Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2006. Том 47, № 2

УДК 517.54

О СУЩЕСТВЕННОЙ φ–ВАРИАЦИИ

Я. Эверт, С. П. Пономарёв

Аннотация: Изучаются связи между классической существенной вариацией и аппроксимативной непрерывностью. В частности, классическая существенная вариация функции, определенная на так называемых τ_D-регулярных множествах, совпадает с существенной вариацией в смысле Зимера.

Ключевые слова: φ-вариация, существенная φ-вариация, метрическое пространство, аппроксимативная непрерывность.

1. Определения и некоторые свойства существенной φ-вариации

Всюду ниже через $\mathfrak{N}$ обозначается σ-идеал подмножеств $\mathbb{R}$ нулевой лебеговой меры. Мы рассматриваем отображения $f : \mathscr{E} \to X$, где $\mathscr{E}$ — непустое подмножество $\mathbb{R}$ и X — метрическое пространство (X, d). Для $x \in X$, $r > 0$ обозначим через $B(x, r)$ открытый шар радиусом r с центром в точке x.

Для $\varnothing \neq E \subset \mathbb{R}$ пусть $\Pi(E)$ — множество всех конечных наборов вида $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ таких, что $t_i \in E$, $i = 0, \dots, m$, и $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$.

Через Φ обозначим семейство всех непрерывных неубывающих функций $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ таких, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$ (обычно в определении Φ требуется, чтобы $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$, но нам это предположение не потребуется).

Для $f : \mathscr{E} \to X$, $\varphi \in \Phi$ и $E \subset \mathscr{E}$ положим

$$V_\varphi(f, E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{m} \varphi(d(f(t_i), f(t_{i-1}))) : \pi = \{t_0, t_1, \dots, t_m\} \in \Pi(E)\right\} \qquad (1)$$

и

$$V^*_\varphi(f, E) = \inf\{V_\varphi(f, E \setminus H) : H \in \mathfrak{N}\} \qquad (2)$$

(см. [1–3]). Согласно определению $V_\varphi(f, \varnothing) = 0$. Ясно, что $V_\varphi(f, E) = V_\varphi(f|E, E)$ и $V^*_\varphi(f, E) = V^*_\varphi(f|E, E)$. Также непосредственно из определения легко вытекает, что

$$E_1 \subset E_2 \subset \mathscr{E} \Longrightarrow V_\varphi(f, E_1) \leq V_\varphi(f, E_2) \quad \text{и} \quad V^*_\varphi(f, E_1) \leq V^*_\varphi(f, E_2). \qquad (3)$$

Значения $V_\varphi(f, E)$ и $V^*_\varphi(f, E)$, конечные или нет, называют *φ-вариацией* и *существенной φ-вариацией* f на множестве E. Очевидно, в случае $E \in \mathfrak{N}$ имеем $V^*_\varphi(f, E) = 0$.

Нам потребуется следующее свойство существенной φ-вариации [4, лемма 1, свойство (5)].

Лемма 1. *Для любых $\varphi \in \Phi$ и $f : E \to X$ существует $H \in \mathfrak{N}$ такое, что*

$$V_\varphi^*(f, E) = V_\varphi(f, E \setminus H).$$

Простое доказательство основано на аппроксимации $V_\varphi^*(f, E)$ последовательностью $\{V_\varphi(f, E \setminus H_n),\ n \in \mathbb{N}\}$, $H_n \in \mathfrak{N}$. Тогда $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$ — требуемое множество. Заметим, что лемма 1 тривиальна в случае $V_\varphi^*(f, E) = \infty$.

Оказывается, что каждое отображение $f : \mathscr{E} \to X$ допускает распространение $g : \mathbb{R} \to X$, имеющее ту же φ-вариацию, что и f. А именно, имеет место

Теорема 1 [5, теорема 2]. *Пусть $\varnothing \neq \mathscr{E} \subset \mathbb{R}$ и X — полное метрическое пространство. Тогда для отображений $f : \mathscr{E} \to X$ и $\varphi \in \Phi$ существует отображение $g : \mathbb{R} \to X$ такое, что*

(a) *$g|\mathscr{E} = f$ и $V_\varphi(g, \mathbb{R}) = V_\varphi(f, \mathscr{E})$;*

(b) *для любого множества $A \supset \mathscr{E}$ имеет место равенство $V_\varphi(g, A) = V_\varphi(f, \mathscr{E})$.*

В [5] этот результат был доказан при более слабом предположении: функции $\varphi \in \Phi$ могли не быть монотонными, но у каждой из них предполагалось наличие неубывающей миноранты. Отметим, что утверждение теоремы 1 нетривиально только при $V_\varphi(f, \mathscr{E}) < \infty$.

