Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2006. Том 47, № 6

УДК 519.21

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ПРОХОЖДЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ С СЕМИЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СКАЧКАМИ

А. А. Могульский

Аннотация: Пусть ξ, $\xi(1)$, $\xi(2), \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $-\xi$ семиэкспоненциально, т. е. $\mathbf{P}(-\xi \geq t) = e^{-t^\beta L(t)}$, $\beta \in (0,1)$, $L(t)$ — медленно меняющаяся функция при $t \to \infty$, обладающая некоторыми свойствами гладкости (см. ниже). Пусть $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{D}\xi = 1$, $S(k) = \xi(1) + \cdots + \xi(k)$. Для фиксированного $d > 0$ определим момент $\eta_+(u) = \inf\{k \geq 1 : \ S(k) + kd > u\}$ первого прохождения снизу вверх неотрицательного уровня $u \geq 0$ блужданием $S(k) + kd$ с положительным сносом $d > 0$. Доказано, что в широких предположениях при $n \to \infty$ и для $u = u(n) \in [0, \ dn - N_n\sqrt{n}]$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(\eta_+(u) > n) \sim \frac{\mathbf{E}\eta_+(u)}{n}\mathbf{P}(S(n) \leq x), \tag{0.1}$$

где $x = u - nd < 0$, произвольная фиксированная последовательность N_n, не превышающая $d\sqrt{n}$, стремится к ∞.

Условия, при которых доказано соотношение (0.1), полностью совпадают с условиями, при которых в [1] найдена асимптотика вероятности $\mathbf{P}(S(n) \leq x)$ для $x \leq -\sqrt{n}$ (для $x \in [-\sqrt{n}, 0]$ она известна из центральной предельной теоремы).

Ключевые слова: одномерное случайное блуждание, момент первого прохождения, большие уклонения, семиэкспоненциальное распределение, интегро-локальная теорема, интегральная теорема, теорема, действующая на всей оси, функция уклонений, отрезок ряда Крамера.

1. Постановка задачи. Пусть $\xi, \xi(1), \xi(2), \ldots$ — независимые случайные величины с общим распределением $\mathbf{F}(B) = \mathbf{P}(\xi \in B)$, нулевым средним $\mathbf{E}\xi = 0$ и единичной дисперсией $\mathbf{D}\xi = 1$.

Определим момент первого прохождения снизу вверх

$$\eta_+(u) := \inf\{k \geq 1 : S(k) + kd > u\}$$

неотрицательного уровня $u \geq 0$ блужданием

$$S(k) + kd = \xi(1) + \cdots + \xi(k) + kd, \quad k = 1, 2, \ldots$$

с *фиксированным сносом* $d \geq 0$.

Мы будем изучать асимптотическое поведение вероятности

$$\mathbf{P}(\eta_+(u) > n) = \mathbf{P}(\overline{Z}(n) \leq u), \quad \overline{Z}(n) := \max_{1 \leq k \leq n}\{S(k) + dk\}, \tag{1.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00810), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–2139.2003.1) и INTAS (N 02–51–5019).

для уровня $u = u(n) \geq 0$, зависящего от n таким образом, что эта вероятность стремится к 0. Поскольку в случае нулевого сноса $d = 0$ задача об асимптотическом поведении вероятности (1.1) решена достаточно полно (см. [2–9] и обзор, приведенный в [3, 4]), то мы будем рассматривать только случай *постоянного положительного сноса* $d > 0$. В этом случае вероятность (1.1) сходится к 0, если параметр u лежит в пределах $[0, nd - N_n\sqrt{n}]$, где $N_n \leq d\sqrt{n}$ и $N_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Мы не будем останавливаться подробно на ситуациях, когда

1) вероятность (1.1) стремится к положительному отличному от 1 пределу (в этом случае $u - nd \sim v\sqrt{n}$ для фиксированного $v \in \mathbb{R}$),

2) этот предел равен 1 (тогда $u - nd \gg \sqrt{n}$).

В первом случае в силу принципа инвариантности

$$\mathbf{P}(\eta_+(u) > n) = \mathbf{P}(\overline{Z}(n) \leq u) \to \Phi(v),$$

где $\Phi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{v} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$. Во втором случае естественно изучать поведение дополнительной вероятности

$$\mathbf{P}(\eta_+(u) \leq n) = \mathbf{P}(\overline{Z}(n) > u),$$

когда она стремится к 0; эта задача решена достаточно полно (см. [3, 4, 9] и обзоры, приведенные там).

Приведем краткий обзор известных к настоящему времени результатов, описывающих асимптотику стремления к 0 вероятности (1.1) для блужданий с постоянным положительным сносом $d > 0$. Рассмотрим сначала случай, когда выполнено одностороннее условие Крамера, которое заключается в отрицательности константы $\lambda_- := \inf\{\lambda : \varphi(\lambda) < \infty\}$, где $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi}$. Обозначим

$$\alpha_- = \inf_{\lambda_- < \lambda < 0} \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}.$$

Тогда если $\alpha := \frac{u}{n} - d \to \alpha_0 \in (\alpha_- 0)$, то имеет место соотношение (см., например, [6])

$$\mathbf{P}(\eta_+(u) > n) \sim C(\alpha_0)\mathbf{P}(S(n) \leq x),$$

где $x := u - nd$, непрерывная функция $C(\alpha)$ и асимптотика вероятности $\mathbf{P}(S(n) \leq x)$ известны в явном виде. В случае, когда точка $\alpha := \frac{u}{n} - d$ лежит левее α_-, проблема об асимптотическом поведении вероятностей (1.1) остается открытой.

Если условие Крамера не выполнено, то для отыскания асимптотики вероятности (1.1) (как и для решения более простой задачи об асимптотике вероятности $\mathbf{P}(S(n) \leq x)$ при $x \ll -\sqrt{n}$) приходится привлекать дополнительные условия о регулярном изменении на бесконечности левого хвоста $F_-(t) = \mathbf{P}(\xi \leq -t)$ распределения слагаемого ξ.

Рассмотрим два основных класса таких распределений, не удовлетворяющих условию Крамера: (a) класс $\mathcal{R}_-$ *распределений с правильно меняющимся левым хвостом*, для которых

$$F_-(t) = t^{-\beta}L(t),$$

где $\beta > 0$, $L(t)$ — медленно меняющаяся функция (м.м.ф.) на бесконечности; (b) класс $\mathcal{S}e_-$ *распределений с семиэкспоненциальным левым хвостом*, для которых

$$F_-(t) = e^{-l(t)}, \quad l(t) = t^{\beta}L(t),$$

где $\beta \in (0, 1]$ и $L(t)$ — м.м.ф. при $t \to \infty$. Для класса $\mathcal{R}_-$ при $d > 0$ задача о поведении вероятности (1.1), когда она стремится к нулю, решена достаточно полно: *при $\beta > 2$ в широких предположениях справедливо соотношение* (0.1) (см. [2, 10] для случая фиксированного $u \geq 0$; [3, 4, 9] для общего случая, когда $u \in [0, nd - N_n\sqrt{n}]$, $N_n \to \infty$, $N_n \leq d\sqrt{n}$). При этом асимптотика вероятности $\mathbf{P}(S(n) \leq x)$, присутствующая в (0.1), изучена достаточно полно (см. [11, 12] и библиографический обзор в [9]).

Для класса $\mathcal{S}e_-$ задача об асимптотике стремления к нулю вероятностей (1.1) и близкие вопросы рассматривались в работах [2, 10, 13–15] лишь для случая $u = \mathrm{const}$, $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ и при существенных дополнительных ограничениях. Недавно (в декабре 2005 г.), на семинаре лаборатории теории вероятностей и математической статистики Института математики СО РАН, В. В. Шнеер сделал доклад, в котором, в частности, *для любого $\beta \in (0, 1)$ найдена асимптотика вероятностей* (1.1) *для фиксированного уровня $u \geq 0$* (см. также [16, 17]).

Настоящая работа посвящена отысканию асимптотики стремления к нулю вероятностей (1.1) для произвольных распределений с левым семиэкспоненциальным хвостом в случае $\beta \in (0, 1)$. Основной результат настоящей работы можно представить так: *при фиксированном $d > 0$ для произвольной последовательности $N_n \to \infty$, $N_n \leq d\sqrt{n}$, имеет место равномерное по $u \in [0, nd - N_n\sqrt{n}]$ асимптотическое соотношение* (0.1) (см. теорему 3.2 ниже). При этом асимптотика вероятности $\mathbf{P}(S(n) \leq x)$ для $x = -nd + u$ в правой части (0.1) найдена в [18–21, 9] и, более полно, в [1]. Условия, при которых удалось доказать (0.1), совпадают с условиями, при которых в [1] доказана интегральная теорема для сумм $S(n)$ (которая приведена ниже (см. теорему 3.1)), и в этом смысле являются неулучшаемыми.

В дальнейшем нам будет удобнее использовать несколько иные обозначения. Это связано с тем, что при неотрицательных уровнях u, рассматриваемых выше, нам приходится изучать отрицательные уклонения для $S(n)$ (см. (0.1)), проводить срезки случайных величин на отрицательных уровнях и т. д. Это неудобно и усложняет изложение. Оказывается, проще пойти на некоторые неудобства при постановке задачи, рассматривая неположительные уровни u и отрицательный снос $-d$, с тем, чтобы затем иметь дело с положительными уклонениями $S(n)$ и положительными уровнями срезок для $\xi(k)$. Итак, основным объектом изучения будет момент первого прохождения сверху вниз

$$\eta(u) := \inf\{k \geq 1 : S(k) - kd < u\}$$

неположительного уровня $u \leq 0$ блужданием

$$S(k) + kd = \xi(1) + \dots + \xi(k) - kd, \quad k = 1, 2, \dots,$$

с фиксированным отрицательным сносом $-d < 0$, скачки которого имеют семиэкспоненциальное распределение (см. ниже определение 1.1). Мы будем изучать асимптотическое поведение вероятности

$$\mathbf{P}(\eta(u) > n) = \mathbf{P}(\underline{Z}(n) \geq u), \quad \underline{Z}(n) = \min_{1 \leq k \leq n}\{S(k) - dk\}, \tag{1.2}$$

для уровня $u = u(n) \leq 0$, зависящего от n таким образом, что эта вероятность стремится к 0. Очевидно, что мы пришли к задаче, эквивалентной поставленной выше, но уже для распределений с правым семиэкспоненциальным хвостом. Все основные утверждения, приведенные ниже, будут сформулированы для вероятности (1.2).

