Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2006. Том 47, № 3

УДК 517.958

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО НЕРАВЕНСТВА

В. Г. Романов

Аннотация: В области $D = \Omega \times (-T, T)$ рассматривается дифференциальное неравенство, в левой части которого содержится линейный гиперболический оператор второго порядка с коэффициентами, зависящими только от $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а в правой — модуль градиента искомой функции. Неравенство дополняется данными Коши на боковой части границы области D, и рассматривается задача о построении оценки решения дифференциального неравенства, удовлетворяющего данным Коши. При условии, что выполнены некоторые соотношения с участием верхней оценки секционных кривизн риманова пространства, ассоциированного с дифференциальным оператором, риманова диаметра области Ω и длины интервала $(-T, T)$, искомая оценка установлена. Полученный результат обобщается на случай компактных областей, ограниченных сверху и снизу характеристическими поверхностями.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, некорректная задача Коши, устойчивость.

§ 1. Введение, основные результаты

Обозначим через L линейный дифференциальный оператор, определенный равенством

$$Lu \equiv u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{1.1}$$

в котором коэффициенты $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ являются гладкими функциями (см. ниже) и удовлетворяют условию

$$\mu_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leq \mu_{00} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad 0 < \mu_0 \leq \mu_{00} < \infty, \tag{1.2}$$

с некоторыми постоянными μ_0, μ_{00}. Пусть $D = \Omega \times (-T, T) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, где Ω — компактная область с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$. Боковую границу области D обозначим через $S = \partial\Omega \times (-T, T)$, единичный вектор внешней нормали к ней — через n.

Рассмотрим дифференциальное неравенство

$$(Lu)^2 \leq C_0\big(F^2 + u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2\big), \quad (x,t) \in D, \tag{1.3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00171) и программы Рособразования «Университеты России» (проект УР 04.01.200).

в котором $F = F(x,t)$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, а C_0 — некоторая положительная постоянная. Поставим задачу: пусть функция $u(x,t)$, удовлетворяющая неравенству (1.3), обладает на S данными Коши

$$u|_S = f(x,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = g(x,t), \tag{1.4}$$

найти оценку функции $u(x,t)$ внутри D. К аналогичной задаче приводится проблема построения в D оценки устойчивости решения задачи Коши с данными (1.4) для линейного неоднородного гиперболического уравнения, у которого главная часть совпадает с оператором L и который содержит в качестве младших членов производные функции $u(x,t)$ первого и нулевого порядков с коэффициентами, зависящими от переменных x и t и ограниченными в области D некоторой постоянной. Оценки устойчивости решения задачи Коши находят широкое применение в теории оптимального управления динамическими системами и теории обратных задач.

В случае, когда оператор L совпадает с волновым или ультрагиперболическим, сформулированная выше задача рассматривалась в работах С. П. Шишатского (см. [1, 2]). Им найдены гёльдеровские оценки устойчивости. Затем М. В. Клибановым и Ж. Малински в работе [3] были построены липшицевы оценки решения задачи (1.3), (1.4) для оператора $L = \partial^2/\partial t^2 - \Delta$ (в связи с подобными оценками см. также книгу [4] и статью [5]). Для более общих операторов L, когда коэффициенты a_{ij} не являются постоянными, оценки построены на основе метода Т. Карлемана [6] в предположении о существовании или некоторой функции $\varphi(x,t)$, псевдовыпуклой по отношению к оператору L в области D (см., например, обзорную статью [7] и библиографию в ней), или положительной функции $d(x)$, гессиан которой равномерно положителен в области Ω (см. статьи [8, 9]). Оба предположения легко оправдываются лишь для случая, когда коэффициенты $a_{ij}(x)$ достаточно близки в норме $\mathbf{C}^1(\Omega)$ к постоянным. При этом в качестве функции $d(x)$ можно взять квадрат евклидова расстояния между x и произвольной точкой x^0, лежащей вне Ω. Как найти функции $\varphi(x,t)$ или $d(x)$ в общем случае, оставалось до недавнего времени неясным.

Ниже, при построении оценки для задачи (1.3), (1.4), использована лемма, вытекающая из результатов статьи автора [10], в которой установлены некоторые достаточные условия применимости метода карлемановских оценок к оператору L и указана в явном виде функция $\varphi(x,t)$. Введем необходимые обозначения.

