Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2006. Том 47, № 6

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОЛОСЫ СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДАНИЕМ, ЗАДАННЫМ НА ЦЕПИ МАРКОВА

В. И. Лотов, Н. Г. Орлова

Аннотация: Получены полные асимптотические разложения для распределения числа пересечений полосы за n шагов траекториями случайного блуждания, заданного на конечной цепи Маркова. Предполагается, что выполнено условие Крамера на распределения скачков и ширина полосы растет вместе с n. Метод состоит в нахождении факторизационных представлений производящих функций изучаемых распределений, выделении главных членов асимптотики этих представлений и последующем обращении этих главных членов с помощью модификации метода перевала.

Ключевые слова: случайное блуждание на цепи Маркова, факторизационное представление, граничная задача, асимптотическое разложение.

§ 1. Введение

Пусть $\{\varkappa_n\}_{n\geq 0}$ — конечная однородная неразложимая цепь Маркова с множеством состояний $D = \{1, \dots, m\}$, с матрицей переходных вероятностей $P = \|p_{jk}\|_{j,k\in D}$ и стационарным распределением $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$, $\pi_j > 0$, $j \in D$. Обозначим через $\{\xi_{jk}^{(n)}\}$, $n \geq 1$, $j, k \in D$, не зависящее от $\{\varkappa_n\}$ семейство независимых случайных величин, одинаково распределенных при фиксированных j, k.

Введем марковский процесс $\{S_n, \varkappa_n\}_{n\geq 0}$, эволюция которого задается начальным значением $\{0, \varkappa_0\}$ и соотношением $S_{n+1} = S_n + \xi_{\varkappa_n \varkappa_{n+1}}^{(n+1)}$, $n \geq 0$. Распределение $\{S_n, \varkappa_n\}_{n\geq 0}$ будет полностью определено, если заданы распределение $\varkappa_0$ и матрица

$$F(\mu) = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d\mathbb{P}(S_1 < y, \varkappa_1 = k / \varkappa_0 = j) \right\| = \|p_{jk} f_{jk}(\mu)\|, \tag{1}$$

где $f_{jk}(\mu) = \mathbb{E}e^{i\mu\xi_{jk}^{(n)}}$.

Для случайного блуждания $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ определим моменты остановки

$$\tau_0^+ = \tau_0^- = 0, \quad \tau_i^- = \inf\{n \geq \tau_{i-1}^+ : S_n \leq -a\},$$
$$\tau_i^+ = \inf\{n \geq \tau_i^- : S_n \geq b\}, \quad i \geq 1,\ a > 0,\ b > 0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00810) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–8980.2006.1).

и рассмотрим случайные величины η_1, η_2, равные соответственно числу пересечений снизу вверх и сверху вниз полосы $-a \le y \le b$ на координатной плоскости точек (x, y) траекторией случайного блуждания $\{(n, S_n)\}_{n=0}^{\infty}$. Очевидно, события $\{\eta_1 \ge k\}$ и $\{\tau_k^+ < \infty\}$ совпадают. Из [1] следует, что указанные случайные величины η_i, $i = 1, 2$, будут конечны с вероятностью единица при любом начальном состоянии $\varkappa_0$ цепи $\{\varkappa_n\}$, если, например, «стационарное» математическое ожидание случайной величины S_1,

$$\mathbb{E}_\pi S_1 = \sum_{j,k=1}^{m} \pi_j p_{jk} \mathbb{E}\xi_{jk}^{(1)},$$

существует и отлично от нуля. Для этого случая в работе найдена асимптотика вероятностей

$$\mathbb{P}(\eta_1 \ge k, \varkappa_{\tau_k^+} = l / \varkappa_0 = s)$$

при $a + b \to \infty$, что составляет содержание теоремы 2. В силу симметричности рассуждений здесь и в дальнейшем рассматривается только случайная величина η_1.

В ситуации, когда $\mathbb{E}_\pi S_1 = 0$, вводится в рассмотрение случайная величина $\eta_n^{(1)}$, равная числу пересечений снизу вверх полосы траекторией $\{(n, S_n)\}_{n=0}^{\infty}$ за промежуток времени от 0 до n. Здесь $\eta_n^{(1)} = \max\{i \ge 0 : \tau_i^+ \le n\}$. В теореме 5 получено полное асимптотическое разложение вероятности

$$\mathbb{P}\big(\eta_n^{(1)} = k / \varkappa_0 = s\big)$$

по степеням $1/\sqrt{n}$ при $n \to \infty$. При этом предполагается, что числа a и b растут пропорционально $\sqrt{n}$, число k фиксировано.

Исследования проводятся с помощью факторизационной техники в несколько этапов по схеме, предложенной А. А. Боровковым в [2] и в последующем реализованной многими авторами (см., например, [3–5]). Первый этап предполагает построение разного сорта факторизационных тождеств для преобразований Фурье — Стилтьеса искомых распределений. В нашем случае это факторизационные представления матричной функции

$$Q(z, \mu, k) \equiv \big\| \mathbb{E}\big(z^{\tau_k^+} \exp\{i\mu S_{\tau_k^+}\}; \tau_k^+ < \infty, \varkappa_{\tau_k^+} = l / \varkappa_0 = s\big) \big\|, \quad s, l = 1, \dots, m, \tag{2}$$

и функции

$$Q_1(z, k, s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbb{P}\big(\eta_n^{(1)} = k / \varkappa_0 = s\big), \quad s = 1, \dots, m.$$

Результаты этого этапа получены ранее и опубликованы в [6], они приводятся в п. 3 ниже.

Если положить $\mu = 0$ и $z = 1$ в (2), то получим

$$\|\mathbb{P}(\eta_1 \ge k, \varkappa_{\tau_k^+} = l / \varkappa_0 = s)\| = \big\|\mathbb{P}\big(\tau_k^+ < \infty, \varkappa_{\tau_k^+} = l / \varkappa_0 = s\big)\big\| = Q(1, 0, k).$$

Таким образом, для $\mathbb{E}_\pi S_1 \ne 0$ поставленную задачу можно решать, исследуя асимптотическое поведение $Q(z, 0, k)$ в окрестности точки $z = 1$ при $a \to \infty$, $b \to \infty$ и полагая затем $z = 1$.

Для нахождения асимптотики вероятности $\mathbb{P}\big(\eta_n^{(1)} = k / \varkappa_0 = s\big)$ с помощью контурного интегрирования также потребуется изучить асимптотику $Q_1(z, k, s)$ в окрестности единицы при $a \to \infty$, $b \to \infty$ и подходящим способом оценить эту функцию вне окрестности единицы. Это все составит содержание второго этапа исследований. Результаты этого этапа представлены в теоремах 1, 3, 4.

На завершающем этапе — при нахождении асимптотических разложений вероятности $\mathbb{P}\big(\eta_n^{(1)} = k / \varkappa_0 = s\big)$ — мы подвергаем контурному интегрированию функцию $Q_1(z,k,s)$, показываем, что основной вклад в интеграл вносит лишь поведение этой функции в окрестности единицы, после чего пользуемся полученным на предыдущем этапе асимптотическим представлением для $Q_1(z,k,s)$. Оно включает в себя главную часть плюс остаток. Остатком можно пренебречь, а асимптотику интеграла от главной части можно получить, пользуясь модификацией метода перевала, разработанной в [2]. При этом будет использоваться ряд технических приемов из [7]. Здесь мы рассматриваем только наиболее важный случай, когда a и b растут пропорционально $\sqrt{n}$, хотя, как показано в [7], применяемый метод асимптотического анализа позволяет получать аналогичные результаты и для других ситуаций, совместимых с требованиями $a \to \infty$, $b \to \infty$, $a + b = o(n)$.

Коэффициенты получаемых асимптотических разложений задаются с помощью цепочки формул. Это требует введения большого количества новых обозначений, и потому формулировка окончательного результата (теорема 5) приводится после доказательства.

Всюду в дальнейшем предполагаются выполненными следующие условия крамеровского типа.

I. Найдется элемент матрицы $F(\mu)$ такой, что прообраз Фурье n-й степени этого элемента при некотором целом $n \geq 1$ содержит абсолютно непрерывную компоненту.

II. Для всех $j, k \in D$ интегралы в (1) абсолютно сходятся при $v_+ \leq \operatorname{Im}\mu \leq v_-$; здесь $v_+ < 0$, $v_- > 0$.

Ранее в работе [7] авторами были получены полные асимптотические разложения распределения числа пересечений полосы траекториями целочисленного случайного блуждания, скачки которого независимы и одинаково распределены, что соответствует случаю $m = 1$. В данной работе мы рассматриваем более общую конструкцию ($m \geq 1$ произвольно) и, чтобы избежать повторений, вместо целочисленности блуждания накладываем введенное выше условие I о наличии абсолютно непрерывной компоненты.

§ 2. Предварительные сведения

В этом параграфе будут изложены необходимые в дальнейшем сведения, известные из [3, 4].

Обозначим через $V(\alpha,\beta)$ банахову алгебру матриц порядка m, элементы которых являются преобразованиями Фурье — Стилтьеса непрерывных слева функций $\varphi(x)$, имеющих на любом конечном отрезке ограниченную вариацию и таких, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} |d\varphi(x)|$ абсолютно сходится при $\alpha \leq \operatorname{Im}\mu \leq \beta$. Пусть $V_+(\alpha)$ — подмножество $V(\alpha,\beta)$, образованное матрицами вида $\left\| \int\limits_0^{\infty} e^{i\mu y} d\varphi_{jk}(y) \right\|$, $V_-(\beta)$ — подмножество $V(\alpha,\beta)$, образованное матрицами вида $\left\| \int\limits_{-\infty}^{+0} e^{i\mu y} d\varphi_{jk}(y) \right\|$.