2. Основные условия.

Определение 1.1. Будем говорить, что распределение $\mathbf{F}$ случайной величины ξ *принадлежит классу $\mathcal{S}e$ семиэкспоненциальных распределений*, если его правый хвост $F_+(t) := \mathbf{P}(\xi \geq t)$ имеет вид

$$F_+(t) = V(t) := e^{-l(t)} \quad \text{при } t \geq 0,$$

где $l(t) = t^\beta L(t)$, $\beta \in (0,1]$, $L(t)$ — медленно меняющаяся функция при $t \to \infty$; если $\beta = 1$, то $L(t) = o(1)$. При этом предполагается, что при $t \to \infty$, $v = o(t)$

$$l(t+v) - l(t) = v\frac{\beta l(t)}{t}(1 + o(1)) + o(1). \tag{2.1}$$

Соотношение (2.1) означает, что $l(t+v) - l(t) \sim v\frac{\beta l(t)}{t}$, если $\liminf\limits_{t\to\infty} \frac{vl(t)}{t} > 0$, и $l(t+v) - l(t) = o(1)$, если $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{vl(t)}{t} = 0$.

Класс $\mathcal{S}e$ семиэкспоненциальных распределений определен и достаточно полно изучен в [18, 9]. Хорошо известно, что он является подклассом класса $\mathcal{S}$ *субэкспоненциальных распределений*, которые при $\mathbf{E}\xi \geq 0$ характеризуются соотношением

$$\mathbf{P}(\xi(1) + \xi(2) \geq t) \sim 2\mathbf{P}(\xi \geq t) \quad \text{при } t \to \infty.$$

Везде в настоящей работе, как говорилось ранее, будем рассматривать только такие семиэкспоненциальные распределения $\mathbf{F}$, для которых параметр β (см. определение 1.1) лежит в интервале $(0, 1)$.

3. Формулировки основных утверждений. Определим, следуя [18, 9], функции

$$w_1(t) = \frac{l(t)}{t^2} = t^{\beta-2}L(t), \quad w_2(t) = \frac{l^2(t)}{t^2} = t^{2\beta-2}L^2(t),$$

которые сходятся к 0 при $t \to \infty$, при этом, очевидно, $w_1(t) = o(w_2(t))$ при $t \to \infty$. Важную роль в описании зон уклонений сумм $S(n)$ играют функции $\sigma_1(n)$, $\sigma_2(n)$, которые представляются в виде

$$\sigma_1(t) = t^{\frac{1}{2-\beta}}L_1(t), \quad \sigma_2(t) = t^{\frac{1}{2-2\beta}}L_2(t),$$

где $L_1(t), L_2(t)$ — м.м.ф. Эти функции определены и изучены в [18, 9]:

$$\sigma_i(t) := \inf\{u : w_i(u) \leq 1/t\}, \quad i = 1, 2.$$

Кроме того, нам понадобится следующее моментное условие (для распределения из класса $\mathcal{S}e$ оно регламентирует убывание левого хвоста распределения):

$$\mathbf{E}|\xi|^\kappa < \infty, \quad \kappa = [1/(1-\beta)] + 2. \tag{3.1}$$

Из условия (3.1) следует, что для центрированной случайной величины ξ определены и конечны *семиинварианты* γ_1, γ_2, … ,γ_κ (см., например, [22]):

$$\gamma_j := (-i)^j \frac{d^j \ln \mathfrak{f}(t)}{dt^j}\bigg|_{t=0} \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, \kappa, \quad \mathfrak{f}(t) := \mathbf{E}e^{it\xi},$$

при этом $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \mathbf{D}\xi = 1$. С помощью семиинвариантов $\gamma_2, \dots, \gamma_\kappa$ можно построить полиномы степени κ

$$\Lambda_{(\kappa)}(\alpha) := \sum_{j=2}^{\kappa} \frac{\alpha^j v_j}{j!}, \quad \Lambda_{(\kappa,0)}(\alpha) := \sum_{j=3}^{\kappa} \frac{\alpha^j v_j}{j!} = \Lambda_{(\kappa)}(\alpha) - \frac{\alpha^2 v_2}{2},$$

называемые *отрезками ряда Крамера* (*или урезанными рядами Крамера*) для случайной величины ξ (см., например, [22]), которые определяют асимптотику больших уклонений сумм $S(n)$ в регулярной (крамеровской) зоне уклонений. Коэффициент v_j для $j \in \{2, \dots, \kappa\}$ представляется в виде $v_j = v_j(\gamma_2, \dots, \gamma_j)$, где функции $v_j = v_j(u_2, \dots, u_j)$, отображающие $\mathbb{R}^{j-1}$ в $\mathbb{R}^1$, не зависят от распределения $\mathbf{F}$ (алгоритм построения этих функций приведен в п. 4.3 работы [1]). В частности, $v_2 = \frac{1}{\gamma_2}$, $v_3 = -\frac{\gamma_3}{\gamma_2^3}$, $v_4 = -\frac{\gamma_4\gamma_2 - 3\gamma_3^2}{\gamma_2^5}$ и т. д.

Определяющую роль в описании больших уклонений сумм $S(n)$ играют функции

$$\begin{aligned} M_0(x,n) &:= \inf_{0 \le t \le x} \{l(x-t) + n\Lambda_{(\kappa)}(t/n)\}, \\ M(x,n) &:= \inf_{0 \le t \le x/(2-\beta)} \{l(x-t) + n\Lambda_{(\kappa)}(t/n)\}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

введенные и изученные в [18, 9, 1]. Функция $M_0(x,n)$ описывает логарифмическую асимптотику вероятностей больших уклонений сумм $S(n)$ (теорема 2.1 в [1]): при $x \gg \sqrt{n}$, $n \to \infty$

$$\ln \mathbf{P}(S(n) > x) \sim -M_0(x,n).$$

При $x \gg \sqrt{n}$, $x = o(\sigma_1(n))$ выполняется соотношение

$$M_0(x,n) \sim x^2/2n, \quad n \to \infty,$$

при $x \gg \sigma_1(n)$ —

$$M_0(x,n) = l(x) - n\beta^2 \frac{l^2(x)}{x^2}(1 + o(1)) \sim l(x), \quad n \to \infty;$$

в зоне $x \gg \sigma_2(n)$, где $n\beta^2 \frac{l^2(x)}{x^2} = o(1)$, имеет место соотношение

$$M_0(x,n) = l(x) + o(1), \quad n \to \infty.$$

Очевидно, что $M(x,n) \ge M_0(x,n)$; как показано в [1], разность $M(x,n) - M_0(x,n)$ становится «существенной» только при $x \le s_0\sigma_1(n)$, где

$$s_0 = s_0(\beta) := \frac{(2-\beta)}{(2-2\beta)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}}}.$$

При $x = s\sigma_1(n)$ для любого фиксированного $s \in (0, \infty)$ справедливы формулы (см. лемму 2.1 в [1])

$$M(x,n) \sim G_1(s) l(x) \sim G_2(s) \frac{x^2}{2n}, \quad n \to \infty,$$

в которых функции $G_1(s)$, $G_2(s)$ определены соотношениями

$$G_1(s) := \min_{0 \le p \le \frac{1}{2-\beta}} H(s,p), \quad G_2(s) := 2s^{\beta-2} G_1(s), \quad s \ge 0, \tag{3.3}$$

где $H(s,p) := (1-p)^\beta + \frac{s^{2-\beta}}{2} p^2$. Обозначим через $p(s)$ наибольшее p из отрезка $\left[0, \frac{1}{2-\beta}\right]$, для которого достигается минимум в определении (3.3) функции $G_1(s)$, так что $G_1(s) = H(s, p(s))$.

Следующие свойства функций $G_1(s)$, $G_2(s)$, $p(s)$ перечислены в лемме 2.1 из [1]. Функция $G_1(s)$ возрастает, а функция $G_2(s)$ убывает при $s > 0$. При этом $G_2(s_0) = 1$, $G_2(s) \to \infty$ при $s \to 0$ и $G_1(s) \uparrow 1$ при $s \to \infty$. Функция $p(s)$ непрерывна и положительна при $s \ge 0$, убывает при $s \ge s_0 - \varepsilon$ и постоянна при $s \le s_0 - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$,

$$p(s_0 - \varepsilon) = \frac{1}{2-\beta}, \quad p(s_0) = \frac{\beta}{2-\beta}, \quad p(s) \sim \frac{\beta}{s^{2-\beta}} \quad \text{при } s \to \infty.$$

Следуя [1], введем обозначение

$$c_1(s) = [2 - \beta(1-\beta)(2/s^{2-\beta})(1-p(s))]^{-1/2} \text{ при } s \ge s_0, \quad c_1(s) = c_1(s_0) \text{ при } s \le s_0.$$

Функция $c_1(s)$ непрерывна и положительна при $s \ge 0$, $c_1(s) \to 1$ при $s \to \infty$.

Следующая интегральная теорема, действующая на всей вещественной оси, получена в [1].

