Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2006. Том 47, № 3

УДК УДК 512.540+510.5

О Σ–ПОДМНОЖЕСТВАХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ НАД АБЕЛЕВЫМИ ГРУППАМИ

А. Н. Хисамиев

Аннотация: Получены условия Σ-определимости подмножества натуральных чисел в наследственно конечном допустимом множестве над моделью. Приведены условия вычислимости семейства подмножеств натуральных чисел в наследственно конечном допустимом множестве. Доказаны утверждения: для любого e-идеала I существует абелева группа без кручения A такая, что семейство e-степеней Σ-подмножеств ω в $\mathbb{HF}(A)$ совпадает с I; существует вполне разложимая абелева группа без кручения, в наследственно конечном допустимом множестве над которой не существует универсальной Σ-функции; для любого главного e-идеала I существует периодическая абелева группа A такая, что семейство e-степеней Σ-подмножеств ω в $\mathbb{HF}(A)$ совпадает с I.

Ключевые слова: допустимое множество, e-сводимость, вычислимость, Σ-определимость, абелева группа.

Проблемы Σ-определимости подмножеств множества конечных ординалов в допустимых множествах исследовались в работах [1–5]. В [2, 3, 5] изучались взаимосвязи T-сводимости и Σ-определимости, в [1, 4] — соотношения между e-сводимостью и семейством Σ-подмножеств ω в допустимых множествах. В [1] приведены примеры моделей, в наследственно конечных надстройках над которыми семейство Σ-определимых подмножеств ω совпадает с $I^* = \{S \subseteq \omega \mid d_e(S) \in I\}$, где I — произвольный e-идеал. Данная статья навеяна этой работой.

Все необходимые сведения о допустимых множествах можно найти в [6] или [7]. Основные сведения по классической теории вычислимости и теории групп можно узнать, например, из [8] и [9] соответственно. В данной работе мы рассматриваем наследственно конечные допустимые множества над моделями конечных сигнатур.

Используются стандартные обозначения. Напомним некоторые из них. Через W_n обозначается n-е вычислимо перечислимое множество, через D_n — n-е конечное множество, т. е. $D_n = \{a_1, \dots, a_k\}$, если $n = \sum\limits_{i=1}^{k} 2^{a_i}$. Сводимость по перечислению (сокращенно e-сводимость) определяется следующим образом:

$$A \leq_e B \Leftrightarrow \exists n \forall t\ (t \in A \Leftrightarrow \exists m\ (\langle t, m\rangle \in W_n \& D_m \subseteq B)).$$

Определим операторы перечисления Φ_n как

$$\Phi_n(S) = \{x \mid \exists m(\langle x, m\rangle \in W_n \& D_m \subseteq S)\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МК1807.2005.1), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00819), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–4413.2006.1) и программы «Университеты России» (код проекта УР.04.01.019).

Получим другое определение e-сводимости:

$$A \leq_e B \Leftrightarrow \exists n\ (\Phi_n(B) = A).$$

В этом случае будем говорить, что множество W_n *задает оператор* Φ_n.

Последовательность $\{\Theta_n\}_{n\in\omega}$ операторов перечисления назовем *вычислимой*, если существует вычислимая последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ вычислимо перечислимых множеств, задающих операторы Θ_n.

Произвольное непустое семейство e-степеней множеств натуральных чисел называется *e-идеалом* I, если выполнены следующие условия:

1) $a \leq_e b$ и $b \in I \Rightarrow a \in I$;

2) $a, b \in I \Rightarrow a \sqcup b \in I$.

В дальнейшем через $(M^n)_{\neq}$ обозначим множество всех последовательностей попарно различных элементов из M длины n, т. е. $(M^n)_{\neq} = \{\bar{a} \in M^n \mid a_i \neq a_j,\ i < j\}$.

Будем считать, что если сигнатуры моделей $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$ различны, то $\mathfrak{M}_0$ не вложима в $\mathfrak{M}_1$.

§ 1. Условие Σ-определимости подмножеств натуральных чисел

Пусть даны модель $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры σ и некоторое подмножество $M_0 \subseteq M$. Предположим, что справедливы следующие условия.

1. Для любой конечной последовательности попарно различных элементов $\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle \in \left(M_0^{<\omega}\right)_{\neq}$ определено Σ-подмножество $S_{\bar{a}} \subseteq \omega$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Если $n = 0$, то $S_{\bar{a}} \rightleftharpoons S_{\varnothing}$.

2. Для любого числа $n \in \omega$ определен вычислимый класс конструктивных моделей $K_n = \{\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b}\rangle \mid r \in \omega\}$, $\bar{b} = \langle b_0, \dots, b_{n-1}\rangle$, $\bar{b} \in \left(M_r^n\right)_{\neq}$, и для каждого числа $r \in \omega$ эффективно определено конечное множество $S_r^n \subseteq \omega$ такое, что модель $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b}\rangle$ изоморфно вложима в $\langle \mathfrak{M}, \bar{a}\rangle$ тогда и только тогда, когда $S_r^n \subseteq S_{\bar{a}}$, $\bar{a} \in \left(M_0^n\right)_{\neq}$.

3. Для любой конечно-порожденной подмодели $\langle \mathfrak{M}', \bar{a}\rangle \subseteq \langle \mathfrak{M}, \bar{a}\rangle$, $\bar{a} \in \left(M_0^n\right)_{\neq}$ существует такое число r, что $S_r^n \subseteq S_{\bar{a}}$ и модель $\langle \mathfrak{M}', \bar{a}\rangle$ изоморфно вложима в $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b}\rangle$.

Тогда справедливо

Предложение 1. *Пусть даны Σ-формула $\varphi(x, y_0, \dots, y_{n-1})$ сигнатуры $\sigma' = \{\sigma, \in, \varnothing\}$ без параметров и последовательность элементов $\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle \in \left(M_0^n\right)_{\neq}$. Если множество $A \subseteq \omega$ определимо формулой $\varphi(x, \bar{a})$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, то $A \leq_e S_{\bar{a}}$, и, обратно, если $A \leq_e S_{\bar{a}}$, то множество A Σ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.*

Доказательство. Вторая часть предложения доказана в [1]. Докажем первую часть. Пусть $A = \varphi^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}[x, \bar{a}] \subseteq \omega$ и

$$W_s = \{\langle m, r\rangle \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_r^n, \bar{b}) \models \varphi(m, \bar{b})\}. \tag{1}$$

По условию 2 множество W_s вычислимо перечислимо.