В следующем утверждении мы покажем, что имеет место аналог теоремы 1 для существенной φ-вариации.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}$ и $X = (X, d)$ — полное метрическое пространство. Тогда для любых отображения $f : \mathscr{E} \to X$ и $\varphi \in \Phi$ существует отображение $g : \mathbb{R} \to X$ такое, что*

(a) *$g|\mathscr{E} = f$ и $V_\varphi^*(g, \mathbb{R}) = V_\varphi^*(f, \mathscr{E})$;*

(b) *для любого $A \supset \mathscr{E}$ справедливо равенство $V_\varphi^*(g, A) = V_\varphi^*(f, \mathscr{E})$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $V_\varphi^*(f, \mathscr{E}) < \infty$, так как иначе доказательство тривиально. Согласно лемме 1 найдется множество $H \in \mathfrak{N}$, для которого $V_\varphi^*(f, \mathscr{E}) = V_\varphi(f, \mathscr{E} \setminus H)$. По теореме 1 существует отображение $g : \mathbb{R} \to X$ такое, что $g|\mathscr{E} \setminus H = f|\mathscr{E} \setminus H, V_\varphi(g, \mathbb{R}) = V_\varphi(f, \mathscr{E} \setminus H)$ и $V_\varphi(g, A) = V_\varphi(f, \mathscr{E} \setminus H)$ для любого $A \supset E \setminus H$. Аналогично найдется множество $C \in \mathfrak{N}$ такое, что $V_\varphi^*(g, \mathbb{R}) = V_\varphi(g, \mathbb{R} \setminus C)$. Тогда ввиду (3) имеем

$$\begin{aligned} V_\varphi^*(g, \mathbb{R}) = V_\varphi(g, \mathbb{R} \setminus C) \geq V_\varphi(g, \mathbb{R} \setminus (H \cup C)) \geq V_\varphi(g, \mathscr{E} \setminus (H \cup C)) \\ = V_\varphi(f, \mathscr{E} \setminus (H \cup C)) \geq V_\varphi^*(f, \mathscr{E}). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$V_\varphi^*(g, \mathbb{R}) \leq V_\varphi(g, \mathbb{R} \setminus H) = V_\varphi(f, \mathscr{E} \setminus H) = V_\varphi^*(f, \mathscr{E}).$$

Утверждение (a) доказано.

Теперь возьмем множество $A \subset \mathbb{R}$, $A \supset \mathscr{E}$. По лемме 1 найдется множество $K \in \mathfrak{N}$ такое, что $V_\varphi^*(g, A) = V_\varphi(g, A \setminus K)$. Тогда в силу (3) и утверждения (a) имеем

$$\begin{aligned} V_\varphi^*(g, \mathbb{R}) \geq V_\varphi^*(g, A) = V_\varphi(g, A \setminus K) \geq V_\varphi(g, A \setminus (H \cup K)) \geq V_\varphi(g, \mathscr{E} \setminus (H \cup K)) \\ = V_\varphi(f, \mathscr{E} \setminus (H \cup K)) \geq V_\varphi^*(f, \mathscr{E}) = V_\varphi^*(g, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

что завершает доказательство п. (b). $\square$

2. Существенная вариация и аппроксимативно непрерывные отображения

Для множества $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}$ и топологии τ на $\mathbb{R}$ отображение $f : \mathscr{E} \to X = (X, d)$ называется *τ-непрерывным в точке* $t_0 \in \mathscr{E}$, если f непрерывно в t_0 относительно топологии подпространства $\mathscr{E}$, порожденной τ. Через $\mathscr{D}_\tau(f)$ будем обозначать множество всех точек, в которых f не является τ-непрерывной. В этом пункте рассмотрим две топологии на $\mathbb{R}$: стандартную топологию τ_e и топологию плотности τ_D. Отображение $f : \mathscr{E} \to X$ называют *аппроксимативно непрерывным в точке* t_0, если оно τ_D-непрерывно в t_0 [6].

