Сибирский математический журнал
Июль—август, 2006. Том 47, № 4

УДК 517.518.843

ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОМ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

А. В. Мироненко

Аннотация: Рассматривается задача равномерного приближения непрерывной функции на отрезке при помощи класса функций с ограниченной второй производной. Доказываются оценки величины наилучшего приближения функции через ее локальные приближения на равномерных и неравномерных трехточечных сетках.

Ключевые слова: равномерное приближение на отрезке, функции с ограниченной производной.

Пусть X — замкнутое подмножество отрезка $[a,b]$. Через CX обозначим пространство функций, заданных на множестве X, с нормой

$$\|f\|_{CX} = \max\{|f(x)| : x \in X\}.$$

В случае, когда множество X — весь отрезок $[a,b]$, получим пространство непрерывных функций $C[a,b]$, норму этого пространства мы будем обозначать через $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{C[a,b]}$. Через $AC^n[a,b]$ обозначим класс функций из $C[a,b]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка n. Через $\mathscr{D}^n$ обозначим следующий класс функций:

$$\mathscr{D}^n = \{g \in AC^{n-1}[a,b] : |g^{(n)}(x)| \le 1 \text{ всюду, где } g^{(n)} \text{ существует}\}.$$

Приближение произвольной функции $f \in C[a,b]$ функциями из класса $\mathscr{D}^1$ (класс Липшица) использовано Н. П. Корнейчуком для доказательства теоремы Джексона — Стечкина. Им найдено соотношение между величиной наилучшего приближения функции f и ее локальными приближениями на двухточечных множествах. В данной статье получены аналогичные результаты для класса $\mathscr{D}^2$.

1. Обозначения и определения.

Определение. Пусть класс функций Q содержится в классе $C[a,b]$, а X — замкнутое множество отрезка $[a,b]$. *Величиной наилучшего приближения* (ВНП) *функции f классом функций Q на множестве X* будем называть величину

$$E(f;Q;X) = \inf_{g\in Q} \|f-g\|_{CX}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–01092) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–1347.2003.1).

В случае, когда X — отрезок $[a,b]$, для краткости будем писать так:

$$E(f;Q) = \inf_{g\in Q} \|f-g\|,$$

а когда X является конечным множеством $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, — так:

$$E(f;Q;x_1,x_2,\dots,x_k) = \inf_{g\in Q} \|f-g\|_{C\{x_1,x_2,\dots,x_k\}}.$$

Определение. Пусть класс функций Q содержится в классе $C[a,b]$, а замкнутое множество X — в отрезке $[a,b]$. *Элементом наилучшего приближения* (ЭНП) *функции f в классе функций Q на множестве X* будем называть любую функцию g_* из этого класса, удовлетворяющую условию

$$\|f-g_*\|_{CX} = E(f;Q;X).$$

Отметим, что любой класс $\mathscr{D}^n$ замкнут и локально компактен. Это значит, что для любой функции $f \in C[a,b]$ ее ЭНП в классе $\mathscr{D}^n$ на отрезке $[a,b]$ всегда существует, но не всегда единствен. Характеризацию ЭНП в классе $\mathscr{D}^n$ можно найти в [1].

Обозначим максимальную ВНП функции f классом функций Q на всех k-точечных подмножествах отрезка $[a,b]$ через

$$E_k(f;Q) = \sup_{a\le x_1<x_2<\dots<x_k\le b} E(f;Q;x_1,x_2,\dots,x_k).$$

Имеет место очевидное соотношение

$$E_k(f;Q) \le E(f;Q). \tag{1}$$

Рассмотрим также максимальную ВНП функции f классом функций Q на всех равномерных k-точечных сетках из отрезка $[a,b]$:

$$U_k(f;Q) = \sup_{a\le x<x+(k-1)h\le b} E(f;Q;x,x+h,\dots,x+(k-1)h).$$

Здесь также можно выписать очевидную оценку

$$U_k(f;Q) \le E_k(f;Q). \tag{2}$$

Через $\Delta_h^m(f,x)$ обозначим конечную разность функции f порядка m в точке x с шагом h:

$$\Delta_h^m(f,x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k f(x+(m-k)h). \tag{3}$$

Через $\omega_m(f,h)$ обозначим классический модуль непрерывности функции f порядка m:

$$\omega_m(f,h) = \sup_{\substack{\delta\in[0,h],\\ x\in[a,b-m\delta]}} |\Delta_\delta^m(f,x)|.$$

2. Основной результат. Приведем сначала теорему Н. П. Корнейчука. Доказательство этой теоремы можно найти в [2, с. 206].

Теорема 1. *Пусть $f \in C[a,b] \setminus \mathscr{D}^1$. Тогда имеют место следующие равенства:*

$$E(f;\mathscr{D}^1) = E_2(f;\mathscr{D}^1) = U_2(f;\mathscr{D}^1) = \frac{1}{2}\sup_{h\in[0,b-a]}[\omega_1(f,h)-h].$$

Данная работа посвящена переносу этой теоремы на класс $\mathscr{D}^2$. Последнее равенство теоремы справедливо в любом классе $\mathscr{D}^n$.

Теорема 2. *Пусть $f \in C[a,b] \setminus \mathscr{D}^n$. Тогда имеет место следующее равенство:*

$$U_{n+1}(f;\mathscr{D}^n) = \frac{1}{2^n}\sup_{h\in[0,\frac{b-a}{n}]}[\omega_n(f,h)-h^n].$$

Что касается первых двух равенств из теоремы 1, то они имеют место только в случае класса $\mathscr{D}^1$. В случае класса $\mathscr{D}^2$ можно выписать лишь две двусторонние оценки.

Теорема 3. *Пусть $f \in C[a,b] \setminus \mathscr{D}^2$. Тогда имеют место следующие неравенства:*

(a) $\frac{1}{2}E(f;\mathscr{D}^2) < E_3(f;\mathscr{D}^2) \le E(f;\mathscr{D}^2)$;

(b) $\frac{1}{2}E_3(f;\mathscr{D}^2) \le U_3(f;\mathscr{D}^2) \le E_3(f;\mathscr{D}^2)$.

Отметим, что правые неравенства в теореме 3 — это очевидные неравенства (1) и (2), поэтому в доказательстве нуждаются только левые.

3. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $x_1 < x_2 < x_3$, а функция g_* такая, что на интервале (x_1,x_3) выполнено тождество $g_*^{(2)} \equiv -1$. Тогда для любых чисел h_1, h_2 и любой функции $g \in \mathscr{D}^2$, удовлетворяющей условиям*

$$(g-g_*)(x_1) \le -h_1, \quad (g-g_*)(x_2) \ge h_2,$$

выполняется неравенство

$$(g-g_*)(x_3) \ge (h_1+h_2)\cdot\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - h_1.$$

Доказательство. В силу тождества $g_*^{(2)} \equiv -1$ функция g_* на отрезке $[x_1,x_3]$ имеет вид $-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ при некоторых числах b и c. Построим вспомогательную функцию $s(x) = -\frac{1}{2}x^2+b_1x+c_1$, однозначно определяемую следующими условиями: $s(x_1) = g_*(x_1)-h_1$ и $s(x_2) = g_*(x_2)+h_2$. Пример такой функции показан на рис. 1.

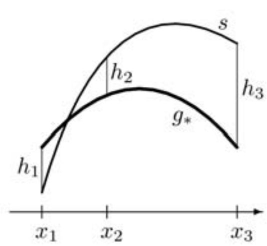

Рис. 1.

