРХНОСТЯХ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

А. Л. Казаков

Аннотация: Рассматривается ОЗК с данными на трех поверхностях для квазилинейной аналитической системы 3-го порядка. Для задачи, которая получается при некотором упрощающем предположении, найдены необходимые и достаточные условия существования решения в виде тройных рядов по степеням независимых переменных. Получены также удобные для проверки достаточные условия, при выполнении которых данная ОЗК имеет единственное локально аналитическое решение. Приведены контрпримеры, показывающие, что сформулировать необходимые и достаточные условия аналитической разрешимости обобщенной задачи Коши в данном случае невозможно, а также что при существовании у обобщенной задачи Коши с данными на трех поверхностях формального решения аналитическое решение может отсутствовать, так как ряды сходятся только в одной точке (в начале координат).

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с частными производными, квазилинейная система, начально-краевая задача, обобщенная задача Коши, теорема существования и единственности, локально аналитическое решение, ряд, сходимость, мажоранта.

Теорема С. В. Ковалевской [1] по праву входит в число классических научных результатов, доказательство аналогов и обобщений теоремы Ковалевской является одной из актуальных проблем теории дифференциальных уравнений с частными производными.

В работе французского математика Рикье [2] впервые рассмотрено обобщение задачи Коши (ЗК) на случай, когда начальные данные для разных функций заданы на разных поверхностях (см. также [3]). Результаты Рикье получили развитие в трудах российских математиков Н. М. Гюнтера [4], С. Л. Соболева [5, 6]. В работе [5] исследована задача с данными на двух поверхностях для системы произвольного порядка, когда для части искомых функций начальные данные заданы на одной поверхности, а для всех остальных — на другой поверхности. Термин «обобщенная задача Коши» (ОЗК) впервые использован в работе Н. А. Леднева [7].

Детальное исследование ОЗК для квазилинейной аналитической системы 2-го порядка выполнено в работе С. П. Баутина [8]. Используя методику, предложенную в [8], удалось доказать теоремы существования и единственности локально аналитического решения ОЗК для квазилинейной системы 2-го порядка в случае, когда в системе имеется особенность вида u/x или x/u [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00205).

ОЗК возникает в газовой динамике при описании течений газа с ударными волнами. В работах В. М. Тешукова [10–13] изучены задачи: о распаде произвольного квазиодномерного разрыва, о резком вдвижении в газ непроницаемого поршня, об отражении криволинейной ударной волны от жесткой стенки, о пространственном взаимодействии сильных разрывов в газе. В работах [14, 15] исследуются течения газа с ударными волнами, когда система уравнений газовой динамики имеет особенность вида u/r (u — скорость газа, r — расстояние до оси или центра симметрии).

Рассматривается квазилинейная система уравнений с частными производными в случае трех неизвестных функций, зависящих от трех независимых переменных:

$$D_1(\vec{x},\vec{U})\vec{U}_x + D_2(\vec{x},\vec{U})\vec{U}_y + D_3(\vec{x},\vec{U})\vec{U}_z = \vec{f}(\vec{x},\vec{U}). \tag{1}$$

Здесь $\vec{U} = \{u, v, w\}$ — вектор неизвестных функций; $\vec{x} = \{x, y, z\}$ — вектор независимых переменных; D_1, D_2, D_3 — матрицы размером 3×3; $\vec{f} \in \mathbb{R}^3$; коэффициенты матриц D_1, D_2, D_3 и вектора $\vec{f}$ являются функциями от x, y, z, u, v, w.

На трех разных поверхностях $\phi_1(x, y, z) = 0$, $\phi_2(x, y, z) = 0$, $\phi_3(x, y, z) = 0$, пересекающихся при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, ставятся для неизвестных функций три начальных условия:

$$\begin{gathered} \Phi_1(x,y,z,u)|_{\phi_1(x,y,z)=0} = 0, \quad \Phi_2(x,y,z,v)|_{\phi_2(x,y,z)=0} = 0, \\ \Phi_3(x,y,z,w)|_{\phi_3(x,y,z)=0} = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь ϕ_i, Φ_i, $i = 1, 2, 3,$ — заданные функции своих аргументов.

Задача (1), (2) есть ОЗК с данными на трех поверхностях для трех неизвестных функций, которая в дальнейшем для краткости именуется *задачей* А.

Для того чтобы в дальнейшем задачу А было удобнее исследовать, в ней делаются замены независимых переменных и неизвестных функций, в результате которых данная задача принимает вид

$$\begin{cases} u_x = A_1u_y + A_2u_z + A_3v_x + A_4v_z + A_5w_x + A_6w_y + p, \\ v_y = B_1u_y + B_2u_z + B_3v_x + B_4v_z + B_5w_x + B_6w_y + q, \\ w_z = C_1u_y + C_2u_z + C_3v_x + C_4v_z + C_5w_x + C_6w_y + r; \end{cases} \tag{3}$$

$$u(0, y, z) = 0, \quad v(x, 0, z) = 0, \quad w(x, y, 0) = 0.$$

Здесь функции p, q, r зависят от независимых переменных x, y, z, неизвестных функций u, v, w и линейно от производных $u_y, u_z, v_x, v_z, w_x, w_y$, причем коэффициенты перед производными обращаются в нуль в точке $O(x = 0, y = 0, z = 0, u = 0, v = 0, w = 0)$; A_i, B_i, C_i, $i = 1, \dots, 6,$ — константы.

Для того чтобы был возможен переход от задачи (1), (2) к задаче (3), необходимо и достаточно, чтобы были отличны от нуля некоторые определители. Процедура перехода стандартна и здесь не приводится.

Доказать теорему существования и единственности локально аналитического решения задачи (3) в общем случае пока не удается. Поэтому делается упрощающее задачу предположение.

Пусть справедливы равенства

$$B_3 = 0, \quad B_4 = 0, \quad B_5 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_5 = 0, \quad C_6 = 0,$$

т. е. в правой части системы (3) 6 из 18 коэффициентов, на которые умножаются производные неизвестных функций, берутся равными нулю. Тогда система (3) принимает вид

$$\begin{cases} u_x = A_1 u_y + A_2 u_z + A_3 v_x + A_4 v_z + A_5 w_x + A_6 w_y + p, \\ v_y = B_1 u_y + B_2 u_z + B_6 w_y + q, \\ w_z = C_1 u_y + C_2 u_z + C_4 v_z + r. \end{cases} \tag{4}$$

Начальные данные для системы (3), как отмечалось выше, следующие:

$$u(0, y, z) = 0, \quad v(x, 0, z) = 0, \quad w(x, y, 0) = 0. \tag{5}$$

Задача (4), (5) и будет являться объектом дальнейших исследований.

Для того чтобы было удобнее строить решение задачи (4), (5) в виде формальных степенных рядов, а затем устанавливать их сходимость, сформулируем и докажем вспомогательное утверждение.

Введем константы

$$\begin{gathered} \gamma_* = 1 - A_5 C_2, \quad \alpha_* = A_5 C_1, \quad \gamma^* = 1 - A_3 B_1, \quad \alpha^* = A_3 B_2, \\ \gamma = 1 - A_3 B_1 - A_5 C_2 - B_6 C_4 - A_3 B_6 C_2 - A_5 B_1 C_4, \\ \alpha_1 = A_3 B_2 + A_5 B_2 C_4, \quad \alpha_2 = A_3 B_6 C_1 + A_5 C_1, \quad \alpha = \alpha_1 \alpha_2. \end{gathered} \tag{6}$$

Также введем числовые последовательности $\{\mu_n\}$ и $\{\xi_n\}$ по формулам

$$\begin{gathered} \mu_1 = \gamma^* \gamma_* - \alpha_* \alpha^*, \ \mu_2 = \gamma \gamma^* \gamma_* - \alpha_1 \alpha_* \gamma^* - \alpha_2 \alpha^* \gamma_*, \\ \mu_{n+1} = \gamma \mu_n - \alpha \mu_{n-1}, \quad n - 1 \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{7}$$

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_1 = \gamma, \quad \xi_{n+1} = \gamma \xi_n - \alpha \xi_{n-1}, \ n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Утверждение 1. 1. *Константы γ, γ^*, γ_*, α, $\alpha_1\alpha_*$, $\alpha_2\alpha^*$ инвариантны относительно замены независимых переменных $x' = \varepsilon_1 x$, $y' = \varepsilon_2 y$, $z' = \varepsilon_3 z$ в системе* (4).