Вначале докажем утверждение, относящееся к точкам разрыва отображения ограниченной φ-вариации. Этот результат является классическим по крайней мере для $X = \mathbb{R}$ и $\varphi(t) = t$. Он также хорошо известен, если X полное, а φ монотонна и непрерывна. Возможно, сейчас результаты такого типа можно отнести к фольклору, хотя, по-видимому, трудно дать исчерпывающий обзор по этой теме (см., однако, [1], где приведены некоторые новые результаты о вариациях отображений со значениями в метрическом пространстве и указана библиография).

Следующее утверждение будет полезно в дальнейшем.

Теорема 3. *Пусть дано $f : \mathscr{E} \to X = (X, d)$. Допустим, что существует $\varphi \in \Phi$ такое, что $V_\varphi(f, \mathscr{E}) < \infty$. Тогда $\mathscr{D}_{\tau_e}(f)$ не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть $\widehat{X}$ — пополнение X и $j : X \to \widehat{X}$ — изометрическое вложение. Легко проверить, что

$$V_\varphi(\hat{f}, E) = V_\varphi(f, \mathscr{E}),$$

где $\hat{f} = j \circ f$. Согласно теореме 1 существует отображение $g : \mathbb{R} \to \widehat{X}$ такое, что

$$g|\mathscr{E} = f \quad \text{и} \quad V_\varphi(g, \mathbb{R}) = V_\varphi(\hat{f}, \mathscr{E}).$$

Пространство $\widehat{X}$ полное, множество $\mathscr{D}_{\tau_e}(g)$ не более чем счетно (см, например, [1, 5]). С другой стороны, очевидно, что $\mathscr{D}_{\tau_e}(f) = \mathscr{D}_{\tau_e}(\hat{f}) \subset \mathscr{D}_{\tau_e}(g)$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Теорема 3 доказана в [5, теорема 5] при более слабых предположениях на Φ. Мы дали формулировку, приспособленную к нашему контексту.

Следствие 1. *В предположениях теоремы* 3 *множество $\mathscr{D}_\tau(f)$ не более чем счетно для любой топологии τ, более тонкой, чем τ_e. В частности, это верно для τ_D.*

Результат следствия немедленно вытекает из следующего факта: если τ_1, τ_2 — топологии на $\mathscr{E}$ и $\tau_1 \subset \tau_2$, то $\mathscr{D}_{\tau_2}(f) \subset \mathscr{D}_{\tau_1}(f)$.

Теорема 4. *Если $f : \mathscr{E} \to X = (X, d)$ аппроксимативно непрерывна, то для любого множества $M \subset \mathscr{E}$, τ_D-плотного в $\mathscr{E}$, имеет место равенство $V_\varphi(f, \mathscr{E}) = V_\varphi(f, M)$ для любого $\varphi \in \Phi$.*

Доказательство. Прежде всего заметим следующее. Фиксируем $t \in \mathscr{E}$. Так как f аппроксимативно непрерывна в t, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует окрестность $U_n \in \tau_D$ точки t такая, что $f(U_n \cap \mathscr{E}) \subset B(f(t), 1/n)$. Не уменьшая общности, можно считать, что $U_n \subset (t - 1/n, t + 1/n)$ (иначе заменим U_n на $U_n \cap (t - 1/n, t + 1/n) \in \tau_D$). Поскольку M τ_D-плотно в $\mathscr{E}$, множество $M \cap U_n$

непусто для любого n. Следовательно, существует последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in M$, $\xi_n \to t$, такая, что $f(\xi_n) \to f(t)$.

Так как функция $\varphi \in \Phi$ и метрика d непрерывны, из вышеизложенного вытекает, что каждая из сумм

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(d(f(t_i), f(t_{i-1}))),$$

где $t_i \in \mathscr{E}$, $t_{i-i} < t_i, i = 1, \dots, m$, может быть аппроксимирована суммами

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(d(f(\xi_i), f(\xi_{i-1}))),$$

где $\xi_i \in M$, $\xi_{i-1} < \xi_i$, $i = 1, \dots, m$, откуда $V_\varphi(f, \mathscr{E}) \leq V_\varphi(f, M)$. Так как противоположное неравенство очевидно, теорема 4 доказана. $\square$

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{E}$ — τ_D-открытое множество. Если $f : \mathscr{E} \to X = (X, d)$ аппроксимативно непрерывна, то $V_\varphi(f, \mathscr{E}) = V_\varphi(f, \mathscr{E} \setminus H)$ для каждого $H \in \mathfrak{N}$.*

Действительно, $\mathscr{E} \setminus H$ τ_D-плотно в $\mathscr{E}$.