Рассмотрим функцию $h = s-g_* = (b_1-b)x+(c_1-c)$. Это полином первого порядка, определяемый следующими равенствами: $h(x_1) = -h_1$ и $h(x_2) = h_2$. Тогда

$$h(x_3) = (h_1+h_2)\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - h_1.$$

Возьмем произвольную функцию $g \in \mathscr{D}^2$, удовлетворяющую условиям леммы, и рассмотрим разность $r = g-s$. По построению $r \in AC^1[x_1,x_3]$ и справедливы соотношения

1) $r^{(2)} \ge 0$ всюду, где производная $r^{(2)}$ существует;

2) $r(x_1) \le 0$, $r(x_2) \ge 0$.

Покажем, что $r(x_3) \ge 0$. В самом деле, пусть это не так и $r(x_3) < 0$, тогда по теореме Лагранжа (если $x < y$ и значение непрерывно дифференцируемой функции в точке x строго меньше значения в точке y, то найдется такая точка из интервала (x, y), в которой производная этой функции строго больше нуля) существуют две точки t_1 и t_2 такие, что $x_1 < t_1 < x_2 < t_2 < x_3$, и выполнены неравенства $r'(t_1) \ge 0$ и $r'(t_2) < 0$. С другой стороны, в силу соотношения $r^{(2)} \ge 0$ абсолютно непрерывная функция r' не убывает; получили противоречие.

Мы установили, что $r(x_3) \ge 0$. Это значит, что

$$(g - g_*)(x_3) = (s - g_*)(x_3) + r(x_3) \ge (s - g_*)(x_3) = h(x_3) = (h_1 + h_2)\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} - h_1.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Если в условиях леммы* 1 *имеет место неравенство* $(h_1 + h_2) > 0$, *то справедливо следующее соотношение:*

$$(g - g_*)(x_3) \ge (h_1 + h_2)\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} - h_1 = (h_1 + h_2)\left(\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} - 1\right) + h_2 > h_2. \quad (4)$$

Лемма 2. *Пусть даны функция* $h \in AC[a, b]$ *и точки* x_1, x_2 $(a \le x_1 < x_2 \le b)$. *Если* $h(x_1) < h(x_2)$, *то существует точка* $\theta \in [x_1, x_2]$, *в которой производная* $h'(\theta)$ *существует и положительна.*

Доказательство. Поскольку функция h абсолютно непрерывна, имеем $h(x) = h(x_1) + \int\limits_{x_1}^{x} h'(t)\,dt$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{sign}\left(\int\limits_{x_1}^{x_2} h'(t)\,dt\right) = \operatorname{sign}(h(x_2) - h(x_1)) > 0.$$

На отрезке $[x_1, x_2]$ функция h' хотя бы в одной точке θ должна принять значение того же знака, что и интеграл от нее. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть даны числа* $n \ge 1$ *и* $N \ge n$, *а также функция* $h \in AC^{n-1}$. *Если функция* h *принимает в* $N+1$ *точках* $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ *значения с чередующимися знаками (т. е. выполняется равенство* $\operatorname{sign} h(x_i) \cdot \operatorname{sign} h(x_{i+1}) = -1$ *при* $i \in \overline{0, N-1}$), *то найдутся точки* $y_1 < y_2 < \dots < y_{N-n+1}$ *такие, что в них функция* $h^{(n)}$ *существует и принимает значения с чередующимися знаками, причем выполнится равенство* $\operatorname{sign} h^{(n)}(y_1) = (-1)^n \operatorname{sign} h(x_0)$.

Доказательство. Обозначим $\alpha = \operatorname{sign} h(x_0)$. Применив необходимое число раз теорему Лагранжа, получим множество точек $\{z_j\}_{j=1}^{N-n+2}$ таких, что $\operatorname{sign} h^{(n-1)}(z_j) = (-1)^{j+n}\alpha$. Применив $N - n + 1$ раз лемму 2 к функции $h^{(n-1)}$ на парах точек $\{z_j, z_{j+1}\}$, получим набор точек $\{y_j \in [z_j, z_{j+1}]\}_{j=1}^{N-n+1}$. При этом $\operatorname{sign} h^{(n)}(y_j) = (-1)^{j+n+1}\alpha$. Этот набор точек и будет искомым. Осталось отметить, что $\operatorname{sign} h^{(n)}(y_1) = (-1)^{1+n+1}\alpha = (-1)^n \operatorname{sign} h(x_0)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть даны набор точек* $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ *и число* $k \in \overline{0, n}$. *Пусть функция* $h \in AC^{n-1}$ *такова, что* $h(x_i) = 0$ *при всех индексах* $i \ne k$, *а в точке* x_k *выполняется неравенство* $h(x_k) > 0$. *Тогда найдется такая точка* $\theta \in [x_0, x_n]$, *в которой функция* $h^{(n)}$ *существует, причем верно равенство*

$$\operatorname{sign} h^{(n)}(\theta) = (-1)^{n-k}.$$

Доказательство. Рассмотрим отдельно случай $k = n$. Применив теорему Лагранжа к функции h, найдем n последовательных точек. В первых $n-1$ из них h' равна нулю, а в последней положительна. Снова применив эту теорему уже к функции h', найдем $n-1$ точек с аналогичными свойствами для функции h''. Продолжая этот процесс, найдем последовательные точки y_1 и y_2 такие, что $0 = h^{(n-1)}(y_1) < h^{(n-1)}(y_2)$. Применив лемму 2 к функции $h^{(n-1)}$, найдем точку θ с искомыми свойствами.

Теперь разберем случай $k < n$. Применив теорему Лагранжа к функции h, получим n последовательных точек: в первых $k-2$ точках функция h' равна нулю, в $k-1$-й больше нуля, в k-й меньше нуля, во всех последующих равна нулю. Продолжим этот процесс, применяя теорему Лагранжа к функциям h', h'', и т. д.

Схематически этот процесс можно изобразить так:

$$
\begin{array}{llllllllllllllll}
x: & x_0 & & \dots & & x_{k-1} & & x_k & & x_{k+1} & & \dots & & \dots & & x_n \\
\operatorname{sign} h: & 0 & & \dots & & 0 & & 1 & & 0 & & \dots & & 0 & & 0 \\
\operatorname{sign} h': & & 0 & & 0 & & 1 & & -1 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
\dots & & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \\
\operatorname{sign} h^{(k)}: & & & & 1 & & -1 & & \dots & & \dots & & \dots & & & \\
\operatorname{sign} h^{(k+1)}: & & & & & -1 & & \dots & & \dots & & \dots & & & & \\
\dots & & & & & & \dots & & \dots & & \dots & & & & & \\
(-1)^{n-1-k} \operatorname{sign} h^{(n-1)}: & & & & & & & 1 & & \le 0 & & & & & & \\
(-1)^{n-k} \operatorname{sign} h^{(n)}: & & & & & & & & 1 & & & & & & &
\end{array}
$$

На k-м шаге процесса получим ровно $n+1-k$ последовательных точек. В первой из них функция $h^{(k)}$ положительна. На $(k+1)$-м шаге получим для функции $h^{(k+1)}$ ровно $n+1-(k+1)$ точек, в первой из которых она будет отрицательна, и т. д. В конце концов для функции $h^{(n-1)}$ будут точки y_1 и y_2 со свойствами $(-1)^{n-1-k} \operatorname{sign} h^{(n-1)}(y_1) > 0$ и $(-1)^{n-1-k} \operatorname{sign} h^{(n-1)}(y_2) \le 0$. Применив лемму 2, получим точку θ из отрезка $[x_0, x_n]$, в которой выполняется равенство $\operatorname{sign}(h^{(n)}(\theta)) = (-1)^{n-k}$. Лемма доказана.