Пусть $G = (g_{ij}) = A^{-1}$ — матрица, обратная к симметрической матрице $A = (a_{ij})$. Определим риманову метрику g формулой $ds^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx_i dx_j$, в которой ds — элемент длины. Рассмотрим произвольную фиксированную компактную замкнутую выпуклую область $\overline{\Omega}'$, содержащую Ω внутри себя, $\Omega \subset \overline{\Omega}'$. Пусть, далее, y — произвольная фиксированная точка $\overline{\Omega}'$. Предположим, что ее можно соединить с точкой $x \in \Omega$ единственной геодезической $\Gamma(x,y)$. Обозначим через $s(x,y)$ риманову длину $\Gamma(x,y)$. Пусть

$$\rho = \inf_{y \in \overline{\Omega}'} \sup_{x \in \Omega} s(x,y). \tag{1.5}$$

Выберем точку $x^0 \in \overline{\Omega}'$ так, чтобы было выполнено равенство $\sup\limits_{x \in \Omega} s(x,x^0) = \rho$ (если таких точек более одной, возьмем любую из них). Пусть $\overline{B}_g(x^0,\rho) = \{x \in$

$\mathbb{R}^n \mid s(x,x^0) \le \rho\}$ — замкнутый риманов шар с центром в точке x^0 и радиусом ρ. Тогда $\Omega \subset \overline{B}_g(x^0,\rho)$. Для сокращения записи положим $\Sigma_0 = \overline{B}_g(x^0,\rho)$. Будем считать, что $a_{ij}(x) \in \mathbf{C}^4(\Sigma_0)$ и неравенства (1.2) выполнены в Σ_0.

Обозначим через Γ^l_{ij} связности,

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} a_{lp}\biggl(\frac{\partial g_{jp}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ip}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_p}\biggr), \quad i,j,l = 1,\dots,n,$$

и через

$$R_{kilj} = \frac{1}{2}\biggl(\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x_i \partial x_l} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_j}\biggr) + \sum_{p,q=1}^{n} g_{pq}\bigl(\Gamma^p_{kj}\Gamma^q_{il} - \Gamma^p_{kl}\Gamma^q_{ij}\bigr)$$

— компоненты тензора кривизны риманова пространства. Для точки $x \in \Omega$ рассмотрим геодезическую $\Gamma(x,x^0)$ и единичный вектор $\nu = \frac{dx}{ds}/|\frac{dx}{ds}|$ касательной к ней в точке x. Пусть η — произвольный единичный вектор, ортогональный к ν. Секционная кривизна $K(x,\nu,\eta)$ риманова пространства, отвечающая двумерной плоскости, натянутой на векторы ν и η, вычисляется по формуле

$$K(x,\nu,\eta) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{kilj}\nu_k\nu_l\eta_i\eta_j,$$

в которой ν_k, η_k, $k = 1,\dots,n$, означают компоненты векторов ν и η соответственно.

Непосредственным следствием теорем 1.1 и 3.1 работы [10] является

Лемма 1.1. *Пусть $a_{ij}(x) \in \mathbf{C}^4(\Sigma_0)$, секционные кривизны $K(x,\nu,\eta)$ не превосходят некоторого неотрицательного числа k_0 и выполнено условие*

$$m \equiv 1 - \frac{k_0}{3}\mu_{00}^2\rho^2 > 0, \tag{1.6}$$

в котором μ_{00} — постоянная из условия (1.2). Пусть, далее, $\varphi(x,t,y) = s^2(x,y) - pt^2$, $y \in \Sigma_0$ — фиксированная точка и φ_0 — некоторая положительная постоянная. Тогда в области $D_0 = D_0(y,\varphi_0,p) = \{(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid \varphi(x,t,y) \ge \varphi_0\}$ для $p \in (0,m)$, любых достаточно больших τ и $u(x,t) \in \mathbf{C}^2(D_0)$ справедливо неравенство

$$e^{2\tau\varphi}(Lu)^2 \ge \frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div} Q + R, \tag{1.7}$$

причем для P, Q и R верны оценки

$$\begin{gathered}|P| \le C_1 e^{2\tau\varphi}\tau\bigl(u_t^2 + |\nabla u|^2 + \tau^2u^2\bigr), \quad |Q| \le C_1 e^{2\tau\varphi}\tau\bigl(u_t^2 + |\nabla u|^2 + \tau^2u^2\bigr),\\ R \ge C_2 e^{2\tau\varphi}\tau\bigl(u_t^2 + |\nabla u|^2 + \tau^2u^2\bigr)\end{gathered} \tag{1.8}$$

с некоторыми положительными постоянными C_1 и C_2, зависящими от m, p, φ_0, μ_0, μ_{00} и $\mathbf{C}^4(\Sigma_0)$-нормы коэффициентов $a_{ij}(x)$.