Следствие 3. *Пусть $\mathscr{E}$ — τ_D-открытое множество. Если $f : \mathscr{E} \to X$ аппроксимативно непрерывна, то $V^*_\varphi(f, \mathscr{E}) = V_\varphi(f, \mathscr{E})$.*

Результат следствия вытекает из леммы 1 и следствия 2.

Займемся поиском соотношений между существенной вариацией и вариацией на множестве точек аппроксимативной непрерывности отображения. Сначала дадим некоторые определения.

Для отображения $f : E \to X$ через $A(f)$ будем обозначать множество всех точек аппроксимативной непрерывности f. Точку $t \in \mathscr{E}$ назовем τ_D-*регулярной* точкой множества $\mathscr{E}$, или, эквивалентно, $\mathscr{E}$ τ_D-регулярно в t, если $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \cap \mathscr{E} \notin \mathfrak{N}$ для любого $\varepsilon > 0$. Множество всех τ_D-регулярных точек в $\mathscr{E}$ обозначим через $\mathscr{E}_r$. Множество $\mathscr{E}$ будем называть τ_D-*регулярным*, если $\mathscr{E}_r = \mathscr{E}$. Например, каждое τ_D-открытое множество τ_D-регулярно (мы опускаем простое доказательство этого факта). Отметим, что τ_D-регулярное множество может не быть измеримым по Лебегу. Заметим, что множество $\mathscr{E}$ в теореме 3 также может не быть измеримым по Лебегу.

Теорема 5. *Пусть дано $f : \mathscr{E} \to X = (X, d)$, где $\mathscr{E}$ — τ_D-регулярное множество. Тогда для каждого $\varphi \in \Phi$ такого, что $V_\varphi(f, \mathscr{E}) < \infty$, выполнено равенство*

$$V^*_\varphi(f, \mathscr{E}) = V_\varphi(f, A(f)). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $V_\varphi(f, \mathscr{E}) < \infty$. Тогда, очевидно, $V^*_\varphi(f, \mathscr{E}) < \infty$. По лемме 1 существует $H \in \mathfrak{N}$ такое, что

$$V^*_\varphi(f, \mathscr{E}) = V_\varphi(f, \mathscr{E} \setminus H). \tag{5}$$

По теореме 3 множество $\mathscr{D}_{\tau_e}(f)$ точек разрыва f не более чем счетно, тем самым $\mathscr{D}_{\tau_e}(f) \in \mathfrak{N}$. Тогда $f|\mathscr{E} \setminus (H \cup \mathscr{D}_{\tau_e}(f))$ τ_e-непрерывно, поэтому

$$\mathscr{E} \setminus (H \cup \mathscr{D}_{\tau_e}(f)) \subset A(f) \subset \mathscr{E}.$$

Отметим, что отсюда также следует, что $A(f) \neq \varnothing$ ввиду τ_D-регулярности $\mathscr{E}$.

Итак,

$$\mathscr{E} \setminus A(f) \subset H \cup \mathscr{D}_{\tau_e}(f) \in \mathfrak{N}. \tag{6}$$

Отсюда

$$V_\varphi(f, A(f)) = V_\varphi(f, \mathscr{E} \setminus (\mathscr{E} \setminus A(f))) \geq V_\varphi^*(f, \mathscr{E}). \tag{7}$$

Для доказательства обратного неравенства фиксируем $t \in A(f)$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует τ_D-открытая окрестность U_n точки t такая, что

$$U_n \subset (t - 1/n, t + 1/n) \quad \text{и} \quad f(U_n \cap \mathscr{E}) \subset B(f(t), 1/n). \tag{8}$$

Так как $\mathscr{E}$ τ_D-регулярно, имеем $U_n \cap E \notin \mathfrak{N}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, откуда, очевидно, $U_n \cap \mathscr{E} \setminus H \neq \varnothing$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Значит, найдется последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \to t$, такая, что $\xi_n \in U_n \cap \mathscr{E} \setminus H$ для любого n. Рассуждая, как в конце доказательства теоремы 4, заключаем, что каждую из сумм