При $|z| < 1$, $v_+ \leq \operatorname{Im}\mu \leq v_-$ матричная функция $E - zF(\mu)$ (здесь E — единичная матрица) допускает факторизацию двух типов:

$$E - zF(\mu) = R_{z-}(\mu) R_{z+}(\mu) = L_{z+}(\mu) L_{z-}(\mu), \tag{3}$$

соответственно называемую *правой* и *левой* факторизацией.

Укажем некоторые свойства компонент факторизации (3). Положительные компоненты $L_{z+}(\mu)$, $R_{z+}(\mu)$ как функции переменной μ принадлежат $V_+(v_+)$, отрицательные компоненты $L_{z-}(\mu)$, $R_{z-}(\mu)$ принадлежат $V_-(v_-)$. Как функции переменной z, принимающие значения в нормированных кольцах $V_\pm(v_\pm)$, компоненты факторизации аналитичны в круге $|z|<1$ и, более того, аналитически продолжаются в окрестность любой точки на границе этого круга при $\mathbb{E}_\pi S_1 \neq 0$. Если $\mathbb{E}_\pi S_1 = 0$, то в окрестности точки $z=1$ компоненты факторизации являются аналитическими функциями переменной $t = i\sqrt{z-1}$.

Пусть каждый элемент некоторой матричной функции $f(\mu) = \|f_{jk}(\mu)\|$ допускает при $\operatorname{Im}\mu = 0$ представление

$$f_{jk}(\mu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y}\, d\widetilde{F}_{jk}(y), \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |d\widetilde{F}_{jk}(y)| < \infty$$

и $\widetilde{F}(y) = \|\widetilde{F}_{jk}(y)\|$. В этом случае будем кратко писать

$$f(\mu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d\widetilde{F}(y). \tag{4}$$

Известно [4], что функции $R^{\pm 1}_{z\pm}(\mu)$, $L^{\pm 1}_{z\pm}(\mu)$ допускают представления вида (4) при $|z|<1$, $\operatorname{Im}\mu = 0$. Для функций f вида (4) определим операторы

$$(\mathscr{A}f)(z,\mu) = \left[f(\mu)L^{-1}_{z-}(\mu)\right]^{(-\infty,-a]} L_{z-}(\mu),$$
$$(\mathscr{B}f)(z,\mu) = \left[f(\mu)R^{-1}_{z+}(\mu)\right]^{[b,\infty)} R_{z+}(\mu),$$

где используется обозначение

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y}\, d\widetilde{F}(y)\right]^{D} = \int\limits_{D} e^{i\mu y} d\,\widetilde{F}(y), \quad D \subset R.$$

Функция f также может зависеть от z.

С помощью введенных операторов в [7] получены следующие факторизационные представления функций $Q(z,\mu,k)$ и $Q_1(z,k,s)$, справедливые при $|z|<1$, $\operatorname{Im}\mu = 0$:

$$Q(z,\mu,k) = \left\|\mathbb{E}\big(z^{\tau_k^+} \exp\{i\mu S_{\tau_k^+}\}; \tau_k^+ < \infty, \varkappa_{\tau_k^+} = l / \varkappa_0 = s\big)\right\| = ((\mathscr{B}\mathscr{A})^k E)(z,\mu),$$

$$Q_1(z,k,s) = \frac{1}{1-z}\sum_{l=1}^{m} \|\{((\mathscr{B}\mathscr{A})^k E)(z,0) - ((\mathscr{B}\mathscr{A})^{k+1} E)(z,0)\}\|_{sl}.$$

Из указанных равенств видно, что для получения асимптотических представлений функций $Q(z,0,k)$ и $Q_1(z,k,s)$ необходимо найти асимптотическое представление оператора $((\mathscr{B}\mathscr{A})^k E)(z,0)$, что и будет сделано ниже.

Пусть $\lambda(\mu)$ — максимальное по модулю собственное значение матрицы $F(\mu)$. Мы предполагаем везде в дальнейшем, что $\lambda(iv_+) > 1$, если $\mathbb{E}_\pi S_1 > 0$, а также $\lambda(iv_-) > 1$, если $\mathbb{E}_\pi S_1 < 0$. При выполнении условия II для некоторого $\delta_1 > 0$ уравнение $1 - z\lambda(iv) = 0$ имеет не более двух вещественных решений $v = \mu_\pm(z)$, $\mu_+(z) \le 0 \le \mu_-(z)$, $z \in [1-\delta_1, 1]$. Функции $\mu_+(z)$, $\mu_-(z)$ могут быть аналитически продолжены в некоторую δ-окрестность отрезка $[1-\delta_1, 1]$ при $\mathbb{E}_\pi S_1 \neq 0$ и в ту же окрестность, но с разрезом по лучу $z \ge 1$ в случае $\mathbb{E}_\pi S_1 = 0$.

Обозначим $\mu_+ = \mu_+(1)$, $\mu_- = \mu_-(1)$. Для каждого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдется число $\gamma > 0$ такое, что если $|z-1| \ge \delta$, $|z| = 1$, то

$$R^{-1}_{z\pm}(\mu) \in V_\pm(\mu_\pm \mp \gamma), \quad L^{-1}_{z\pm}(\mu) \in V_\pm(\mu_\pm \mp \gamma).$$

Рассмотрим ситуацию, когда $z \in L_\delta = \{z : |z| < 1, \ |z-1| < \delta\}$ и $\delta > 0$ достаточно мало. Пусть $I(\mu)$ — собственный вектор-столбец и $l(\mu)$ — собственный вектор-строка, соответствующие значению $\lambda(\mu)$, такие, что $l(\mu)I(\mu) = 1$. Следуя [3, 4], обозначим

$$a_\pm = v_\pm \mp 1, \quad A_{z\pm} = I(i\mu_\pm(z))l(i\mu_\pm(z)),$$

$$F_{z\pm}(\mu) = E - (\mu_\pm(z) - a_\pm)(i\mu + \mu_\pm(z))^{-1}A_{z\pm},$$

тогда

$$F_{z\pm}^{-1}(\mu) = E + (\mu_\pm(z) - a_\pm)(i\mu + a_\pm)^{-1}A_{z\pm}$$

и

$$\mathscr{R}_{z+}(\mu) \equiv R_{z+}(\mu)F_{z+}(\mu) \in V_+(v_+), \quad \mathscr{L}_{z+}(\mu) \equiv F_{z+}(\mu)L_{z+}(\mu) \in V_+(v_+),$$

$$\mathscr{R}_{z-}(\mu) \equiv F_{z-}(\mu)R_{z-}(\mu) \in V_-(v_-), \quad \mathscr{L}_{z-}(\mu) \equiv L_{z-}(\mu)F_{z-}(\mu) \in V_-(v_-).$$

Кроме того, при $z \in L_\delta$ найдется число $\gamma > 0$ такое, что имеют место включения

$$\mathscr{R}_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_\pm(\mu_\pm \mp \gamma), \quad \mathscr{L}_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_\pm(\mu_\pm \mp \gamma).$$

§ 3. Асимптотические представления для $Q(z,0,k)$ и $Q_1(z,k,s)$

Как и в [5], рассмотрим функции

$$\mathscr{V}(z,\mu) \equiv -(i\mu + \mu_+(z))^{-1}(\mu_+(z) - a_+)A_{z+}\mathscr{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z))R_{z+}(\mu),$$

$$\mathscr{U}(z,\mu) \equiv -(i\mu + \mu_-(z))^{-1}(\mu_-(z) - a_-)A_{z-}\mathscr{L}_{z-}^{-1}(i\mu_-(z))L_{z-}(\mu).$$

Известно , что $\mathscr{V}(z,\mu) \in V_+(v_+)$, $\mathscr{U}(z,\mu) \in V_-(v_-)$. Обозначим

$$H_1(z) = \mathscr{U}(z, i\mu_+(z)), \quad H_2(z) = \mathscr{V}(z, i\mu_-(z)), \quad H(z) = H_2(z)H_1(z),$$

$$\mu(z) = e^{\mu_+(z) - \mu_-(z)}.$$

Везде в дальнейшем неравенства между матрицами и операция взятия модуля матрицы предполагаются выполненными поэлементно. Буквой C с возможными индексами обозначаются квадратные матрицы размера $m \times m$ с постоянными положительными элементами, символ c (с индексами или без них) везде используется для обозначения положительных постоянных, возможно, различных в разных формулах.

Теорема 1. *Существуют достаточно малые числа $\delta > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что при $z \in L_\delta$ справедливо представление*

$$Q(z,0,k) = \mu^{ka+(k-1)b}(z)H_1(z)H^{k-1}(z)e^{\mu_+(z)b}\mathscr{V}(z,\mu) + \Lambda(z,k), \tag{5}$$

где

$$|\Lambda(z,k)| \le e^{(\mu_+ - \mu_- - \gamma)(a+b)}M^{k-1}(z)C,$$

$$M(z) = C_0|\mu^{(a+b)}(z)|\left(1 + \frac{e^{(\mu_+ - \gamma)(a+b)}}{e^{\operatorname{Re}\mu_+(z)(a+b)}}\right)\left(1 + \frac{e^{-(\mu_- + \gamma)(a+b)}}{e^{-\operatorname{Re}\mu_-(z)(a+b)}}\right).$$

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько лемм.