На основе этой леммы в настоящей работе устанавливается следующая оценка решения задачи (1.3), (1.4).

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия леммы 1.1, функция $u(x,t) \in \mathbf{H}^2(D)$ удовлетворяет соотношениям (1.3), (1.4) и, кроме того,*

$$T > \rho/\sqrt{m}. \tag{1.9}$$

Тогда найдется положительная постоянная C, зависящая только от μ_0, μ_{00}, C_0, m, ρ, T и $\mathbf{C}^4(\Sigma_0)$-нормы коэффициентов $a_{ij}(x)$, такая, что справедлива оценка

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(D)} \le C\big(\|F\|^2_{\mathbf{L}^2(D)} + \|f\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|g\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big). \tag{1.10}$$

Доказательство этой теоремы дано в § 2.

Заметим, что при $k_0 = 0$, т. е. для риманова пространства неположительной кривизны, имеет место равенство $m = 1$. При этом оценка $T > \rho$ временно́го интервала оптимальна, так как для $T < \rho$ неравенство (1.10) заведомо неверно.

Прямым следствием теоремы 1.1 и метода энергетических неравенств является

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1. *Тогда найдется положительная постоянная C, зависящая только от μ_0, μ_{00}, C_0, m, ρ, T и $\mathbf{C}^4(\Sigma_0)$-нормы коэффициентов $a_{ij}(x)$, такая, что справедлива оценка*

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega\times\{t\})} + \|u_t\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega\times\{t\})} \le C\big(\|F\|^2_{\mathbf{L}^2(D)} + \|f\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|g\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big) \tag{1.11}$$

для любого $t \in (-T, T)$.

При исследовании многих интересных прикладных обратных задач для гиперболических уравнений оказываются необходимыми оценки решения задачи (1.3), (1.4) в областях, ограниченных характеристическими поверхностями (см., например, [11, гл. 4, 5]). В связи с этим рассмотрим область $G = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ z_1(x) < t < z_2(x)\}$, ограниченную снизу и сверху $\mathbf{C}^1$-гладкими характеристическими поверхностями $t = z_1(x)$ и $t = z_2(x)$. Последнее означает, что $z_1(x)$, $z_2(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(z_1)_{x_i}(z_1)_{x_j} = 1, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(z_2)_{x_i}(z_2)_{x_j} = 1. \tag{1.12}$$

Обозначим через $S' = \{(x,t) \mid x \in \partial\Omega,\ z_1(x) < t < z_2(x)\}$ боковую границу области G и через $\Sigma_1 = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ t = z_1(x)\}$, $\Sigma_2 = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ t = z_2(x)\}$ — ее нижнее и верхнее основания. Будем считать, что $\Omega \subset \overline{B}_g(x^0, \rho) = \Sigma_0$. Пусть в области G выполнено дифференциальное неравенство, аналогичное неравенству (1.3):

$$(Lu)^2 \le C_0\big(F^2 + u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2\big), \quad (x,t) \in G, \tag{1.13}$$

и на S' заданы данные Коши

$$u|_{S'} = f(x,t), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S'} = g(x,t). \tag{1.14}$$

В этом случае оказывается верна следующая оценка, обобщающая результат, полученный автором для волнового уравнения с переменной скоростью звука в статье [12].

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия леммы* 1.1, *функция $u(x,t)$ принадлежит $\mathbf{H}^2(G)$ и удовлетворяет соотношениям* (1.13), (1.14). *Пусть, кроме того, для некоторого*

$$T > \rho/\sqrt{m} \tag{1.15}$$

область $D = \Omega \times (-T, T)$ содержится внутри G. Тогда найдется положительная постоянная C, зависящая только от μ_0, μ_{00}, C_0, m, ρ, T и $\mathbf{C}^4(\Sigma_0)$-нормы коэффициентов $a_{ij}(x)$, такая, что имеет место оценка

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(\Sigma_1\cup\Sigma_2)} + \|u\|^2_{\mathbf{H}^1(G)} \le C\big(\|F\|^2_{\mathbf{L}^2(G)} + \|f\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} + \|g\|^2_{\mathbf{L}^2(S')}\big). \tag{1.16}$$

Доказательство теоремы приведено в § 3.

Из теоремы 1.3 очевидным образом следует теорема, связанная с единственностью продолжения решения дифференциального уравнения (с оператором L в главной части) с границы S' области G внутрь ее.