Определение. Пусть класс функций Q содержится в классе $C[a,b]$, а функция f задана на наборе точек $x_0 < x_1 < \dots < x_k$. Будем говорить, что *функция f не лежит в классе функций Q на этом наборе точек*, если в Q нет функций, одновременно интерполирующих значения $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_k)$. Это условие будет обозначаться следующим образом: $f \notin Q(x_0, x_1, \dots, x_k)$.

Условия $f \notin \mathscr{D}^n(x_0, x_1, \dots, x_k)$ и $f \in \mathscr{D}^n(x_0, x_1, \dots, x_k)$, очевидно, эквивалентны условиям $E(f; \mathscr{D}^n; x_1, x_1, \dots, x_k) > 0$ и $E(f; \mathscr{D}^n; x_1, x_1, \dots, x_k) = 0$ соответственно.

Определение. Пусть класс функций Q содержится в $C[a,b]$. Обозначим множество всех ЭНП для функции f в классе Q через

$$A(f; Q) = \{g \in Q : \|f - g\| = E(f; Q)\}.$$

Определение. Пусть даны набор точек $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ и некоторый класс функций Q, содержащийся в классе $C[x_0, x_k]$. Обозначим множество всех ЭНП для функции f в классе Q на данном наборе точек через

$$A(f; Q; x_0, \dots, x_k) = \{g \in Q : \|f - g\|_{C\{x_0, \dots, x_k\}} = E(f; Q; x_0, \dots, x_k)\}.$$

Лемма 5. *Пусть даны набор точек $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ из отрезка $[a,b]$ и функция $f \in C[a,b] \setminus \mathscr{D}^n(x_0, x_1, \dots, x_k)$. Пусть даны также $g \in \mathscr{D}^n$ и $h \in AC^{n-1}[a,b]$ такие, что*

1) функция $h^{(n)}$ ограничена;

2) если в точке x_i выполняется условие $(f-g)(x_i) = \|f-g\|_{C\{x_0,\dots,x_k\}}$, то в этой точке $h(x_i) > 0$, и если $(f-g)(x_i) = -\|f-g\|_{C\{x_0,\dots,x_k\}}$, то $h(x_i) < 0$;

3) существует константа $\delta > 0$ такая, что если для какой-то точки t_0 выполняется равенство $\overline{\lim\limits_{x\to t_0}} |g^{(n)}(x)| = 1$, то в δ-окрестности этой точки выполняется неравенство $\operatorname{sign} h^{(n)} \cdot \operatorname{sign} g^{(n)} \le 0$.

Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что для функции $g_\varepsilon = g + \varepsilon h$ выполнены условия $g_\varepsilon \in \mathscr{D}^n$ и $\|f - g_\varepsilon\|_{C\{x_0,\dots,x_k\}} < \|f-g\|_{C\{x_0,\dots,x_k\}}$.

Доказательство. Лемма достаточно стандартна, поэтому приведем лишь эскиз доказательства. Поскольку функция $h^{(n)}$ ограничена, существует такое число $\varepsilon_1 > 0$, что $(g + \alpha h) \in \mathscr{D}^n$ при $\alpha \in [0, \varepsilon_1]$. Кроме того, поскольку сама функция h также ограничена, существует число $\varepsilon_2 > 0$ такое, что при $\alpha \in (0, \varepsilon_2]$ выполняется неравенство

$$\|f - (g + \alpha h)\|_{C\{x_0,\dots,x_k\}} < \|f - g\|_{C\{x_0,\dots,x_k\}}.$$

Число $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ и дает утверждение леммы.

Далее через $f[x_0, \dots, x_n]$ будем обозначать разделенную разность порядка n от функции f, построенную по точкам $x_0, \dots, x_n$:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \left[\prod_{k=0; k\ne i}^{n} (x_i - x_k) \right]^{-1}. \tag{5}$$

Известно, что

$$\Delta_h^n(f, x) = n! h^n f[x, x+h, \dots, x+nh], \tag{6}$$

кроме того, если $f \in C^n$, то существует такая точка $\theta \in [x_0, x_n]$, что

$$n! f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f^{(n)}(\theta). \tag{7}$$

Доказательства утверждений (6) и (7) можно найти, например, в [3].

Определение. Обозначим через P^n класс полиномов степени не выше n, а через $\mathscr{P}\mathscr{D}^n = P^n \cap \mathscr{D}^n$ — подкласс полиномов, лежащих в $\mathscr{D}^n$.

Полином $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ лежит в $\mathscr{P}\mathscr{D}^n$ тогда и только тогда, когда $|a_n| \le \frac{1}{n!}$.

Лемма 6. *Пусть дан набор точек $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, на котором задана произвольная функция f. Если $|n! f[x_0, \dots, x_n]| \le 1$, то $f \in \mathscr{D}^n(x_0, \dots, x_k)$.*

Доказательство. Построим интерполяционный полином $p \in P^n$, заданный условиями $p(x_i) = f(x_i)$ при $i \in \overline{0, n}$. Очевидно, что

$$|n! p[x_0, \dots, x_n]| = |n! f[x_0, \dots, x_n]| \le 1,$$

следовательно, $|p^{(n)}| \le 1$, т. е. $p \in \mathscr{D}^n$, откуда и вытекает включение $f \in \mathscr{D}^n(x_0, \dots, x_n)$.

Лемма 7. *Пусть даны набор точек $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ и номер $i \in \overline{0,n}$. Тогда*

$$\prod_{k=0,k\neq i}^{n} (x_i - x_k) = (-1)^{n+i} \prod_{k=0,k\neq i}^{n} |x_i - x_k|.$$

Доказательство. В самом деле,

$$\prod_{k=0,k\neq i}^{n} (x_i - x_k) = \prod_{k=0}^{i-1} |x_i - x_k| (-1)^{n-i} \prod_{k=i+1}^{n} |x_i - x_k| = (-1)^{n+i} \prod_{k=0,k\neq i}^{n} |x_i - x_k|.$$

Лемма 8. *Пусть даны набор точек $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ и функция f, не принадлежащая классу $\mathscr{D}^n(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Пусть $\alpha = \operatorname{sign} f[x_0, \dots, x_n]$. Тогда*

1) *множество $A(f; \mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n)$ содержит ровно один элемент g_*;*

2) *на отрезке $[x_0, x_n]$ выполняется тождество $g_*^{(n)} \equiv \alpha$;*

3) *при $i \in \overline{0,n}$ выполняются равенства*

$$(f - g_*)(x_i) = \alpha(-1)^{n+i} E(f; \mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n).$$

Доказательство. Сначала рассмотрим приближение функции f классом $\mathscr{P}\mathscr{D}^n$. Отметим, что если $g \in P^n$, $h \in P^n$ и функции f, g и h удовлетворяют лемме 5, то функция g_ε, получающаяся в результате применения этой леммы, является полиномом и лежит в классе $\mathscr{P}\mathscr{D}^n$ ближе к функции f, чем полином g. Это означает, что $g \notin A(f; \mathscr{P}\mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n)$. Пользуясь этим наблюдением, установим некоторые необходимые условия на полиномы из класса $A(f; \mathscr{P}\mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n)$.