Теорема 3.1. *Пусть распределение* $\mathbf{F}$ *случайной величины* ξ *лежит в классе* $\mathcal{S}e$ *при некотором* $\beta \in (0,1)$ *и выполнено условие* (3.1). *Тогда равномерно по* $x = s_1\sigma_1(n) \to \infty$, $x \geq \sqrt{n}$, *справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(S(n) \geq x) \sim \Phi(-x/\sqrt{n})e^{-n\Lambda_{(\kappa,0)}(\frac{x}{n})} + nc_1(s_1)e^{-M(x,n)},$$

где $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int\limits_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, $\Phi(-\frac{x}{\sqrt{n}})e^{-n\Lambda_{(\kappa,0)}(\frac{x}{n})} \sim \frac{\sqrt{n}}{x\sqrt{2\pi}}e^{-n\Lambda_{(\kappa)}(\frac{x}{n})}$ *при* $x \gg \sqrt{n}$, $c_1(s_1) \to 1$ *при* $s_1 \to \infty$. *В частности, при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(S(n) \geq x) \sim \begin{cases} \Phi(-\frac{x}{\sqrt{n}})e^{-n\Lambda_{(\kappa,0)}(\frac{x}{n})}, & \text{если } x \geq \sqrt{n},\ s_1 \leq s_0 - \varepsilon, \\ nc_1(s_1)e^{-M(x,n)}, & \text{если } s_1 \geq s_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

В «крайней» зоне уклонений $x = s_2\sigma_2(n) \to \infty$, $s_2 \geq c = \mathrm{const} > 0$, *выполняется*

$$\mathbf{P}(S(n) \geq x) \sim nc_2(s_2)e^{-l(x)},$$

где $c_2(s_2) := \exp\big\{\frac{\beta^2}{2s_2^{2-2\beta}}\big\} \to 1$ *при* $s_2 \to \infty$.

Сформулируем теперь основное утверждение настоящей работы.

Теорема 3.2. *Пусть распределение* $\mathbf{F}$ *случайной величины* ξ *лежит в классе* $\mathcal{S}e$ *при некотором* $\beta \in (0,1)$ *и выполнено условие* (3.1). *Тогда для любой последовательности* $N_n \to \infty$, $N_n \leq d\sqrt{n}$, *справедливо при* $n \to \infty$ *равномерное в зоне* $u \in [-nd + N_n\sqrt{n}, 0]$ *соотношение*

$$\mathbf{P}(\eta(u) > n) \sim \frac{\mathbf{E}\eta(u)}{n}\mathbf{P}(S(n) \geq nd + u). \tag{3.4}$$

Сравнивая теоремы 3.1, 3.2, получаем

Следствие 3.1. *Пусть распределение* $\mathbf{F}$ *случайной величины* ξ *лежит в классе* $\mathcal{S}e$ *при некотором* $\beta \in (0,1)$ *и выполнено условие* (3.1). *Тогда для любой последовательности* $N_n \to \infty$, $N_n \leq d\sqrt{n}$, *справедливо при* $n \to \infty$ *равномерное в зоне* $u \in [-nd + N_n\sqrt{n}, 0]$ *соотношение*

$$\mathbf{P}(\eta(u) > n) \sim \frac{\mathbf{E}\eta(u)}{n}\left(\Phi\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)e^{-n\Lambda_{(\kappa,0)}(\frac{x}{n})} + nc_1(s_1)e^{-M(x,n)}\right), \tag{3.5}$$

где $x = s_1\sigma_1(n) := nd + u$.

Заметим, что если в теореме 3.2 или следствии 3.1 уровень u стремится к $-\infty$, то в силу известной интегральной теоремы восстановления (см., например, [23]) множитель в правых частях формул (3.4), (3.5) имеет вид

$$\frac{\mathbf{E}\eta(u)}{n} \sim \frac{|u|}{dn}, \quad n \to \infty.$$

4. Доказательство теоремы 3.2. Оценки сверху. Для $x := nd + u$ обозначим

$$P^+ := \mathbf{P}(S(n) \geq x), \quad P := \mathbf{P}(\eta(u) > n).$$

Тогда оценка сверху, необходимая для доказательства теоремы 3.2, имеет вид

$$P \leq \frac{\mathbf{E}\eta(u)}{n}P^+(1 + o(1)), \quad n \to \infty. \tag{4.1}$$

Докажем (4.1). Если $x = o(n)$, т. е. $u \sim -nd$, то

$$\frac{\mathbf{E}\eta(u)}{n} \sim \frac{|u|}{dn} \sim 1,$$

и (4.1) является следствием очевидного неравенства $P \leq P^+$.

Докажем теперь (4.1) для случая $x \geq \nu n$, где $\nu > 0$ — произвольное фиксированное число. Для $U > 0$ обозначим

$$\varphi_U(\lambda) := \mathbf{E}(e^{\lambda\xi}; \xi \leq U), \quad \Lambda_U(t) := \sup_\lambda\{\lambda t - \ln\varphi_U(\lambda)\}.$$

Лемма 4.1. *Для любого фиксированного* $\alpha \in (1-\beta, 1)$

$$\varphi_U\left((1-\alpha)\frac{l(U)}{U}\right) \sim 1 + \frac{(1-\alpha)^2 l^2(U)}{2U^2}(1+o(1)) \quad \text{при } U \to \infty; \tag{4.2}$$

для любых фиксированных $\alpha \in (1-\beta, 1)$, $U_0 > 0$, $t_0 > 0$

$$n\Lambda_U\left(\frac{tU}{n}\right) \geq (1-\alpha)l(U)\left[t - \frac{(1-\alpha)}{2U_0^{2-\beta}}(1+o(1))\right] \quad \text{при } n \to \infty \tag{4.3}$$

в области $t \geq t_0$, $U \geq U_0\sigma_1(n)$.

Доказательство. Поскольку $n\Lambda_U(tU/n) \geq \lambda tU - n\ln\varphi_U(\lambda)$ для любого λ, то, полагая $\lambda = (1-\alpha)\frac{l(U)}{U}$, получаем в силу (4.2)

$$n\Lambda_U\left(\frac{tU}{n}\right) \geq (1-\alpha)l(U)\left[t - n\frac{(1-\alpha)l(U)}{2U^2}(1+o(1))\right]. \tag{4.4}$$

Если $U \gg \sigma_1(n)$, то

$$t - n\frac{(1-\alpha)l(U)}{2U^2}(1+o(1)) \geq t - o(1) \geq t - \frac{(1-\alpha)}{2U_0^{2-\beta}}(1+o(1)).$$

Если $U \sim sU_0\sigma_1(n)$ для фиксированного $s \geq 1$, то

$$\begin{aligned} t - n\frac{(1-\alpha)l(U)}{2U^2}(1+o(1)) &\geq t - \frac{(1-\alpha)nl(\sigma_1(n))}{2s^{2-\beta}U_0^{2-\beta}\sigma_1^2(n)}(1+o(1)) \\ &= t - \frac{(1-\alpha)}{2s^{2-\beta}U_0^{2-\beta}}(1+o(1)) \geq t - \frac{(1-\alpha)}{2U_0^{2-\beta}}(1+o(1)). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Таким образом, утверждение (4.3) в силу соотношений (4.4), (4.5) установлено как следствие (4.2).

Докажем утверждение (4.2). Для $\lambda_U = \frac{l(U)}{U}$ и любого фиксированного $N \in (0, \infty)$ выполняется

$$N^2\mathbf{E}(\xi^2; \xi \leq -1/(\lambda_U N)) = o(1), \quad U \to \infty. \tag{4.6}$$

Поэтому можно выбрать $N = N(U) \to \infty$ при $U \to \infty$ таким образом, что (4.6) сохранится, т. е. выполнено

$$N^2(U)\mathbf{E}(\xi^2; \xi \leq -1/(\lambda_U N(U))) = o(1). \tag{4.7}$$

Для этого $N(U)$, $U_1 = \frac{1}{\lambda_U N(U)}$, $U_2 = \frac{1}{\lambda_U \ln U}$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_U(\lambda) = \mathbf{E}(e^{\lambda\xi}; \xi \leq -U_1) + \mathbf{E}(e^{\lambda\xi}; -U_1 < \xi \leq U_2) + \mathbf{E}(e^{\lambda\xi}; U_2 < \xi \leq U) \\ := \varphi_{U,1}(\lambda) + \varphi_{U,2}(\lambda) + \varphi_{U,3}(\lambda). \end{aligned}$$

Оценим функции $\varphi_{U,k}(\lambda)$ в точке $\lambda = (1-\alpha)\lambda_U$, $k = 0, 1, 2$. В силу неравенства Чебышева и (4.7)

$$\varphi_{U,1}((1-\alpha)\lambda_U) \leq \mathbf{P}(\xi \leq -U_1) \leq \lambda_U^2 N^2(U)\mathbf{E}(\xi^2; \xi \leq -1/(\lambda_U N(U))) = o(\lambda_U^2). \tag{4.8}$$

Ввиду формулы Тейлора

$$\begin{aligned} \varphi_{U,2}((1-\alpha)\lambda_U) = \mathbf{P}(-U_1 < \xi \leq U_2) + (1-\alpha)\lambda_U\mathbf{E}(\xi; -U_1 < \xi \leq U_2) \\ + \frac{1}{2}(1-\alpha)^2\lambda_U^2(1+o(1)). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\mathbf{E}(\xi; -U_1 < \xi \le U_2) = -\mathbf{E}(\xi; \xi \le -U_1) - \mathbf{E}(\xi; \xi > U_2),$$
$$\mathbf{P}(-U_1 < \xi \le U_2) = 1 - \mathbf{P}(\xi \le -U_1) - \mathbf{P}(\xi > U_2),$$