2. *Пусть для коэффициентов α_1, α_2 системы* (4) *справедливо неравенство*

$$|\alpha_1 \alpha_2| < \mu_\infty^2, \tag{9}$$

где μ_∞ — отличная от нуля константа. Тогда, не теряя общности рассмотрения задачи (4), (5), *можно считать, что справедливы неравенства*

$$|\alpha_1| < |\mu_\infty|, \quad |\alpha_2| < |\mu_\infty|. \tag{10}$$

Доказательство. В задаче (4), (5) сделаем замену независимых переменных:

$$x' = \varepsilon_1 x, \quad y' = \varepsilon_2 y, \quad z' = \varepsilon_3 z, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \mathrm{const} > 0. \tag{11}$$

В результате замены (11) коэффициенты системы (4) изменятся следующим образом:

$$\begin{gathered} A_1' = A_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad A_2' = A_2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}, \quad A_3' = A_3, \quad A_4' = A_4 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}, \quad A_5' = A_5, \quad A_6' = A_6 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \\ B_1' = B_1, \quad B_2' = B_2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}, \quad B_6' = B_6, \quad C_1' = C_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}, \quad C_2' = C_2, \quad C_4' = C_4, \end{gathered} \tag{12}$$

а значит, константы γ', $\gamma^{*'}$, γ_*', α_1', α_*', α_2', $\alpha^{*'}$, α' и константы γ, γ^*, γ_*, α_1, α_*, α_2, α^*, α связаны соотношениями

$$\gamma' = \gamma, \ \gamma^{*'} = \gamma^*, \ \gamma_*' = \gamma_*, \ \alpha_*' = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \alpha_*, \alpha^{*'} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \alpha^*, \ \alpha_1' = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \alpha_1, \ \alpha_2' = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \alpha_2, \ \alpha' = \alpha. \tag{13}$$

Отсюда следует, что справедливы равенства

$$\gamma' = \gamma, \quad {\gamma^*}' = \gamma^*, \quad \gamma'_* = \gamma_*, \quad \alpha' = \alpha, \quad \alpha'_1\alpha'_* = \alpha_1\alpha_*, \quad \alpha'_2{\alpha^*}' = \alpha_2\alpha^*.$$

Итак, установлено, что значения констант γ', ${\gamma^*}'$, γ'_*, α', $\alpha'_1\alpha'_*$, $\alpha'_2{\alpha^*}'$ инвариантны относительно замены (11).

В качестве константы ε_1 выбирается произвольное положительное число (произвол будет использован при доказательстве сходимости рядов). Константы $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ выбираются следующим образом. Если неравенства (10) выполняются, то $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$. Если $|\alpha_1| < |\mu_\infty| \le |\alpha_2|$, то $\varepsilon_3 = 1$, а ε_2 берется произвольным, удовлетворяющим неравенствам $|\alpha_1|/|\mu_\infty| < \varepsilon_2 < |\mu_\infty|/|\alpha_2|$. Это возможно в силу (9). Если же $|\alpha_2| < |\mu_\infty| \le |\alpha_1|$, то $\varepsilon_2 = 1$, а в качестве ε_3 выбирается число, удовлетворяющее неравенствам $|\alpha_2|/|\mu_\infty| < \varepsilon_3 < |\mu_\infty|/|\alpha_1|$, что также возможно при условии (9). Случай $|\mu_\infty| \le |\alpha_1|$, $|\mu_\infty| \le |\alpha_2|$, очевидно, невозможен. Поэтому за счет выбора $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ будут выполняться неравенства (10)

$$|\alpha'_1| = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}|\alpha_1| < |\mu_\infty|, \quad |\alpha'_2| = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}|\alpha_2| < |\mu_\infty|.$$

Утверждение 1 доказано.

Замечание 1. Из (7), (8) и (13) следует, что последовательности $\{\mu_n\}$, $\{\xi_n\}$ также инвариантны относительно замены независимых переменных (11).

Далее предполагается, что в задаче (4), (5) замена независимых переменных (11) сделана и неравенства (10) выполняются. В новой задаче для упрощения обозначений сохраняется написание (4), (5).

Теорема 1. *Пусть в задаче* (4), (5) *функции* p, q, r *обладают следующими свойствами:*

(а) *зависят от независимых переменных* x, y, z, *неизвестных функций* u, v, w *и их производных* $u_y, u_z, v_x, v_z, w_x, w_y$, *причем зависимость от производных линейная и коэффициенты перед производными обращаются в нуль в точке* $O(x = 0, y = 0, z = 0, u = 0, v = 0, w = 0)$;

б) *аналитичны в некоторой окрестности точки* O *по* x, y, z, u, v, w.

Если выполняются условия

$$1 - B_6C_4 \ne 0, \tag{14}$$

$$\mu_n \ne 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

$$\xi_n \ne 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty}\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \mu_\infty, \quad 0 <| \mu_\infty |< +\infty, \\ \lim_{n\to\infty}\frac{\xi_{n+1}}{\xi_n} = \xi_\infty, \quad 0 <| \xi_\infty |< +\infty, \quad \xi_\infty \ne \alpha\frac{\mu_1}{\mu_2}, \end{gathered} \tag{17}$$

$$\frac{|\alpha|}{\mu_\infty^2} < 1, \tag{18}$$

то у задачи (4), (5) *в некоторой окрестности точки* $(x = 0, y = 0, z = 0)$ *существует единственное аналитическое решение. При этом условия* (14), (15) *являются необходимыми и достаточными условиями существования и единственности решения в виде формальных рядов по степеням* x, y, z.

Замечание 2. ОЗК с данными на трех поверхностях (4), (5) представляет собой частный случай ОЗК с данными на n поверхностях, рассмотренной в работе [7], однако теорема 1 не является частным случаем теоремы Н. А. Леднева.

В самом деле, если в системе (4) сделать дополнительные упрощающие предположения, положив $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_6 = B_6 = C_1 = C_4 = 0$, то получается задача, для которой в случае $1 - A_5C_2 \neq 0$ все условия теоремы 1 выполнены. С другой стороны, если к этой задаче применить теорему Н. А. Леднева, то оказывается, что сформулированные в [7] условия существования и единственности локально аналитического решения в данном случае эквивалентны тому, что $|A_5C_2| < 1$.