Условие 1. *Если $g \in A(f; \mathscr{P}\mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n)$, то*

$$g^{(n)} \equiv 1 \quad (\text{или } -1). \tag{8}$$

В самом деле, предположим противное: пусть $|g^{(n)}| \equiv r < 1$. Построим интерполяционный полином h из класса P^n, однозначно определяемый условиями $h(x_i) = (-1)^i \operatorname{sign}((f - g)(x_0))$ при $i \in \overline{0,n}$. Функции f, g и h удовлетворяют лемме 5, откуда $g \notin A(f; \mathscr{P}\mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n)$; получили противоречие.

Условие 2. *Для любого полинома g из класса $A(f; \mathscr{P}\mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n)$ все величины уклонения $\delta_i = g(x_i) - f(x_i)$ одинаковы по модулю, отличны от нуля и их знаки чередуются (т. е. $\operatorname{sign} \delta_i = -\operatorname{sign} \delta_{i+1}$), причем имеет место соотношение*

$$\operatorname{sign}((f - g)(x_0)) = (-1)^n g^{(n)}(x_0). \tag{9}$$

В самом деле, все величины δ_i не могут быть одновременно равны нулю (иначе $f \in \mathscr{D}^n(x_0, x_1, \dots, x_n)$), значит, хотя бы одна из них отлична от нуля. Пусть теперь не все величины $|\delta_i|$ равны друг другу, тогда существует номер j такой, что $|\delta_j| = \max\limits_{i \in \overline{0,n}} |\delta_i| - r$, где $r > 0$. Построим интерполяционный полином $h \in P^{n-1}$, однозначно определяемый условиями $h(x_i) = \operatorname{sign}(\delta_i)$ при $i \neq j$. Применив лемму 5 к функциям f, g и h, получим, что $g \notin A(f; \mathscr{P}\mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n)$; противоречие. Таким образом, все числа δ_i имеют одинаковый модуль и отличны от нуля.

Пусть количество таких номеров i, что выполняется неравенство $\delta_i \delta_{i+1} < 0$, равно m. Предположим, что знаки чисел δ_i не везде чередуются, т. е. $m < n$.

Построим интерполяционный полином $h \in P^m$, заданный следующими условиями: $h\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) = 0$, если $\delta_i\delta_{i+1} < 0$. Получим ровно m условий, в качестве последнего условия возьмем условие $h(x_0) = \operatorname{sign}((f-g)(x_0))$. Полином h обладает следующим свойством: $h(x_i)\delta_i < 0$ для всех номеров i. Снова применив лемму 5, находим, что $g \notin A(f; \mathscr{P}\mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n)$; противоречие. Следовательно, знаки чисел δ_i чередуются.

Покажем, что выполнение условия (9) также необходимо. В самом деле, построим интерполяционный полином $h \in P^n$, однозначно определяемый условиями $h(x_i) = \operatorname{sign}((f-g)(x_i))$. Учитывая доказанное чередование знаков величин $h(x_i)$ и используя лемму 3, получаем, что

$$\operatorname{sign} h^{(n)} = (-1)^n \operatorname{sign} h(x_0) = \operatorname{sign}((f-g)(x_0)).$$

Если равенство (9) нарушено, то $\operatorname{sign} h^{(n)} = -\operatorname{sign} g^{(n)}$, а это, в свою очередь, означает, что функции f, g и h удовлетворяют условиям леммы 5, и мы опять приходим к противоречию. Таким образом, условие 2 является необходимым для полиномов из класса $A(f; \mathscr{P}\mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n)$.

Условие 3. *Для любого $g \in A(f; \mathscr{P}\mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n)$ выполняется тождество*

$$g^{(n)} \equiv \alpha. \tag{10}$$

Лемма 6 гарантирует, что $\alpha \neq 0$. Для доказательства (10) мы используем соотношения (5), (9) и лемму 7:

$$\begin{aligned}(f-g)[x_0, \dots, x_n] &= \sum_{i=0}^{n} (f-g)(x_i) \left[\prod_{k=0, k\neq i}^{n} (x_i - x_k) \right]^{-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (f-g)(x_0) \left[(-1)^{n+i} \prod_{k=0, k\neq i}^{n} |x_i - x_k| \right]^{-1} \\ &= g^{(n)}(x_0) \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{k=0, k\neq i}^{n} |x_i - x_k| \right]^{-1} = g^{(n)}(x_0) \cdot C, \quad \text{где } C > 0.\end{aligned}$$

Это значит, что $\operatorname{sign}((f-g)[x_0, \dots, x_n]) = \operatorname{sign}(g[x_0, \dots, x_n])$, откуда и следует тождество (10).

Сводя вместе (9) и (10), получаем соотношение

$$(f-g)(x_i) = (-1)^{n+i} \alpha E(f; \mathscr{P}\mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n). \tag{11}$$

Учитывая полученные необходимые условия 1–3, убеждаемся, что полином g действительно существует и единствен, его младшие коэффициенты и величину уклонения E можно найти, решив систему линейных уравнений вида $f(x_i) - g(x_i) = (-1)^{n+i}\alpha E$.

Покажем, что найденный полином g входит в класс $A(f; \mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n)$. Предположим противное, тогда существует функция $g_* \in \mathscr{D}^n$, которая на данном наборе точек приближает функцию f лучше, чем полином g. Это значит, что

$$(-1)^{n+i}\alpha(f-g)(x_i) > (-1)^{n+i}\alpha(f-g_*)(x_i),$$

т. е. $(g_* - g)(x_i)(-1)^{n+i}\alpha > 0$. Отсюда $\operatorname{sign}((g_* - g)(x_i)) = (-1)^{n+i}\alpha$. Применив к функции $g_* - g$ лемму 3, найдем точку $y_1 \in (x_0, x_n)$ такую, что

$$\operatorname{sign}((g_* - g)^{(n)}(y_1)) = (-1)^n \operatorname{sign}((g_* - g)(x_0)) = \alpha.$$

В силу тождества (10) это равенство можно переписать как $\operatorname{sign}\bigl(g_*^{(n)}(y_1)-\alpha\bigr)=\alpha$. Значит, $\bigl|g_*^{(n)}(y_1)\bigr|>1$, что противоречит условию $g_*\in\mathscr{D}^n$.

Мы показали, что $g\in A(f;\mathscr{D}^n;x_0,\dots,x_n)$. Установим теперь, что других элементов в этом классе нет. Пусть в нем существует другая функция g_*. Очевидно, что $g_*(x_i)=g(x_i)$ для всех $i\in\overline{0,n}$. Поскольку функции g и g_* непрерывны и различны, существует точка $\theta\in(x_0,x_n)$ такая, что $g_*(\theta)\neq g(\theta)$. Пусть точка θ лежит в интервале (x_i,x_{i+1}). Применив лемму 4 к функции $h=g_*-g$ на наборе точек $x_0,\dots,x_{i-1}$, θ, $x_{i+1},\dots,x_n$ и наборе $x_0,\dots,x_i$, θ, $x_{i+2},\dots,x_n$, получим точки θ_1 и θ_2 из интервала (x_0,x_n). В одной из них $h^{(n)}>0$, в другой $h^{(n)}<0$. Так как $\bigl|g_*^{(n)}\bigr|=|\alpha+h^{(n)}|$, в одной из этих точек $\bigl|g_*^{(n)}\bigr|>1$, что противоречит условию $g_*\in\mathscr{D}^n$. Значит, полином g — единственный элемент множества $A(f;\mathscr{D}^n;x_0,\dots,x_n)$.