то в силу неравенства Чебышева и (4.7)

$$\lambda_U|\mathbf{E}(\xi; -U_1 < \xi \le U_2)| \le \frac{1}{N(U)}\lambda_U^2 N^2(U) \times \mathbf{E}(\xi^2; \xi \le -1/(\lambda_U N(U))) + \lambda_U^2 \ln^2 U \mathbf{E}(\xi^3; \xi \ge U_2) = o(\lambda_U^2),$$
$$1 - \mathbf{P}(-U_1 < \xi \le U_2) \le \lambda_U^2 N^2(U) \times \mathbf{E}(\xi^2; \xi \le -1/(\lambda_U N(U))) + \lambda_U^3 \ln^3 U \mathbf{E}(\xi^3; \xi \ge U_2) = o(\lambda_U^2).$$

Таким образом,

$$\varphi_{U,2}((1-\alpha)\lambda_U) = 1 + \frac{1}{2}(1-\alpha)^2\lambda_U^2(1+o(1)). \tag{4.9}$$

Оценим теперь $\varphi_{U,3}((1-\alpha)\lambda_U)$. Интегрируя по частям, получаем для $g_U(t) = l(t) - (1-\alpha)\lambda_U t$, $g_U^* = \inf\limits_{U_2 \le t \le U} g_U(t)$

$$\varphi_{U,3}((1-\alpha)\lambda_U) = -\int_{U_2}^{U} e^{(1-\alpha)\lambda_U t}\, dV(t)$$
$$= -e^{(1-\alpha)\lambda_U t} V(t)\Big|_{t=U_2}^{t=U} + \lambda_U(1-\alpha)\int_{U_2}^{U} e^{(1-\alpha)\lambda_U t} V(t)\, dt$$
$$\le e^{(1-\alpha)\lambda_U U_2} V(U_2) + \lambda_U(1-\alpha)U \sup_{U_2 \le t \le U} e^{(1-\alpha)\lambda_U t} V(t).$$

Поскольку

$$\sup_{U_2 \le t \le U} e^{(1-\alpha)\lambda_U t} V(t) \le e^{-g_U^*}(1+o(1)),$$

то

$$\varphi_{U,3}((1-\alpha)\lambda_U) \le 2U\lambda_U e^{-g_U^*}(1+o(1)).$$

Заметим, что $g_U^* = \min\{g_{U,1}^*, g_{U,1}^*\}$, где $g_{U,1}^* := \inf\limits_{U_2 \le t \le \varepsilon U} g_U(t)$, $g_{U,2}^* := \inf\limits_{\varepsilon U \le t \le U} g_U(t)$. Так как при $\alpha > 1-\beta$

$$g_{U,2}^* \sim l(U) \inf_{\varepsilon \le p \le 1}\{p^\beta - (1-\alpha)p\} \sim g(\varepsilon U),$$

для любого $\varepsilon \in (0,1)$ выполняется $g_U^* \sim g_{U,1}^*$. Следовательно, можно выбрать функцию $\varepsilon_U = o(1)$ такую, что и для нее соотношение $g_U^* \sim g_{U,1}^*$ сохранится. Далее, поскольку $l(t) \gg (1-\alpha)\frac{l(U)}{U}t$ при $t = o(U)$, получаем

$$g_U^* \sim g_{U,1}^* \sim g_U(U_2) = l(U_2) - (1-\alpha)\lambda_U U_2 \sim l(U_2).$$

Поэтому

$$\varphi_{U,3}((1-\alpha)\lambda_U) = O(2U\lambda_U e^{-l(U_2)(1+o(1))}) = o(\lambda_U^2). \tag{4.10}$$

Соотношения (4.8)–(4.10) доказывают утверждение (4.2). Лемма 4.1 доказана.

Для $y \ge 0$ обозначим через $z_y(n) := \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{I}_{\{\xi(k)>y\}}$ число слагаемых в сумме $S(n)$, которые превысили уровень y, а через $\gamma(y) := \inf\{k \ge 1 : z_y(k) = 1\}$ — номер первого «большого» слагаемого. Наряду с вероятностями P, P^+ определим вероятности $P_k := \mathbf{P}(\eta(u) > n, z_y(n) = k)$ и для $\Delta \in (0, \infty]$ — вероятности

$$P^+(\Delta) := \mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x)), \quad P_k^+(\Delta) := \mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x), z_y(n) = k),$$

где $\Delta[x)$ — полуинтервал $[x, x+\Delta)$. Условимся аргумент ∞ опускать, т. е. писать P^+, P_k^+ вместо $P^+(\infty)$, $P_k^+(\infty)$ соответственно.

Лемма 4.2. *Пусть фиксировано число $\nu > 0$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что для $x \geq \nu n$, $y = \delta x$, $n \to \infty$*

$$P \leq P_1(1+o(1)) + O(P^+/n^3), P^+(\Delta) \leq P_1^+(\Delta)(1+o(1)) + O(P^+/n^3),$$
$$P^+ \leq P_1^+(1+o(1)).$$

Доказательство. Обозначим

$$P_{\geq 2} := \sum_{k=2}^{\infty} P_k, \quad P_{\geq 2}^+(\Delta) := \sum_{k=2}^{\infty} P_k^+(\Delta),$$

где $\Delta \in (0, \infty]$, так что

$$P = P_0 + P_1 + P_{\geq 2}, \quad P^+(\Delta) = P_0^+(\Delta) + P_1^+(\Delta) + P_{\geq 2}^+(\Delta).$$

Как и прежде, условимся аргумент ∞ опускать и писать, например, $P_{\geq 2}^+$ вместо $P_{\geq 2}^+(\infty)$. Поскольку

$$P_0 + P_{\geq 2} \leq P_0^+ + P_{\geq 2}^+, \quad P_0^+(\Delta) + P_{\geq 2}^+(\Delta) \leq P_0^+ + P_{\geq 2}^+,$$

достаточно доказать, что

$$P_0^+ + P_{\geq 2}^+ = O(P^+/n^3). \tag{4.11}$$

Покажем, что для любого $\nu > 0$ можно выбрать $\delta > 0$ такое, что для $x \geq \nu n$, $y = \delta x$, $n \to \infty$

$$P_0^+ \leq e^{-2l(x)(1+o(1))}. \tag{4.12}$$

Для этого воспользуемся утверждением (4.3) леммы 4.1, в котором положим $t = \frac{1}{\delta}$, $tU = x$, $U = \delta x$, $\alpha = 1 - \frac{\beta}{2}$ и константу U_0 выберем достаточно большой, чтобы $\frac{(1-\alpha)}{2U_0^{2-\beta}} = \frac{1}{2\delta}$. Тогда в силу неравенства (4.3)

$$n\Lambda_y\left(\frac{x}{n}\right) \geq \frac{(1-\alpha)\delta^{\beta-1}}{2} l(x)(1+o(1))$$

и для достаточно малого $\delta > 0$ выполняется $n\Lambda_y\left(\frac{x}{n}\right) \geq 2l(x)(1+o(1))$. В силу неравенства Чебышева для этого δ

$$P_0^+ = \mathbf{P}(S(n) \geq x, z_y(n) = 0) \leq e^{-n\Lambda_y(\frac{x}{n})} \leq e^{-2l(x)(1+o(1))}.$$

Неравенство (4.12) доказано.

Заметим, что при доказательстве теорем 2.2, 2.3 в [1] установлено, что для некоторого $\gamma > 0$ выполняется $P_{\geq 2}^+ \leq P_1^+ e^{-\gamma l(x)(1+o(1))}$. Поскольку для уклонений $x \geq \nu n$ справедливо

$$e^{-2l(x)} + P_1^+ e^{-\gamma l(x)} = O(P^+/n^3),$$

неравенство (4.11) доказано. Лемма 4.2 доказана.

Обозначим $t_+ := \left[\frac{n}{l(n)\ln^2 n}\right]$.

Лемма 4.3. *Пусть фиксировано число $\nu > 0$. Тогда равномерно по $x \geq \nu n$, $|v| \leq t_+$, $k \in \{1, 2, \dots, t_+^2\}$, $w \geq t_+$ при $n \to \infty$*

$$M(x - v, n - k) = M(x, n) + o(1), \quad M(x + w, n - k) \geq M(x, n) + o(1). \tag{4.13}$$

Доказательство. Известно [1], что при $x \gg \sigma_1(n)$ минимум в определении функции $M(x, n)$ достигается в точке $t_0(x, n) \sim n\beta\frac{l(x)}{x}$, поэтому для

$M(x,t,n) := l(x-t) + n\Lambda_{(\kappa)}\big(\frac{t}{n}\big)$ и v,k из рассматриваемых в лемме 4.3 зон справедливы равенства

$$M(x,n) = \inf_{0\le t\le 2n\beta\frac{l(x)}{x}} M(x,t,n) + o(1),$$

$$M(x-v,n-k) = \inf_{0\le t\le 2n\beta\frac{l(x)}{x}} M(x-v,t,n-k) + o(1).$$

Заметим, что $\max\limits_{0\le t\le 2n\beta\frac{l(x)}{x}} |M(x,t,n) - M(x-v,t,n-k)| = o(1)$, поэтому первое соотношение (4.13) установлено. Поскольку для $w \ge t_+$, $t \in \big[0, 2n\beta\frac{l(x)}{x}\big]$ будет

$$M(x+w,t,n-k) \ge M(x,t,n-k) + o(1),$$

$$M(x+w,n-k) = \inf_{0\le t\le 2n\beta\frac{l(x)}{x}} M(x+w,t,n-k) + o(1),$$

второе соотношение (4.13) вытекает из первого. Лемма 4.3 доказана.