Покажем справедливость равенства

$$A = \left\{m \mid \exists r \left(\langle m, r\rangle \in W_s\ \&\ S_r^n \subseteq S_{\bar{a}}\right)\right\}. \tag{2}$$

Обозначим правую часть этого равенства через B.

Пусть $m \in A$. Тогда
$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \varphi(m, \bar{a}). \tag{3}$$
Существует конечно-порожденная подмодель $\langle \mathfrak{M}', \bar{a} \rangle \subseteq \langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle$ такая, что
$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}', \bar{a}) \models \varphi(m, \bar{a}). \tag{4}$$
По условию 3 существует такое число r, что $S_r^n \subseteq S_{\bar{a}}$ и модель $\langle \mathfrak{M}', \bar{a} \rangle$ изоморфно вложима в $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b} \rangle$. Отсюда и из (4) получаем, что
$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_r^n, \bar{b}) \models \varphi(m, \bar{b}). \tag{5}$$
Следовательно, $\langle m, r \rangle \in W_s$ & $S_n^r \subseteq S_{\bar{a}}$, т. е. $m \in B$.

Пусть теперь $m \in B$. Тогда из (1) следует (5). По условию 2 модель $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b} \rangle$ изоморфно вложима в $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle$. Значит, имеем (3). Отсюда $m \in A$. Таким образом, равенство (2) доказано.

Пусть вычислимая функция f такова, что $S_r^n = D_{f(r)}$, и
$$W_s' = \{\langle m, f(r) \rangle \mid \langle m, r \rangle \in W_s\}. \tag{6}$$

Ясно, что W_s' вычислимо перечислимо. Из (2) и (6) имеем
$$A = \{m \mid \exists t\ (\langle m, t \rangle \in W_s' \ \&\ D_t \subseteq S_{\bar{a}})\},$$
т. е. $A \leqslant_e S_{\bar{a}}$. $\square$

Замечание 1. Пусть для последовательности $\bar{a} \in \left(M_0^n\right)_{\neq}$ множество $S_{\bar{a}}$ определимо Σ-формулой с параметрами $\bar{a}$. Тогда множество $A \subseteq \omega$ Σ-определимо некоторой формулой $\varphi(x, \bar{a})$, если и только если $A \leq_e S_{\bar{a}}$.

Введем следующее условие.

2′. Для любого числа $n \in \omega$ равномерно по n определен вычислимый класс конструктивных моделей $K_n = \{\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b} \rangle \mid r \in \omega\}$, $\bar{b} = \langle b_0, \dots, b_{n-1} \rangle$, $\bar{b} \in \left(M_r^n\right)_{\neq}$, и для любых чисел n, r равномерно по n и r эффективно определено конечное множество $S_r^n \subseteq \omega$ такое, что модель $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b} \rangle$ изоморфно вложима в $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle$ тогда и только тогда, когда $S_r^n \subseteq S_{\bar{a}}$, $\bar{a} \in \left(M_0^n\right)_{\neq}$.

Замечание 2. Пусть для модели $\mathfrak{M}$ и множества M_0 справедливы условия 1, 2′, 3. Тогда в предложении 1 требуемый оператор перечисления находится по формуле φ эффективно.

Пусть для модели $\mathfrak{M}$ и множества M_0 кроме условий 1–3 также справедливо следующее условие.

4. Для любого элемента $x \in M$ существуют последовательность $\bar{a} \in \left(M_0^{<\omega}\right)_{\neq}$ и Σ-формула $\varphi(x, \bar{y})$ без параметров такие, что x определяется формулой $\varphi(x, \bar{a})$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Тогда будем говорить, что модель $\mathfrak{M}$ *SΣ-порождена множеством* M_0. Если модель $\mathfrak{M}$ SΣ-порождена основным множеством M, то будем говорить, что модель $\mathfrak{M}$ *SΣ-порождена.*

Из предложения 1 получаем

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ SΣ-порождена множеством M_0. Множество $A \subseteq \omega$ Σ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\bar{a} \in \left(M_0^{<\omega}\right)_{\neq}$ такая, что $A \leq_e S_{\bar{a}}$.*

Доказательство. Пусть $A = \varphi^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}[x, \bar{b}]$, где $\bar{b} = \langle b_0, \dots, b_{m-1} \rangle \in (M^n)_{\neq}$. По условию 4 существует последовательность $\bar{a} \in \left(M_0^{<\omega}\right)_{\neq}$ такая, что для любого $i < m$ существует формула $\varphi_i(y, \bar{a})$ сигнатуры $\sigma' \cup \bar{a}$, $\sigma' = \sigma \cup \{U, \in, \varnothing\}$, определяющая элемент b_i в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Рассмотрим формулу

$$\psi(x,\bar{a}) = \exists y_0 \dots \exists y_{m-1}\Big(\varphi(x,\bar{y}) \wedge \bigwedge_{i<m} \varphi_i(y_i,\bar{a})\Big).$$

Легко проверить, что справедливо равенство

$$\varphi^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}[x,\bar{b}] = \psi^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}[x,\bar{a}].$$

Отсюда и из предложения 1 получаем требуемое. $\square$

Лемма 1. *Любая модель $\mathfrak{M}$ конечной чисто предикатной сигнатуры σ $S\Sigma$-порождена.*

Доказательство. Проверим справедливость условий 1–4. Пусть дано число $n \in \omega$. Через K_n обозначим класс всех конечных моделей сигнатуры $\sigma \cup \bar{b}$, $\bar{b} = \langle b_0, \dots, b_{n-1}\rangle$, основные множества которых являются начальным отрезком упорядоченного множества $\langle\{b_i \mid i \in \omega\}, <\rangle$, где $b_i < b_j$, если $i < j$. Пусть Γ_n — эффективная нумерация этого класса, $\mathfrak{M}_r^n = \Gamma_n(r)$, $S_r^n = \{r\}$. Легко проверить, что класс K_n является равномерно по n вычислимой последовательностью конструктивных моделей.