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия леммы* 1.1, *область* $D = \Omega \times (-T, T)$, $T = \rho/\sqrt{m}$, *содержится внутри* G, *а функция* $u(x,t) \in \mathbf{H}^2(G)$ *удовлетворяет соотношениям* (1.13), (1.14) *при* $F = f = g = 0$. *Тогда* $u(x,t) = 0$ *в области* G.

Заметим, что при $m = 1$ гарантируемая теоремой 1.4 область единственности продолжения с S' является максимально достижимой.

§ 2. Доказательство теоремы 1.1

Пусть выполнены условия (1.6) и (1.9). Выберем число $p \in (0, m)$ так, чтобы выполнялись неравенства $\rho < \sqrt{p}T < \sqrt{m}T$. Рассмотрим произвольную прямую, проходящую через точки x^0, и на ней две точки $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$, расположенные по разные стороны от x^0 и отстоящие от x^0 на расстояние $\varepsilon = |y^{(j)} - x^0|$, $j = 1, 2$. Пусть $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $\sup\limits_{x\in\Omega} s(x, y^{(j)}) < \sqrt{p}T$, $j = 1, 2$. Подобный выбор возможен, так как при выполнении условия теоремы 1.1 о гладкости коэффициентов $a_{ij}(x)$ функция $s^2(x, y)$ является функцией класса $\mathbf{C}^4(\Sigma_0 \times \Sigma_0)$. Пусть, далее, число $\sigma > 0$ мало настолько, что римановы шары $B_g(y^{(j)}, 2\sqrt{\sigma})$, $j = 1, 2$, содержатся внутри соответствующих евклидовых шаров $B(y^{(j)}, \varepsilon)$ с центром в $y^{(j)}$ и радиусом ε.

Зафиксируем теперь j и рассмотрим области $D_k(y^{(j)}) = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ s^2(x, y^{(j)}) - pt^2 \geq k\sigma\}$, $k = 1, 2, 3, 4$. По выбору $y^{(j)}$ и σ очевидно, что все эти области содержатся внутри области D и, кроме того, они вложены одна в другую, а именно область с большим индексом k вложена в область с меньшим индексом. Введем в рассмотрение функцию $\chi(x,t) \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^{n+1})$ такую, что $0 \leq \chi(x,t) \leq 1$, $\chi(x,t) = 0$ в $D \setminus D_1(y^{(j)})$ и $\chi(x,t) = 1$ в $D_2(y^{(j)})$. Таким образом, в области D эта функция отлична от тождественного нуля или единицы только в узком слое $D_{12} = D_1(y^{(j)}) \setminus D_2(y^{(j)})$. Для любой дважды дифференцируемой функции $u(x,t)$ имеет место равенство

$$L(u\chi) = \chi Lu + 2u_t\chi_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \chi_{x_j} + uL\chi. \tag{2.1}$$

Полагая, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет неравенству (1.3), находим, что для функции $v(x,t) \equiv u(x,t)\chi(x,t)$ справедливо соотношение

$$(Lv)^2 \leq C\big[F^2 + v_t^2 + |\nabla v|^2 + v^2 + \big(u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2\big)\chi(D_{12})\big], \quad (x,t) \in D_1(y^{(j)}), \tag{2.2}$$

с некоторой постоянной C, зависящей от $\mathbf{C}^2(D)$-нормы функции χ. В неравенстве (2.2) $\chi(D_{12})$ — характеристическая функция области $D_{12} \equiv D_1(y^{(j)}) \setminus D_2(y^{(j)})$, т. е.

$$\chi(D_{12}) = \begin{cases} 1, & (x,t) \in D_{12}, \\ 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus D_{12}. \end{cases}$$

Применяя лемму 1.1 к функции $v(x,t)$, заключаем, что в области $D_1(y^{(j)})$ для любых достаточно больших τ справедливо неравенство

$$e^{2\tau\varphi}(Lv)^2 \geq \frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div} Q + R, \tag{2.3}$$

в котором $\varphi = s^2(x, y^{(j)}) - pt^2$, а для P, Q и R верны оценки

$$|P| \le C_1 e^{2\tau\varphi}\tau\bigl(v_t^2 + |\nabla v|^2 + \tau^2 v^2\bigr), \quad |Q| \le C_1 e^{2\tau\varphi}\tau\bigl(v_t^2 + |\nabla v|^2 + \tau^2 v^2\bigr),$$
$$R \ge C_2 e^{2\tau\varphi}\tau\bigl(v_t^2 + |\nabla v|^2 + \tau^2 v^2\bigr) \tag{2.4}$$

с некоторыми положительными постоянными C_1 и C_2, зависящими от m, p, φ_0, μ_0, μ_{00} и $\mathbf{C}^4(\Sigma_0)$-нормы коэффициентов $a_{ij}(x)$.