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(d(f(t_i), f(t_{i-1}))),$$

где $t_i \in A(f)$, $t_{i-i} < t_i$, $i = 1, \ldots, m$, можно аппроксимировать суммами вида

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(d(f(t_i'), f(t_{i-1}'))),$$

где $t_i' \in \mathscr{E} \setminus H$, $t_{i-i}' < t_i', i = 1, \ldots, m$. Ввиду (5) отсюда сразу следует, что

$$V_\varphi(f, A(f)) \leq V_\varphi(f, \mathscr{E} \setminus H) = V_\varphi^*(f, \mathscr{E}),$$

а это вместе с (7) влечет (4). □

Теперь можно легко получить некоторые свойства $A(f)$.

Теорема 6. *Пусть $f : \mathscr{E} \to X = (X, d)$. Предположим, что существует $\varphi \in \Phi$, для которого $V_\varphi(f, \mathscr{E}) < \infty$. Тогда*

(a) *если $\mathscr{E}$ τ_D-регулярно, то $A(f) \neq \varnothing$ и $\mathscr{E} \setminus A(f) \in \mathfrak{N}$;*
(b) *если $\mathscr{E}$ τ_D-регулярно, то $A(f)$ τ_D-регулярно;*
(c) *если $\mathscr{E}$ τ_D-регулярно, то $A(f)$ τ_e-плотно в $\mathscr{E}$;*
(d) *если $\mathscr{E}$ τ_D-открыто, то $A(f)$ τ_D-плотно в $\mathscr{E}$.*

Доказательство. Так как $V_\varphi(f, \mathscr{E}) < \infty$, утверждение (a), по существу, обосновано в процессе доказательства теоремы 5 (см. (6)).

Чтобы доказать (b), допустим противное. Тогда найдутся $t_0 \in A(f)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap A(f) \in \mathfrak{N}$. Поскольку $A(f) \subset \mathscr{E}$, отсюда ввиду (6) вытекает, что $(t_0 - \varepsilon, t_o + \varepsilon) \cap \mathscr{E} \in \mathfrak{N}$ для $t_0 \in \mathscr{E}$, поэтому $\mathscr{E}$ не τ_D-регулярно в точке t_0; противоречие.

Предположим, что (c) не верно. Тогда найдутся $t_0 \in \mathscr{E}$ и открытый интервал $I = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ такой, что $I \cap A(f) = \varnothing$. Следовательно, $\varnothing \neq I \cap (\mathscr{E} \setminus A(f)) = I \cap \mathscr{E} \in \mathfrak{N}$, что противоречит τ_D-регулярности $\mathscr{E}$ в t_0. Тем самым в предположениях п. (c) $A(f)$ τ_e-плотно в $\mathscr{E}$.

Докажем (d). Фиксируем $t_0 \in \mathscr{E}$ и τ_D-окрестность U точки t_0, $U \subset \mathscr{E}$. Мы утверждаем, что $U \cap A(f) \neq \varnothing$. Действительно, если это не так, то $U = U \setminus A(f) \subset \mathscr{E} \setminus A(f) \in \mathfrak{N}$ (см. (6)); противоречие, так как каждое τ_D-открытое множество τ_D-регулярно. Тем самым $A(f)$ τ_D-плотно в $\mathscr{E}$. □

Замечание 2. В случае $V_\varphi^*(f, \mathscr{E}) = \infty$ равенство (4) может не выполняться. Пусть, например, $\mathscr{E} \subset [0, 1]$ — не измеримое по Лебегу множество, внешняя и внутренняя меры которого соответственно равны 1 и 0. Пусть $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — характеристическая функция $\mathscr{E}$ и $\varphi(t) = t$. Легко видеть, что $A(f) = \varnothing$, поэтому $V_\varphi(f, A(f)) = 0$, тогда как $V^*_\varphi(f, \mathscr{E}) = \infty$.

Замечание 3. В теореме 5 установлена связь между понятием «классической» существенной вариацией в данной работе и существенной вариацией, использованной Зимером [7, с. 227], которая определялась, как в (1), но только в случае $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t$, где sup берется по всем таким разбиениям $a = t_0 < t_1, < \dots < t_i < \dots < t_n = b$, для которых каждая t_i является точкой аппроксимативной непрерывности f.