Пусть дана последовательность $\bar{a} \in (M^{<\omega})_{\neq}$, $a = \langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle$. Через $S_{\bar{a}}$ обозначим множество таких чисел r, что модель $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b}\rangle$ изоморфно вложима в $\langle \mathfrak{M}, \bar{a}\rangle$.

Покажем, что множество $S_{\bar{a}} \subseteq \omega$ является Σ-определимым в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Пусть дано число $r \in \omega$. Предположим, что $M_r^n = \{b_0, \dots, b_{m-1}\}$. Обозначим через $\Phi_r'(b_0, \dots, b_{n-1}, \dots, b_{m-1})$ открытую диаграмму модели $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b}\rangle$. Пусть F — множество всех формул сигнатуры σ, а $\gamma : \omega \to F$ — эффективная нумерация этого множества. Пусть

$$\gamma(r') = \Phi_{r'}(\bar{x}) = \exists y_n \dots \exists y_{m-1} \Phi_r'(x_0, \dots, x_{n-1}, y_n, \dots, y_{m-1}).$$

Последовательность множеств $\langle \gamma^{-1} F_0^n \mid n \in \omega\rangle$, где $F_0^n = \{\Phi_{r'}(\bar{x}) \mid r \in \omega\}$, вычислима. Функция $f(n,r) = r'$ вычислима, а следовательно, Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Существует Σ-функция $h : M^{<\omega} \to \omega$ такая, что $h(\bar{a}) = n$, где $\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle$. Поэтому множество

$$S_{\bar{a}} = \{r \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models Tr_{\mathfrak{M}}(f(h(\bar{a}), r), \bar{a})\},$$

где $Tr_{\mathfrak{M}}(m, \bar{a}) = \{\langle m, \bar{a}\rangle \mid m$ является номером $\exists$-формулы $\Phi_m(\bar{x})$ сигнатуры σ, $\bar{a} \in M^{<\omega}$ и $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi_m(\bar{a})\}$, является Σ-множеством в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Отсюда и из определения множества S_r^n следует, что условия 1, 2 для модели $\mathfrak{M}$ и множества M выполнены. Покажем справедливость условия 3. Пусть дана конечная подмодель $\langle \mathfrak{M}', \bar{a}\rangle \subseteq \langle \mathfrak{M}, \bar{a}\rangle$. Тогда существует такое число $r \in \omega$, что $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b}\rangle \simeq \langle \mathfrak{M}', \bar{a}\rangle$. Отсюда $S_r^n = \{r\} \subseteq S_{\bar{a}}$, т. е. условие 3 для модели $\mathfrak{M}$ и множества M справедливо. Проверка условия 4 очевидна. Следовательно, $\mathfrak{M}$ $S\Sigma$-порождена. $\square$

Замечание 3. Из доказательства леммы следует, что

1) для модели $\mathfrak{M}$ и ее основного множества M справедливо условие $2'$;

2) $S_{\bar{a}}$ Σ-определимо формулой с параметрами $\bar{a}$.

Отсюда по лемме 1 и замечаниям 1, 2 получаем

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ является моделью чисто предикатной сигнатуры σ. Множество $A \subseteq \omega$ определимо некоторой Σ-формулой $\varphi(x, \bar{a})$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда $A \leq_e S_{\bar{a}}$. Более того, оператор перечисления по формуле φ находится эффективно.*

Для модели $\mathfrak{M}$ через $I_e(\mathfrak{M})$ обозначим идеал e-степеней Σ-подмножеств натуральных чисел в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Следствие 3 [1]. *Пусть дана модель $\mathfrak{M}$ конечной чисто предикатной сигнатуры σ. Тогда идеал $I_e(\mathfrak{M})$ порождается e-степенями $d_e(Th_\exists(\mathfrak{M}, \bar{a}))$, где $\bar{a} \in M^{<\omega}$.*

Действительно, по лемме 1 модель $\mathfrak{M}$ $S\Sigma$-порождена. Пусть $A \subseteq \omega$ Σ-определимо формулой $\varphi(x, \bar{a})$. По предложению 1 имеем $A \leq_e S_{\bar{a}}$. Из доказательства леммы 1 следует, что $S_{\bar{a}} \equiv_e Th_\exists(\mathfrak{M}, \bar{a})$. $\square$

В [9] доказано, что любая абелева p-группа и любая алгебра Ершова локально конструктивизируемы. Отсюда и из следствия 3 получаем

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{M}$ является абелевой p-группой или алгеброй Ершова. Тогда любое Σ-подмножество натуральных чисел в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ вычислимо перечислимо.*

В [1] по любому непустому семейству непустых множеств натуральных чисел U и последовательности бесконечных кардиналов $\Lambda = \langle \alpha_S \mid S \in U \rangle$ построена модель $\mathfrak{M}'_{\langle U, \Lambda \rangle}$. На самом деле это построение корректно и в случае, когда U содержит пустое множество. Пусть даны непустое семейство множеств натуральных чисел U и последовательность Λ. Тогда справедлива

Лемма 2. *Если U содержит все конечные множества, то модель $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \mathfrak{M}'_{\langle U, \Lambda \rangle}$ $S\Sigma$-порождена множеством $M_0 = \{\langle S, \gamma \rangle \mid S \in U, \gamma < \alpha_S\}$.*

Доказательство. Проверим условия 1–4 определения $S\Sigma$-порожденности модели $\mathfrak{M}$ множеством M_0.

1. Пусть дана последовательность элементов $\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \in \left(M_0^n\right)_{\neq}$, $a_i = \langle S_i, \alpha_i \rangle$. Положим $S_{\bar{a}} = S_0 \oplus \dots \oplus S_{n-1}$. Легко проверить, что $S_{\bar{a}}$ является Σ-подмножеством в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

2. Пусть дано число n. Зафиксируем эффективную нумерацию $\gamma^n : \omega \to A$, где A — множество всех конечных последовательностей попарно различных пар чисел длины $m \geq n$, $m \in \omega$. Пусть $\gamma^n r = \langle \langle e_j, p'_j \rangle \mid j < m \rangle$. Положим $U^n_{r'} = \{D_{e_0}, \dots, D_{e_{m-1}}\}$. Пусть $U^n_r = \{D_{r_0}, \dots, D_{r_{t-1}}\}$, где $D_{r_j} \neq D_{r_{j'}}$, $j < j' < t$, $p_{r_j} = \max\{p'_k \mid D_{r_j} = D_{e_k},\ k < m\} + 1$, $\Lambda^n_r = \{p_{r_0}, \dots, p_{r_{t-1}}\}$, $\mathfrak{M}^n_r = \mathfrak{M}'_{\langle U^n_r, \Lambda^n_r \rangle}$, $b_i = \langle D_{e_i}, p'_i \rangle$. Положим $S^n_r = D_{e_0} \oplus \dots \oplus D_{e_{n-1}}$.