Лемма 1. *Существуют $\delta > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что для $z \in L_\delta$ справедливы представления*

$$R_{z+}^{-1}(\mu) = -\frac{\mu_+(z) - a_+}{i\mu + \mu_+(z)} A_{z+} \mathscr{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)) + \psi_+(z,\mu),$$

$$L_{z-}^{-1}(\mu) = -\frac{\mu_-(z) - a_-}{i\mu + \mu_-(z)} A_{z-} \mathscr{L}_{z-}^{-1}(i\mu_-(z)) + \psi_-(z,\mu),$$

в которых $\psi_\pm(z,\mu) \in V_\pm(\mu_\pm \mp \gamma)$.

Доказательство леммы 1. Известно, что функции $\mathscr{R}_{z+}(\mu)$, $\mathscr{R}_{z-}(\mu)$ при некоторых $\delta > 0$, $\gamma > 0$ обеспечивают каноническую V-факторизацию (см. лемму 5.1 работы [4]) функции

$$F_{z-}(\mu)(E - zF(\mu))F_{z+}(\mu) = \mathscr{R}_{z-}(\mu)\mathscr{R}_{z+}(\mu)$$

при $z \in L_\delta$, $\mu_+ - \gamma \le \operatorname{Im}\mu \le \mu_- + \gamma$. При этом $\mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu) \in V_+(\mu_+ - \gamma)$, $\mathscr{R}_{z-}^{-1}(\mu) \in V_-(\mu_- + \gamma)$. Далее,

$$\begin{aligned} R_{z+}^{-1}(\mu) &= F_{z+}(\mu)\mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu) = (E - (\mu_+(z) - a_+)(i\mu + \mu_+(z))^{-1} A_{z+})\mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu) \\ &= \mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu) - \frac{\mu_+(z) - a_+}{i\mu + \mu_+(z)} A_{z+}\mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu) = \mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu) \\ &- \frac{\mu_+(z) - a_+}{i\mu + \mu_+(z)} A_{z+} \left[\mathscr{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)) + (i\mu + \mu_+(z)) \frac{\mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu) - \mathscr{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z))}{i\mu + \mu_+(z)} \right] \\ &\equiv -\frac{\mu_+(z) - a_+}{i\mu + \mu_+(z)} A_{z+}\mathscr{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)) + \psi_+(z,\mu). \end{aligned}$$

Функция $\psi_+(z,\mu)$ принадлежит $V_+(\mu_+ - \gamma)$ в силу утверждения 5.2 работы [4]. Аналогично получаем утверждение для $L_{z-}^{-1}(\mu)$. Лемма 1 доказана.

Обозначим

$$\psi_+(z,\mu) = \int_0^\infty e^{i\mu y}\, d\Psi_+(z,y), \quad \psi_-(z,\mu) = \int_{-\infty}^0 e^{i\mu y}\, d\Psi_-(z,y).$$

Лемма 2. 1. *Существует $\delta > 0$ такое, что при $z \in L_\delta$, $\operatorname{Im}\mu \ge \mu_+$ для всякой функции $g(\mu) = \int_{-\infty}^0 e^{i\mu y}\, dG(y) \in V_-(0)$ имеет место представление*

$$(\mathscr{B}g)(z,\mu) = e^{(i\mu + \mu_+(z))b} g(i\mu_+(z))\mathscr{V}(z,\mu) + \Delta(z,\mu)R_{z+}(\mu),$$

где

$$\Delta(z,\mu) \equiv \int_b^\infty e^{i\mu y}\, d_y\varphi(z,y) = \int_b^\infty e^{i\mu y}\, d_y \left(\int_{-\infty}^0 \Psi_+^T(z, y-t)\, dG^T(t) \right)^T$$

(здесь верхний индекс T означает транспонирование).

2. *Если $g(z,\mu) = g(z,\mu)^{(-\infty;-a]} \in V_-(0)$, то*

$$\int_b^\infty |d_y\varphi(z,y)| \le \int_{-\infty}^{-a} |dG(y)| \int_{b+a}^\infty |d_y\Psi_+(z,y)|$$

Лемма 3. 1. *Существует $\delta > 0$ такое, что при $z \in L_\delta$, $\operatorname{Im}\mu \le \mu_-$ для всякой функции $g(\mu) = \int\limits_0^\infty e^{i\mu y} dG(y) \in V_+(0)$ имеет место представление*

$$(\mathscr{A} g)(z,\mu) = e^{(i\mu+\mu_-(z))a} g(i\mu_-(z)) \mathscr{U}(z,\mu) + \widetilde{\Delta}(z,\mu) L_{z-}(\mu),$$

где

$$\widetilde{\Delta}(z,\mu) \equiv \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y}\, d_y\theta(z,y) = \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y}\, d_y \left(\int\limits_0^\infty \Psi_-^T(z, y-t)\, dG^T(t) \right)^T.$$

2. *Если $g(\mu) = g(\mu)^{[b;\infty)} \in V_+(0)$, то*

$$\int\limits_{-\infty}^{-a} |d_y\theta(z,y)| \le \int\limits_b^\infty |dG(y)| \int\limits_{-\infty}^{-(a+b)} |d_y\Psi_-(z,y)|.$$

Утверждения и доказательства лемм 2, 3 приведены в [5]. Здесь мы лишь слегка изменили вид формулировок с учетом введенных величин и обозначений. Заметим также, что утверждения лемм 1–3 для случая $m = 1$ можно найти в [8].

Доказательство теоремы 1. Последовательно применяя утверждения лемм 2 и 3, получим представление

$$\begin{aligned} ((\mathscr{B}\mathscr{A})^k E)(z,\mu) = \Bigg\{ &\mu^{ka+(k-1)b}(z) H_1(z) H^{k-1}(z) \\ &+ \sum_{i=1}^{k} \mu^{(k-i)(a+b)}(z) \widetilde{\Delta}_i(z, i\mu_+(z)) L_{z-}(i\mu_+(z)) H^{k-i}(z) \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} \mu^{(k-i)a+(k-i-1)b}(z) \Delta_i(z, i\mu_-(z)) R_{z+}(i\mu_-(z)) H_1(z) H^{k-i-1}(z) \Bigg\} \\ &\times e^{(i\mu+\mu_+(z))b} \mathscr{V}(z,\mu) + \Delta_k(z,\mu) R_{z+}(\mu). \end{aligned} \tag{6}$$

Положим в (6) $\mu = 0$, тогда

$$((\mathscr{B}\mathscr{A})^k E)(z,0) = \mu^{ka+(k-1)b}(z) H_1(z) H^{k-1}(z) e^{\mu_+(z)b} \mathscr{V}(z,0) + \Lambda(z,k),$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda(z,k) = \Bigg\{ &\sum_{i=1}^{k} \mu^{(k-i)(a+b)}(z) \widetilde{\Delta}_i(z, i\mu_+(z)) L_{z-}(i\mu_+(z)) H^{k-i}(z) \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} \mu^{(k-i)a+(k-i-1)b}(z) \Delta_i(z, i\mu_-(z)) R_{z+}(i\mu_-(z)) H_1(z) H^{k-i-1}(z) \Bigg\} e^{\mu_+(z)b} \mathscr{V}(z,0) \\ &+ \Delta_k(z,0) R_{z+}(0). \end{aligned}$$

Оценим $|\Lambda(z,k)|$. Для этого необходимо оценить величины $|\widetilde{\Delta}_i(z, i\mu_+(z)|$, $|\Delta_i(z, i\mu_-(z))|$. Для построения указанных оценок докажем две леммы. Пусть

$$(\mathscr{B}g)(z,\mu) \equiv \int\limits_b^\infty e^{i\mu y} d_y G^B(z,y), \quad \mathscr{V}(z,\mu) \equiv \int\limits_0^\infty e^{i\mu y} d_y v(z,y),$$

$$R_{z+}(\mu) \equiv \int\limits_0^\infty e^{i\mu y} d_y r(z,y).$$

Везде в дальнейшем δ — достаточно малое положительное число.

Лемма 4. *Для любой функции* $g(z,\mu) = \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y}\, d_y G(z,y) \in V_-(0)$ *при* $z \in L_\delta$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_b^\infty |d_y G^B(z,y)| \le \int\limits_{-\infty}^{-a} |d_y G(z,y) W_1(z)|,$$

где $W_1(z) = C_1(e^{\operatorname{Re}\mu_+(z)(a+b)} + e^{(\mu_+-\gamma)(a+b)})$.

Доказательство леммы 4. Найдем вначале выражение для $G^B(z,y)$. Имеем

$$\begin{aligned}(\mathscr{B}g)(z,\mu) &= e^{(i\mu+\mu_+(z))b} g(i\mu_+(z)) \mathscr{V}(z,\mu) + \Delta(z,\mu) R_{z+}(\mu)\\ &= e^{(i\mu+\mu_+(z))b} g(i\mu_+(z)) \int\limits_0^\infty e^{i\mu y}\, d_y v(z,y) + \int\limits_b^\infty e^{i\mu y} d_y \varphi(z,y) \int\limits_0^\infty e^{i\mu y}\, d_y r(z,y)\\ &= e^{\mu_+(z)b} g(i\mu_+(z)) \int\limits_b^\infty e^{i\mu y}\, d_y v(z,y-b) + \int\limits_b^\infty e^{i\mu y}\, d_y \int\limits_0^{y-b} \varphi(z,y-t)\, d_t r(z,t)\\ &\equiv \int\limits_b^\infty e^{i\mu y}\, d_y G^B(z,y).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$G^B(z,y) = e^{\mu_+(z)b} g(i\mu_+(z)) v(z,y-b) + \int\limits_0^{y-b} \varphi(z,y-t)\, d_t r(z,t), \quad y \ge b.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\int\limits_b^\infty |d_y G^B(z,y)| &\le |e^{\mu_+(z)b} g(i\mu_+(z))| \int\limits_b^\infty |d_y v(z,y-b)| + \int\limits_b^\infty \left| d_y \int\limits_0^{y-b} \varphi(z,y-t)\, d_t r(z,t)\right|\\ &\le |e^{\mu_+(z)b}| \int\limits_{-\infty}^{-a} |e^{-\mu_+(z)y}||d_y G(z,y)| \int\limits_b^\infty |d_y v(z,y-b)| + \int\limits_b^\infty \left| d_y \int\limits_0^{y-b} \varphi(z,y-t)\, d_t r(z,t)\right|\\ &\le |e^{\mu_+(z)(a+b)}| \int\limits_{-\infty}^{-a} |d_y G(z,y)| \int\limits_0^\infty |d_y v(z,y)| + \int\limits_b^\infty |d_y \varphi(z,y)| \int\limits_0^\infty |d_t r(z,t)|\\ &\le |e^{\mu_+(z)(a+b)}| \int\limits_{-\infty}^{-a} |d_y G(z,y)| \int\limits_0^\infty |d_y v(z,y)| + e^{(\mu_+-\gamma)(a+b)} \int\limits_{-\infty}^{-a} |d_y G(z,y)| C \int\limits_0^\infty |d_t r(z,t)|\\ &\le \int\limits_{-\infty}^{-a} |d_y G(z,y)| \left(|e^{\mu_+(z)(a+b)}| \int\limits_0^\infty |d_y v(z,y)| + e^{(\mu_+-\gamma)(a+b)} C \int\limits_0^\infty |d_y r(z,y)| \right)\\ &\le \int\limits_{-\infty}^{-a} |d_y G(z,y)| C_1 (e^{\operatorname{Re}\mu_+(z)(a+b)} + e^{(\mu_+-\gamma)(a+b)}).\end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Аналогично обозначим

$$(\mathscr{A}g)(z,\mu) \equiv \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y} d_y G^A(z,y), \quad \mathscr{U}(z,\mu) \equiv \int\limits_{-\infty}^{0} e^{i\mu y} d_y u(z,y),$$

$$L_{z-}(\mu) \equiv \int\limits_{-\infty}^{0} e^{i\mu y} d_y l(z,y).$$

Лемма 5. *Для любой функции* $g(z,\mu) = \int\limits_b^\infty e^{i\mu y}\, d_y G(z,y) \in V_+(0)$ *при* $z \in L_\delta$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{-a} |d_y G^A(z,y)| \le \int\limits_b^\infty |d_y G(z,y)| W_2(z),$$

где $W_2(z) = C_2(e^{-\operatorname{Re}\mu_-(z)(a+b)} + e^{-(\mu_-+\gamma)(a+b)})$.

Доказательство леммы 5 проводится аналогично доказательству леммы 4.

Вернемся к доказательству теоремы 1. Применяя поочередно леммы 4 и 5, получаем

$$|\widetilde{\Delta}_i(z,i\mu_+(z))| \le \int\limits_{-\infty}^{-a} |e^{-\mu_+(z)y}||d_y\theta_i(z,y)| \le |e^{\mu_+(z)a}| \int\limits_{-\infty}^{-a} |d_y\theta_i(z,y)|$$

$$\le |e^{\mu_+(z)a}| \int\limits_b^\infty |d_y G^{(BA)^{i-1}}(z,y)| \int\limits_{-\infty}^{-(a+b)} |d_y\Psi_-(z,y)|$$

$$\le |e^{\mu_+(z)a}(W_1(z)W_2(z))^{i-1}|e^{-(\mu_-+\gamma)(a+b)}C_3.$$

Аналогично

$$|\Delta_i(z,i\mu_-(z))| \le |e^{-\mu_-(z)b}(W_2(z)W_1(z))^{i-1}W_2(z)|e^{(\mu_+-\gamma)(a+b)}C_4.$$

Обозначим $C_5 = \sup\limits_{z\in L_\delta} \max(C_1,C_2,C_3,C_4,|H_1(z)|,|H_2(z)|,|R_{z+}(i\mu_-(z))|,|R_{z+}(0)|,$ $|L_{z+}(i\mu_+(z))|,|\mathscr{V}(z,0)|)$, тогда

$$S_1 \equiv \left|\sum_{i=1}^k \mu^{(k-i)(a+b)}(z)\widetilde{\Delta}_i(z,i\mu_+(z))L_{z-}(i\mu_+(z))H^{k-1}(z)\mathscr{V}(z,0)e^{\mu_+(z)b}\right|$$

$$\le e^{-(\mu_-+\gamma)(a+b)}|e^{\operatorname{Re}\mu_+(z)(a+b)}|\sum_{i=1}^k |\mu^{(k-i)(a+b)}(z)|(W_2(z)W_1(z))^{i-1}C_5^{2(k-i)+3}$$

$$\le e^{(\mu_+-\mu_--\gamma)(a+b)}\sum_{i=1}^k |\mu^{(k-i)(a+b)}(z)|(e^{\operatorname{Re}\mu_+(z)(a+b)} + e^{(\mu_+-\gamma)(a+b)})^{i-1}$$

$$\times (e^{-\operatorname{Re}\mu_-(z)(a+b)} + e^{-(\mu_-+\gamma)(a+b)})^{i-1}C_5^{2(i-1)}C_5^{2(k-i)+3}$$

$$= |\mu^{(k-1)(a+b)}(z)|e^{(\mu_+-\mu_--\gamma)(a+b)}C_5^{2(k-1)}C_5^3$$

$$\times \sum_{i=1}^k \left(1 + \frac{e^{(\mu_+-\gamma)(a+b)}}{e^{\operatorname{Re}\mu_+(z)(a+b)}}\right)^{i-1}\left(1 + \frac{e^{-(\mu_-+\gamma)(a+b)}}{e^{-\operatorname{Re}\mu_-(z)(a+b)}}\right)^{i-1}$$

$$\leq e^{(\mu_+-\mu_--\gamma)(a+b)}\left|\mu^{(a+b)}(z)\left(1+\frac{e^{(\mu_+-\gamma)(a+b)}}{e^{\operatorname{Re}\mu_+(z)(a+b)}}\right)\left(1+\frac{e^{-(\mu_-+\gamma)(a+b)}}{e^{-\operatorname{Re}\mu_-(z)(a+b)}}\right)C_5^2\right|^{k-1}C_0$$
$$= e^{(\mu_+-\mu_--\gamma)(a+b)}M^{k-1}(z)C_0.$$

Аналогично получим неравенства

$$S_2 \equiv \left|\sum_{i=1}^{k-1}\mu^{(k-i)a+(k-i-1)b}(z)\Delta_i(z,i\mu_-(z))R_{z+}(i\mu_-(z))\right.$$
$$\left.\times\,\widetilde{H}^{k-i-1}(z)H_1(z)e^{\mu_+(z)b}\mathscr{V}(z,0)\right| \leq e^{(\mu_+-\mu_--\gamma)(a+b)}M^{k-1}(z)C_0,$$

$$|\Delta_k(z,0)R_{z+}(0)| \leq e^{(\mu_+-\mu_--\gamma)(a+b)}M^{k-1}(z)C_0.$$

Суммируя полученные неравенства, приходим к утверждению теоремы 1.

Предположим теперь, что

$$\mathbb{E}_\pi S_1 = \sum_{j,k=1}^{m}\pi_j p_{jk}\mathbb{E}\xi_{jk}^{(1)} < 0.$$

Тогда уравнение $1-\lambda(iv)=0$ имеет два корня $\mu_+=0$, $\mu_-\equiv h>0$. Используя равенство

$$\|\mathbb{P}(\eta_1\geq k, \varkappa_{\tau_k^+}=l/\varkappa_0=s)\| = Q(1,0,k)$$

и устремляя z к 1 в (5), получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{E}_\pi S_1<0$, тогда для любого $k\geq 1$*

$$\|\mathbb{P}(\eta_1\geq k, \varkappa_{\tau_k^+}=l/\varkappa_0=s)\| = e^{-h(ka+(k-1)b}H_1(1)H^{k-1}(1)\mathscr{V}(1,0)(E+\Theta(a,b,k)),$$

где $|\Theta(a,b,k)|\leq e^{-\gamma(a+b)}C_k$, $\gamma>0$, C_k — матрица с постоянными неотрицательными элементами.

Далее мы предполагаем, что число пересечений рассматриваемой полосы бесконечно с вероятностью 1. Как уже упоминалось, для этого достаточно, чтобы $\mathbb{E}_\pi S_1=0$. Напомним, что $\eta_n^{(1)}$ — число пересечений полосы $-a\leq y\leq b$ снизу вверх до момента времени n включительно и

$$Q_1(z,k,s)=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\mathbb{P}\big(\eta_n^{(1)}=k/\varkappa_0=s\big).$$

В дальнейшем мы будем использовать следующее утверждение, известное из [5].

Вектор $I(i\mu_+(z))$ является собственным вектором матрицы $H(z)$, соответствующим собственному значению $h(z)$. Функция $h(z)$ аналитическая в окрестности нуля по переменной $t=i\sqrt{z-1}$, $h(1)=1$.

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{E}_\pi S_1=0$. Тогда существуют $\delta>0$ и $\gamma>0$ такие, что для $z\in L_\delta$ справедливо представление*

$$Q_1(z,k,s)=\frac{1-\mu^{a+b}h(z)}{1-z}\sum_{l=1}^{m}\left\{\|\mu^{ka+(k-1)b}(z)e^{\mu_+(z)b}h^{k-1}(z)H_1(z)\mathscr{V}(z,0)\|_{sl}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1-z}\|\Lambda(z,k)-\Lambda(z,k+1)\|_{sl}\right\},$$

где

$$|\Lambda(z,k)|\leq e^{-\gamma(a+b)}M^{k-1}(z)C_0,$$

$$M(z) = |\mu^{(a+b)}(z)| \left(1 + \frac{e^{-\gamma(a+b)}}{e^{\mu_+(z)(a+b)}}\right) \left(1 + \frac{e^{-\gamma(a+b)}}{e^{-\mu_-(z)(a+b)}}\right) C.$$

Доказательство теоремы 3. Известно [3], что

$$Q_1(z,k,s) = \frac{1}{1-z} \sum_{l=1}^{m} \|\{((\mathscr{B}\mathscr{A})^k E)(z,0) - ((\mathscr{B}\mathscr{A})^{k+1} E)(z,0)\}\|_{sl}.$$

Следовательно,

$$Q_1(z,k,s) = \frac{1}{1-z} \sum_{l=1}^{m} \|Q(z,0,k) - Q(z,0,k+1)\|_{sl}.$$

Из теоремы 1 получаем

$$Q_1(z,k,s) = \frac{1}{1-z} \sum_{l=1}^{m} \Big\{ \|\mu^{ka+(k-1)b}(z) e^{\mu_+(z)b} H_1(z)(1 - \mu^{a+b} H(z)) \\ \times H^{k-1}(z) \mathscr{V}(z,0)\|_{sl} + \frac{1}{1-z} \|\Lambda(z,k) - \Lambda(z,k+1)\|_{sl} \Big\}.$$

Осталось воспользоваться определением функции $\mathscr{V}(z,\mu)$ и утверждением, приведенным перед формулировкой теоремы 3. Теорема 3 доказана.

Для последующего контурного интегрирования производящей функции $Q_1(z,k,s)$ нам потребуется ее оценка на множестве $l_1 = \{|z-1| \geq \delta, |z| = 1\}$.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbb{E}_\pi S_1 = 0$ *и* $\delta > 0$ *произвольно. Тогда найдутся постоянные* $\gamma > 0$ *и* $c_k > 0$ *такие, что при всех* $s = 1, \dots, m$ *и* $z \in l_1$

$$|Q_1(z,k,s)| \leq c_k e^{-\gamma(a+b)k}.$$

Доказательство теоремы 4. Для оценки функции $Q_1(z,k,s)$ достаточно оценить $((\mathscr{B}\mathscr{A})^k E)(z,0)$ на множестве l_1. Обозначим

$$f_k(z,\mu) \equiv ((\mathscr{B}\mathscr{A})^k E)(z,\mu) \equiv \int_b^\infty e^{i\mu y}\, d_y D_k(z,y)$$

и покажем, что

$$\int_b^\infty |d_y D_k(z,y)| \leq e^{-\gamma(a+b)k} C^k, \tag{7}$$

где C — матрица из положительных констант. Для этого воспользуемся индукцией. Пусть $k = 1$. Обозначим

$$L_{z-}^{-1}(\mu) = \int_\infty^0 e^{i\mu y} d\bar{l}(z,y), \quad R_{z+}^{-1}(\mu) = \int_0^\infty e^{i\mu y} d\bar{r}(z,y).$$

Тогда

$$(\mathscr{A}E)(z,\mu) = \left[L_{z-}^{-1}(\mu)\right]^{(-\infty,-a]} L_{z-}(\mu) = \int_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y}\, d_y \bar{l}(z,y) \int_{-\infty}^{0} e^{i\mu y}\, d_y l(z,y) \\ = \int_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y}\, d_y \int_{y+a}^{0} \bar{l}(z,y-t)\, d_t l(z,t) \equiv \int_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y}\, d_y D_{0A}(z,y).$$

Далее,

$$\left[\int_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y}\, d_y D_{0A}(z,y) R_{z+}^{-1}(\mu)\right]^{[b,\infty)}$$

$$= \left[\left(\int_0^{\infty} e^{i\mu y}\, d_y \bar{r}^T(z,y) \int_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y}\, d_y D_{0A}^T(z,y)\right)^T\right]^{[b,\infty)}$$

$$= \int_b^{\infty} e^{i\mu y}\, d_y \left(\int_{-\infty}^{-a} \bar{r}^T(z,y-t)\, d_t D_{0A}^T(z,t)\right)^T \equiv \int_b^{\infty} e^{i\mu y}\, d_y \overline{D}_{0BA}(z,y).$$

Таким образом,

$$f_1(z,\mu) = \int_b^{\infty} e^{i\mu y} d_y \overline{D}_{0BA}(z,y) R_{z+}(\mu) = \int_b^{\infty} e^{i\mu y} d_y \overline{D}_{0BA}(z,y) \int_0^{\infty} e^{i\mu y} d_y r(z,y)$$

$$= \int_b^{\infty} e^{i\mu y} d_y \int_0^{y-b} \overline{D}_{0BA}(z,y-t) d_t r(z,t) \equiv \int_b^{\infty} e^{i\mu y} d_y D_1(z,y).$$

Оценим

$$\int_b^{\infty} |d_y D_1(z,y)| = \int_b^{\infty} \left| d_y \int_0^{y-b} \overline{D}_{0BA}(z,y-t) d_t r(z,t)\right| \le \int_b^{\infty} |d_y \overline{D}_{0BA}(z,y)| \int_0^{\infty} |d_t r(z,t)|.$$

В свою очередь,

$$\int_b^{\infty} |d_y \overline{D}_{0BA}(z,y)| = \int_b^{\infty} \left| d_y \left(\int_{-\infty}^{-a} \bar{r}^T(z,y-t) d_t D_{0A}^T(z,t)\right)^T\right|$$

$$\le \int_{-\infty}^{-a} |d_t D_{0A}(z,t)| \int_b^{\infty} |d_y \bar{r}(z,y)|,$$

$$\int_{-\infty}^{-a} |d_y D_{0A}(z,y)| = \int_{-\infty}^{-a} \left| d_y \int_{y+a}^{0} \bar{l}(z,y-t) d_t l(z,t)\right| \le \int_{-\infty}^{-a} |d_y \bar{l}(z,y)| \int_{-\infty}^{0} |d_t l(z,t)|.$$

Таким образом,

$$\int_b^{\infty} |d_y D_1(z,y)| \le \int_{-\infty}^{-a} |d_y \bar{l}(z,y)| \int_{-\infty}^{0} |d_t l(z,t)| \int_b^{\infty} |d_y \bar{r}(z,y)| \int_b^{\infty} |d_y r(z,y)|.$$

Далее, $R_{z+}^{-1} \in V_+(-\gamma)$, $L_{z-}^{-1} \in V_-(\gamma)$, следовательно,

$$\int_0^{\infty} e^{\gamma y} |d_y \bar{r}(z,y)| < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{0} e^{-\gamma y} |d_y \bar{l}(z,y)| < \infty.$$

Тогда

$$\int_b^{\infty} |d_y \bar{r}(z,y)| = \int_b^{\infty} e^{\gamma y - \gamma y} |d_y \bar{r}(z,y)| \le e^{-\gamma b} \int_b^{\infty} e^{\gamma y} |d_y \bar{r}(z,y)|,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{-a} |d_y\bar{l}(z,y)| \le \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\gamma y-\gamma y}|d_y\bar{l}(z,y)| \le e^{-\gamma a}\int\limits_{-\infty}^{-a} e^{-\gamma y}|d_y\bar{l}(z,y)|.$$

Поэтому

$$\int\limits_{b}^{\infty} |d_y D_1(z,y)| \le e^{-\gamma(a+b)}\int\limits_{-\infty}^{-a} e^{-\gamma y}|d_y\bar{l}(z,y)| \int\limits_{-\infty}^{0} |d_t l(z,t)| \times \int\limits_{b}^{\infty} e^{\gamma y}|d_y\bar{r}(z,y)| \int\limits_{0}^{\infty} |d_y r(z,y)| \equiv e^{-\gamma(a+b)}C,$$

и (7) верно при $k=1$. Покажем, что из справедливости (7) при $k=\nu$ следует справедливость (7) при $k=\nu+1$. Найдем

$$(\mathscr{A} f_\nu)(z,\mu) = \big[f_\nu(z,\mu)L_{z-}^{-1}(\mu)\big]^{(-\infty,-a]}L_{z-}(\mu).$$

Имеем

$$[f_\nu(z,\mu)L_{z-}^{-1}(\mu)]^{(-\infty,-a]} = \left[\left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{i\mu y}d_y\bar{l}^T(z,y)\int\limits_{b}^{\infty} e^{i\mu y}d_y D_\nu^T(z,y)\right)^T\right]^{(-\infty,-a]}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y}\, d_y\left(\int\limits_{b}^{\infty} \bar{l}^T(z,y-t)\, d_t D_\nu^T(z,t)\right)^T \equiv \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y}\, d_y \overline{D}_{\nu A}(z,y),$$

$$\big[f_\nu(z,\mu)L_{z-}^{-1}(\mu)\big]^{(-\infty,-a]}L_{z-}(\mu) = \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y}\, d_y\overline{D}_{\nu A}(z,y)\int\limits_{-\infty}^{0} e^{i\mu y}\, d_y l(z,y)$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y}\, d_y\int\limits_{y+a}^{0} \overline{D}_{\nu A}(z,y-t)\, d_t l(z,t) \equiv \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y}\, d_y D_{\nu A}(z,y).$$

Найдем $(\mathscr{B}\mathscr{A} f_\nu)(z,\mu)$. Имеем

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y}\, d_y D_{\nu A}(z,y) R_{z+}^{-1}(\mu)\right]^{[b,\infty)}$$

$$= \left[\left(\int\limits_{0}^{\infty} e^{i\mu y}d_y\bar{r}^T(z,y)\int\limits_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y}d_y D_{\nu A}^T(z,y)\right)^T\right]^{[b,\infty)}$$

$$= \int\limits_{b}^{\infty} e^{i\mu y}d_y\left(\int\limits_{-\infty}^{-a} \bar{r}^T(z,y-t)d_t D_{\nu A}^T(z,t)\right)^T \equiv \int\limits_{b}^{\infty} e^{i\mu y}d_y\overline{D}_{\nu BA}(z,y),$$

$$f_{\nu+1}(z,\mu) = \int\limits_{b}^{\infty} e^{i\mu y}\, d_y\overline{D}_{\nu BA}(z,y)R_{z+}(\mu) = \int\limits_{b}^{\infty} e^{i\mu y}\, d_y\overline{D}_{\nu BA}(z,y)\int\limits_{0}^{\infty} e^{i\mu y}\, d_y r(z,y)$$

$$= \int\limits_{b}^{\infty} e^{i\mu y}\, d_y\int\limits_{0}^{y-b} \overline{D}_{\nu BA}(z,y-t)\, d_t r(z,t) \equiv \int\limits_{b}^{\infty} e^{i\mu y}\, d_y D_{\nu+1}(z,y).$$

Оценим

$$\int_b^\infty |d_y D_{\nu+1}(z,y)| = \int_b^\infty \left| d_y \int_0^{y-b} \overline{D}_{\nu BA}(z,y-t)\, d_t r(z,t) \right|$$
$$\le \int_b^\infty |d_y \overline{D}_{\nu BA}(z,y)| \int_0^\infty |d_t r(z,t)|.$$

В свою очередь,

$$\int_b^\infty |d_y \overline{D}_{\nu BA}(z,y)| = \int_b^\infty \left| d_y \left(\int_{-\infty}^{-a} \bar{r}^T(z,y-t) d_t D^T_{\nu A}(z,t) \right)^T \right|$$
$$\le \int_{-\infty}^{-a} |d_t D_{\nu A}(z,t)| \int_b^\infty |d_y \bar{r}(z,y)|,$$

$$\int_{-\infty}^{-a} |d_y D_{\nu A}(z,y)| = \int_{-\infty}^{-a} \left| d_y \int_{y+a}^{0} \overline{D}_{\nu A}(z,y-t) d_t l(z,t) \right|$$
$$\le \int_{-\infty}^{-a} |d_y \overline{D}_{\nu A}(z,y)| \int_{-\infty}^{0} |d_t l(z,t)|.$$

Последняя оценка:

$$\int_{-\infty}^{-a} |d_y \overline{D}_{\nu A}(z,y)| = \int_{-\infty}^{-a} \left| d_y \left(\int_b^\infty \bar{l}^T(z,y-t) d_t D^T_{\nu}(z,t) \right)^T \right|$$
$$\le \int_b^\infty |d_t D_{\nu}(z,t)| \int_{-\infty}^{-a} |d_y \bar{l}(z,y)|.$$

Итак,

$$\int_b^\infty |d_y D_{\nu+1}(z,y)| \le e^{-\gamma(a+b)} \int_b^\infty |d_y D_\nu(z,y)| C.$$

Оценка (7) получена. Отсюда следует, что

$$|f_k(z,0)| \le \int_b^\infty |d_y D_k(z,y)| \le e^{-\gamma(a+b)k} C^k.$$

Таким образом, $|Q_1(z,k,s)| \le c_k e^{-\gamma(a+b)k}$. Теорема 4 доказана.

§ 4. Асимптотические разложения вероятностей

В этом параграфе мы получим полные асимптотические разложения вероятностей $\mathbb{P}\big(\eta_n^{(1)} = k / \varkappa_0 = s\big)$ при $n \to \infty$ для каждого фиксированного k. При этом предполагаем, что $a = x_1\sqrt{n}$, $b = x_2\sqrt{n}$, где x_1, x_2 — произвольные фиксированные положительные числа.

Обозначим через l_2 контур, полученный из дуги $\{|z-1|<\delta, |z|=1\}$ искривлением внутрь L_δ вблизи точки $z=1$. Имеем

$$\mathbb{P}\big(\eta_n^{(1)}=k/\varkappa_0=s\big)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_1} Q_1(z,k,s)z^{-n-1}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_2} Q_1(z,k,s)z^{-n-1}\,dz. \quad (8)$$

В силу теоремы 4 первый интеграл в (8) допускает оценку

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_1} Q_1(z,k,s)z^{-n-1}\,dz=O(e^{-C\sqrt{n}}).$$

Во втором интеграле в (8) вдоль контура l_2 заменим $Q_1(z,k,s)$ асимптотическим представлением, полученным в теореме 3. Обозначим

$$J(n,k,s)\equiv\frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{m}\bigg\|\int\limits_{l_2}\frac{1-\mu^{a+b}(z)h(z)}{(1-z)z^{n+1}}\mu^{ka+(k-1)b}(z)$$
$$\times e^{\mu_+(z)b}h^{k-1}(z)H_1(z)\mathscr{V}(z,0)\,dz\bigg\|_{sl},$$

$$J_1(n,k,s)\equiv\frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{m}\bigg\|\int\limits_{l_2}\frac{\Lambda(z,k)-\Lambda(z,k+1)}{(1-z)z^{n+1}}\,dz\bigg\|_{sl},$$

тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_2} Q_1(z,k,s)z^{-n-1}\,dz=J(n,k,s)+J_1(n,k,s).$$

Рассмотрим интеграл $J_1(n,k,s)$. В силу выбора контура l_2 выполняется $|1-z|>\delta_2$ при $z\in l_2$ и некотором $\delta_2>0$. Из теоремы 3 имеем оценку

$$|\Lambda(z,k)|\le Ce^{-\gamma(x_1+x_2)\sqrt{n}},$$

откуда

$$|J_1(n,k,s)|\le ce^{-\gamma(x_1+x_2)\sqrt{n}}.$$

Отметим, что функции $\mu(z)$, $\mu_+(z)$, $h(z)$, $H_1(z)$, $\mathscr{V}(z,0)$, $\Lambda(z,k)$ допускают разложение в ряды по неотрицательным степеням величины $i\sqrt{z-1}$ в некоторой окрестности единицы, разрезанной по лучу $\{z=\operatorname{Re} z\ge 1\}$. Это следует из их определения и работ [4, 5]. Кроме того, $h(1)=\mu(1)=1$. Далее мы сделаем замену $t=i(z-1)^{1/2}$ (здесь выбирается главное значение корня) и для удобства сохраним прежние обозначения для функций h, H_1, μ, μ_+, $\mathscr{V}$, Λ. Ясно, что все эти функции (теперь уже как функции переменной t) будут аналитическими в окрестности нуля. Пусть l_3 — контур, полученный из контура $\{|\arg(z-1)|=\pi/4, |z-1|\le\delta\}$ искривлением внутрь K_δ вблизи точки $z=1$, где $K_\delta=\{|z-1|\le\delta, |\arg(z-1)|>\pi/4.\}$ Обозначим через l_4, l_5 отрезки прямых, соединяющие концы контуров l_1 и l_3 и находящиеся соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} z>0$, $\operatorname{Im} z<0$.

Обозначим

$$\Pi(t)=-\frac{1}{\pi i}\sum_{l=1}^{m}\bigg\|\frac{1-\mu^{a+b}(t)h(t)}{t(1-t^2)^{n+1}}\mu^{ka+(k-1)b}(t)e^{\mu_+(t)b}h^{k-1}(t)H_1(t)\mathscr{V}(t,0)\,dt\bigg\|_{sl}.$$

Пусть Γ, Γ_2, Γ_4, Γ_5 — образы кривых l_3, l_2, l_4, l_5 в плоскости переменной t соответственно. В силу теоремы Коши и теоремы 4 для

$$d(n)\equiv\int\limits_{\Gamma_4\cup\Gamma_5}\Pi(t)\,dt=\int\limits_{\Gamma_2}\Pi(t)\,dt-\int\limits_{\Gamma}\Pi(t)\,dt$$

имеем оценку
$$|d(n)| = O(c^k e^{-\gamma k(x_1+x_2)\sqrt{n}}).$$
Пусть
$$\widetilde{J}(n,k) \equiv \int\limits_{\Gamma} \Pi(t)\,dt.$$
Тогда
$$J(n,k) = \widetilde{J}(n,k) + O(c^k e^{-\gamma k(x_1+x_2)\sqrt{n}}).$$
Рассмотрим $\widetilde{J}(n,k)$:
$$\widetilde{J}(n,k) = -\frac{1}{\pi i}\sum_{l=1}^{m}\left\|\int\limits_{\Gamma} \frac{1-\mu^{a+b}(t)h(t)}{t(1-t^2)^{n+1}}\mu^{ka+(k-1)b}(t)e^{\mu_+(t)b}h^{k-1}(t)H_1(t)\mathscr{V}(t,0)\,dt\right\|_{sl}$$
$$= -\frac{1}{\pi i}\sum_{l=1}^{m}\left\|\int\limits_{\Gamma} \frac{1-h(t)}{t(1-t^2)^{n+1}}\mu^{ka+(k-1)b}(t)e^{\mu_+(t)b}h^{k-1}(t)H_1(t)\mathscr{V}(t,0)\,dt\right\|_{sl}$$
$$-\frac{1}{\pi i}\sum_{l=1}^{m}\left\|\int\limits_{\Gamma} \frac{1-\mu^{a+b}(t)}{t(1-t^2)^{n+1}}\mu^{ka+(k-1)b}(t)e^{\mu_+(t)b}h^{k}(t)H_1(t)\mathscr{V}(t,0)\,dt\right\|_{sl}$$
$$= \frac{1}{\pi i}\sum_{l=1}^{m}\left\|\int\limits_{\Gamma} \widetilde{D}(t)e^{n\tilde{f}(t)}\,dt\right\|_{sl} + \frac{a+b}{\pi i}\sum_{l=1}^{m}\left\|\int\limits_0^1\int\limits_{\Gamma} D(t)e^{nf(t)}\,dtdx\right\|_{sl}$$
$$= I_1(n) + (a+b)I_2(n).$$
Для получения последнего равенства мы воспользовались представлением
$$\frac{e^{(\mu_+(t)-\mu_-(t))(a+b)}-1}{(\mu_+(t)-\mu_-(t))(a+b)} = \int\limits_0^1 e^{(\mu_+(t)-\mu_-(t))(a+b)x}\,dx,$$
в двойном интеграле поменяли порядок интегрирования и ввели следующие обозначения:
$$\widetilde{D}(t) = -\frac{1-h(t)}{(1-t^2)th(t)}H_1(t)\mathscr{V}(t,0), \quad D(t) = \frac{\mu_+(t)-\mu_-(t)}{(1-t^2)t}H_1(t)\mathscr{V}(t,0),$$
$$\tilde{f}(t) = \mu_+(t)(kx_1+kx_2)\tau_1 - \mu_-(t)(kx_1+(k-1)x_2)\tau_1 + k\tau_2\ln h(t) - \ln(1-t^2),$$
$$f(t) = \mu_+(t)((x_1+x_2)x + kx_1 + kx_2)\tau_1 - \mu_-(t)((x_1+x_2)x + kx_1 + (k-1)x_2)\tau_1 + k\tau_2\ln h(t) - \ln(1-t^2),$$
$$\tau_1 = 1/\sqrt{n}, \quad \tau_2 = 1/n.$$
Здесь мы выбираем главное значение логарифма. Напомним из [5], что в окрестности нуля имеют место разложения
$$\mu_\pm(t) = \pm\psi_1 t + \psi_2 t^2 \pm \psi_3 t^3 + \dots, \quad \psi_1 > 0.$$
Рассмотрим уравнения
$$F_1(t,z_1,z_2) \equiv [(\mu'_+(t)(kx_1+kx_2) - \mu'_-(t)(kx_1+(k-1)x_2)]z_1 + k\frac{h'(t)}{h(t)}z_2 + \frac{2t}{1-t^2} = 0, \tag{9}$$
$$F_2(t,z_1,z_2) \equiv [\mu'_+(t)((x_1+x_2)x+kx_1+kx_2) - \mu'_-(t)((x_1+x_2)x+kx_1+(k-1)x_2)]z_1 + k\frac{h'(t)}{h(t)}z_2 + \frac{2t}{1-t^2} = 0. \tag{10}$$

Функции $F_j(t, z_1, z_2)$, $j = 1, 2$, аналитичны в точке $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, $F_j(\mathbf{0}) = 0$, $\frac{\partial F_j(\mathbf{0})}{\partial t} = 2$, и, следовательно, по теореме о неявной функции существуют решения $t_1(z_1, z_2)$ и $t_2(z_1, z_2)$ уравнений (9) и (10) соответственно, представимые в некоторой окрестности $\Delta = \{|z_j| < \tau, j = 1, 2\}$ в виде сходящихся рядов по степеням z_1, z_2. Заметим, что

$$\tilde{f}'(t) = F_1(t, \tau_1, \tau_2), \quad f'(t) = F_2(t, \tau_1, \tau_2).$$

Обозначим

$$h(t) = 1 + h_1 t + h_2 t^2 + \ldots, \quad \ln h(t) = \eta_1 t + \eta_2 t^2 + \ldots, \quad \ln(1 - t^2) = -t^2 - \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3} - \ldots.$$

Напомним, что $\tau_1 = 1/\sqrt{n}$, $\tau_2 = 1/n$. Тогда разложения для точек перевала $\tilde{t}_0$, t_0 функций $\tilde{f}(t)$, $f(t)$ соответственно имеют вид

$$\tilde{t}_0 = -\psi_1 \left(kx_1 + \frac{2k-1}{2} x_2 \right) \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(\frac{kh_1}{2} - 2\psi_1 \psi_3 x_2 \left(kx_1 + \frac{2k-1}{2} x_2 \right) \right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^3} \right),$$

$$t_0 = -\psi_1 \left((x_1 + x_2)x + kx_1 + \frac{2k-1}{2} x_2 \right) \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(\frac{kh_1}{2} - 2\psi_1 \psi_3 x_2 \left((x_1 + x_2)x + kx_1 + \frac{2k-1}{2} x_2 \right) \right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^3} \right).$$

Заметим,что

$$\tilde{f}(t) = \left(\psi_1 (2kx_1 + (2k-1)x_2) \frac{1}{\sqrt{n}} + k\eta_1 \frac{1}{n} \right) t + \left(\psi_2 x_2 \frac{1}{\sqrt{n}} + k\eta_2 \frac{1}{n} + 1 \right) t^2 + \left(\psi_3 (2kx_1 + (2k-1)x_2) \frac{1}{\sqrt{n}} + k\eta_3 \frac{1}{n} \right) t^3 + \ldots,$$

$$f(t) = \left(\psi_1 (2(x_1 + x_2)x + 2kx_1 + (2k-1)x_2) \frac{1}{\sqrt{n}} + k\eta_1 \frac{1}{n} \right) t + \left(\psi_2 x_2 \frac{1}{\sqrt{n}} + k\eta_2 \frac{1}{n} + 1 \right) t^2 + \left(\psi_3 ((x_1 + x_2)x + 2kx_1 + (2k-1)x_2) \frac{1}{\sqrt{n}} + k\eta_3 \frac{1}{n} \right) t^3 + \ldots.$$

Тогда

$$\tilde{f}(\tilde{t}_0) = -\psi_1^2 \left(kx_1 + \frac{2k-1}{2} x_2 \right)^2 \frac{1}{n} - \psi_1 \left(kx_1 + \frac{2k-1}{2} x_2 \right) \times \left(k\eta_1 - \psi_1 \psi_3 x_2 \left(kx_1 + \frac{2k-1}{2} x_2 \right) \right) \frac{1}{(\sqrt{n})^3} + O\left(\frac{1}{n^2} \right),$$

$$f(t_0) = -\psi_1^2 \left((x_1 + x_2)x + kx_1 + \frac{2k-1}{2} x_2 \right)^2 \frac{1}{n} - \psi_1 \left((x_1 + x_2)x + kx_1 + \frac{2k-1}{2} x_2 \right) \times \left(k\eta_1 - \psi_1 \psi_3 x_2 \left((x_1 + x_2)x + kx_1 + \frac{2k-1}{2} x_2 \right) \right) \frac{1}{(\sqrt{n})^3} + O\left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Далее,

$$\tilde{f}''(\tilde{t}_0) = 2 + 2\psi_2 x_2 \frac{1}{\sqrt{n}} + (2k\eta_2 - 3\psi_1\psi_3(2kx_1 + (2k-1)x_2)^2)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^3}\right),$$

$$f''(t_0) = 2 + 2\psi_2 x_2 \frac{1}{\sqrt{n}} + (2k\eta_2 - 3\psi_1\psi_3(2(x_1+x_2)x + 2kx_1 + (2k-1)x_2)^2)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^3}\right).$$

Применим к $I_1(n)$, $I_2(n)$ модифицированный метод перевала. Поскольку

$$\tilde{f}'(\tilde{t}_0) = 0, \quad f'(t_0) = 0,$$

каждая пара кривых $\operatorname{Re}\tilde{f}(t) = \tilde{f}(\tilde{t}_0)$, $\operatorname{Re} f(t) = f(t_0)$ делит окрестности точек $\tilde{t}_0$, t_0 соответственно на четыре прямоугольных сектора, в которых поочередно $\operatorname{Re}\tilde{f}(t) < \tilde{f}(\tilde{t}_0)$, $\operatorname{Re} f(t) < f(t_0)$ и $\operatorname{Re}\tilde{f}(t) > \tilde{f}(\tilde{t}_0)$, $\operatorname{Re} f(t) > f(t_0)$. При достаточно больших n концы контура Γ лежат внутри секторов $\operatorname{Re}\tilde{f}(t) < \tilde{f}(\tilde{t}_0)$, $\operatorname{Re} f(t) < f(t_0)$. Изменим в $I_1(n)$, $I_2(n)$ контур Γ таким образом, чтобы, оставаясь внутри этих секторов, он проходил через точки $\tilde{t}_0$, t_0.

Пусть $\tilde{g}_{l,s}$, $g_{l,s}$ — коэффициенты при z^l в произведениях

$$\frac{1}{s!}(\widetilde{D}_0 + \widetilde{D}_1 z + \dots)(\tilde{f}_1 z + \tilde{f}_2 z^2 + \dots)^s, \quad \frac{1}{s!}(D_0 + D_1 z + \dots)(f_1 z + f_2 z^2 + \dots)^s$$

соответственно, где

$$\widetilde{D}_m = \frac{\widetilde{D}^{(m)}(\tilde{t}_0)}{m!}, \quad \tilde{f}_m = \frac{\tilde{f}^{(m+2)}(\tilde{t}_0)}{(m+2)!},$$

$$D_m = \frac{D^{(m)}(t_0)}{m!}, \quad f_m = \frac{f^{(m+2)}(t_0)}{(m+2)!}, \quad m = 0, 1, \dots.$$

Тогда при любом $q \geq 1$ метод Лапласа оценки интегралов дает

$$I_1(n) = \sum_{l=0}^{m} \left\| \sum_{j=0}^{q-1} \frac{1}{n^{j+1/2}} \widetilde{Q}_j e^{n\tilde{f}(\tilde{t}_0)} + \frac{1}{n^{q+1/2}} \widetilde{R}_q e^{n\tilde{f}(\tilde{t}_0)} \right\|_{sl}, \tag{11}$$

$$I_2(n) = \sum_{l=0}^{m} \left\| \sum_{j=0}^{q-1} \frac{1}{n^{j+1/2}} \int_0^1 Q_j e^{nf(t_0)}\, dx + \frac{1}{n^{q+1/2}} \int_0^1 R_q e^{nf(t_0)}\, dx \right\|_{sl}, \tag{12}$$

$$\widetilde{Q}_j = \frac{(-1)^{1/2}}{\pi} \sum_{s=0}^{2j} \tilde{g}_{2j,s} (-\tilde{f}_0)^{-s-j-1/2} \Gamma(j+s+1/2), \tag{13}$$

$$Q_j = \frac{(-1)^{1/2}}{\pi} \sum_{s=0}^{2j} g_{2j,s} (-f_0)^{-s-j-1/2} \Gamma(j+s+1/2). \tag{14}$$

В наших условиях величины $e^{n\tilde{f}(\tilde{t}_0)}$, $e^{nf(t_0)}$, $\widetilde{Q}_j$, Q_j допускают разложения по степеням $n^{-1/2}$:

$$e^{n\tilde{f}(\tilde{t}_0)} = \exp\left\{-\psi_1^2\left(kx_1 + \frac{2k-1}{2}x_2\right)^2\right\}\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n^{j/2}} \widetilde{m}_j(k, x_1, x_2)\right), \tag{15}$$

$$e^{nf(t_0)} = \exp\left\{-\psi_1^2\left((x_1+x_2)x + kx_1 + \frac{2k-1}{2}x_2\right)^2\right\}\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n^{j/2}} m_j(k, x_1, x_2)\right), \tag{16}$$

$$\widetilde{Q}_j=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{n^{j/2}}\widetilde{M}_j(k,x_1,x_2),\tag{17}$$

$$Q_j=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{n^{j/2}}M_j(k,x_1,x_2).\tag{18}$$

Заметим, что $\widetilde{m}_j(k,x_1,x_2)$, $m_j(k,x_1,x_2)$, $\widetilde{Q}_j$ Q_j являются многочленами степени не выше $3j$ по каждой переменной. Подставим выражения (15)–(18) в (11) и (12), выполним умножение рядов и перегруппируем слагаемые по степеням $n^{-1/2}$. В результате получим разложения вида

$$I_1(n)=e^{-\psi_1^2(kx_1+\frac{2k-1}{2}x_2)^2}\sum_{l=1}^{m}\left\|\sum_{j=0}^{q-1}\frac{1}{n^{(j+1)/2}}\widetilde{L}_j(k,x_1,x_2)+\frac{1}{n^{(q+1)/2}}\Psi_q^{(1)}(k,x_1,x_2)\right\|_{sl},\tag{19}$$

$$I_2(n)=\sum_{l=1}^{m}\left\|\sum_{j=0}^{q-1}\frac{1}{n^{(j+1)/2}}\int\limits_0^1\widetilde{L}_j(k,x_1,x_2)e^{-\psi_1^2((x_1+x_2)x+kx_1+\frac{2k-1}{2}x_2)^2}\,dx\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n^{(q+1)/2}}\int\limits_0^1\Psi_q^{(2)}(k,x,x_1,x_2)e^{-\psi_1^2((x_1+x_2)x+kx_1+\frac{2k-1}{2}x_2)^2}\,dx\right\|_{sl}.\tag{20}$$

Можно показать ограниченность $\Psi_q^{(1)}(k,x_1,x_2)$ и последнего интеграла в (20). В случае $m=1$ это сделано в [7]. Обозначим

$$I_1(n)+(a+b)I_2(n)=I_1(n)+(x_1+x_2)\sqrt{n}I_2(n)$$
$$\equiv\sum_{l=1}^{m}\left\|\sum_{j=0}^{q-1}\frac{1}{n^{j/2}}U_j(k,x_1,x_2)+\frac{1}{n^{q/2}}\Psi_q(k,x_1,x_2)\right\|_{sl}.\tag{21}$$

Главный член в разложении (21) равен

$$\sum_{l=1}^{m}\|U_0(k,x_1,x_2)\|_{sl}$$
$$=\sum_{l=1}^{m}\left\|\frac{2\psi_1(x_1+x_2)}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 e^{-\psi_1^2((x_1+x_2)x+kx_1+\frac{2k-1}{2}x_2)^2}\,dxI(0)l(0)\right\|_{sl}$$
$$=2\left(\Phi_{0,1}\left(\frac{\psi_1}{\sqrt{2}}(2(k+1)(x_1+x_2)-x_2)\right)-\Phi_{0,1}\left(\frac{\psi_1}{\sqrt{2}}(2k(x_1+x_2)-x_2)\right)\right),\tag{22}$$

где $\Phi_{0,1}(x)$ — функция стандартного нормального закона.

Учитывая все изложенное выше, получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* $k=\mathrm{const}$, $k\geq 1$, $a=x_1\sqrt{n}$, $b=x_2\sqrt{n}$, $n\to\infty$. *Тогда при* $q\geq 1$

$$\mathbb{P}\big(\eta_n^{(1)}=k/\varkappa_0=s\big)=\sum_{l=1}^{m}\left\|\sum_{j=0}^{q-1}\frac{1}{n^{j/2}}U_j(k,x_1,x_2)+\frac{1}{n^{q/2}}\Psi_q(k,x_1,x_2)\right\|_{sl},\tag{23}$$

где $U_j(k,x_1,x_2)$, $\Psi_q(k,x_1,x_2)$ *определяются соотношениями* (15)–(20), *главный член разложения* (23) *вычислен в* (22).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровков К. А.* Теоремы непрерывности и оценки скорости сходимости компонент факторизации для блужданий на цепях Маркова // Теория вероятностей и ее применения. 1980. Т. 25, № 2. С. 329–338.

2. *Боровков А. А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 645–694.

3. *Пресман Э. Л.* Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, № 4. С. 861–900.

4. *Лотов В. И.* Об асимптотике распределений в двуграничных задачах для случайных блужданий, заданных на цепи Маркова // Асимптотический анализ распределений случайных процессов. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. Т. 13. С. 116–136. (Тр. Ин-та математики СО АН СССР).

5. *Арндт К.* Асимптотические свойства распределения супремума случайного блуждания на цепи Маркова // Теория вероятностей и ее применения. 1980. Т. 25, № 2. С. 313–323.

6. *Лотов В. И., Орлова Н. Г.* О факторизационных представлениях в граничных задачах для случайных блужданий, заданных на цепи Маркова // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 4. С. 833–840.

7. *Лотов В. И., Орлова Н. Г.* Асимптотические разложения для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 4. С. 822–842.

8. *Лотов В. И.* Предельные теоремы в одной граничной задаче для случайных блужданий // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 42, № 5. С. 1095–1108.

Статья поступила 31 января 2006 г.

Лотов Владимир Иванович, *Орлова Нина Геннадьевна*
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
lotov@math.nsc.ru