Покажем теперь, что существенная φ-вариация f на τ_D-открытом множестве E может быть аппроксимирована φ-вариациями на множествах, τ_D-плотных в $\mathscr{E}$ (ср. с теоремой 4).

Теорема 7. *Пусть дана $f : \mathscr{E} \to X = (X, d)$, где $\mathscr{E}$ — τ_D-открытое множество, и $\varphi \in \Phi$ таково, что $V_\varphi(f, \mathscr{E}) < \infty$. Тогда*

$$V^*_\varphi(f, \mathscr{E}) = \inf\{V_\varphi(f, M) : M\ \tau_D\text{-}\textit{плотно в}\ \mathscr{E}\}. \tag{9}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{M}_D$ семейство всех множеств $M \subset \mathscr{E}$, каждое из которых τ_D-плотно в $\mathscr{E}$. Заметим, что семейство $\mathscr{M}_D$ непусто, ибо содержит $\mathscr{E}$. Фиксируем $M \in \mathscr{M}_D$, $t \in A(f)$ и будем рассуждать, как в доказательстве теоремы 4. Принимая во внимание аппроксимативную непрерывность f в t, τ_D-плотность M в $\mathscr{E}$, непрерывность φ и d, легко выводим, что каждая из сумм

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(d(f(t_i), f(t_{i-1})))$$

с $t_i \in A(f)$, $t_{i-1} < t_i$, $i = 1, \dots, m$, может быть аппроксимирована суммами вида

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(d(f(\mu_i), f(\mu_{i-1}))),$$

где $\mu_i \in M$, $\mu_{i-i} < \mu_i$, $i = 1, \dots, m$. Следовательно, для каждого $M \in \mathscr{M}_D$ и каждого разбиения (набора) $\pi = \{t_0, \dots, t_m\}$, $t_0 < \dots < t_m$, $t_i \in A(f)$, можем записать

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(d(f(t_i), f(t_{i-1}))) \le V_\varphi(f, M).$$

Поэтому для любого $M \in \mathscr{M}_D$

$$V_\varphi(f, A(f)) \le V_\varphi(f, M),$$

откуда

$$V_\varphi(f, A(f)) \le \inf\{V_\varphi(f, M) : M \in \mathscr{M}_D\}. \tag{10}$$

Заметим теперь, что согласно п. (d) теоремы 4 $A(f) \in \mathscr{M}_D$, откуда в силу (10) получаем

$$V_\varphi(f, A(f)) = \inf\{V_\varphi(f, M) : M \in \mathscr{M}_D\},$$

а это вместе с (4) приводит к (9), что и требовалось доказать. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chistyakov V. V., Galkin O. E.* Mappings of bounded Φ-variation with arbitrary function Φ // J. Dynam. Control Systems. 1998. V. 4, N 2. P. 217–247.

2. *Cybertowicz Z., Matuszewska W.* Functions of bounded generalized variation // Ann. Soc. Math. Polonae. Ser I: Commentationes Mathematicae. 1977. V. 20. P. 29–52.

3. *Orlicz W.* On functions of finite variation depending on a parameter // Studia Math. 1953. V. 13. P. 218–232.

4. *Ewert J.* Generalized essential variation and quasicontinuity // Acta Math. Hungar. 2005. V. 108, N 1–2. P. 155–160.

5. *Пономарёв С. П.* Продолжения, сохраняющие вариацию, и обобщенная существенная вариация // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1339–1346.

6. *Lukeš J., Malý J., Zajíček L.* Fine topology methods in real analysis and potential theory. New York; Berlin; Heidelberg: Springer Verl., 1986. (Lecture Notes in Math.; V. 1189).

7. *Ziemer W. P.* Weakly differentiable functions: Sobolev spaces and functions of bounded variation. New York: Springer Verl., 1989. (Graduate Texts in Math.; V. 120).

Статья поступила 30 декабря 2004 г.

Janina Ewert (Эверт Янина),
Stanislav Ponomarev (Пономарёв Станислав Петрович)
Institute of Mathematics, Pedagogical University,
Arciszewskiego 22b, 76-200, Slupsk, Poland
`stapon@pap.edu.pl`