Легко проверить, что модель $\langle \mathfrak{M}^n_r, \bar{b} \rangle$ изоморфно вложима в $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle$ тогда и только тогда, когда $S^n_r \subseteq S_{\bar{a}}$.

3. Пусть дана конечно-порожденная подмодель

$$\langle \mathfrak{M}', \bar{a} \rangle \subseteq \langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle, \quad \bar{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \in \left(M_0^n\right)_{\neq}.$$

Не умаляя общности, можно считать, что если элемент вида $\langle S, \gamma, n \rangle \in M'$, то $\langle S, \gamma \rangle \in M'$. Допустим, что $\{a_j \mid j < m\}$, $m \geq n$, — множество всех элементов из M', принадлежащих M_0, $a_j = \langle S_j, \alpha_j \rangle$ и $D_{e'_j} = \{n \mid \langle S_j, \alpha_j, n \rangle \in M'\}$.

Легко проверить существование таких чисел e_j, p'_j, что для любого $j < m$ выполнены

1) $D_{e'_j} \subseteq D_{e_j} \subseteq S_j$;

2) $\langle D_{e_j}, p'_j \rangle \neq \langle D_{e_{j'}}, p'_{j'} \rangle$, $j < j' < m$.

Пусть $\gamma r = \langle \langle e_j, p'_j \rangle \mid j < m \rangle$. Легко проверить, что модель $\langle \mathfrak{M}', \bar{a} \rangle$ изоморфно вложима в $\langle \mathfrak{M}^n_r, \bar{b} \rangle$, где $b_i = \langle D_{e_i}, p'_i \rangle$, $i < n$, и $S^n_r \subseteq S_{\bar{a}}$.

4. Пусть дан элемент $x \in M$. Если $x \in \omega$, то очевидно, что элемент x является Σ-определимым относительно сигнатуры $\langle 0, s \rangle$. Допустим, что $x = \langle S, \gamma, n \rangle$. Тогда

$$x = \langle S, \gamma, n \rangle \Leftrightarrow Q(x, \langle S, \gamma \rangle, n).$$

Следовательно, любой элемент x является Σ-определимым в модели $\mathfrak{M}$ с константами из M_0. Таким образом, все условия выполняются. Поэтому модель $\mathfrak{M}'_{\langle U, \Lambda \rangle}$ $S\Sigma$-порождена множеством M_0. $\square$

Замечание 4. Из доказательства п. 2 леммы 2 следует, что модель $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию $2'$.

Пусть модель $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ и множество $M_0 \subseteq M$ удовлетворяют условиям 1, $2'$, 3 и выполняется следующее условие.

5. Существует вычислимая последовательность Σ-формул $\varphi^e_r(x, x_0, \dots, x_{r-1})$, $r, e \in \omega$, без параметров сигнатуры σ' такая, что выполнены условия:

a) для любых чисел r, e и последовательности $\bar{a} \in \left(M^r_0\right)_{\neq}$ множество $\{x \in M \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \varphi^e_r(x, \bar{a})\}$ не более чем одноэлементно;

b) для любого элемента $x \in M$ существуют числа r_x, e_x и последовательность $\bar{a}_x \in \left(M^{r_x}_0\right)_{\neq}$ такие, что элемент x определяется в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ формулой $\varphi^{e_x}_{r_x}(x, \bar{a}_x)$.

Тогда будем говорить, что модель $\mathfrak{M}$ *вычислимо $S\Sigma$-порождена множеством M_0*.

Легко заметить, что справедлива

Лемма 3. *Пусть даны модель $\mathfrak{M}$ и формула $\psi(x, y_0, \dots, y_{n-1}, \bar{b})$, $\bar{b} \in (M^t)_{\neq}$. Тогда по формуле ψ можно эффективно определить множество формул*

$$\{\psi_i(x, y_0, \dots, y_{m_i - 1}, \bar{b}) \mid i < s,\ m_i < n\}$$

такое, что справедливо равенство

$$\{\psi^{\mathfrak{M}}[x, \bar{a}, \bar{b}] \mid \bar{a} \in M^n\} = \left\{\psi^{\mathfrak{M}}_i[x, \bar{a}, \bar{b}] \mid i < s,\ \bar{a} \in (M^{m_i})_{\neq},\ a_j \neq b_k\right\}. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ вычислимо $S\Sigma$-порождена множеством M_0. Если семейство S подмножеств натуральных чисел вычислимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, то семейство $S \cup \{\varnothing\}$ представимо в виде*

$$\left\{\Theta_i(S_{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}) \mid i \in \omega,\ \bar{a} \in \left(M^{m_i}_0\right)_{\neq},\ a_j \neq b_k\right\}$$

для некоторой вычислимой последовательности операторов перечисления Θ_i, $\bar{b} \in \left(M^t_0\right)_{\neq}$ и функция $m(i) = m_i$ вычислима.

Доказательство. Пусть дано вычислимое семейство S подмножеств натуральных чисел в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Тогда по предложению 4.4 из [1] и условию 5 найдется Σ-формула $\Psi(x_0, x_1, \bar{b})$ такая, что

$$S \cup \{\varnothing\} = \{\Psi^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}[x_0, c, \bar{b}] \mid c \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})\} \tag{8}$$

для некоторой фиксированной последовательности $\bar{b} \in \left(M^t_0\right)_{\neq}$.