Мы доказали п. 1 леммы. П. 2 выполняется по построению полинома g. Доказанное для полинома g соотношение (11) и составляет содержание п. 3 леммы. Лемма доказана.

Замечание. Имеет место следующее более общее, чем лемма 8, утверждение. Пусть $l\geq 0$, даны набор точек $x_0<x_1<\dots<x_{n+l}$ и функция f, не лежащая в классе $\mathscr{D}^n(x_0,x_1,\dots,x_{n+l})$. Функция g_* принадлежит классу $A(f;\mathscr{D}^n;x_0,\dots,x_{n+l})$ тогда и только тогда, когда найдется подмножество этого набора точек $x_{i_1}<\dots<x_{i_k}$ (здесь $k\geq n+1$) — альтернанс для функций g_* и f в пространстве $C\{x_0,\dots,x_{n+l}\}$ такой, что на отрезке $[x_{i_1},x_{i_k}]$ функция g_* совпадает с идеальным сплайном степени n, имеющим ровно $k-n-1$ узлов, причем выполнится равенство

$$\operatorname{sign}((f-g_*)(x_{i_1}))=(-1)^n\operatorname{sign}\bigl(g_*^{(n)}(x_{i_1})\bigr).$$

Это утверждение можно доказать, слегка модифицировав доказательство теоремы 2 в работе [1], но в данной работе оно не понадобится, поэтому доказывать его здесь не будем. Определения понятий идеального сплайна и чебышевского альтернанса можно найти в монографии [2].

Лемма 9. *Пусть на наборе точек $x_0<x_1<\dots<x_n$ задана произвольная функция f. Тогда множество $A(f;\mathscr{D}^n;x_0,\dots,x_n)$ непусто и выполнены следующие утверждения:*

(a) *если $|n!f[x_0,\dots,x_n]|\leq 1$, то $E(f;\mathscr{D}^n;x_0,\dots,x_n)=0$;*

(b) *если $|n!f[x_0,\dots,x_n]|>1$, то $E(f;\mathscr{D}^n;x_0,\dots,x_n)>0$.*

Доказательство. П. (a) является прямым следствием леммы 6. По этой лемме $f\in\mathscr{D}^n(x_0,\dots,x_n)$, откуда немедленно получаем, что $E(f;\mathscr{D}^n;x_0,\dots,x_n)=0$ и $p\in A(f;\mathscr{D}^n;x_0,\dots,x_n)$ (здесь p — полином, построенный в лемме 6).

Докажем п. (b). Нам дано, что $|n!f[x_0,\dots,x_n]|>1$. Без ограничения общности можно считать, что $f[x_0,\dots,x_n]>0$. Построим интерполяционный полином $p_{n-1}\in P^{n-1}$, однозначно задаваемый условиями $p_{n-1}(x_i)=f(x_i)$ при $i\in\overline{0,n-1}$. Поскольку $p_{n-1}^{(n)}\equiv 0$, для любой функции f верно утверждение: функции $f(x)$ и $f(x)-p_{n-1}(x)$ лежат или не лежат в классе $\mathscr{D}^n$ одновременно. Кроме того, выполняется очевидное равенство

$$E(f;\mathscr{D}^n;x_0,\dots,x_n)=E(f-p_{n-1};\mathscr{D}^n;x_0,\dots,x_n).$$

Без ограничения общности можно считать, что выполняются равенства $f(x_0)=f(x_1)=\dots=f(x_{n-1})=0$ (иначе мы вычтем из функции f полином

p_{n-1}). Тогда по формуле (5) выполняется соотношение

$$f(x_n) = f[x_0, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) > 0.$$

Построим интерполяционный полином $p \in P^n$, заданный условиями $p^{(n)} \equiv 1$ и $p(x_i) = f(x_i) = 0$ при $i \in \overline{0, n-1}$. В точке x_n получим

$$p(x_n) = \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i).$$

Видно, что $f(x_n) > p(x_n)$. Покажем, что $f \notin \mathscr{D}^n(x_0, \dots, x_n)$. Предположим противное: пусть существует функция $g \in \mathscr{D}^n$, интерполирующая все значения $f(x_i)$. Тогда функция $h = g - p$ равна нулю в точках $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ и больше нуля в точке x_n. По лемме 4 существует точка θ, в которой функция $h^{(n)}$ строго больше нуля. С другой стороны, поскольку $g \in \mathscr{D}^n$, то $h^{(n)} = g^{(n)} - p^{(n)} = g^{(n)} - 1 \le 0$; противоречие. Значит, $f \notin \mathscr{D}^n(x_0, \dots, x_n)$. По лемме 8 ЭНП для функции f существует и единствен и $E(f; \mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n) > 0$. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 2.

Лемма 10. *Пусть на наборе точек $x_0 < \dots < x_n$ задана функция f такая, что $|n! f[x_0, \dots, x_n]| > 1$. Тогда*

$$E(f; \mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{k=0, k \ne i}^{n} |x_i - x_k| \right]^{-1} \right)^{-1} \left(|f[x_0, \dots, x_n]| - \frac{1}{n!} \right).$$

Доказательство. По лемме 9 ЭНП для функции f существует и является полиномом, обозначим его через p. Из леммы 8 следует, что

$$p^{(n)} \equiv \operatorname{sign}(f[x_0, \dots, x_n]) = \alpha. \tag{12}$$

Значит, имеют место равенства $p[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{\alpha}{n!}$ и

$$|(f - p)[x_0, x_1, \dots, x_n]| = |f[x_0, x_1, \dots, x_n]| - \frac{1}{n!}. \tag{13}$$

По лемме 8 выполняется равенство

$$(-p)(x_i) = \alpha (-1)^{n+i} E(f; \mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n). \tag{14}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |(f - p)[x_0, x_1, \dots, x_n]| &= \left| \sum_{i=0}^{n} \alpha (-1)^{n+i} E(f; \mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n) \left[\prod_{k=0, k \ne i}^{n} (x_i - x_k) \right]^{-1} \right| \\ &= E(f; \mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n) \left| \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} \left[\prod_{k=0, k \ne i}^{n} (x_i - x_k) \right]^{-1} \right|. \end{aligned}$$

Применив равенство (13) и лемму 7, получим

$$|f[x_0, x_1, \dots, x_n]| - \frac{1}{n!} = E(f; \mathscr{D}^n; x_0, \dots, x_n) \left(\sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{k=0, k \ne i}^{n} |x_i - x_k| \right]^{-1} \right).$$

Лемма доказана.

Следствие 2. *Если в условиях предыдущей леммы точки x_i взяты с равномерным шагом h, то выражение для $E(f;\mathscr{D}^n;x_0,\dots,x_n)$ принимает более простой вид:*

$$E(f;\mathscr{D}^n;x,x+h,\dots,x+nh)=\frac{h^n}{2^n}(|n!f[x,x+h,\dots,x+nh]|-1).$$

Доказательство. В силу (3) и (14) легко видеть, что имеет место равенство

$$|\Delta_h^n(f-p,x)|=\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(f-p)(x+(n-k)h)\right|$$
$$=\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(-1)^{n-k}(-1)^n\alpha E(f;\mathscr{D}^n;x,x+h,\dots,x+nh)\right|$$
$$=E(f;\mathscr{D}^n;x,x+h,\dots,x+nh)\left|\alpha\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right|=2^nE(f;\mathscr{D}^n;x,x+h,\dots,x+nh).$$

Применив соотношения (6) и (12), получим

$$E(f;\mathscr{D}^n;x,x+h,\dots,x+nh)=\frac{|h^n n!(f-p)[x,x+h,\dots,x+nh]|}{2^n}$$
$$=\frac{h^n}{2^n}(|n!f[x,x+h,\dots,x+nh]|-1).$$

Следствие доказано.