Объединяя оценки (2.2), (2.4), приходим к неравенству

$$Ce^{2\tau\varphi}\bigl[F^2 + \bigl(u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2\bigr)\chi(D_{12})\bigr] \ge \frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div} Q + R_1, \quad (x,t) \in D_1(y^{(j)}), \tag{2.5}$$

в котором выражение для R_1 определяется формулой

$$R_1 = R - Ce^{2\tau\varphi}\bigl(v_t^2 + |\nabla v|^2 + v^2\bigr)$$

и поэтому для всех достаточно больших τ допускает оценку

$$R_1 \ge C_2' e^{2\tau\varphi}\tau\bigl(v_t^2 + |\nabla v|^2 + \tau^2 v^2\bigr) \tag{2.6}$$

с положительной постоянной C_2'.

Интегрируя неравенство (2.5) по области $D_1(y^{(j)})$, применяя формулу Гаусса — Остроградского и используя тот факт, что функция $v(x,t)$ обращается в нуль вместе с частными производными на части границы этой области, ограниченной поверхностью уровня $\varphi = \sigma$, приходим к неравенству

$$\tau \int\limits_{D_1(y^{(j)})} e^{2\tau\varphi}\bigl(v_t^2 + |\nabla v|^2 + \tau^2 v^2\bigr)\,dxdt \le C\Biggl(\tau \int\limits_{S(y^{(j)})} e^{2\tau\varphi}\bigl(v_t^2 + |\nabla v|^2 + \tau^2 v^2\bigr)\,dSdt$$
$$+ \int\limits_{D_1(y^{(j)})} e^{2\tau\varphi}\bigl[F^2(x,t) + \bigl(u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2\bigr)\chi(D_{12})\bigr]\,dxdt\Biggr), \tag{2.7}$$

справедливому при всех достаточно больших τ, пусть, для определенности, при $\tau \ge \tau_0 \ge 1$. В неравенстве (2.7) $S(y^{(j)}) = \{(x,t) \mid x \in \partial\Omega,\ s^2(x, y^{(j)}) - pt^2 \ge \sigma\}$ — общая часть боковой поверхности S и границы области $D_1(y^{(j)})$, dS — элемент площади $\partial\Omega$.

Оценим отдельно интегралы, входящие в это неравенство. По условиям выбора точки $y^{(j)}$ и функции $v(x,t)$ справедливы оценки вида

$$\int\limits_{S(y^{(j)})} e^{2\tau\varphi}\bigl(v_t^2 + |\nabla v|^2 + \tau^2 v^2\bigr)\,dS \le Ce^{2\tau m T^2} \int\limits_S \bigl(u_t^2 + |\nabla u|^2 + \tau^2 u^2\bigr)\,dSdt,$$
$$\int\limits_{D(y^{(j)})} e^{2\tau\varphi} F^2(x,t)\,dxdt \le e^{2\tau m T^2} \int\limits_D F^2(x,t)\,dxdt \tag{2.8}$$

для $\tau \ge \tau_0$ с некоторой постоянной $C > 0$. В то же время в области D_{12} справедлива оценка $\varphi \le 2\sigma$. Поэтому

$$\int\limits_{D_1(y^{(j)})} e^{2\tau\varphi}\bigl(u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2\bigr)\chi(D_{12})\,dxdt \le e^{4\tau\sigma} \int\limits_D \bigl(u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2\bigr)\,dxdt. \tag{2.9}$$

В левой части неравенства (2.7) будем интегрировать по более узкой области $D_3(y^{(j)})$. В этой области справедлива оценка $\varphi \geq 3\sigma$ и функция $v(x,t)$ совпадает с $u(x,t)$, поэтому верно неравенство

$$\int\limits_{D_1(y^{(j)})} e^{2\tau\varphi}\big(v_t^2+|\nabla v|^2+\tau^2 v^2\big)\,dxdt \geq e^{6\tau\sigma} \int\limits_{D_3(y^{(j)})} \big(u_t^2+|\nabla u|^2+\tau^2 u^2\big)\,dxdt. \quad (2.10)$$