Следуя Ю. Л. Ершову [7], введем множества $\mathfrak{H}_n = \mathbb{HF}(n = \{i \mid i < n\})$, $\mathfrak{H}_0 = \mathbb{HF}(\varnothing)$. Тогда $\mathbb{HF}(\omega) = \bigcup\limits_n \mathfrak{H}_n$. Существует Σ-нумерация $\alpha : \omega \to HF(\omega)$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ множества $HF(\omega)$. Через t_m обозначим элемент из $HF(\omega)$ с номером m. Пусть $t_m \in \mathfrak{H}_{k_m}$, где $k_m = \min\{k \mid t_m \in \mathfrak{H}_k\}$, и

$$\Psi^{(m)}(x_0, z_0, \dots, z_{k_m-1}, \bar{b}) = \Psi(x, t_m(z_0, \dots, z_{k_m-1}), \bar{b}). \tag{9}$$

Функция $k(m) = k_m$ вычислима. Множество всех конечных последовательностей натуральных чисел вида $\alpha = \langle m, r_0, e_0, \dots, r_{k_m-1}, e_{k_m-1}\rangle$ обозначим через R. Очевидно, что множество R вычислимо. Пусть вычислимая функция ν перечисляет множество R.

Для любого числа $i \in \omega$ определим следующую формулу Ψ_i. Пусть $\nu(i) = \alpha$ и $k_m \rightleftharpoons q$. Тогда положим

$$\Psi_i\big(x, y_0^0, \dots, y_{r_0-1}^0, y_0^{q-1}, \dots, y_{r_{q-1}-1}^{q-1}, \bar{b}\big)$$
$$= \exists z_0 \dots \exists z_{q-1}\Big(\bigwedge_{j<q} U(z_j) \wedge \Psi^{(m)}(x_0, z_0, \dots, z_{q-1}, \bar{b}) \wedge \bigwedge_{j<q} \varphi_{r_j}^{e_j}\big(z_j, y_0^j, \dots, y_{r_j-1}^j\big)\Big),$$

где формулы $\varphi_{r_j}^{e_j}$ такие же, как в условии 5.

Из условия 5 следует, что для любой последовательности элементов $\bar{c} = \langle c_0, \dots, c_{q-1}\rangle \in M^{<\omega}$ существуют последовательность элементов $\alpha \in R$ и $\bar{a} = \langle \bar{a}_{c_0}, \dots, \bar{a}_{c_{q-1}}\rangle \in M_0^{<\omega}$ такие, что $\nu(i) = \alpha$ и

$$\Psi^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}[x_0, t_m(\bar{c}), \bar{b}] = \Psi_i^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}[x_0, \bar{a}, \bar{b}].$$

Отсюда и из (8), (9) имеем

$$S \cup \{\varnothing\} = \big\{\Psi_i^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}[x_0, \bar{a}, \bar{b}] \mid i \in \omega, \bar{a} \in M_0^{m_i}\big\}. \tag{10}$$

По лемме 3 в равенстве (10) можно считать, что $\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle \in \big(M_0^{m_i+t}\big)_{\neq}$. Тогда по замечанию 2 имеем

$$S \cup \{\varnothing\} = \big\{\Theta_i(S_{\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle}) \mid i \in \omega,\ \bar{a} \in \big(M_0^{m_i}\big)_{\neq},\ a_j \neq b_k\big\}$$

для некоторой вычислимой последовательности операторов перечисления Θ_i, $i \in \omega$, $\bar{b} \in \big(M_0^t\big)_{\neq}$ и функция $m(i) = m_i$ вычислима. □

Для модели $\mathfrak{M}$ и подмножества $M_0 \subseteq M$ введем следующие условия.

6. Множество M_0 является Σ-подмножеством в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

7. Существует Σ-формула $\Phi_1(x, \bar{y})$ (возможно, с параметрами) такая, что для любой последовательности $\bar{a} \in \big(M_0^{<\omega}\big)_{\neq}$ справедливо равенство $\Phi_1^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}[x, \bar{a}] = S_{\bar{a}}$.

Замечание 5. Из доказательства леммы 1 следует, что для модели $\mathfrak{M}$ чисто предикатной сигнатуры и множества M справедливы условия 6, 7.

Следствие 5. *Пусть модель $\mathfrak{M}$ вычислимо $S\Sigma$-порождена множеством M_0 и справедливы условия* 6, 7. *Тогда семейство S подмножеств натуральных чисел вычислимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда $S \cup \{\varnothing\}$ представимо в виде*

$$\big\{\Theta_i(S_{\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle}) \mid i \in \omega,\ \bar{a} \in \big(M_0^{m_i}\big)_{\neq},\ a_j \neq b_k\big\} \tag{11}$$

для некоторой вычислимой последовательности операторов перечисления, $\bar{b} \in \left(M_0^t\right)_{\neq}$ *и функция* $m(i) = m_i$ *вычислима.*

Доказательство. По теореме 1 требуется доказать достаточность. Пусть $S \cup \{\varnothing\}$ представимо в виде (11) и вычислимая последовательность вычислимо перечислимых множеств $\{A_i\}$ определяет операторы $\{\Theta_i\}$. Тогда существует Σ-формула Φ_2 такая, что $\Phi_2^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}[x, i] = A_i$.

Отсюда и из (11) по условию 7 имеем

$$S \cup \{\varnothing\} = \big\{\lambda x.\exists t\ \Phi_2(\langle x, t\rangle, i)\ \&\ \forall y \in t\ (y \in D_t \to \Phi_1(y, \langle \bar{a}, \bar{b}\rangle)) \\ \mid i \in \omega,\ \bar{a} \in \left(M_0^{m_i}\right)_{\neq},\ a_j \neq b_k\big\}.$$

Так как множество $\left\{\bar{a} \in \left(M_0^{m_i}\right)_{\neq} \mid i \in \omega,\ a_j \neq b_k\right\}$ Σ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, то семейство $S \cup \{\varnothing\}$ вычислимо. Отсюда S вычислимо. $\square$

Пусть $\mathfrak{M}'_{\langle U, \Lambda\rangle}$ — модель, построенная в [1].

Следствие 6. *Если I — некоторый e-идеал и $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'_{\langle I^*, \Lambda\rangle}$, то семейство множеств натуральных чисел S вычислимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда $S \cup \{\varnothing\}$ представимо в виде*

$$\{\Theta_i(R, A) \mid i \in \omega,\ R \in I^*\}$$

для некоторой вычислимой последовательности операторов перечисления Θ_i и $A \in I^*$.

Доказательство. Достаточность легко следует из существования универсального Σ-предиката для допустимых множеств конечной сигнатуры. Докажем необходимость. Пусть семейство S вычислимо. Тогда из теоремы 1 следует, что

$$S \cup \{\varnothing\} = \left\{\Theta_i^1(S_{\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle}) \mid i \in \omega,\ \bar{a} \in \left(M_0^{m_i}\right)_{\neq},\ a_j \neq b_k\right\}$$

для некоторой вычислимой последовательности операторов перечисления Θ_i^1, $\bar{b} \in \left(M_0^t\right)_{\neq}$ и функция $m(i) = m_i$ вычислима. Из доказательства леммы 2 вытекает равенство

$$S_{\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle} = S_0 \oplus \dots \oplus S_{m_i - 1} \oplus A_0 \oplus \dots \oplus A_{t-1},$$

где $a_j = \langle S_j, \gamma_j\rangle$, $j < m_i$, $b_k = \langle A_k, \beta_k\rangle$, $k < t$. Тогда существует вычислимая последовательность операторов перечисления Θ_i такая, что

$$S \cup \{\varnothing\} = \{\Theta_i(S_0 \oplus \dots \oplus S_{m_i-1}, A_0 \oplus \dots \oplus A_{t-1}) \mid S_j \in I^*, j < m_i,\ i \in \omega\}.$$

Осталось заметить, что $\{S_0 \oplus \dots \oplus S_{m_i-1} \mid S_j \in I^*,\ j < m_i\} = I^*$. $\square$

§ 2. Σ-подмножества натуральных чисел над абелевыми группами

Пусть P — множество всех простых чисел и $S = \{S_\alpha \mid \alpha < \beta\}$ — некоторое непустое семейство подмножеств простых чисел, где β — некоторый бесконечный ординал. Для любого ординала $\alpha < \beta$ и числа $i \in \omega$ определим группу $A_\alpha^{(i)}$ следующим заданием порождающих и определяющих соотношений:

$$A_\alpha^{(i)} = \mathrm{gr}\big(a_\alpha^i, \big\{b_{p,i}^\alpha \mid p \in S_\alpha\big\} : p b_{p,i}^\alpha = a_\alpha^i\big),$$

и положим

$$A_\alpha = \bigoplus_{i \in \omega} A_\alpha^{(i)}, \quad A_S = \bigoplus_{\alpha < \beta} A_\alpha.$$

Лемма 4. *Группа* $A \leftrightharpoons A_S$ *вычислимо* $S\Sigma$*-порождена множеством* $A_0 = \{a^i_\alpha \mid \alpha < \beta,\ i \in \omega\}$.

Доказательство состоит в проверке условий 1, 2′, 3, 5 определения вычислимой $S\Sigma$-порожденной модели.

1. Пусть дана конечная последовательность $\bar{a} = \left\langle a^{t_0}_{\alpha_0}, \dots, a^{t_{n-1}}_{\alpha_{n-1}} \right\rangle \in \left(A_0^{<\omega}\right)_{\neq}$. Определим множество

$$S_{\bar{a}} = S_{\alpha_0} \oplus \dots \oplus S_{\alpha_{n-1}} \oplus \omega.$$

Легко проверить, что условие 1 выполнено.

2′. Пусть $[\ ] : \omega^{<\omega} \to \omega$ — эффективная нумерация конечных последовательностей натуральных чисел и даны числа n и $r = [u_0, \dots, u_{n-1}, m]$ такие, что $D_{u_i} \subseteq P$, $i < n$, $m \in \omega$. Для каждого $i < n$ определим группу

$$B^r_i = \mathrm{gr}\big(b_i, \big\{c^i_p \mid p \in D_{u_i}\big\} : pc^i_p = b_i\big)$$

и положим

$$M^n_r = \bigoplus_{i<n} B^r_i \bigoplus Z^m, \quad \bar{b} = \langle b_0, \dots, b_{n-1}\rangle, \quad S^n_r = D_{u_0} \oplus \dots \oplus D_{u_{n-1}} \oplus \{m\},$$

где Z^m — прямая сумма m экземпляров бесконечной циклической группы.

Легко проверить, что отображение $f : b_i \to a^{t_i}_{\alpha_i}$, $i < n$, можно продолжить до изоморфного вложения модели $\langle M^n_r, \bar{b}\rangle$ в $\langle A, \bar{a}\rangle$ тогда и только тогда, когда $S^n_r \subseteq S_{\bar{a}}$.

3. Пусть даны последовательность элементов $\bar{a} = \left\langle a^{t_0}_{\alpha_0}, \dots, a^{t_{n-1}}_{\alpha_{n-1}} \right\rangle \in \left(A_0^{<\omega}\right)_{\neq}$ и конечно-порожденная подгруппа $A' \subseteq A$, содержащая элементы $a_i \leftrightharpoons a^{t_i}_{\alpha_i}$. Для каждого $i < n$ определим множество

$$R^i \leftrightharpoons R^i_{A'} = \{p \in P \mid A' \models \exists y\ (py = a_i)\}.$$

Пусть $R^i = \big\{p^i_0, \dots, p^i_{l_i-1}\big\}$ и для любого $j < l_i$ число u_i и элемент b^i_j таковы, что $D_{u_i} = R^i$, $p^i_j b^i_j = a_i$. Обозначим через A'' подгруппу, порожденную множеством $\big\{b^i_j, a_i \mid j < l_i,\ i < n\big\}$. Легко понять, что подгруппа A'' сервантна в A', а потому $A' = A'' \oplus B$ для некоторой конечно-порожденной подгруппы B. По основной теореме о конечно-порожденных абелевых группах существует такое число m, что группы B и Z^m изоморфны. Пусть $r = [u_0, \dots, u_{n-1}, m]$. Тогда $S^n_r \subseteq S_{\bar{a}}$ и группы $\langle A', \bar{a}\rangle$ и $\langle M^n_r, \bar{b}\rangle$ изоморфны.