Лемма 11. *Если $f\in C[a,b]\setminus\mathscr{D}^n$, то*
(a) *верхняя грань $\sup\limits_{h\in[0,\frac{b-a}{n}]}[\omega_n(f,h)-h^n]$ достигается в некоторой точке h_0;*
(b) *в этой точке выполняется неравенство $\omega_n(f,h_0)-h_0^n>0$;*
(c) *найдется точка x_0 такая, что $\omega_n(f,h_0)=\left|\Delta_{h_0}^n(f,x_0)\right|$.*

Доказательство. П. (a) выполняется, поскольку $\omega_n(f,h)-h^n$ — непрерывная по h функция, заданная на конечном отрезке.

Покажем, что выполняется п. (b). В самом деле, пусть это не так, тогда из определения числа h_0 следует, что для любого числа $h\ge 0$ выполнено неравенство

$$\omega_n(f,h)\le h^n. \tag{15}$$

В обозначениях монографии [4] неравенство (15) можно записать в виде $f\in H_n^{t^n}[a,b]$ (здесь $\omega(t)=t^n$, $\overline{\omega}(t)=t$, $r=n-1$). Тогда по теореме 1 из [4, с. 191] получаем включение $f\in W^{n-1}H_1^t[a,b]$, т. е. $f^{(n-1)}\in\mathscr{D}^1[a,b]$, откуда $f\in AC^{n-1}[a,b]$.

Легко видеть, что из справедливости неравенства $|f^{(n)}(x_0)|>1$ в какой-то точке x_0 по формуле (7) немедленно следует справедливость неравенства

$$|n!f[x,x+h,\dots,x+nh]|>1$$

в некоторой окрестности этой точки x_0. С другой стороны, по неравенству (15) для любых чисел x и h из области определения выполняется соотношение

$$|n!f[x,x+h,\dots,x+nh]|=\frac{|\Delta_h^n(f,x)|}{h^n}\le\frac{\omega_n(f,h)}{h^n}\le 1.$$

Это значит, что из неравенства (15) следует неравенство $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ в тех точках отрезка $[a,b]$, где функция $f^{(n)}$ существует.

Таким образом, из справедливости неравенства (15) вытекает включение $f \in \mathscr{D}^n$, что противоречит условиям леммы. Мы доказали, что п. (b) леммы выполняется.

Докажем п. (c) леммы. По определению

$$\omega_n(f,h_0) = \sup_{\substack{\delta\in[0,h_0],\\ x\in[a,b-n\delta]}} |\Delta_\delta^n(f,x)|.$$

Функция $|\Delta_\delta^n(f,x)|$ непрерывна как функция двух переменных x, δ на компактной области определения, следовательно, она достигает своего максимума на каких-то парах x_*, δ_*, т. е. $\omega_n(f,h_0) = |\Delta_{\delta_*}^n(f,x_*)|$. По определению функции ω_n имеем $|\Delta_{\delta_*}^n(f,x_*)| \leq \omega_n(f,\delta_*)$. Предположим, что п. (c) не выполняется, т. е. для любых найденных пар точек (x_*,δ_*) выполняется неравенство $\delta_* < h_0$. Тогда из монотонности функции ω_n и неравенства $\omega_n(f,h_0) \leq \omega_n(f,\delta_*)$ следует, что $\omega_n(f,h_0) = \omega_n(f,\delta_*)$, откуда

$$\omega_n(f,\delta_*) - \delta_*^n = \omega_n(f,h_0) - \delta_*^n > \omega_n(f,h_0) - h_0^n,$$

что противоречит определению числа h_0. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. В условиях теоремы справедлива лемма 11, что дает нам числа x_0 и h_0. По этой лемме выполняется неравенство $\omega_n(f,h_0) - (h_0)^n > 0$. Из него вытекает неравенство

$$|n!f[x_0, x_0+h_0, \dots, x_0+nh_0]| - 1 = \frac{|\Delta_{h_0}^n(f,x_0)|}{h_0^n} - 1 = \frac{\omega_n(f,h_0) - h_0^n}{h_0^n} > 0,$$

что дает нам право применить следствие из леммы 10:

$$\begin{aligned} U_{n+1}(f;\mathscr{D}^n) &\geq E(f;\mathscr{D}^n; x_0, x_0+h_0, \dots, x_0+nh_0) \\ &= \frac{(h_0)^n}{2^n}(|n!f[x,\dots,x+nh_0]| - 1)\frac{1}{2^n}(|\Delta_{h_0}^n(f,x_0)| - h_0^n) \\ &= \frac{1}{2^n}\sup_h[\omega_n(f,h) - h^n]. \qquad (16) \end{aligned}$$

Мы показали, что

$$U_{n+1}(f;\mathscr{D}^n) \geq \frac{1}{2^n}\sup_h[\omega_n(f,h) - h^n] > 0.$$

По определению величины $U_{n+1}(f;\mathscr{D}^n)$ получаем, что для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ существует пара чисел $x_\varepsilon, h_\varepsilon$ такая, что

$$E(f;\mathscr{D}^n; x_\varepsilon, x_\varepsilon+h_\varepsilon, \dots, x_\varepsilon+nh_\varepsilon) \geq U_{n+1}(f;\mathscr{D}^n) - \varepsilon > 0.$$

Из неравенства $E(f;\mathscr{D}^n; x_\varepsilon, x_\varepsilon+h_\varepsilon, \dots, x_\varepsilon+nh_\varepsilon) > 0$ и леммы 9 следует, что

$$n!|f[x_\varepsilon, x_\varepsilon+h_\varepsilon, \dots, x_\varepsilon+nh_\varepsilon]| > 1,$$

и мы можем применять лемму 10. По следствию из леммы 10 получаем равенство

$$E(f;\mathscr{D}^n; x_\varepsilon, x_\varepsilon+h_\varepsilon, \dots, x_\varepsilon+nh_\varepsilon) = \left(\frac{h_\varepsilon}{2}\right)^n (|n!f[x_\varepsilon, x_\varepsilon+h_\varepsilon, \dots, x_\varepsilon+nh_\varepsilon]| - 1).$$

Отсюда

$$|n!f[x_\varepsilon, \dots, x_\varepsilon + nh_\varepsilon]| = \left(\frac{2}{h_\varepsilon}\right)^n E(f; \mathscr{D}^n; x_\varepsilon, \dots, x_\varepsilon + nh_\varepsilon) + 1$$

$$\geq \left(\frac{2}{h_\varepsilon}\right)^n [U_{n+1}(f; \mathscr{D}^n) - \varepsilon] + 1.$$

Используя соотношение (6), перепишем это неравенство в виде

$$|\Delta^n_{h_\varepsilon}(f, x_\varepsilon)| \geq 2^n [U_{n+1}(f; \mathscr{D}^n) - \varepsilon] + h^n_\varepsilon.$$

Поскольку $\omega_n(f, h_\varepsilon) \geq |\Delta^n_{h_\varepsilon}(f, x_\varepsilon)|$, выполняется неравенство $\omega_n(f, h_\varepsilon) - h^n_\varepsilon \geq 2^n[U_{n+1}(f; \mathscr{D}^n) - \varepsilon]$, откуда

$$\frac{1}{2^n} \sup_h [\omega_n(f, h) - h^n] \geq U_{n+1}(f; \mathscr{D}^n) - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Сопоставив это неравенство с (16), получаем требуемое равенство. Теорема 2 доказана.

5. Доказательство теоремы 3. Пусть приближаемая функция $f \in C[a, b]$ фиксирована. Для краткости формулировок дадим слегка нестандартное определение чебышевского альтернанса.

Определение. Набор точек $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ из отрезка $[a, b]$ назовем *альтернансом* для функции $g \in \mathscr{D}^n$, если $(f - g)(x_i) = \beta(-1)^{i+1}\|f - g\|$, где $\beta = \operatorname{sign}(f - g)(x_1)$.

Далее нам понадобится следующая характеризация ЭНП в классе $\mathscr{D}^2$.

Теорема 4. *Пусть $f \in C[a, b] \backslash \mathscr{D}^2$. Для того чтобы выполнялось включение $g_* \in A(f; \mathscr{D}^2)$, необходимо и достаточно, чтобы на отрезке $[a, b]$ нашлись альтернанс для функции g_* из s точек $\{x_j\}_{j=1}^s$ ($s \geq 3$) и $s-1$ точек $t_0 < t_1 < \dots < t_{s-2}$ такие, что выполняются следующие условия:*

1) *справедливы включения $x_1 \in [t_0, t_1)$; $x_s \in (t_{s-3}, t_{s-2}]$;*
2) *справедливы включения $x_i \in (t_{i-2}, t_{i-1})$ при $i \in \overline{2, s-1}$;*
3) *при $i \in \overline{0, s-3}$ выполняются тождества*

$$g''_*|_{(t_i, t_{i+1})} \equiv (-1)^i \operatorname{sign}((f - g_*)(x_1)).$$

Эта теорема доказана в работе [1].

Определение. Альтернанс, удовлетворяющий всем условиям теоремы 4, для краткости будем называть *жестким звеном*.

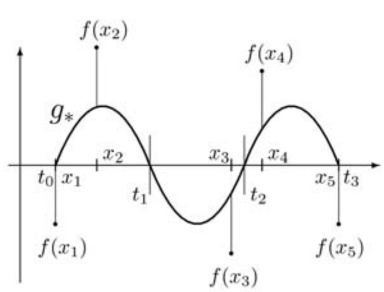

Рис. 2.

На рис. 2 изображен пример функции g_*, удовлетворяющей теореме 4 при $s = 5$, а также показаны значения приближаемой функции f в точках жесткого звена. Из теоремы следует, что на отрезке $[t_0, t_s]$ функция g_* является идеальным сплайном степени 2 дефекта 1 с узлами в точках t_i.

При доказательстве теоремы 3 мы будем опускать обозначения приближаемой функции f и приближающего класса $\mathscr{D}^2$, для этого введем следующие обозначения: $E = E(f) = E(f; \mathscr{D}^2)$, $E_3 = E_3(f) = E_3(f; \mathscr{D}^2)$, $U_3 = U_3(f) = U_3(f; \mathscr{D}^2)$.

Докажем соотношение (а) теоремы 3. Осталось доказать только неравенство

$$\frac{1}{2}E < E_3. \tag{17}$$

Возьмем произвольную функцию g_* из класса $A(f;\mathscr{D}^2)$. По теореме 4 для функции g_* найдется хотя бы одно жесткое звено, состоящее из s точек альтернанса $\{x_i\}_{i=1}^s$, расположенных на отрезке $[t_0, t_{s-2}]$. Рассмотрим три возможных случая: $s=3$, $s=4$ и $s \geq 5$.

В случае $s=3$ жесткое звено состоит из трех точек x_1, x_2 и x_3, расположенных на отрезке $[t_0,t_1]$, а функция g_* на отрезке $[t_0,t_1]$ является многочленом второй степени. Лемма 8 дает включение $g_* \in A(f;\mathscr{D}^2;x_1,x_2,x_3)$, откуда получаем равенство $E(f;\mathscr{D}^2;x_1,x_2,x_3)=E$, а это значит, что $E=E(f;\mathscr{D}^2;x_1,x_2,x_3) \leq E_3$, и неравенство (17) выполняется.

В случае, когда $s=4$, жесткое звено состоит из четырех точек, расположенных на отрезке $[t_0,t_2]$, причем $x_1<x_2<t_1<x_3<x_4$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\operatorname{sign}\bigl(g_*^{(2)}\bigr) \equiv -1 \quad \text{при } x \in (t_0,t_1). \tag{18}$$

На рис. 3 приведен пример такой функции g_*.

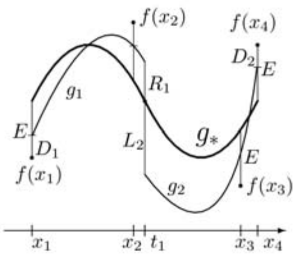

Рис. 3.

Рассмотрим величины

$$D_1 = E(f;\mathscr{D}^2;x_1,x_2,t_1),\ D_2 = E(f;\mathscr{D}^2;t_1,x_3,x_4).$$

В силу неравенства (1) выполняются соотношения $D_1 \leq E_3$ и $D_2 \leq E_3$. Пусть

$$g_1 \in A(f;\mathscr{D}^2;x_1,x_2,t_1), \quad g_2 \in A(f;\mathscr{D}^2;t_1,x_3,x_4).$$

Введем величины

$$R_1 = g_1(t_1)-g_*(t_1), \quad L_2 = g_*(t_1)-g_2(t_1).$$

Выпишем два очевидных неравенства:

$$g_1(x_1)-g_*(x_1) = [g_1(x_1)-f(x_1)]+[f(x_1)-g_*(x_1)] \leq D_1 - E = -(E-D_1),$$

$$g_1(x_2)-g_*(x_2) = [g_1(x_2)-f(x_2)]+[f(x_2)-g_*(x_2)] \geq -D_1 + E = (E-D_1).$$

Эти два неравенства вместе с (18) дают возможность применить для точек x_1, x_2, t_1 лемму 1 и следствие из нее. Неравенство (4) дает нам соотношение

$$R_1 > g_1(x_2)-g_*(x_2) = (E-D_1) \geq E-E_3. \tag{19}$$

Кроме того,

$$R_1+L_2 = (g_1(t_1)-g_*(t_1))+(g_*(t_1)-g_2(t_1)) = (g_1(t_1)-f(t_1))+(f(t_1)-g_2(t_1)) \leq 2E_3. \tag{20}$$

Используя замену переменных и применяя лемму 1 на тройке точек t_1, x_3, x_4, по неравенству (4) получаем соотношение

$$L_2 > (E-D_2) \geq E-E_3. \tag{21}$$

С учетом (19)–(21) приходим к соотношению $2(E-E_3) < R_1+L_2 \leq 2E_3$, откуда $\frac{1}{2}E < E_3$. Значит, и в этом случае неравенство (17) справедливо.

В случае $s \geq 5$ жесткое звено лежит на объединении $s-2$ смежных интервалов (t_i, t_{i+1}), причем на крайних интервалах расположено по две точки из жесткого звена, а на каждом внутреннем по одной. Рассмотрим следующие величины:

$$D_1 = E(f; \mathscr{D}^2; x_1, x_2, t_1),\ D_2 = E(f; \mathscr{D}^2; t_1, x_3, t_2), \dots,$$

$$D_{s-3} = E(f; \mathscr{D}^2; t_{s-4}, x_{s-2}, t_{s-3}),\ D_{s-2} = E(f; \mathscr{D}^2; t_{s-3}, x_{s-1}, x_s).$$

Пусть эти величины достигаются на функциях $g_1, g_2, \dots, g_{s-2}$ соответственно. Без ограничения общности можно считать, что выполнено равенство (18). Рассмотрим величины, характеризующие уклонение функций g_i от g_* на концах интервалов (t_i, t_{i+1}): $R_i = (-1)^{(i+1)}(g_i - g_*)(t_i)$ при $i \in \overline{1, k-3}$ и $L_i = (-1)^{(i+1)}(g_i - g_*)(t_{i-1})$ при $i \in \overline{2, k-2}$. На крайних интервалах по аналогии с (19) и (21) получаем неравенства

$$R_1 > E - E_3, \tag{22}$$

$$L_{s-2} > E - E_3. \tag{23}$$

В точках t_i выполняются соотношения, аналогичные (20):

$$R_i + L_{i+1} \leq 2E_3. \tag{24}$$

Подставив $i = 1$ в неравенство (24) и использовав (22), имеем неравенство

$$L_2 \leq 3E_3 - E.$$

Применяя лемму 1 на тройке точек t_1, x_3, t_2, по неравенству (4) (поскольку в этом случае в обозначениях леммы $h_1 + h_2 = (3E_3 - E) + (E - E_3) > 0$) получаем неравенство

$$R_2 > E - E_3. \tag{25}$$

Подставив $i = 2$ в неравенство (24) и использовав (25), приходим к неравенству $L_3 \leq 3E_3 - E$. Продолжая аналогичные выкладки, в конце концов получим, что

$$R_{s-3} > E - E_3. \tag{26}$$

Складывая (23) и (26), имеем $R_{s-3} + L_{s-2} > 2(E - E_3)$. Сопоставив это неравенство с (24), получаем $2E_3 > 2(E - E_3)$, что и дает искомое неравенство (17). Случай $s \geq 5$ полностью разобран.

Таким образом, п. (a) теоремы установлен.

Докажем теперь п. (b) теоремы 3. Достаточно установить неравенство

$$\frac{1}{2}E_3 \leq U_3. \tag{27}$$

Рассмотрим произвольный набор точек $x_1 < x_2 < x_3$. Если $x_2 \leq \frac{x_1+x_3}{2}$, то обозначим $x_h = x_2 + (x_2 - x_1)$, в противном случае обозначим $x_h = x_2 - (x_3 - x_2)$. В обоих случаях точка x_h лежит на отрезке $[x_1, x_3]$. Кроме того, в первом случае под величиной $U(f; \mathscr{D}^2; x_1, x_2, x_3)$ будем понимать величину $E(f; \mathscr{D}^2; x_1, x_2, x_h)$, а во втором — величину $E(f; \mathscr{D}^2; x_h, x_2, x_3)$. Покажем, что всегда верно неравенство

$$U(f; \mathscr{D}^2; x_1, x_2, x_3) \geq \frac{1}{2}E(f; \mathscr{D}^2; x_1, x_2, x_3). \tag{28}$$

Заметим, что при $E(f; \mathscr{D}^2; x_1, x_2, x_3) = 0$ неравенство (28) справедливо. Далее мы предполагаем, что $E(f; \mathscr{D}^2; x_1, x_2, x_3) > 0$.

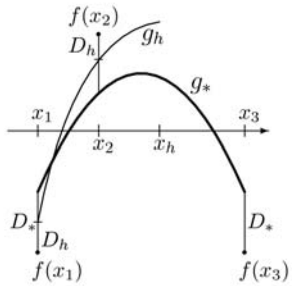

Рис. 4.

Без ограничения общности будем считать, что выполнено неравенство $x_2 \le \frac{x_1+x_3}{2}$, иначе сделаем замену переменных $x = -x$. Также без ограничения общности будем считать, что $f[x_1, x_2, x_3] < 0$. По лемме 8 множество $A(f; \mathscr{D}^2; x_1, x_2, x_3)$ состоит из единственной функции g_*, причем на отрезке $[x_1, x_3]$ справедливо тождество

$$g_*^{(2)} \equiv \operatorname{sign}(f[x_1, x_2, x_3]).$$

Пример такой функции изображен на рис 4. Обозначим через D_* величину $E(f; \mathscr{D}^2; x_1, x_2, x_3) = \|f - g_*\|_{C\{x_1,x_2,x_3\}}$. По лемме 8 получаем

$$(f - g_*)(x_1) = -D_*, \quad (f - g_*)(x_2) = D_*.$$

Пусть $g_h \in A(f; \mathscr{D}^2; x_1, x_2, x_h)$, через D_h обозначим $E(f; \mathscr{D}^2; x_1, x_2, x_h)$. Очевидно, что

$$(g_h - f)(x_1) \le D_h, \quad (g_h - f)(x_2) \ge -D_h.$$

Имеют место следующие соотношения:

$$(g_* - g_h)(x_1) = (g_* - f)(x_1) - (g_h - f)(x_1) \ge D_* - D_h,$$

$$(g_* - g_h)(x_2) = (g_* - f)(x_2) - (g_h - f)(x_2) \le -(D_* - D_h).$$

Из них по лемме 1 вытекает неравенство

$$(g_h - g_*)(x_h) \ge 3(D_* - D_h).$$

Сведем полученные в точке x_h условия в систему неравенств:

$$(g_h - g_*)(x_h) \ge 3(D_* - D_h), \quad (f - g_*)(x_h) \le D_*, \quad (g_h - f)(x_h) \le D_h.$$

Сложив второе и третье неравенства, получим $(g_h - g_*)(x_h) \le D_* + D_h$, тогда из первого следует, что $3(D_* - D_h) \le D_* + D_h$, откуда $D_* \le 2D_h$. Таким образом, для произвольного набора точек получили неравенство (28). Значит, верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} E_3 = \sup_{x_1<x_2<x_3} E(f; \mathscr{D}^2; x_1, x_2, x_3) &\le 2 \sup_{x_1<x_2<x_3} U(f; \mathscr{D}^2; x_1, x_2, x_3) \\ &\le 2 \sup_{x,h} E(f; \mathscr{D}^2; x, x+h, x+2h) = 2U_3. \end{aligned}$$

Справедливость неравенства (27) доказана. Это и завершает доказательство теоремы 3.

Можно показать, что обе константы $\frac{1}{2}$, участвующие в неравенствах теоремы 3, нельзя увеличить сразу для всех непрерывных функций f. Но этот результат технически труден и выходит за рамки данной статьи.

Автор благодарит В. И. Бердышева за постановку задачи и С. Н. Васильева за помощь в работе над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мироненко А. В.* Равномерное приближение классом функций с ограниченной производной // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 5. С. 696–712.
2. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
3. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных функций на отрезке. Киев: Наукова думка, 1992.
4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

Статья поступила 13 января 2005 г.

Мироненко Александр Васильевич
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620219
a_mironenko@mail.ru