Лемма 4.4. *Пусть фиксированы числа $\nu > 0$, $\delta > 0$. Тогда равномерно по $x \ge \nu n$, $y = \delta x$ при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}(\xi(1)+\xi(2) \ge x, \xi(1) > y, \xi(2) \ge t_+) \le \mathbf{P}(\xi \ge x)\mathbf{P}(\xi \ge (1/2)t_+)(1+o(1)).$$

Доказательство. Обозначим

$$A = \{\xi(1)+\xi(2) \ge x, \xi(1) > y, \xi(2) \ge t_+\},$$

так что следует оценить вероятность $Q := \mathbf{P}(A)$. Представим эту вероятность как

$$Q = \mathbf{P}(A, \xi(2) > (1-\nu)x) + \mathbf{P}(A, \xi(2) \in (\varepsilon x, (1-\nu)x]) + \mathbf{P}(A, \xi(2) \in [t_+, \varepsilon x]) \\ := Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

Поскольку

$$Q_1 \le \mathbf{P}(\xi(1) > \delta x, \xi(2) \ge (1-\nu)x) = e^{-l(\delta x) - l((1-\nu)x)},$$

можно выбрать достаточно малые $\nu > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что $Q_1 \le O(e^{-(1+\alpha)l(x)})$. Для этого ν

$$Q_2 \le \mathbf{P}(\xi(1)+\xi(2) \ge x, \xi(2) \in [\varepsilon x, (1-\nu)x]) \\ \le \sum_{k=[\varepsilon x]}^{[(1-\nu)x]} \mathbf{P}(\xi(1) \ge x-k-1, \xi(2) \in [k,k+1]) \le x e^{-\inf\limits_{\varepsilon x\le t\le(1-\nu)x}\{l(x-t-1)+l(t)\}}.$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\alpha_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\inf_{\varepsilon x\le t\le(1-\nu)x}\{l(x-t-1)+l(t)\} \ge (1+\alpha_\varepsilon)l(x)(1+o(1)),$$

для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$Q_2 = O(e^{-(1+\alpha_\varepsilon)l(x)}) = o(\mathbf{P}(\xi \ge x)\mathbf{P}(\xi \ge (1/2)t_+)(1+o(1))).$$

Следовательно, можно выбрать последовательность $\varepsilon_n = o(1)$ таким образом, что и для нее предыдущее неравенство сохранится. Для этой последовательности ε_n оценим слагаемое Q_3:

$$Q_3 \le \mathbf{P}(\xi(1)+\xi(2) \ge x, t \in [t_+, \varepsilon_n x]) \\ \le \sum_{k=t_+}^{[\varepsilon_n x]} \mathbf{P}(\xi(1) \ge x-k-1, \xi(2) \in [k,k+1]) \le x e^{-\inf\limits_{t\in[t_+,\varepsilon_n x]}\{l(x-t-1)+l(t)\}}.$$

Используя свойство (2.1), для $t \in [t_+, \varepsilon_n x]$ получаем

$$l(x-t-1) + l(t) = l(x) - \beta \frac{l(x)}{x} t(1+o(1)) + l(t), \quad l(t) \gg \frac{l(x)}{x} t.$$

Поэтому

$$\inf_{t \in [t_+, \varepsilon_n x]} \{l(x-t-1) + l(t)\} - \ln x \geq l(x) + l((1/2)t_+) + o(1).$$

Лемма 4.4 доказана.

Обозначим $L_+ := (\ln n)^{\frac{2}{\beta}}$.

Лемма 4.5. *Пусть фиксированы числа $\nu > 0$, $\delta > 0$, $\alpha > 0$. Тогда равномерно по $x \geq \nu n$, $y = \delta x$, $k \geq L_+$ при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}(S(n) \geq x, z_y(n) = 1, \gamma(y) \neq k, S(k) \geq \alpha k) \leq \frac{P^+}{n^3}(1+o(1)); \tag{4.14}$$

равномерно по $x \geq \nu n$, $y = \delta x$, $k \in \{1, \dots, n\}$ при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(S(n) \geq x, z_y(n) = 1, S(k-1) \geq t_+, \gamma(y) \neq k) \leq \frac{P^+}{n^3}(1+o(1)). \tag{4.15}$$

Доказательство. Для $\Delta_0 = 1$, $t \geq \alpha k$, $\tilde{y} = \delta t$ в силу леммы 4.2

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S(k) \in \Delta_0[t)) &\leq k\mathbf{P}(S(k) \in \Delta_0[t), z_{\tilde{y}}(k) = 1, \gamma(\tilde{y}) = 1)(1+o(1)) \\ &\leq k\mathbf{P}(S(k) \in \Delta_0[t), z_{\tilde{y}}(k) = 1, \xi(1) > \delta\alpha k)(1+o(1)). \quad (4.16)\end{aligned}$$

Далее, в силу (4.16), для вероятностей $P_j := \mathbf{P}(S(n-k) \geq x-1-j, z_y(n-k) = 1)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}Q := \mathbf{P}(S(n) \geq x, z_y(n) = 1, S(k) \geq \alpha k, \gamma(y) \neq k) &\leq \sum_{j \geq \alpha k} P_j \mathbf{P}(S(k) \in \Delta_0[j)) \\ \leq \sum_{j \geq \alpha k} P_j k\mathbf{P}(S(k) \in \Delta_0[t), z_{\tilde{y}}(k) = 1, \xi(1) > \delta\alpha k)(1+o(1)) \\ \leq kn\mathbf{P}(S(n) \geq x-2, \xi(n) > y, \xi(n-1) \geq \delta\alpha k)(1+o(1)).\end{aligned}$$

Рассуждая, как при доказательстве леммы 4.4, устанавливаем, что для некоторой последовательности $\varepsilon_n = o(1)$ правая часть последнего неравенства отличается на величину $o\big(\frac{P^+}{n^3}\big)$ от

$$\begin{aligned}&kn\mathbf{P}(S(n) \geq x-2, \xi(n) > y, \xi(n-1) \geq \delta\alpha k, |S(n-2)| \leq \varepsilon_n x)(1+o(1)) \\ &= \sum_{|j| \leq \varepsilon_n x} \mathbf{P}(\xi(n-1)+\xi(n) \geq x-3-j, \xi(n) > y, \xi(n-1) \geq \delta\alpha k)\mathbf{P}(S(n-2) \in \Delta_0[j)).\end{aligned}$$

Применяя к правой части последнего равенства лемму 4.4, получаем

$$\begin{aligned}Q &\leq \mathbf{P}(\xi \geq \delta\alpha k/2)\mathbf{P}(S(n-1) \geq x-4)(1+o(1)) + o(P^+/n^3) \\ &\leq e^{-l(\frac{\delta\alpha k}{2})} P^+(1+o(1)) + o\left(\frac{P^+}{n^3}\right) \leq P^+/n^3(1+o(1)).\end{aligned}$$

Соотношение (4.14) леммы 4.5 доказано.

Поскольку доказательство (4.15) полностью повторяет доказательство (4.14) (если в последнем параметр αk заменить на параметр t_+), лемма 4.5 доказана.

Опираясь на леммы 4.1–4.5, докажем (4.1) для случая $u \in [-(d-\nu)n, 0]$. Обозначим

$$P_{1,k} := \mathbf{P}(\eta(u) > n, z_y(n) = 1, \gamma(y) = k),$$

так что
$$P_1=\sum_{k=1}^{n}P_{1,k}.$$
Для $k\ge k_+(u):=[\frac{-u}{d}(1+\alpha)]$ при $u\le-\frac{1}{d}L_+$ в силу леммы 4.5
$$P_{1,k}\le\mathbf{P}\biggl(S(n)\le x,z_y(n)=1,S(k_+(u))\ge\frac{d}{1+\alpha}\alpha k_+(u)\biggr)\le\frac{P^+}{n^3}(1+o(1)).$$
Поэтому для $u\le-\frac{1}{d}L_+$
$$\begin{aligned}P_1=\sum_{k=1}^{n}P_{1,k}\le\sum_{k=1}^{k_+(u)}\frac{P^+}{n}+\sum_{k=k_+(u)+1}^{n}\frac{P^+}{n^3}(1+o(1))&\\ \le\frac{k_+(u)}{n}P^+(1+o(1))=\mathbf{E}\eta(u)\frac{P^+}{n}(1+o(1)).&\end{aligned}$$
Соотношение (4.1) в зоне $u\in\bigl[-(d-\nu)n,-\frac{1}{d}L_+\bigr]$ установлено.

Пусть теперь $u\in\bigl[-\frac{1}{d}L_+,0\bigr]$. Тогда для $k\ge t_+$ в силу леммы 4.5
$$\begin{aligned}&P_{1,k}\le\mathbf{P}(S(n)\ge x,z_y(n)=1,S(t_+)\ge dt_++u,\gamma(y)=k)\\&\le\mathbf{P}\left(S(n)\ge x,z_y(n)=1,S(t_+)\ge\frac{1}{2}dt_+(1+o(1)),\gamma(y)=k\right)\le\frac{P^+}{n^3}(1+o(1)).\end{aligned}\tag{4.17}$$