Рассмотрим множество точек (x,t), принадлежащих поверхности уровня $\varphi = 3\sigma$. Если при этом x лежит вне риманова шара $B_g(y^{(j)}, 2\sqrt{\sigma})$, то для t справедлива оценка $|t| \geq \sqrt{\sigma/p} \equiv h$. Так как $B_g(y^{(j)}, 2\sqrt{\sigma}) \subset B(y^{(j)}, \varepsilon))$, то область $D_3(y^{(j)})$ содержит в себе подобласть $D_h(y^{(j)}) = \{(x,t) \mid (\Omega \setminus B(y^{(j)}, \varepsilon)) \times (-h,h)\}$. Тогда из неравенства (2.10) следует, что

$$\int\limits_{D_1(y^{(j)})} e^{2\tau\varphi}\big(v_t^2+|\nabla v|^2+\tau^2 v^2\big)\,dxdt \geq e^{6\tau\sigma} \int\limits_{D_h(y^{(j)})} \big(u_t^2+|\nabla u|^2+\tau^2 u^2\big)\,dxdt. \quad (2.11)$$

Результатом полученных выше оценок является итоговое неравенство

$$\tau e^{6\tau\sigma} \int\limits_{D_h(y^{(j)})} \big(u_t^2+|\nabla u|^2+\tau^2 u^2\big)\,dxdt \leq C\bigg(e^{4\tau\sigma}\int\limits_{D}\big(u_t^2+|\nabla u|^2+u^2\big)\,dxdt$$
$$+ e^{2\tau m T^2}\int\limits_{D} F^2\,dxdt + \tau e^{2\tau m T^2}\int\limits_{S}\big(u_t^2+|\nabla u|^2+\tau^2 u^2\big)\,dSdt\bigg). \quad (2.12)$$

Обозначим

$$\delta^2 = \|F\|^2_{\mathbf{L}^2(D)} + \|f\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|g\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}. \quad (2.13)$$

Тогда неравенство (2.12) после деления на выражение $\tau e^{6\tau\sigma}$ и некоторого огрубления оценок можно переписать для $\tau \geq \tau_0 \geq 1$ в виде

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(D_h(y^{(j)}))} \leq C\big(e^{-2\tau\sigma}\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(D)} + \tau^2 e^{2\tau m T^2}\delta^2\big), \quad j=1,2. \quad (2.14)$$

Замечая, что $D_h(y^{(1)}) \cup D_h(y^{(2)}) = \Omega \times (-h,h) \equiv D_h$, приходим к неравенству

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(D_h)} \leq C\big(e^{-2\tau\sigma}\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(D)} + \tau^2 e^{2\tau m T^2}\delta^2\big), \quad \tau \geq \tau_0 \geq 1. \quad (2.15)$$

Дальнейшие оценки связаны с использованием энергетических неравенств. С учетом (1.3) имеем

$$2u_t Lu \leq u_t^2 + (Lu)^2 \leq (C_0+1)\big(F^2+u_t^2+|\nabla u|^2+u^2\big). \quad (2.16)$$

С другой стороны,

$$2u_t Lu = \frac{\partial}{\partial t}\Bigg[\Bigg(u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}u_{x_i}\Bigg)\Bigg] - 2\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}u_t u_{x_i}). \quad (2.17)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Bigg[\Bigg(u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}u_{x_i}\Bigg)\Bigg] - 2\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}u_t u_{x_i}) \leq (C_0+1)\big(F^2+u_t^2+|\nabla u|^2+u^2\big). \quad (2.18)$$

Интегрируя это неравенство по слою $\{\Omega\times(t_0,t)\}$, $-T<t_0<t<T$, приходим к неравенству

$$J(t)\le J(t_0)+C\Biggl(\int\limits_{\Omega\times(t_0,t)}\bigl(F^2+u_t^2+|\nabla u|^2+u^2\bigr)(x,t')\,dxdt' \\ +\int\limits_{\partial\Omega\times(t_0,t)}\bigl(u_t^2(x,t')+|\nabla u(x,t')|^2\bigr)\,dSdt'\Biggr),\qquad(2.19)$$

в котором

$$J(t)=\int\limits_{\Omega\times\{t\}}\Biggl(u_t^2+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}u_{x_i}\Biggr)dx.\qquad(2.20)$$

Используя (1.2) и очевидное неравенство

$$\int\limits_{\Omega\times\{t\}}u^2\,dx\le\int\limits_{\Omega\times\{t_0\}}u^2\,dx+\int\limits_{\Omega\times(t_0,t)}\bigl(u_t^2+u^2\bigr)(x,t')\,dxdt',$$