5. Любой элемент группы A линейно зависит от последовательности $\langle a^i_\alpha \mid \alpha < \beta,\ i \in \omega\rangle$. Отсюда легко следует, что условие 5 справедливо. □

Из леммы 4 и следствия 1 получаем

Следствие 7. *Множество* $M \subseteq \omega$ *является* Σ*-определимым в наследственно конечном допустимом множестве* $\mathbb{HF}(A_S)$ *над группой* A_S *тогда и только тогда, когда существует последовательность* $\bar{a} \in \left(A_0^{<\omega}\right)_{\neq}$ *такая, что* $M \leq_e S_{\bar{a}}$.

Теорема 2. *Для любого* e*-идеала* I *существует абелева группа без кручения* A *такая, что* I^* *совпадает с семейством всех* Σ*-подмножеств натуральных чисел в* $\mathbb{HF}(A)$. *Кроме того, эту группу можно выбрать так, что* $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(I^*)$.

Доказательство. Пусть дан e-идеал I и $I^* = \{S_\alpha \subseteq \omega \mid \alpha < \beta\}$. Для любого $\alpha < \beta$ определим множество $S'_\alpha = \{p_x \mid x \in S_\alpha\}$, где p_x — x-е простое число, и положим $I' = \{S'_\alpha \mid \alpha < \beta\}$, $A = A_{I'}$, где группа A построена по I', как перед леммой 4. Покажем, что группа A требуемая. Из построения группы A следует, что для любого $\alpha < \beta$ и $i \in \omega$ справедливо равенство

$$S'_\alpha = \bigl\{p \mid A \models \exists y \ \bigl(py = a^i_\alpha\bigr)\bigr\}.$$

Отсюда множество S'_α, а следовательно, и S_α Σ-определимы в $\mathbb{HF}(A)$. Пусть дано Σ-подмножество $M \subseteq \omega$ в $\mathbb{HF}(A)$. По следствию 7 существуют число n и последовательность $\bar a \in \bigl(A^n_0\bigr)_{\neq}$ такие, что

$$M \leq_e S_{\bar a} = S_{\alpha_0} \oplus \dots \oplus S_{\alpha_{n-1}} \oplus \omega.$$

Так как $S'_{\alpha_i} \in I^*$, то и $S_{\bar a} \in I^*$. Отсюда имеем $M \in I^*$. $\square$

Следствие 8. *Пусть дан e-идеал I и по нему построена группа A так же, как в теореме 2. Тогда семейство множеств натуральных чисел S вычислимо в $\mathbb{HF}(A)$ тогда и только тогда, когда $S \cup \{\varnothing\}$ представимо в виде*

$$\{\Theta_i(R, B) \mid i \in \omega,\ R \in I^*\}$$

для некоторой вычислимой последовательности операторов перечисления Θ_i и $B \in I^*$.

Доказательство. Как и для следствия 6, докажем необходимость. Пусть семейство S вычислимо. Тогда из теоремы 1 следует

$$S \cup \{\varnothing\} = \bigl\{\Theta^1_i(S_{\langle \bar a, \bar b\rangle}) \mid i \in \omega,\ \bar a \in \bigl(A^{m_i}_0\bigr)_{\neq},\ a_i \neq b_k\bigr\}$$

для некоторой вычислимой последовательности операторов перечисления Θ^1_i, $\bar b \in \bigl(A^t_0\bigr)_{\neq}$ и функция $m(i) = m_i$ вычислима. Из доказательства леммы 4 существует вычислимая последовательность операторов перечисления Θ^2_i такая, что

$$S \cup \{\varnothing\} = \bigl\{\Theta^2_i(S'_{\alpha_0} \oplus \dots \oplus S'_{\alpha_{m_i-1}}, B'_0 \oplus \dots \oplus B'_{t-1} \otimes \omega) \mid S'_{\alpha_j} \in I',\ j < m_i,\ i \in \omega\bigr\}.$$

Так как $S'_{\alpha_0} \oplus \dots \oplus S'_{\alpha_{m_i-1}} \equiv_m S_{\alpha_0} \oplus \dots \oplus S_{\alpha_{m_i-1}}$, где $S_{\alpha_j} \rightleftharpoons \{x \mid p_x \in S'_{\alpha_j}\}$, $j < m_i$, и $I^* = \{S_{\alpha_0} \oplus \dots \oplus S_{\alpha_{m_i-1}} \mid S_{\alpha_j} \in I^*\}$, то существует вычислимая последовательность операторов перечисления Θ_i такая, что

$$S \cup \{\varnothing\} = \{\Theta_i(R, B'_0 \oplus \dots \oplus B'_{t-1} \otimes \omega) \mid R \in I^*,\ i \in \omega\}. \qquad \square$$

Пусть e-идеал I порождается тотальными e-степенями и не является главным, $I^* = \{S_\alpha \mid S_\alpha \neq \varnothing,\ \alpha < \beta\}$ и группа $A = A_{I'}$ построена, как в доказательстве теоремы 2. Так же, как и в [1], для группы A можно показать, что справедливо

Следствие 9. *Существует вполне разложимая абелева группа без кручения A такая, что в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(A)$ не существует универсальной Σ-функции.*

Пусть дано подмножество $S \subseteq P$ простых чисел. По множеству S определим группу $G \leftrightharpoons G_S = \bigoplus\{Z_p \mid p \in S\}$. В каждой группе Z_p зафиксируем элемент $a_p \neq 0$, и пусть $G_0 = \{a_p \mid p \in S\}$.

Лемма 5. *Группа G вычислимо $S\Sigma$-порождена множеством G_0.*

Доказательство состоит в проверке условий 1, $2'$, 3, 5 определения вычислимо $S\Sigma$-порожденной модели.

1. Для любой последовательности $\bar{a} = \langle a_{p_0}, \dots, a_{p_{n-1}} \rangle \in \left(G_0^{<\omega}\right)_{\neq}$ положим

$$S_{\bar{a}} = \left\{[p_0, \dots, p_{n-1}, q_0, \dots, q_{m-1}] \mid \bar{q} \in \left(S_0^{<\omega}\right)_{\neq},\ p_i \neq q_j,\ i < n,\ j < m\right\}.$$

Легко проверить, что множество S, а следовательно, и множество $S_{\bar{a}}$ Σ-определимы в $\mathbb{HF}(G)$.

$2'$. Пусть даны числа n и r такие, что $r = [p_0, \dots, p_{n-1}, q_0, \dots, q_{m-1}]$, где $\langle p_0, \dots, p_{n-1}, q_0, \dots, q_{m-1} \rangle$ — последовательность попарно различных простых чисел. Положим

$$G_r^n = \bigoplus\{Z_{p_i} \mid i < n-1\} \oplus \bigoplus\{Z_{q_j} \mid j < m-1\},$$
$$S_r^n = \{[p_0, \dots, p_{n-1}, q_0, \dots, q_{m-1}]\}.$$

Пусть $Z_{p_i} = (b_{p_i})$. Ясно, что модель $\langle G_r^n, \bar{b} \rangle$, $\bar{b} = \langle b_{p_0}, \dots, b_{p_{n-1}} \rangle$, вложима в $\langle G, \bar{a} \rangle$ тогда и только тогда, когда $S_r^n \subseteq S_{\bar{a}}$.

3. Пусть $\langle G', \bar{a} \rangle$, $\bar{a} = \langle a_{p_0}, \dots, a_{p_{n-1}} \rangle \in \left(G_0^n\right)_{\neq}$, — некоторая конечно-порожденная подгруппа в $\langle G, \bar{a} \rangle$. Обозначим через $H_0 \subseteq G'$ подгруппу, порожденную элементами $a_i \leftrightharpoons a_{p_i}$, $i < n$. Тогда существует такая последовательность простых чисел $q_0, \dots, q_{m-1}$, что $G' = H_0 \oplus Z_{q_0} \oplus \dots \oplus Z_{q_{m-1}}$.

Пусть $r = [p_0, \dots, p_{n-1}, q_0, \dots, q_{m-1}]$. Тогда модель $\langle G_r^n, \bar{b} \rangle$, определенная в п. 2, изоморфна $\langle G', \bar{a} \rangle$ и $S_r^n \subseteq S_{\bar{a}}$, т. е. справедливость условия 3 установлена.

5. Для любого числа $r = [m_0, \dots, m_{n-1}, p_0, \dots, p_{n-1}]$, $m_i \in \omega$, $p_i \in P$, $m_i < p_i$, $p_i \neq p_j$, $i < j < n$, определим формулу

$$\varphi_r^n(x, x_0, \dots, x_{n-1}) \rightleftharpoons (x = m_0 x_0 + \dots + m_{n-1} x_{n-1}) \ \&\ \bigwedge_{i<n} (x_i \neq 0 \ \&\ p_i x_i = 0).$$

Легко проверить, что для любого элемента $x \in G$ существует такое число r, что формула $\varphi_r(x, a_{p_0}, \dots, a_{p_{n-1}})$ определяет элемент x в $\mathbb{HF}(G)$, и для любой последовательности $\bar{a} \in G_0$ множество $\varphi_r^{\langle G, \bar{a} \rangle}[x, \bar{a}]$ не более чем одноэлементно.

Таким образом, все условия определения вычислимо $S\Sigma$-порожденной модели для группы G и множества G_0 выполнены. □

Следствие 10. *Пусть $S \subseteq P$ и $G = \bigoplus\{Z_p \mid p \in S\}$. Множество $A \subseteq \omega$ Σ-определимо в $HF(G)$ тогда и только тогда, когда $A \leq_e S$. Идеал $I_e(G)$ является главным.*

Действительно, по лемме 5 и следствию 1 существует последовательность $\bar{a} \in \left(G_0^{<\omega}\right)_{\neq}$ такая, что $A \leq S_{\bar{a}}$. Отсюда и из $S_{\bar{a}} \leq_e S$ следует, что $A \leq_e S$. Множество S является Σ-определимым в $\mathbb{HF}(G)$. Следовательно, $d_e(S) \in I_e(G)$. Поэтому идеал $I_e(G)$ является главным.

Следствие 11. *Для любого главного e-идеала I существует периодическая абелева группа G такая, что $I_e(G) = I$.*

Действительно, пусть множество $S \subseteq P$ таково, что $I = \widehat{d_e(S)}$. Тогда по следствию 10 группа $G \rightleftharpoons G_S$ требуемая.

Определение. Функцию $U_\omega(x_0, x_1)$ будем называть *строго универсальной числовой функцией* в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, если семейство всех одноместных числовых Σ-функций $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ представимо в виде

$$\{U_\omega(x_0, x_1) \mid x_0 \in \omega\}.$$

Лемма 6 [10]. *Существует главный e-идеал такой, что в I не существует универсальной функции для класса одноместных функций из I.*

Отсюда и следствия 11 получаем

Следствие 12. *Существует периодическая абелева группа G такая, что в $\mathbb{HF}(G)$ не существует строго универсальной числовой Σ-функции.*

Замечание 6. Существует модель $\mathfrak{M}$ такая, что в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ нет универсальной функции, но имеется строго универсальная числовая Σ-функция.

Действительно, в [11] построена такая сильно конструктивизируемая модель $\mathfrak{M}$, что в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ нет универсальной Σ-функции. По следствию 3 имеем $I_e(\mathfrak{M}) = 0$. Поэтому в $I_e(\mathfrak{M})$ существует универсальная числовая функция. Значит, в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ имеется строго универсальная числовая функция, т. е. $\mathfrak{M}$ требуемая.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозов А. С., Пузаренко В. Г.* О Σ-подмножествах натуральных чисел // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 3. С. 291–320.
2. *Руднев В. А.* О существовании неотделимой пары в рекурсивной теории допустимых множеств // Алгебра и логика. 1987. Т. 27, № 1. С. 48–56.
3. *Пузаренко В. Г.* О вычислимости над моделями разрешимых теорий // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 2. С. 170–197.
4. *Морозов А. С.* Σ-подмножество натуральных чисел, не перечислимое с помощью натуральных чисел // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1404–1408.
5. *Хисамиев А. Н.* О верхней полурешетке Ершова // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 1. С. 211–228.
6. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin: Springer-Verl., 1975.
7. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
8. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
9. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. Л.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
10. *Калимуллин И., Пузаренко В. Г.* О принципах вычислимости на допустимых множествах // Мат. труды. 2004. Т. 7, № 2. С. 35–72.
11. *Руднев В. А.* Об универсальной рекурсивной функции на допустимых множествах // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 4. С. 425–436.

Статья поступила 30 июня 2004 г.

Хисамиев Асылхан Назифович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
hisamiev@math.nsc.ru