Пусть теперь $u\in\bigl[-\frac{1}{d}L_+,0\bigr]$, $k\le t_+$. Тогда
$$P_{1,k}=P_{1,k-}+P_{1,k0}+P_{1,k+},\tag{4.18}$$
где для $A_k:=\{S(n)\ge x,\eta(u)>k-1,z_y(n)=1,\gamma(y)=k\}$
$$P_{1,k-}:=\mathbf{P}(A_k,S(k-1)<-t_+),\quad P_{1,k0}:=\mathbf{P}(A_k,|S(k-1)|\le t_+).$$
Оценим каждое слагаемое в правой части (4.18): в силу леммы 4.3
$$\begin{aligned}P_{1,k-}&\le\mathbf{E}(e^{-M(x-S(k-1),n-k+1)};\eta(u)>k-1,z_u(n)=1,S(k-1)<-t_+)\\&\le e^{-M(x,n)}\mathbf{P}(\eta(u)>k-1,S(k-1)<-t_+)(1+o(1)),\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}P_{1,k0}&\le\mathbf{E}(e^{-M(x-S(k-1),n-k+1)};\eta(u)>k-1,z_u(n)=1,|S(k-1)|\le t_+)\\&\le e^{-M(x,n)}\mathbf{P}(\eta(u)>k-1,|S(k-1)|\le t_+)(1+o(1)).\end{aligned}$$
Ввиду леммы 4.5
$$P_{1,k+}\le\mathbf{P}(S(n)\ge x,z_u(n)=1,S(k-1)>t_+)\le\frac{P^+}{n^3}(1+o(1)).$$
Складывая эти неравенства, для $k\le t_+$ получаем
$$\begin{aligned}P_{1,k}&\le e^{-M(x,n)}\mathbf{P}(\eta(u)>k-1)(1+o(1))+\frac{P^+}{n^3}(1+o(1))\\&\le\mathbf{P}(\eta(u)>k-1)\frac{P^+}{n}(1+o(1))+\frac{P^+}{n^3}(1+o(1)).\end{aligned}$$
Из последнего неравенства и (4.17) следует, что
$$P_1\le\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(\eta(u)>k-1)\frac{P^+}{n}(1+o(1))+\frac{P^+}{n^3}(1+o(1))=\frac{\mathbf{E}\eta(u)}{n}P^+(1+o(1)).$$
Оценка сверху (4.1), необходимая для доказательства теоремы 3.2, получена.

5. Доказательство теоремы 3.2. Оценки снизу. Для получения оценок снизу нам понадобится интегро-локальная теорема для сумм «урезанных слагаемых» в крамеровской зоне уклонений, полученная в работе [1]. Для ее формулировки приведем структурные условия на распределение $\mathbf{F}$ случайной величины ξ.

[Z]. Случайная величина ξ называется *арифметической*, если $\mathbf{P}(\xi \in \mathbb{Z}) = 1$, и для некоторого $y_0 \in \mathbb{Z}$ такого, что $\mathbf{P}(\xi = y_0) > 0$, наибольший общий делитель возможных значений $\xi - y_0$ равен 1 ($\mathbb{Z}$ — множество целых чисел).

[R]. Случайная величина ξ называется *нерешетчатой*, когда никаким линейным преобразованием она не может быть сделана арифметической.

Мы рассматриваем случайные величины ξ с нулевым средним и единичной дисперсией. Для таких величин условие арифметичности [Z] не является «альтернативным» к условию [R], поэтому вместо него рассмотрим более широкое условие *решетчатости* (*с шагом* $h > 0$).

[Z_h]. *Для некоторого вещественного c случайная величина ξ представляется в виде $\xi = c + h\eta$, где случайная величина η является арифметической* (*удовлетворяет условию* [Z]).

Таким образом, любая случайная величина ξ либо нерешетчата (удовлетворяет условию [R]), либо для некоторого $h > 0$ является решетчатой с шагом h (удовлетворяет условию [Z_h]).

Следующее утверждение, в котором изучается вероятность попадания суммы в полуинтервал $\Delta[x) = [x, x+\Delta)$, доказано в [1, лемма 3.1, теоремы 2.3, 2.4].

Лемма 5.1. *Пусть фиксированы $s_+ > 0$ и произвольное положительное число Δ в случае* [R] *и $\Delta = h$ в случае* [Z_h].

1. *Если выбрать $y \sim U(s_+, n) := \left(\frac{\beta}{4}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} s_+^{-\frac{1}{1-\beta}} \sigma_1(n)$, то соотношение*

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x), z_y(n) = 0) \sim \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} e^{-n\Lambda_{(\kappa)}(\frac{x}{n})}, \quad n \to \infty,$$

справедливо равномерно в области $x \in [-N\sqrt{n}, s_+\sigma_1(n)]$ для любого фиксированного $N < \infty$.

2. *Для любых фиксированных $\delta > 0$ и $N < \infty$ соотношение*

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x)) \sim \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} e^{-n\Lambda_{(\kappa)}(\frac{x}{n})}, \quad n \to \infty,$$

справедливо равномерно в области $x \in [-N\sqrt{n}, (s_0 - \delta)\sigma_1(n)]$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству оценки снизу

$$P \geq \frac{\mathbf{E}\eta(u)}{n} P^+(1 + o(1)), \tag{5.1}$$

необходимой для доказательства теоремы 3.2. При этом будем считать, что выполнено условие [R]. В случае [Z_h] все рассуждения сохранятся, если вместо произвольного фиксированного $\Delta > 0$ рассматривать $\Delta = h$.

Рассмотрим зону $I_1 = \{x \gg \sqrt{n}, x = o(\sigma_1(n))\}$. В этой зоне для $y = \sigma_1(n)$ воспользуемся следующими соотношениями (которые проверим ниже).

Для любого $\nu > 0$ найдется $N < \infty$ такое, что для любого $T < \infty$ и всех достаточно больших n

$$P^+ \leq (1+\nu)P_0^+ := (1+\nu)\mathbf{P}(S(n) \in [x+T, x+N\sqrt{n}], z_y(n) = 0). \tag{5.2}$$

Для любых $\nu > 0$, $\Delta > 0$, $N < \infty$ найдется $T < \infty$ такое, что равномерно по $v \in [x+T, x+N\sqrt{n}]$ при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(\eta(u) > n \mid S(n) \in \Delta[v), z_y(n) = 0) \geq 1 - \nu + o(1). \tag{5.3}$$

Из (5.2), (5.3) следует, что
$$P \geq P^+(1+o(1)). \tag{5.4}$$
Поскольку в зоне I_1 выполняется
$$\frac{\mathbf{E}\eta(u)}{n} \sim \frac{|u|}{dn} \sim 1, \tag{5.5}$$
оценка снизу (5.1) в зоне I_1 установлена.

В зоне $I_2 = \{x = s\sigma_1(n) : s \sim s_* \in (0,\infty)\}$ выберем $y = U(2s_*, n)$ и воспользуемся следующими тремя соотношениями (которые проверим ниже).

Для любых $\nu > 0$, $T < \infty$ найдется $N < \infty$ такое, что для всех достаточно больших n
$$P^+ \leq (1+\nu)\big(P_0^+ + P_1^+\big), \tag{5.6}$$
где
$$P_0^+ := \mathbf{P}(S(n) \in [x+T, x+N\sqrt{n}], z_y(n) = 0),$$
$$P_1^+ := \mathbf{P}(S(n) \geq x+T, |S_{\gamma(y)}(n-1) - t_0(x,n)| \leq N\sqrt{n}, z_y(n) = 1)$$
и где $S_j(n-1) := S(n) - \xi(j)$, $t_0(x,n)$ — точка, в которой достигается минимум в определении (3.2) функции $M(x,n)$.

Для любых $\nu > 0$, $\Delta > 0$, $N < \infty$ найдется $T < \infty$ такое, что равномерно по $v \in [x+T, x+N\sqrt{n}]$ при $n \to \infty$
$$\mathbf{P}(\eta(u) > n | S(n) \in \Delta[v], z_y(n) = 0) \geq 1 - \nu + o(1). \tag{5.7}$$

Для любых $\nu > 0$, $\Delta > 0$, $N < \infty$ найдется $T < \infty$ такое, что равномерно по $v \in [t_0(x,n) - N\sqrt{n}, t_0(x,n) + N\sqrt{n}]$ при $n \to \infty$ выполняется
$$\mathbf{P}(\eta(u) > n \mid S(n) \geq x+T, S_{\gamma(y)}(n-1) \in \Delta[v], z_y(n) = 1) \geq 1 - \nu + o(1). \tag{5.8}$$
Из (5.6)–(5.8) следует (5.4). Поскольку в зоне I_2 выполняется (5.5), оценка снизу (5.1) в зоне I_2 доказана.

В зонах
$$I_3 = \{x \gg \sigma_1(n), -u \in [0,T]\}, \quad I_4 = \{x \gg \sigma_1(n), -u \gg 1\}$$
выберем $y = x/2$ и воспользуемся следующими соотношениями (которые проверим ниже).

Для любых $\nu > 0$, $T < \infty$ найдется $N < \infty$ такое, что при $n \to \infty$
$$P^+ \leq (1+\nu)P_1^+(1+o(1)), \tag{5.9}$$
где
$$P_1^+ := \mathbf{P}(S(n) \geq x+T, |S_{\gamma(y)}(n-1) - t_0(x,n)| \leq N\sqrt{n}, z_y(n) = 1, z_{\sigma_1(n)}(n) = 1).$$

Для произвольного $\mu > 0$ обозначим $k_-(u) := \frac{-u}{d}(1-\mu)$. В зоне I_4 нам необходимо следующее соотношение (которое проверим ниже).

Для любых $\nu > 0$, $\Delta > 0$, $\mu > 0$, $N < \infty$ найдется $T < \infty$ такое, что равномерно по $v \in [t_0(x,n) - N\sqrt{n}, t_0(x,n) + N\sqrt{n}]$, $k \in \{1,\dots,k_-(u)\}$ при $n \to \infty$
$$\mathbf{P}(\eta(u) > n \mid S(n) \geq x+T, S_k(n-1) \in \Delta[v], z_y(n) = z_{\sigma_1(n)}(n) = 1, \gamma(y) = k)$$
$$\geq 1 - \nu + o(1). \tag{5.10}$$

В зоне I_3 нам необходимо следующее соотношение (которое проверим ниже).

Для любых $\nu > 0$, $\Delta > 0$, $\mu > 0$, $N < \infty$ найдется $T < \infty$ такое, что равномерно по $v \in [t_0(x,n) - N\sqrt{n}, t_0(x,n) + N\sqrt{n}]$ и для любого фиксированного $k = 1, 2, \dots$ при $n \to \infty$
$$\mathbf{P}(\eta(u) > n \mid S(n) \geq x+T, S_k(n-1) \in \Delta[v], z_y(n) = z_{\sigma_1(n)}(n) = 1, \gamma(y) = k)$$
$$\geq \mathbf{P}(\eta(u) > k-1) - \nu + o(1). \tag{5.11}$$

Из соотношений (5.9), (5.10) в зоне I_4 в силу леммы 4.2 имеем

$$P \geq \sum_{k=1}^{k_-(u)} \mathbf{P}(\eta(u) > n, \gamma(y) = k) \geq k_-(u)\frac{P^+}{n}(1 + o(1)).$$

Поскольку в этой зоне $k_-(u) \sim \mathbf{E}\eta(u)(1-\mu)$, оценка снизу (5.1) в зоне I_4 доказана.

Наконец, из соотношений (5.9), (5.11) в зоне I_3 в силу леммы 4.2 для любого m имеем

$$P \geq \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(\eta(u) > n, \gamma(y) = k) \geq \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(\eta(u) > k-1)\frac{P^+}{n}(1 - \nu + o(1)).$$

Так как в этой зоне при $m \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(\eta(u) > k-1) \to \mathbf{E}\eta(u),$$

оценка снизу (5.1) в зоне I_4 доказана. Таким образом, оценка снизу для всех $x \gg \sqrt{n}$, $x \leq dn$, получена, и нам следует обосновать соотношения (5.2), (5.3), (5.6)–(5.11).

Соотношения (5.2), (5.6), (5.9) оценивают сверху вероятность

$$P^+ = \mathbf{P}(S(n) \geq x)$$

и установлены в [1] (в ходе доказательства теоремы 4.2 из [1]).

Доказательства соотношений (5.3), (5.7), (5.8), (5.10), (5.11) в идейном плане основаны на теоремах об условных вероятностях, полученных в [24]. Однако непосредственное применение результатов работы [24] затруднено тем обстоятельством, что в нашем случае нет моментного условия Крамера и условия Крамера на характеристическую функцию, которые присутствуют в [24]. Поэтому мы докажем дополнительное утверждение, близкое к упомянутым результатам из [24] (лемма 5.2 ниже), для формулировки которого необходимы дополнительные обозначения.

Пусть случайные величины $\xi_{(n)}, \xi_{(n)}(1), \xi_{(n)}(2), \dots$ независимы и одинаково распределены, имеют нулевое среднее, «почти» единичную дисперсию и равномерно интегрируемый третий абсолютный момент:

$$\mathbf{E}\xi_{(n)} = 0,\ b^2(n) := \mathbf{E}\xi_{(n)}^2 = 1 + o(1),\ \limsup_{T\to\infty} \sup_{n\geq 1} \mathbf{E}(|\xi_{(n)}|^3; |\xi_{(n)}| \geq T) = 0. \quad (5.12)$$

Обозначим $S_{(n)}(k) := \xi_{(n)}(1) + \dots + \xi_{(n)}(k)$, $k \geq 1$, $S_{(n)}(0) = 0$. В формулировке леммы 5.2 мы рассматриваем общий случай, отступая от соглашения рассматривать только нерешетчатый случай, принятого после формулировки леммы 5.1.

Лемма 5.2. *Пусть фиксированы произвольное* $\Delta > 0$ *в случае* [R] *и* $\Delta = h$ *в случае* [Z$_h$]. *Тогда*

(i) *равномерно по* $x \in (-\infty, \infty)$

$$\mathbf{P}(S_n(n) \in \Delta[x)) = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}}(e^{-\frac{x^2}{2b^2(n)n}} + o(1)), \quad n \to \infty; \quad (5.13)$$

(ii) *для произвольных* $\nu > 0$, $d > 0$ *найдется* $T < \infty$ *такое, что*

$$\mathbf{P}(\max_{1\leq k\leq n}\{S_{(n)}(k) - dk\} \geq T \mid S_{(n)}(n) \in \Delta[0)) \leq \nu + o(1), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Утверждение (i) является частным случаем теорем 1, 2 в [25]. Докажем утверждение (ii). Для упрощения доказательства положим $d=1$. Обозначим

$$\overline{S}_{(n)} := \max_{k\ge 0}\{S_{(n)}(k)-k\},\ \gamma_{(n)} := \inf\{k\ge k_1 : S_{(n)}(k)\ge k_1+2T\},\ k_1 := [n^{2/3}].$$

Обозначим через χ_- первую неположительную сумму среди $S_{(n)}(k)-k$, $k=1,2,\dots$, $p=\mathbf{P}(\overline{S}_{(n)}=0)$. В силу известных факторизационных тождеств (см., например, [26])

$$\mathbf{E}e^{it\overline{S}_{(n)}}(1-\mathbf{E}e^{it(\xi_{(n)}-1)}) = p(1-\mathbf{E}e^{it\chi_-}).$$

Из этого равенства получаем

$$\mathbf{E}\overline{S}_{(n)} = \frac{\mathbf{E}\xi_{(n)}^2+1-p\mathbf{E}\chi_-^2}{2|\mathbf{E}(\xi_{(n)}-1)|} \le \frac{\mathbf{E}\xi_{(n)}^2+1}{2} = 1+o(1).$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(\overline{S}_{(n)}\ge T) \le \frac{\mathbf{E}\overline{S}_{(n)}}{T} \le \frac{1+o(1)}{T}.$$

Следовательно, для любого $\nu>0$ найдется $T_1<\infty$ такое, что

$$\mathbf{P}(\overline{S}_{(n)}\ge T_1)\le \nu. \tag{5.14}$$

В силу неравенства Чебышева для некоторой функции $\varepsilon(k)=o(1)$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_{(n)}(k)}{\sqrt{k}}\right|\ge d\sqrt{k}\right) \le \frac{\varepsilon(k)}{k^{3/2}}, \quad k\to\infty. \tag{5.15}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S_{(n)}(n)\ge k_1+T) &\ge \sum_{k=k_1}^{n}\mathbf{P}(S_{(n)}(n)\ge k_1+T,\gamma_{(n)}=k)\\
&\ge \sum_{k=k_1}^{n}\mathbf{P}(S_{(n)}(n)\ge k_1+T, S_{(n)}(n)-S_{(n)}(k)\ge -T,\gamma_{(n)}=k)\\
&= \sum_{k=k_1}^{n}\mathbf{P}(S_{(n)}(n)-S_{(n)}(k)\ge -T,\gamma_{(n)}=k)\\
&= \sum_{k=k_1}^{n}\mathbf{P}(S_{(n)}(n)-S_{(n)}(k)\ge -T)\mathbf{P}(\gamma_{(n)}=k)\\
&\ge \min_{k_1\le k\le n}\mathbf{P}(S_{(n)}(n)-S_{(n)}(k)\ge -T)\mathbf{P}(\max_{k_1\le k\le n}S_{(n)}(k)\ge k_1+2T).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\max_{k_1\le k\le n}\{S_{(n)}(k)-k\}\ge 2T) &\le \mathbf{P}(\max_{k_1\le k\le n}\{S_{(n)}(k)\}\ge k_1+2T)\\
&\le \frac{1}{q}\mathbf{P}(S_{(n)}(n)\ge k_1+T), \quad q:=\inf_{k\ge 1}\mathbf{P}(S_{(n)}(k)\ge -T).
\end{aligned}$$

Для некоторой константы $c<\infty$, зависящей только от $\mathbf{E}|\xi_{(n)}|^3$, выполняются неравенства:

$$\mathbf{P}(S_{(n)}(k)\ge -T)\ge 1-\frac{ck^{3/2}}{T^3}\ge \frac{1}{2}-\frac{ck^{3/2}}{T^3}$$

в силу неравенства Чебышева,

$$\mathbf{P}(S_{(n)}(k)\ge -T)\ge \mathbf{P}\left(\zeta\ge -\frac{T}{\sqrt{k}}\right)-\frac{c}{\sqrt{k}}\ge \frac{1}{2}-\frac{c}{\sqrt{k}}$$

ввиду неравенства Берри — Эссена для случайной величины ζ с нормальным $(0,1)$ распределением. Поэтому для некоторого $T = T_0$, зависящего только от $\mathbf{E}|\xi_{(n)}|^3$, выполняется $q \geq \frac{1}{6}$ и в силу (5.15)

$$\mathbf{P}(\max_{k_1 \leq k \leq n}\{S_{(n)}(k) - k\} \geq 2T_0) \leq 6\mathbf{P}(S_{(n)}(n) \geq k_1 + T_0) = o(1/\sqrt{n}), \quad n \to \infty. \tag{5.16}$$

Оценим далее для $N_n := \sqrt{k_1}n^{1/6}$, $\theta \in [0,1]$

$$\mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq k_1}\{S_{(n)}(k) - k\} \geq T, S_{(n)}(n) \in \Delta[0))$$
$$= \mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq k_1}\{S_{(n)}(k) - k\} \geq T, S_{(n)}(n) \in \Delta[0), |S_{(n)}(k_1)| \leq N_n) + \theta\mathbf{P}(|S_{(n)}(k_1)| \geq N_n).$$

Выбор k_1, N_n и неравенства (5.15) дают

$$\mathbf{P}(|S_{(n)}(k_1)| \geq N_n) \leq o(1/\sqrt{n}),$$

тем самым с учетом (5.16) получаем

$$\mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq n}\{S_{(n)}(k) - k\} \geq T, S_{(n)}(n) \in \Delta[0))$$
$$= \mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq k_1}\{S_{(n)}(k) - k\} \geq T, S_{(n)}(n) \in \Delta[0), |S_{(n)}(k_1)| \leq N_n) + o(1/\sqrt{n}).$$

Представим вероятность в правой части последнего равенства в виде

$$\mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq k_1}\{S_{(n)}(k) - k\} \geq T, S_{(n)}(n) \in \Delta[0), |S_{(n)}(k_1)| \leq N_n)$$
$$= \int_{-N_n}^{N_n} \mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq k_1}\{S_{(n)}(k) - k\} \geq T, S_{(n)}(k_1) \in dv)\mathbf{P}(S_{(n)}(n - k_1) \in \Delta[-v)).$$

Используя интегро-локальное утверждение (5.13) и учитывая, что $\frac{N_n^2}{n-k_1} = o(1)$, приходим к равномерному по $|v| \leq N_n$ соотношению

$$\mathbf{P}(S_{(n)}(n - k_1) \in \Delta[-v)) \leq \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}}(1 + o(1)), \quad n \to \infty.$$

Поэтому для $T = \max\{2T_0, T_1\}$ будет

$$\mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq n}\{S_{(n)}(k) - k\} \geq T, S_{(n)}(n) \in \Delta[0))$$
$$\leq \mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq n}\{S_{(n)}(k) - k\} \geq T)\mathbf{P}(S_{(n)}(n) \in \Delta[0))(1 + o(1))$$

и в силу (5.14)

$$\mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq n}\{S_{(n)}(k) - k\} \geq T \mid S_{(n)}(n) \in \Delta[0))$$
$$\leq \mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq n}\{S_{(n)}(k) - k\} \geq T) + o(1) \leq \mathbf{P}(\overline{S}_{(n)} \geq T_1) \leq \nu + o(1).$$

Лемма 5.2 доказана.

Докажем теперь с помощью леммы 5.2 соотношение (5.3). Рассматривая обращенное блуждание $S(n) - S(n-1), S(n) - S(n-2), \dots$, приходим к необходимости оценить снизу условную вероятность

$$P := \mathbf{P}(\min_{1 \leq k \leq n}\{-S(k) + (k/n)v - (d - v/n)k \geq -T \mid -S(n) + v \in \Delta[0), z_y(n) = 0\}).$$

Выполним преобразование Крамера и рассмотрим новые случайные величины $\xi_{\lambda,y}$ с распределением

$$\mathbf{P}(\xi_{y,\lambda} < t) := \frac{\mathbf{E}(e^{\lambda\xi}, \xi \leq y, \xi < t)}{\varphi_y(\lambda)}, \quad \varphi_y(\lambda) := \mathbf{E}(e^{\lambda\xi}, \xi \leq y).$$

Для функции $\lambda_y(\alpha)$, являющейся решением уравнения
$$\frac{\varphi'_y(\lambda)}{\varphi_y(\lambda)} = \alpha,$$
где производная берется по аргументу λ, определим новые случайные величины $\xi^{\alpha,y} = \xi_{\lambda(\alpha),y} - \alpha$. Как установлено при доказательстве теорем 4.1–4.4 в [1], для случайных величин $\xi^{\frac{v}{n},y}(1),\dots,\xi^{\frac{v}{n},y}(n)$ в зоне $v \in [x+T, x+N\sqrt{n}]$ выполнены условия (5.12) и, кроме того, $\lambda_y\left(\frac{v}{n}\right) = o(1)$. Поэтому, используя преобразование Крамера и учитывая последнее соотношение, получаем
$$P = \mathbf{P}\big(\min_{1\le k\le n}\{-S^{\frac{v}{n},y}(k)-(d-v/n)k \ge -T \mid -S^{\frac{v}{n},y}(n) \in \Delta[0), z_y(n)=0\}\big)(1+o(1)).$$
Применяя к правой части лемму 5.2, завершаем доказательство соотношения (5.3).

Докажем соотношение (5.11) в зоне $u \in [-N, 0]$. Для фиксированного $k \in \{1,2,\dots\}$ можно выбрать $T_1 < \infty$ такое, что $\mathbf{P}(S(k-1)-(k-1)d \ge T_1) \le \nu$. Поэтому достаточно доказать неравенство (5.11), в правой части которого вместо $\mathbf{P}(\eta(u) > k-1) - \nu + o(1)$ помещено $\mathbf{P}(\eta(u) > k-1, S(k-1)-(k-1)d < T_1) - \nu + o(1)$. Далее,
$$\mathbf{P}(\eta(u) > n \mid S(n) \ge x+T, S_k(n-1) \in \Delta[v), z_y(n) = z_{\sigma_1(n)}(n) = 1, \gamma(y) = k)$$
$$\ge \int_u^{T_1} \mathbf{P}(\eta(u) > k-1, S(k-1)-(k-1)d \in dw)Q(u-w, n'),$$
где для $n' = n-k+1$, $x' = u - w + n'd$
$$Q(u-w,n') := \mathbf{P}(\eta(u-w) > n' \mid S(n') \ge x'+T, S_1(n'-1) \in \Delta[v), z_y(n')$$
$$= z_{\sigma_1(n)}(n') = 1, \gamma(y) = 1).$$
Мы свели доказательство (5.11) для произвольного фиксированного $k \in \{1,2,\dots\}$ к доказательству (5.11), в котором $k = 1$, аргумент n заменен аргументом $n' = n-k+1$, а уровни срезок y и $\sigma_1(n)$ остались прежними. Доказательство этого «подправленного» соотношения (5.11) осуществляется с помощью обращенного блуждания и леммы 5.2 точно так же, как это сделано для доказательства соотношения (5.3). Поскольку проверка соотношений (5.7), (5.8), (5.10) осуществляется аналогичным образом, оценка снизу, необходимая для доказательства теоремы 3.2, установлена. Теорема 3.2 доказана.

Я выражаю свою благодарность С. Г. Фоссу, который обратил мое внимание на рассматриваемую в работе проблему, В. В. Шнееру, который любезно предоставил мне библиографию по этой тематике, и А. А. Боровкову за весьма полезные замечания и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Интегро-локальные и интегральные теоремы для сумм случайных величин с семиэкспоненциальными распределениями // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 6. С. 1218–1257.
2. *Doney R. A.* On the asymptotic behavior of the first passage times for transient random walk // Probab. Theory Related Fields. 1989. V. 81, N 2. P. 239–246.
3. *Боровков А. А.* Об асимптотике распределений времен первого прохождения. I // Мат. заметки. 2004. Т. 75, № 1. С. 24–39.
4. *Боровков А.А.* Об асимптотике распределений времен первого прохождения. II // Мат. заметки. 2004. Т. 75, № 3. С. 350–359.

5. *Боровков А. А.* Предельные теоремы о распределении максимума сумм ограниченных решетчатых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1960. Т. 5, № 2. С. 137–171.
6. *Боровков А. А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 645–694.
7. *Могульский А. А., Рогозин Б. А.* Случайные блуждания в положительном квадранте. III: Константы в интегральных и локальных теоремах // Мат. труды. 2001. Т. 4, № 1. С. 68–93.
8. *Могульский А. А., Рогозин Б. А.* Локальная теорема для момента достижения фиксированного уровня случайным блужданием // Мат. труды. 2005. Т. 8, № 1. С. 43–70.
9. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Ч. I. Медленно убывающие распределения скачков. М.: Наука. (В печати).
10. *Bertoin J., Doney R. A.* Some asymptotic results for transient random walks // Adv. in Appl. Probab. 1996. V. 28, N 1. P. 207–226.
11. *Пинелис И. Ф.* Одна задача о больших уклонениях в пространстве траекторий // Теория вероятностей и ее применения. 1981. Т. 26, № 1. С. 73–87.
12. *Розовский Л. В.* Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона // Теория вероятностей и ее применения. 1989. Т. 34, № 4. С. 686–705.
13. *Asmussen S., Kluppelberg C., Sigman K.* Sampling at sub-exponential times, with queueing applications // Stochastic Process. Appl. 1999. V. 79. P. 265–286.
14. *Baltrunas A., Daley D., Kluppelberg C.* Tail behaviour of the busy period of a $GI/GI/1$S queue with subexponential service times // Stochastic Process. Appl. 2004. V. 111. P. 237–258.
15. *Jelenkovich P. R., Momucilovic P.* Large deviations of square root insensitive random sums // Math. Oper. Res. 2004. V. 29, N 2. P. 398–406.
16. *Denisov D.* Asymptotics for first passage times of Levi processes and random walks // IV Intern. Conf. “Limit Theorems in Probability Theory and Their Applications”, Programme, Abstracts, List of Participants. Novosibirsk, 2006. P. 14.
17. *Denisov D., Shneer V.* Asymptotics for first passage times of Levi processes and random walks // Submitted for the Annals of Applied Probability.
18. *Боровков А. А.* Вероятности больших уклонений для случайных блужданий с семиэкспоненциальными распределениями // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1290–1324.
19. *Розовский Л. В.* Вероятности больших уклонений на всей оси // Теория вероятностей и ее применения. 1993. Т. 38, № 1. С. 79–109.
20. *Mikosh T., Nagaev A. V.* Large deviations of heavy-tailed sums with applications in insurance // Extremes. 1998. V. 1. P. 81–110.
21. *Нагаев А. В.* Интегральные предельные теоремы, включающие большие уклонения, когда условие Крамера не выполнено // Теория вероятностей и ее применения. I: 1969. Т. 14, № 1. С. 51–64; II: 1969. Т. 14, № 2. С. 203–214.
22. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
23. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. Т. II.
24. *Боровков А. А.* Об условных распределениях, связанных с большими уклонениями // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 4. С. 732–744.
25. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Интегро-локальные теоремы для сумм случайных векторов в схеме серий // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 505–521.
26. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1972.

Статья поступила 27 февраля 2006 г.

Могульский Анатолий Альфредович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
mogul@math.nsc.ru