находим, что

$$I(t)=\int\limits_{\Omega\times\{t\}}\bigl(u_t^2+|\nabla u|^2+u^2\bigr)\,dx\le C\Biggl(J(t)+I(t_0)+\int\limits_{\partial\Omega\times(t_0,t)}\bigl[u_t^2(x,t')+u^2(x,t')\bigr]\,dSdt'\Biggr).$$

Поэтому неравенство (2.19) можно переписать в виде

$$I(t)\le C\Biggl(I(t_0)+\delta^2+\int\limits_{t_0}^{t}I(t')\,dt'\Biggr).\qquad(2.21)$$

Здесь число δ определено формулой (2.13). Из неравенства (2.21) вытекает оценка

$$I(t)\le C(I(t_0)+\delta^2)e^{2CT},\qquad(2.22)$$

которая верна также и для случая, когда $t<t_0$.

Интегрируя неравенство (2.22) по параметру t_0 в пределах от $-h$ до h и деля результат на $2h$, получаем вначале неравенство

$$I(t)\le C\bigl(\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(D_h)}+\delta^2\bigr),\quad t\in(-T,T),\qquad(2.23)$$

из которого затем интегрированием по t находим оценку

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(D)}\le C\bigl(\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(D_h)}+\delta^2\bigr).\qquad(2.24)$$

Воспользуемся теперь неравенством (2.15). Сравнивая его с полученным неравенством (2.24), заключаем, что справедливо соотношение

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(D_h)}\le C\bigl(e^{-2\tau\sigma}\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(D_h)}+\tau^2e^{2\tau mT^2}\delta^2\bigr),\quad \tau\ge\tau_0\ge1,\qquad(2.25)$$

с некоторой новой постоянной $C>0$. Выберем параметр τ так, чтобы было выполнено неравенство $1>Ce^{-2\tau\sigma}$, и затем зафиксируем его. Тогда из (2.25) получаем, что

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(D_h)}\le C\delta^2,\qquad(2.26)$$

а из неравенства (2.24) вытекает оценка (1.10) для $u(x,t)\in\mathbf{C}^2(D)$. Отсюда с помощью обычной процедуры замыкания следует ее справедливость и для $u(x,t)\in\mathbf{H}^2(D)$.

Заметим также, что из неравенств (2.23), (2.26) выводится оценка (1.11) теоремы 1.2.

§ 3. Доказательство теоремы 1.3

Обозначим $\inf\limits_{x\in\Omega} z_1(x) = t_1$, $\sup\limits_{x\in\Omega} z_2(x) = t_2$. Для $t \in (t_1, t_2)$ обозначим через $\Sigma(t)$ сечение области G плоскостью $t = \text{const}$ и через $J(t)$, $I(t)$ — функции

$$J(t) = \int\limits_{\Sigma(t)} \left(u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j} u_{x_i} \right) dx, \quad I(t) = \int\limits_{\Sigma(t)} \left(u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2 \right) dx.$$

Из (1.2) следует, что справедлива оценка

$$J(t) \le C_1 I(t), \quad t \in (t_1, t_2), \tag{3.1}$$

при $C_1 = \max(1, \mu_{00})$. По условию теоремы $[-T, T] \subset (t_1, t_2)$ и для $t \in [-T, T]$ сечение $\Sigma(t)$ совпадает с $\Omega \times \{t\}$, поэтому функции $J(t)$, $I(t)$ для $t \in [-T, T]$ имеют тот же самый смысл, что и в предыдущем параграфе. Следовательно, для них верны оценки

$$J(t) \le C\delta^2, \quad I(t) \le C\delta^2, \quad t \in [-T, T]. \tag{3.2}$$

Получим оценку $J(t)$ для всего интервала (t_1, t_2). Пусть вначале $t \in (T, t_2)$. Рассмотрим часть $G(t)$ области G, заключенную между плоскостями $t = \text{const} > T$ и $t = T$. Граница этой области состоит из множеств $\Sigma(t)$, $\Sigma(T)$, части $S'(t)$ боковой границы S' и части $S_2(t)$ характеристической поверхности $t = z_2(x)$, заключенных в этом слое. Воспользуемся неравенством (2.18). Интегрируя его по слою $G(t)$, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} J(t) + \int\limits_{S_2(t)} \left(u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + 2u_t \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} (z_2)_{x_j} \right)(x, z_2(x))\, dx \\ \le J(T) + C \int\limits_{G(t)} \left(F^2 + u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2 \right)(x, t')\, dx dt' + C \int\limits_{S'(t)} \left(u_t^2 + |\nabla u|^2 \right)(x, t')\, dS dt'. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Обозначим $\bar u(x) = u(x, z_2(x))$. Тогда на $S_2(t)$ верно соотношение $u_{x_i} = \bar u_{x_i} - u_t (z_2)_{x_i}$. Используя это соотношение и условие (1.12), находим, что

$$u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + 2u_t \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} (z_2)_{x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \bar u_{x_i} \bar u_{x_j}, \quad (x, t) \in S_2(t).$$