Доказательство теоремы 1. Решение задачи (4), (5) будем строить в виде рядов (символ ζ принимает значения u, v, w)

$$\zeta(x,y,z) = \sum_{l,m,k\in\mathbb{N}_0} \zeta_{l,m,k}\frac{x^l y^m z^k}{l!m!k!}, \quad \zeta_{l,m,k} = \left.\frac{\partial^{l+m+k} z}{\partial x^l \partial y^m \partial z^k}\right|_{x=y=z=0}, \tag{19}$$

где $\mathbb{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел. Пусть

$$\varrho_{l,m,k} = \left.\frac{\partial^{l+m+k}\varrho}{\partial x^l \partial y^m \partial z^k}\right|_{x=y=z=u=v=w=0},$$

где символ ϱ принимает значения p, q, r.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} &\vec{\zeta}_{l,n-l} = (\zeta_{l,0,n-l}; \zeta_{l,1,n-l-1}; \ldots; \zeta_{l,n-l,0}), \quad \vec{\zeta}_n = (\vec{\zeta}_{0,n}; \vec{\zeta}_{1,n-1}; \ldots; \vec{\zeta}_{n,0}),\\ &\vec{\varrho}_{l,n-l} = (\varrho_{l,0,n-l}; \varrho_{l,1,n-l-1}; \ldots; \varrho_{l,n-l,0}), \quad \vec{\varrho}_n = (\vec{\varrho}_{0,n}; \vec{\varrho}_{1,n-1}; \ldots; \vec{\varrho}_{n,0}), \end{aligned} \tag{20}$$

где $l = 0, \ldots, n$. Из свойств функций p, q, r следует (см. условие теоремы), что значения $\varrho_{l,m,k}$ будут зависеть от компонент векторов $\vec{\zeta}_i$ при $0 \le i \le l+m+k = n$ и не будут зависеть от компонент векторов $\vec{\zeta}_i$ при $i > l + m + k = n$.

Возможность однозначного определения коэффициентов рядов (19) доказывается индукцией по $n = k + l + m$. Из начальных условий (5) следует, что

$$u_{0,m,k} = v_{l,0,k} = w_{l,m,0} = 0, \quad l, m, k \in \mathbb{N}_0, \tag{21}$$

в частности $u_{0,0,0} = v_{0,0,0} = w_{0,0,0} = 0$. Таким образом, компоненты векторов $\vec{u}_0$, $\vec{v}_0$, $\vec{w}_0$ однозначно определяются начальными условиями. Компоненты векторов $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1$, $\vec{w}_1$ определяются из соотношений

$$u_{1,0,0} = p_{0,0,0}, \quad v_{0,1,0} = q_{0,0,0}, \quad w_{0,0,1} = r_{0,0,0},$$

$$u_{0,1,0} = u_{0,0,1} = v_{1,0,0} = v_{0,0,1} = w_{1,0,0} = w_{0,1,0} = 0,$$

которые получаются, если в обеих частях системы (4) положить $x = y = z = u = v = w = 0$ и добавить начальные условия (21) при $l = 1$, $m = 0$, $k = 0$, при $l = 0$, $m = 1$, $k = 0$ и при $l = 0$, $m = 0$, $k = 1$.

Пусть найдены $\vec{\zeta}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Для того чтобы найти $\vec{\zeta}_{n+1}$, уравнения (4) дифференцируются l раз по x, m раз по y, $n - l - m$ раз по z, полагаются $x = y = z = u = v = w = 0$ и учитываются начальные условия в виде (21).

В результате получаются следующие соотношения:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\vec{u}_{0,n+1} = \vec{O}, \quad v_{0,0,n+1} = 0,\\
&v_{0,k+1,n-k} = B_1 u_{0,k+1,n-k} + B_2 u_{0,k,n+1-k} + B_6 w_{0,k+1,n-k} + q_{0,k,n-k},\\
&w_{0,k,n+1-k} = C_1 u_{0,k+1,n-k} + C_2 u_{0,k,n+1-k} + C_4 v_{0,k,n+1-k} + r_{0,k,n-k},\\
&u_{1,k,n-k} = A_1 u_{0,k+1,n-k} + A_2 u_{0,k,n+1-k} + A_3 v_{1,k,n-k} + A_4 v_{0,k,n+1-k}\\
&\qquad\qquad + A_5 w_{1,k,n-k} + A_6 w_{0,k+1,n-k} + p_{0,k,n-k}, \quad k = 0,\dots,n,\\
&w_{0,n+1,0} = 0,\dots,\\
&v_{l,0,n+1-l} = 0,\\
&v_{l,k+1,n-l-k} = B_1 u_{l,k+1,n-l-k} + B_2 u_{l,k,n+1-l-k} + B_6 w_{l,k+1,n-l-k} + q_{l,k,n-l-k},\\
&w_{l,k,n+1-l-k} = C_1 u_{l,k+1,n-l-k} + C_2 u_{l,k,n+1-l-k} + C_4 v_{l,k,n+1-l-k} + r_{l,k,n-l-k},\\
&u_{l+1,k,n-l-k} = A_1 u_{l,k+1,n-l-k} + A_2 u_{l,k,n+1-l-k} + A_3 v_{l+1,k,n-l-k}\\
&\qquad\qquad + A_4 v_{l,k,n+1-l-k} + A_5 w_{l+1,k,n-l-k} + A_6 w_{l,k+1,n-l-k} + p_{l,k,n-l-k},\\
&l = 1,\dots,n-1; \quad k = 0,\dots,n-l,\\
&w_{l,n+1-l,0} = 0,\dots,\\
&v_{n,0,1} = 0, \quad v_{n,1,0} = B_1 u_{n,1,0} + B_2 u_{n,0,1} + B_6 w_{n,1,0} + q_{n,0,0},\\
&w_{n,0,1} = C_1 u_{n,1,0} + C_2 u_{n,0,1} + C_4 v_{n,0,1} + r_{n,0,0},\\
&u_{n+1,0,0} = A_1 u_{n,1,0} + A_2 u_{n,0,1} + A_3 v_{n+1,0,0}\\
&\qquad\qquad + A_4 v_{n,0,1} + A_5 w_{n+1,0,0} + A_6 w_{n,1,0} + p_{n,0,0},\\
&w_{n,1,0} = 0, \quad v_{n+1,0,0} = 0, \quad w_{n+1,0,0} = 0,
\end{aligned}
\right.
\tag{22}
$$

которые являются системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для компонент векторов $\vec{u}_{n+1}, \vec{v}_{n+1}, \vec{w}_{n+1}$. Здесь $\vec{O} = \{0, 0, \dots, 0\}$.

Решается данная система по следующей процедуре. Вначале из СЛАУ (22) исключаются компоненты векторов $\vec{v}_{n+1}, \vec{w}_{n+1}$. Затем индукцией по $l = 0, 1, \dots, n$ определяются компоненты векторов $\vec{u}_{l+1,n-l}$, тем самым определяются все компоненты вектора $\vec{u}_{n+1}$ (см. (20)). Далее определяются компоненты векторов $\vec{v}_{n+1}$, $\vec{w}_{n+1}$. Указанная ниже процедура излагается подробнее.

Для того чтобы исключить из СЛАУ (22) компоненты векторов $\vec{v}_{n+1}, \vec{w}_{n+1}$, необходимо выразить их через компоненты вектора $\vec{u}_{n+1}$.

Из системы (22) при всех $l = 0, 1, \dots, n-1$ следуют соотношения

$$
\begin{aligned}
&\left\{
\begin{aligned}
&v_{l,0,n+1-l} = 0,\\
&w_{l,0,n+1-l} = C_1 u_{l,1,n-l} + C_2 u_{l,0,n+1-l} + r_{l,0,n-l},
\end{aligned}
\right.\\
&\left\{
\begin{aligned}
&v_{l,n+1-l,0} = B_1 u_{l,n+1-l,0} + B_2 u_{l,n-l,1} + q_{l,n-l,0},\\
&w_{l,n+1-l,0} = 0.
\end{aligned}
\right.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

По условию (14) справедливо неравенство $1 - B_6 C_4 \neq 0$, поэтому из системы (22) при всех $l = 0, 1, \dots, n-1$ получаем

$$
\begin{aligned}
v_{l,k+1,n-l-k} &= \frac{1}{1 - B_6 C_4}[B_2 u_{l,k,n+1-l-k} + (B_1 + B_6 C_2) u_{l,k+1,n-l-k}\\
&\quad + B_6 C_1 u_{l,k+2,n-1-l-k} + B_6 r_{l,k+1,n-1-l-k} + q_{l,k,n-l-k}],\\
w_{l,k+1,n-l-k} &= \frac{1}{1 - B_6 C_4}[B_2 C_4 u_{l,k,n+1-l-k} + (C_2 + B_1 C_4) u_{l,k+1,n-l-k}\\
&\quad + C_1 u_{l,k+2,n-1-l-k} + r_{l,k+1,n-1-l-k} + C_4 q_{l,k,n-l-k}],
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$k = 0, 1, \ldots, n - l - 1.$$

Если $n = l$, то из системы (22) следуют выражения:

$$\begin{cases} v_{n,0,1} = 0, \\ w_{n,0,1} = C_1 u_{n,1,0} + C_2 u_{n,0,1} + r_{n,0,0}, \end{cases} \begin{cases} w_{n,1,0} = 0, \\ v_{n,1,0} = B_1 u_{n,1,0} + B_2 u_{n,0,1} + q_{n,0,0}. \end{cases} \tag{25}$$

Таким образом, с учетом того, что $v_{n+1,0,0} = w_{n+1,0,0} = 0$, все компоненты векторов $\vec{v}_{n+1}$, $\vec{w}_{n+1}$ либо найдены, либо выражены через компоненты вектора $\vec{u}_{n+1}$.

Выражения (23)–(25) подставляются в те уравнения СЛАУ (22), в левой части которых стоят компоненты вектора $\vec{u}_{n+1}$. В результате получаются соотношения

$$\begin{cases} \vec{u}_{0,n+1} = \vec{O}, \quad \gamma_* u_{1,0,n} = \alpha_* u_{1,1,n-1} + P_{0,0,n}, \\ \gamma u_{1,1,n-1} = \alpha_1 u_{1,0,n} + \alpha_2 u_{1,2,n-2} + P_{0,1,n-1}, \ldots, \\ \gamma u_{1,k,n-k} = \alpha_1 u_{1,k-1,n-k+1} + \alpha_2 u_{1,k+1,n-k-1} + P_{0,k,n-k}, \ k = 1, \ldots, n-2, \ldots, \\ \gamma u_{1,n-1,1} = \alpha_1 u_{1,n-2,2} + \alpha_2 u_{1,n-1,0} + P_{0,n-1,1}, \\ \gamma^* u_{1,n,0} = \alpha^* u_{1,n-1,1} + P_{0,n,0}, \ldots, \\ \gamma_* u_{l+1,0,n-l} = \alpha_* u_{l+1,1,n-1-l} + P_{l,0,n-l}, \quad l = 1, \ldots, n-2, \\ \gamma u_{l+1,1,n-l-1} = \alpha_1 u_{l+1,0,n-l} + \alpha_2 u_{l+1,2,n-2-l} + P_{l,1,n-1-l}, \ldots, \\ \gamma u_{l+1,k,n-l-k} = \alpha_1 u_{l+1,k-1,n+1-l-k} + \alpha_2 u_{l+1,k+1,n-1-l-k} \\ \qquad\qquad + P_{l,k,n-l-k}, \quad k = 1, \ldots, n-1-l, \ldots, \\ \gamma u_{l+1,n-l-1,1} = \alpha_1 u_{l+1,n-2-l,2} + \alpha_2 u_{l+1,n-l,0} + P_{l,n-1-l,1}, \\ \gamma^* u_{l+1,n-l,0} = \alpha^* u_{l+1,n-1-l,1} + P_{l,n-l,0}, \\ \gamma_* u_{n,0,1} = \alpha_* u_{n,1,0} + P_{n-1,0,1}, \ldots, \\ \gamma^* u_{n,1,0} = \alpha^* u_{n,0,1} + P_{n-1,1,0}, \quad u_{n+1,0,0} = P_{n,0,0}. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь γ^*, γ_*, γ, α^*, α_*, α_1, α_2 определяются из (6). Через $P_{l,k,n-l-k}$ при $l = 0, 1, \ldots, n-2$ обозначаются величины

$$\begin{aligned} P_{l,0,n-l} = {} & (A_2 - A_2 B_6 C_4 + A_6 B_2 C_4) u_{l,0,n+1-l} \\ & + (A_1 + A_6 C_2 - A_1 B_6 C_4 + A_6 B_1 C_4) u_{l,1,n-l} + A_6 C_1 u_{l,2,n-1-l} \\ & + A_5 (1 - B_6 C_4) r_{l+1,0,n-l-1} + A_6 r_{l,1,n-l-1} \\ & + A_6 C_4 q_{l,0,n-l} + (1 - B_6 C_4) p_{l,0,n-l}, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} P_{l,k,n-l-k} = {} & A_4 B_2 u_{l,k-1,n+2-l-k} \\ & + (A_2 + A_4 B_1 - A_2 B_6 C_4 + A_6 B_2 C_4 + A_4 B_6 C_2) u_{l,k,n+1-l-k} \\ & + (A_1 + A_6 C_2 - A_1 B_6 C_4 + A_6 B_1 C_4 + A_4 B_6 C_1) u_{l,k+1,n-l-k} \\ & + A_6 C_1 u_{l,k+2,n-1-l-k} + (A_3 B_6 + A_5) r_{l+1,k,n-1-l-k} + (A_5 C_4 + A_3) q_{l+1,k-1,n-l-k} \\ & + A_4 B_6 r_{l,k,n-l-k} + A_6 r_{l,k+1,n-1-l-k} + A_4 q_{l,k-1,n+1-l-k} \\ & + A_6 C_4 q_{l,k,n-l-k} + (1 - B_6 C_4) p_{l,k,n-l-k}, \quad k = 1, \ldots, n-1-l, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} P_{l,n-l,0} = {} & A_4 B_2 u_{l,n-1-l,2} + (A_2 + A_4 B_1 - A_2 B_6 C_4 + A_4 B_6 C_2) u_{l,n-l,1} \\ & + (A_1 - A_1 B_6 C_4 + A_4 B_6 C_1) u_{l,n+1-l,0} + A_3 (1 - B_6 C_4) q_{l+1,n-1-l,0} + A_4 q_{l,n-1-l,1} \\ & + A_4 B_6 q_{l,n-l,0} + (1 - B_6 C_4) p_{l,n-l,0}. \end{aligned} \tag{29}$$

Через $P_{n-1,0,1}$, $P_{n-1,1,0}$, $P_{n,0,0}$ обозначаются величины

$$\begin{aligned} P_{n-1,0,1} &= (A_2 - A_2B_6C_4 + A_6B_2C_4)u_{n-1,0,2} \\ &\quad + (A_1 + A_6C_2 - A_1B_6C_4 + A_6B_1C_4)u_{n-1,1,1} + A_6C_1u_{n-1,2,0} \\ &\quad + A_5(1 - B_6C_4)r_{n,0,0} + A_6r_{n-1,1,0} + A_6C_4q_{n-1,0,1} + (1 - B_6C_4)p_{n-1,0,1}, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} P_{n-1,1,0} &= A_4B_2u_{n-1,0,2} + (A_2 + A_4B_1 - A_2B_6C_4 + A_4B_6C_2)u_{n-1,1,1} \\ &\quad + (A_1 - A_1B_6C_4 + A_4B_6C_1)u_{n-1,2,0} + A_3(1 - B_6C_4)q_{n,0,0} + A_4q_{n-1,0,1} \\ &\quad + A_4B_6r_{n-1,1,0} + (1 - B_6C_4)p_{n-1,1,0}, \end{aligned} \tag{31}$$

$$P_{n,0,0} = A_1u_{n,1,0} + A_2u_{n,0,1} + p_{n,0,0}. \tag{32}$$

Соотношения (26) являются СЛАУ для компонент векторов $\vec{u}_{n+1}$. СЛАУ (26) решается методом Крамера. Введем числовые последовательности $\lambda_n^{(1)}$, $\lambda_n^{(2)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, по формулам

$$\lambda_0^{(1)} = 1,\ \lambda_1^{(1)} = \gamma_*,\ \lambda_2^{(1)} = \gamma_*\gamma - \alpha_1\alpha_*,\ \lambda_{n+1}^{(1)} = \gamma\lambda_n^{(1)} - \alpha\lambda_{n-1}^{(1)}, \quad n-1 \in \mathbb{N}; \tag{33}$$

$$\lambda_0^{(2)} = 1,\ \lambda_1^{(2)} = \gamma^*,\ \lambda_2^{(2)} = \gamma^*\gamma - \alpha_2\alpha^*,\ \lambda_{n+1}^{(2)} = \gamma\lambda_n^{(2)} - \alpha\lambda_{n-1}^{(2)}, \quad n-1 \in \mathbb{N}. \tag{34}$$

Замечание 3. Из (33), (34) и (13) следует, что последовательности $\{\lambda_n^{(1)}\}$, $\{\lambda_n^{(2)}\}$ инвариантны относительно замены независимых переменных (11).

Решение СЛАУ (26) при $l = 0, \dots, n-2$ имеет вид

$$u_{l+1,0,n-l} = \frac{1}{\mu_{n-l}}\left(\lambda_0^{(1)}\lambda_{n-l}^{(2)}P_{l,0,n-l} + \alpha_*\lambda_0^{(1)}\sum_{i=1}^{n-l}\alpha_2^{i-1}\lambda_{n-l-i}^{(2)}P_{l,i,n-l-i}\right),$$

$$\begin{aligned} u_{l+1,k,n-l-k} &= \frac{1}{\mu_{n-l}}\left(\lambda_{n-l-k}^{(2)}\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_1^{k-i}\lambda_i^{(1)}P_{l,i,n-l-i} + \lambda_{n-l-k}^{(2)}\lambda_k^{(1)}P_{l,k,n-l-k}\right. \\ &\quad \left. + \lambda_k^{(1)}\sum_{i=0}^{n-l-k-1}\alpha_2^{n-l-k-i}\lambda_i^{(2)}P_{l,n-l-i,i}\right), \quad k = 1, \dots, n-1-l, \end{aligned} \tag{35}$$

$$u_{l+1,n-l,0} = \frac{1}{\mu_{n-l}}\left(\alpha^*\lambda_0^{(2)}\sum_{i=0}^{n-l-1}\alpha_1^{n-l-1-i}\lambda_i^{(1)}P_{l,i,n-l-i} + \lambda_{n-l}^{(1)}\lambda_0^{(2)}P_{l,n-l,0}\right),$$

а при $l = n-1$ — вид

$$\begin{aligned} u_{n,0,1} &= \frac{1}{\mu_1}\big(\lambda_0^{(1)}\lambda_1^{(2)}P_{n-1,0,1} + \alpha_*\lambda_0^{(1)}\lambda_0^{(2)}P_{n-1,1,0}\big), \\ u_{n,1,0} &= \frac{1}{\mu_1}\big(\alpha^*\lambda_0^{(2)}\lambda_0^{(1)}P_{n-1,0,1} + \lambda_1^{(1)}\lambda_0^{(2)}P_{n-1,1,0}\big). \end{aligned} \tag{36}$$

Таким образом, установлено, что при выполнении условий (14), (15) коэффициенты рядов (19) определяются индукцией по суммарному порядку дифференцирования $n = l + m + k$. Из начальных данных известно, что $u_{0,0,0} = 0$, $v_{0,0,0} = 0$, $w_{0,0,0} = 0$. Пусть известны все $\zeta_{l,m,k}$, $l + m + k \le n$, где ζ принимает значения u, v, w. При фиксированном n вначале определяются $\vec{u}_{l,n+1-l} = \{u_{l,0,n+1-l}; u_{l,1,n-l}; \dots; u_{l,n+1-l,0}\}$ индукцией по l с использованием следующей процедуры. Из начальных данных известно, что $\vec{u}_{0,n+1} = \vec{O}$. Пусть найдены

$\vec{u}_{i,n+1-i}$, $i = 0, \ldots, l \le n-1$. Тогда по формулам (27)–(29) можно найти $\vec{P}_{l,n-l}$ и по формулам (35) определить $\vec{u}_{l+1,n-l}$. Если найдены $\vec{u}_{l+1,n-l}$, $l = 0, \ldots, n-2$, то по формулам (30), (31) можно найти $P_{n-1,1,0}$, $P_{n-1,0,1}$ и по формулам (36) определить $u_{n,1,0}, u_{n,1,0}$. Наконец, $u_{n+1,0,0} = P_{n,0,0}$ определяется из (32). Затем определяются $\vec{v}_{n+1} = \{\vec{v}_{0,n+1}; \ldots; \vec{v}_{n,1}; v_{n+1,0,0}\}$, $\vec{w}_{n+1} = \{\vec{w}_{0,n+1}; \ldots; \vec{w}_{n,1}; w_{n+1,0,0}\}$ по формулам (23)–(25).

Сходимость рядов (19) доказывается классическим методом мажорант с использованием следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1. *Пусть последовательности* $\{\lambda_n^{(1)}\}$, $\{\lambda_n^{(2)}\}$ *определяются из* (33), (34), *последовательность* $\{\mu_n\}$ — *из* (7). *Если выполнены условия* (14)–(18), *то найдутся константы* $M > 0$, $q_* \in (0,1)$ *такие, что при всех* $i, j, k \in \mathbb{N}_0$ *выполнены неравенства*

$$\left| \frac{e^k \lambda_i^{(1)} \lambda_j^{(2)}}{\mu_{i+j+k}} \right| < M q_*^k, \tag{37}$$

где символ e *принимает значения* α_1, α_2.

Доказательство леммы здесь не приводится вследствие громоздкости.

Для задачи (4), (5) мажорантная задача строится следующим образом. Вначале выбираем положительные константы M_1, ρ такие, чтобы функция

$$R = \frac{M_1}{\left[1 - \frac{(x+y+z+U+V+W)}{\rho}\right]} [(x+y+z+U+V+W)(U_y+U_z+V_x+V_z+W_x+W_y)+1] \tag{38}$$

мажорировала функции p, q, r. Это возможно при условии $U_{l,m,k} \ge |u_{l,m,k}|$, $V_{l,m,k} \ge |v_{l,m,k}|$, $W_{l,m,k} \ge |w_{l,m,k}|$, $l, m, k \in \mathbb{N}_0$, в силу аналитичности функций p, q, r относительно неизвестных функций и независимых переменных и линейности функций p, q, r относительно производных.

Введем константы $M_2 \ge 1$, $M_3 \ge 1$ по формулам

$$\begin{aligned} M_2 = \max\{&1, |A_5 - A_5 B_6 C_4|, |A_6|, |A_6 C_4|, |1 - B_6 C_4|, |A_3 B_6 + A_5|, |A_5 C_4 + A_3|, \\ &|A_4 B_6|, |A_6 C_1|, |A_4|, |1 - B_6 C_4|, |A_3 - A_3 B_6 C_4|, |A_4 B_6|\}, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} M_3 = \max\Bigg\{&1, |C_1|, |C_2|, |B_1|, |B_2|, |B_2||1 - B_6 C_4|, \frac{|B_1 + B_6 C_2|}{|1 - B_6 C_4|}, \frac{|B_6 C_1|}{|1 - B_6 C_4|}, \\ &\frac{|B_6|}{|1 - B_6 C_4|}, \frac{1}{|1 - B_6 C_4|}, \frac{|B_2 C_4|}{|1 - B_6 C_4|}, \frac{|C_2 + B_1 C_4|}{|1 - B_6 C_4|}, \frac{|C_1|}{|1 - B_6 C_4|}, \frac{|C_4|}{|1 - B_6 C_4|}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{40}$$

По лемме 1 (см. (37)) найдутся такие константы $q_* \in (0,1)$, $M_4 \ge 1$, что для всех $i_1, i_2, j \in \mathbb{N}_0$ выполнены неравенства

$$\begin{gathered} \left| \frac{\alpha_1^j \lambda_{i_1}^{(1)} \lambda_{i_2}^{(2)}}{\mu_{i_1+i_2+j}} \right| < M_4 q_*^j, \quad \left| \frac{\alpha_1^j \lambda_{i_1}^{(1)} \lambda_{i_2}^{(2)}}{\mu_{i_1+i_2+j}} \right| < M_4 q_*^j, \\ \left| \frac{\alpha^* \alpha_1^j \lambda_{i_1}^{(1)} \lambda_{i_2}^{(2)}}{\mu_{i_1+i_2+j+1}} \right| < M_4 q_*^{j+1}, \quad \left| \frac{\alpha_* \alpha_2^j \lambda_{i_1}^{(1)} \lambda_{i_2}^{(2)}}{\mu_{i_1+i_2+j+1}} \right| < M_4 q_*^{j+1}. \end{gathered} \tag{41}$$

Выше в задаче (4), (5) сделана замена переменных (11). При этом константы $\varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ выбраны так, чтобы выполнялись условия (10). Константа $\varepsilon_1 > 0$, как отмечено в ходе доказательства утверждения 1, выбирается произвольно. Обозначим $\varepsilon' = \frac{(1-q_*)\varepsilon}{8M_4}$, где $0 < \varepsilon < 1$. Воспользовавшись данным произволом, можно за счет выбора $\varepsilon_1 > 0$ (см. (12)) добиться выполнения неравенств

$$\begin{gathered}|A_2 - A_2B_6C_4 + A_6B_2C_4| < \varepsilon', \quad |A_1 + A_6C_2 - A_1B_6C_4 + A_6B_1C_4| < \varepsilon',\\ |A_2 + A_4B_1 - A_2B_6C_4 + A_6B_2C_4 + A_4B_6C_2| < \varepsilon',\\ |A_1 + A_6C_2 - A_1B_6C_4 + A_6B_1C_4 + A_4B_6C_1| < \varepsilon',\\ |A_6C_1| < \varepsilon', \quad |A_5 - A_5B_6C_4| < \varepsilon', \quad |A_4B_2| < \varepsilon', \quad |A_1| < \varepsilon', \quad |A_2| < \varepsilon'.\end{gathered} \tag{42}$$

Пусть

$$R_{l,m,k} = \frac{\partial^{l+m+k}R}{\partial x^l \partial y^m \partial z^k}\bigg|_{x=y=z=U=V=W=0}.$$

Далее построим константы $U_{l,m,k},\ V_{l,m,k},\ W_{l,m,k}$ и индукцией по $n = l+m+k$ покажем, что $|U_{l,m,k}| \geq |u_{l,m,k}|$, $|V_{l,m,k}| \geq |v_{l,m,k}|$, $|W_{l,m,k}| \geq |w_{l,m,k}|$,

$$U_{0,0,0} = V_{0,0,0} = W_{0,0,0} = 0,$$

$$U_{0,0,1} = U_{0,1,0} = V_{1,0,0} = V_{0,0,1} = W_{1,0,0} = W_{0,1,0} = 0,$$

$$U_{1,0,0} = V_{0,1,0} = W_{0,0,1} = R_{0,0,0}.$$

Из построения функции R вытекает, что

$$|U_{1,0,0}| \geq |u_{1,0,0}|, \quad |V_{0,1,0}| \geq |v_{0,1,0}|, \quad |W_{0,0,1}| \geq |w_{0,0,1}|.$$

Воспользуемся индукцией. Предположим, что $U_{l,m,k} \geq |u_{l,m,k}|$, $V_{l,m,k} \geq |v_{l,m,k}|$, $W_{l,m,k} \geq |w_{l,m,k}|$, $l+m+k = i$, при $i = 1, \dots, n$. Константы $U_{l,k,n+1-l-k}$ построим по формулам

$$U_{0,k,n+1-k} = 0, \quad k = 0, \dots, n+1;$$

$$U_{1,k,n} = M_4\left(\sum_{i=0}^{k} q_*^{k-i} Q_{0,i,n-i} + \sum_{i=k}^{n} q_*^{i-k} Q_{0,i,n-i}\right), \quad k = 0, \dots, n,$$

где

$$Q_{0,0,n} = \varepsilon'(U_{0,0,n+1} + U_{0,1,n} + U_{0,2,n-1}) + M_2(R_{1,0,n-1} + 2R_{0,0,n} + R_{0,1,n-1}),$$

$$\begin{gathered}Q_{0,k,n-k} = \varepsilon'(U_{0,k-1,n+2-k} + U_{0,k,n+1-k} + U_{0,k+1,n-k} + U_{0,k+2,n-1-k})\\ + M_2(R_{1,k-1,n-k} + R_{1,k,n-1-k} + R_{0,k-1,n+1-k} + 3R_{0,k,n-k} + R_{0,k+1,n-1-k}),\\ k = 1, \dots, n-1,\end{gathered}$$

$$Q_{0,n,0} = \varepsilon'(U_{0,n-1,2} + U_{0,n,1} + U_{0,n+1,0}) + M_2(R_{1,n-1,0} + R_{0,n-1,1} + 2R_{0,n,0}).$$

Если при $i = 0, 1, \dots, l$ построены $U_{i,k,n+1-i-k}$, $k = 0, \dots, n+1-i$, то константы $U_{l+1,k,n+1-l-k}$ определим следующим образом:

$$U_{l+1,k,n-l-k} = M_4\left(\sum_{i=0}^{k} q_*^{k-i} Q_{l,i,n-l-i} + \sum_{i=k}^{n-l} q_*^{i-k} Q_{l,i,n-l-i}\right), \quad k = 0, \dots, n-l,$$

где

$$\begin{aligned}Q_{l,0,n-l} = \varepsilon'(U_{l,0,n+1-l} + U_{l,1,n-l} + U_{l,2,n-1-l})&\\ + M_2(R_{l+1,0,n-1-l} + 2R_{l,0,n-l} + R_{l,1,n-1-l}),&\end{aligned}$$

$$Q_{l,k,n-l-k}=\varepsilon'(U_{l,k-1,n+2-l-k}+U_{l,k,n+1-l-k}+U_{l,k+1,n-l-k}\\+U_{l,k+2,n-1-l-k})+M_2(R_{l+1,k-1,n-l-k}+R_{l+1,k,n-1-l-k}+R_{l,k-1,n+1-l-k}\\+3R_{l,k,n-l-k}+R_{l,k+1,n-1-l-k}),\quad k=1,\dots,n-l-1,$$

$$Q_{l,n-l,0}=\varepsilon'(U_{l,n-l-1,2}+U_{l,n-l,1}+U_{l,n+1-l,0})\\+M_2(R_{l+1,n-1-l,0}+R_{l,n-1-l,1}+2R_{l,n-l,0}).$$

Наконец, если при $i=l+1,\dots,n-1$ также построены $U_{i,k,n+1-i-k}$, $k=0,\dots,n+1-i$, то константы $U_{n,1,0}$, $U_{n,0,1}$, $U_{n+1,0,0}$ определим так:

$$U_{n,1,0}=M_4(Q_{n-1,0,1}+q_*Q_{n-1,1,0}),$$

$$U_{n,0,1}=M_4(q_*Q_{n-1,0,1}+Q_{n-1,1,0}),\quad U_{n+1,0,0}=Q_{n,0,0},$$

где

$$Q_{n-1,0,1}=\varepsilon'(U_{n-1,0,2}+U_{n-1,1,1}+U_{n-1,2,0})+M_2(R_{n,0,0}+2R_{n-1,0,1}+R_{n-1,1,0}),$$

$$Q_{n-1,1,0}=\varepsilon'(U_{n-1,0,2}+U_{n-1,1,1}+U_{n-1,2,0})+M_2(R_{n,0,0}+R_{n-1,0,1}+2R_{n-1,1,0}),$$

$$Q_{n,0,0}=\varepsilon'(U_{n,0,1}+U_{n,1,0})+M_2R_{n,0,0}.$$

При $l=0,\dots,n-1$ константы $V_{l,k,n+1-l}$, $W_{l,k,n+1-l}$, где $k=0,\dots,n+1-l$, построим по следующим формулам:

$$V_{l,0,n+1-l}=W_{l,0,n+1-l}=M_3(U_{l,0,n+1-l}+U_{l,1,n-l}+R_{l,0,n-l}),$$

$$V_{l,k,n+1-l-k}=W_{l,k,n+1-l-k}=M_3(U_{l,k-1,n+2-l-k}+U_{l,k,n+1-l-k}\\+U_{l,k+1,n-l-k}+R_{l,k-1,n+1-l-k}+R_{l,k,n-l-k}),\quad k=1,\dots,n-1-l,$$

$$V_{l,n+1-l,0}=W_{l,n+1-l,0}=M_3(U_{l,n+1-l,0}+U_{l,n-l,1}+R_{l,n-l,0});$$

при $l=n$ данные формулы имеют вид

$$V_{n,1,0}=V_{n,0,1}=W_{n,1,0}=W_{n,0,1}=M_3(U_{n,0,1}+U_{n,1,0}+R_{n,0,0}),$$

наконец, если $l=n+1$, то

$$W_{n+1,0,0}=V_{n+1,0,0}=0.$$

Из определения функции R (см. (38)), выбора константы ε_1 (см. (11), (42)), константы M_2 (см. (39)) и неравенств (41) следует, что $|u_{l,m,k}|\le U_{l,m,k}$ (см. также (27)–(32) и (35), (36)). Из построения константы M_3 (см. (40)) вытекает, что $|v_{l,m,k}|\le V_{l,m,k}$, $|w_{l,m,k}|\le W_{l,m,k}$ (см. также (23)–(25)). Следовательно,

$$\begin{aligned}U(x,y,z)&=\sum_{l,m,k\in\,\mathbb{N}_0}\frac{U_{l,m,k}x^ly^mz^k}{l!m!k!}\gg u(x,y,z),\\V(x,y,z)&=\sum_{l,m,k\in\,\mathbb{N}_0}\frac{V_{l,m,k}x^ly^mz^k}{l!m!k!}\gg u(x,y,z),\\W(x,y,z)&=\sum_{l,m,k\in\,\mathbb{N}_0}\frac{W_{l,m,k}x^ly^mz^k}{l!m!k!}\gg u(x,y,z).\end{aligned}\tag{43}$$

Докажем сходимость рядов (43).

Индукцией по $l = 0, \dots, n$ устанавливается, что при всех $k = 0, \dots, n-l$ справедливы неравенства

$$U_{l+1,k,n-k-l} \le M_5 R_n \sum_{i=0}^{l} \varepsilon^i < M_5 R_n \frac{1}{1-\varepsilon},$$

где $R_n = \max\limits_{l+m+k=n} \{R_{l,m,k}\}$,

$$M_5 = \frac{14 M_2 M_4}{1-q_*} > 7 M_2 M_4 \left(\sum_{i=0}^{k} q_*^{k-i} + \sum_{i=k}^{n} q_*^{i-k} \right), \quad M_5 > 1.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$V_{l,k,n+1-l-k} < M_6 R_n, \quad W_{l,k,n+1-l-k} < M_6 R_n,$$

где $M_6 = M_3 \bigl(3 M_5 \frac{1}{1-\varepsilon} + 2 \bigr) > M_5$. Введем функцию

$$R^* = \frac{M_1 M_6}{[1-(t+3W^*)/\rho]} [(t+3W)6W_t + 1]$$

и константы W_n^* построим по формулам

$$W_0^* = 0, \quad W_1^* = R_0^*.$$

Так как $M_6 > M_5 > 1$, справедливы неравенства

$$W_1^* > U_{1,0,0} = V_{0,1,0} = W_{0,0,1} > U_{0,1,0} = U_{0,0,1} = V_{1,0,0} \\ = V_{0,0,1} = W_{1,0,0} = W_{0,1,0} = 0;$$

$$W_{n+1}^* = R_n^*, \quad \text{где } R_n^* = \left. \frac{d^n R^*}{dt^n} \right|_{t=W^*=0}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Тогда $W_n^* \ge \max\limits_{l+m+k=n} \{U_{l,m,k}; V_{l,m,k}; W_{l,m,k}\}$.

Построение коэффициентов рядов $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}_0} W_n^* t^n / n!$ по изложенной процедуре равносильно решению ЗК:

$$W_t^* = \frac{M_1 M_6}{\bigl[1 - \frac{(t+3W^*)}{\rho}\bigr]} [(t+3W^*)6W_t^* + 1], \quad W^*(0) = 0. \tag{44}$$

Если задачу (44) записать в нормальном виде:

$$W_t^* = G(t, W^*), \quad W^*(0) = 0, \tag{45}$$

где $G = \frac{M_7}{1-[(t+3W^*)/\rho + 6M_7(t+3W^*)]}$, $M_7 = M_1 M_6$, то правая часть дифференциального уравнения — функция $G(t, W^*)$ — будет аналитической в окрестности точки $(t = 0, W^* = 0)$ функцией, мажорирующей нуль.

По теореме Ковалевской задача (45) имеет единственное аналитическое, мажорирующее нуль решение. Из способа построения задачи следует, что функция $W^*(x+y+z)$ мажорирует функции $U(x,y,z)$, $V(x,y,z)$, $W(x,y,z)$ (см. (43)), а значит, задача (45) является мажорантной для задачи (4), (5) и $W^*(x+y+z) \gg u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$.

Теорема 1 доказана.

Ниже приводится теорема 2, содержащая достаточные условия аналитической разрешимости задачи (4), (5), более простые и удобные для проверки по сравнению с условиями теоремы 1.

Введем числовые последовательности $\{\Delta_n^*\}$, $\{\Delta_n\}$ по формулам

$$\Delta_0^* = \mu_1 = \gamma\gamma^*\gamma_* - \alpha_1\alpha_*\gamma^* - \alpha_2\alpha^*\gamma_*, \quad \Delta_1^* = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\gamma\gamma^*\gamma_* - \alpha_1\alpha_*\gamma^* - \alpha_2\alpha^*\gamma_*}{\gamma^*\gamma_* - \alpha_*\alpha^*},$$

$$\Delta_{n+1}^* = \gamma - \frac{\alpha}{\Delta_n^*}, \ n \in \mathbb{N}, \quad \Delta_0 = \gamma, \quad \Delta_{n+1} = \gamma - \frac{\alpha}{\Delta_n}, \ n \in \mathbb{N}_0,$$

а также обозначения

$$\Delta_+ = \frac{1}{2}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha}), \quad \Delta_- = \frac{1}{2}(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha}).$$

Через $\Delta_{\max}$ обозначим то из значений Δ_+, Δ_-, модуль которого больше, а через $\Delta_{\min}$ — модуль которого меньше. Если $\gamma^2 - 4\alpha = 0$, то $\Delta_{\max} = \Delta_{\min}$.

Теорема 2. 1. *Пусть* $\gamma^2 - 4\alpha \geq 0$,

$$1 - B_6C_4 \neq 0, \quad \Delta_0^* \neq 0, \quad \Delta_1^* \neq 0, \quad \Delta_1^* \notin \Lambda(\alpha, \gamma). \tag{46}$$

Тогда задача (4), (5) *имеет единственное формальное решение в виде рядов по степеням* x, y, z. *При этом*

1.1) *если* $\gamma > 0$, $\alpha > 0$, *то* $\Lambda(\alpha,\gamma) = \left[\frac{\alpha}{\gamma}; \frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha}\right)$;
1.2) *если* $\gamma < 0$, $\alpha > 0$, *то* $\Lambda(\alpha,\gamma) = \left(\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha}; \frac{\alpha}{\gamma}\right]$;
1.3) *если* $\gamma < 0$, $\alpha \leq 0$, *то* $\Lambda(\alpha,\gamma) = \left[\frac{\gamma\alpha}{\gamma^2-\alpha}; \frac{\alpha}{\gamma}\right]$;
1.4) *если* $\gamma > 0$, $\alpha \leq 0$, *то* $\Lambda(\alpha,\gamma) = \left[\frac{\alpha}{\gamma}; \frac{\gamma\alpha}{\gamma^2-\alpha}\right]$;
1.5) *если* $\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, *то* $\Lambda(\alpha,\gamma) = \varnothing$.
2. *Пусть* $1 - B_6C_4 \neq 0$, $\Delta_n^* \neq 0$;

$$\gamma^2 - 4\alpha > 0, \quad \Delta_1^* \neq \Delta_{\min}^*, \quad \gamma \neq 0. \tag{47}$$

Тогда задача (4), (5) *имеет единственное локально аналитическое решение в некоторой окрестности точки* $(x = 0, y = 0, z = 0)$.

Доказательство теоремы 2 проводится свед́ением к теореме 1 и здесь не приводится.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* (46), (47). *Тогда задача* (4), (5) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности точки* $(x = 0, y = 0, z = 0)$.

Замечание 4. Если $\gamma^2 - 4\alpha = 0$, то $\mu_\infty^2 = \Delta_{\max}^2 = \Delta_{\min}^2 = \gamma^2/4 = \alpha$, и достаточное условие (18) сходимости рядов (19) не выполняется.

Замечание 5. Если $\gamma^2 - 4\alpha > 0$, то система (4) имеет в точке $O(x = 0, y = 0, z = 0, u = 0, v = 0, w = 0)$ гиперболический тип.

Далее приводятся два контрпримера для ОЗК с данными на трех поверхностях для квазилинейной аналитической системы. Контрпример 1 показывает, что сформулировать для задачи А необходимые и достаточные условия существования локально аналитического решения невозможно. Контрпример 2 показывает, что при существовании у задачи А формального решения в виде рядов по степеням независимых переменных x, y, z аналитическое решение задачи может отсутствовать, так как ряды сходятся только в точке $(x = 0, y = 0, z = 0)$.

Контрпример 1. Для любых значений A_i, B_i, C_i, $i = 1, \dots, 6$, и любых аналитических в окрестности точки $(x = 0, y = 0, z = 0)$ функций $u^0(x, y, z)$, $v^0(x, y, z)$, $w^0(x, y, z)$, если функции p, q, r взять в виде

$$\begin{aligned} p &= u^0 + xu_x^0 - A_1 xu_y^0 - A_2 xu_z^0 - A_3 yv_x^0 - A_4 yv_z^0 - A_5 zw_x^0 - A_6 zw_y^0, \\ q &= v^0 + yv_y^0 - B_1 xu_y^0 - B_2 xu_z^0 - B_3 yv_x^0 - B_4 yv_z^0 - B_5 zw_x^0 - B_6 zw_y^0, \\ q &= w^0 + zw_z^0 - C_1 xu_y^0 - C_2 xu_z^0 - C_3 yv_x^0 - C_4 yv_z^0 - C_5 zw_x^0 - C_6 zw_y^0, \end{aligned}$$

то у задачи (3), (5) существует в окрестности точки $(x = 0, y = 0, z = 0)$ аналитическое решение $u = xu^0(x, y, z)$, $v = yv^0(x, y, z)$, $w = zw^0(x, y, z)$.

Обоснование контрпримера проводится прямой подстановкой функций u, v, w, p, q, r в систему (3).

Замечание 6. Контрпример 1 обобщает контрпример, построенный С. П. Баутиным для обобщенной задачи Коши с данными на двух поверхностях [8].

Контрпример 2. Задача

$$\begin{cases} u_x = u_y + u_z + u + v + w + 1, \\ v_y = v_x + v_z + u + v + w + 1, \\ w_z = w_x + w_y + u + v + w + 1, \end{cases} \tag{48}$$

$$u(0, y, z) = 0, \quad v(x, 0, z) = 0, \quad w(x, y, 0) = 0,$$

имеет единственное решение в виде формальных степенных рядов, которые сходятся только в точке $(x = 0, y = 0, z = 0)$.

Доказательство. Индукцией устанавливается, что при всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$u_{n+2,0,0} > \sum_{k=1}^{n+1} C_n^k u_{n,0,0} = (2^n - 1)u_{n,0,0} > 0,$$

что доказывает расходимость формального степенного ряда для $u(x, y, z)$ при $x \neq 0$.

Аналогично доказываются расходимость ряда для $v(x, y, z)$, если $y \neq 0$, и расходимость ряда для $w(x, y, z)$, если $z \neq 0$.

Замечание 7. В задаче (48) коэффициенты B_3, B_4, C_5, C_6 отличны от нуля (см. (3)), поэтому данная задача не подпадает под действие теорем 1, 2.

Автор признателен Сергею Петровичу Баутину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковалевская С. В.* Научные труды. К теории дифференциальных уравнений с частными производными. М.: Изд-во АН СССР, 1948.
2. *Riquier C.* Les systèmes d'équations aux dérivées partielles. Paris: Gauthier-Villars, 1910.
3. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л.: ОГИЗ, 1948.
4. *Гюнтер Н. М.* О распространении теоремы Коши на любую систему уравнений в частных производных // Мат. сб. 1925. Т. 32. С. 367–447.
5. *Соболев С. Л.* Об аналитических решениях систем уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными // Мат. сб. 1931. Т. 38, № 1–2. С. 107–147.

6. *Соболев С. Л.* К вопросу об аналитических решениях систем уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными // Тр. физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1934. Т. 5. С. 265–282.
7. *Леднев Н. А.* Новый метод решения дифференциальных уравнений с частными производными // Мат. сб. 1948. Т. 22, № 2. С. 205–266.
8. *Баутин С. П.* Задача Коши с начальными данными на разных поверхностях для квазилинейной аналитической системы // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 6. С. 804–813.
9. *Баутин С. П., Казаков А. Л.* Одна задача Коши с начальными данными на разных поверхностях для системы с особенностью // Изв. вузов. Математика. 1997. № 10. С. 13–23.
10. *Тешуков В. М.* Распад произвольного разрыва на криволинейной поверхности // Прикл. механика и техн. физика. 1980. № 2. С. 126–133.
11. *Тешуков В. М.* Построение фронта ударной волны в пространственной задаче о поршне // Динамика сплошной среды. 1978. № 33. С. 114–133.
12. *Тешуков В. М.* О регулярном отражении ударной волны от жесткой стенки // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, № 2. С. 225–234.
13. *Тешуков В. М.* Пространственное взаимодействие сильных разрывов в газе // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, № 4. С. 225–234.
14. *Баутин С. П., Казаков А. Л.* Течения газа с ударными волнами, расходящимися от оси или центра симметрии с конечной скоростью // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, № 3. С. 465–474.
15. *Казаков А. Л.* Построение кусочно аналитических течений газа, состыкованных через ударные волны, вблизи оси или центра симметрии // Прикл. механика и техн. физика. 1998. Т. 39, № 5. С. 25–38.

Статья поступила 16 декабря 2004 г., окончательный вариант — 20 апреля 2005 г.

Казаков Александр Леонидович
Уральский гос. университет путей сообщения, кафедра прикладной математики, ул. Колмогорова, 66, Екатеринбург 620034
AKazakov@math.usurt.ru, allk@basko.ru