В этой связи левая часть неравенства (3.3) может быть представлена в форме

$$J(t) + \int\limits_{S_2(t)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \bar u_{x_i} \bar u_{x_j}\, dx \equiv J_0(t),$$

а все неравенство переписано в виде

$$J_0(t) \le J(T) + C \left(\delta^2 + \int\limits_{T}^{t} J_0(t') dt' \right), \quad t \in (T, t_2). \tag{3.4}$$

Отсюда находим, что

$$J_0(t) \le (J(T) + C\delta^2) e^{C(t_2 - T)} \le C'\delta^2, \quad t \in (T, t_2), \tag{3.5}$$

с некоторой постоянной $C' > 0$. Из (1.2) и теорем вложения следует, что аналогичная оценка верна для

$$I_0(t) = I(t) + \int\limits_{S_2(t)} (|\nabla \bar{u}|^2 + |\bar{u}|^2)\, dx,$$

а именно

$$I_0(t) \leq C\delta^2, \quad t \in (T, t_2). \tag{3.6}$$

Интегрируя это неравенство по интервалу (T, t_2), получаем неравенство

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(G_2)} + \|u\|^2_{\mathbf{H}^1(\Sigma_2)} \leq C\delta^2, \tag{3.7}$$

в котором $G_2 = G(t_2)$ — часть области G, расположенная выше плоскости $t = T$, а $\Sigma_2 = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ t = z_2(x)\}$ — ограничивающее ее верхнее основание.

Аналогичным образом находится оценка функции $u(x,t)$ в области G_1 — части области G, расположенной ниже плоскости $t = -T$. Она имеет вид

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(G_1)} + \|u\|^2_{\mathbf{H}^1(\Sigma_1)} \leq C\delta^2. \tag{3.8}$$

Здесь $\Sigma_1 = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ t = z_1(x)\}$ — нижнее основание области G.

В завершение доказательства заметим, что в области D имеет место оценка (1.10). Так как $G = G_1 \cup D \cup G_2$, из полученных выше оценок следует окончательная оценка функции $u(x,t)$ в области $\overline{G}$ в виде (1.16).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шишатский С. П.* Априорные оценки в задаче о продолжении волнового поля с цилиндрической времениподобной поверхности // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213, № 1. С. 49–50.
2. *Лаврентьев М. М, Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики. М.: Наука, 1980.
3. *Klibanov M. V., Malinsky J.* Newton — Kantorovich method for three-dimensional potential inverse scattering problem and stability of the hyperbolic Cauchy problem with time-dependent data // Inverse problems. 1991. V. 7. P. 577–596.
4. *Klibanov M. V., Timonov A.* Carleman estimates for coefficient inverse problems and numeri cal applications. Utrecht, The Netherlands: VSP, 2004.
5. *Imanuvilov O.Yu., Yamamoto M.* Global Lipschitz stability in an inverse problem by interior observations // Inverse problems. 2001. V. 17. P. 717–728.
6. *Carleman T.* Sur un problème d'unicité pourles systèmes d'équetions aux dérivées partielles à deux variables indépendentes // Ark. Mat. Astr. Fys. 26B. 1939. V. 17. P. 1–9.
7. *Isakov V.* Carleman estimates and applications to inverse problems // Milan J. Math. 2004. V. 72. P. 249–271.
8. *Lasiecka I., Triggiani R., Yao P. F.* Inverse/observability estimates for second order hyperbolic equations with variable coefficients // J. Math. Anal. Appl. 1999. V. 235. P. 13–57.
9. *Triggiani R., Yao P. F.* Carleman estimates with no lower-order terms for general Riemann wave equations. Global uniqueness and observability in one shot // Appl. Math. Optim. 2002. V. 46, N 2/3. P. 334–375.
10. *Романов В. Г.* Карлемановские оценки для гиперболического уравнения второго порядка // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 169–187.
11. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.
12. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости решения волнового уравнения с данными Коши на времениподобной цилиндрической поверхности // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 5. С. 1152–1162.

Статья поступила 14 сентября 2005 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru