Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2006. Том 47, № 6

УДК 519.214

ОЦЕНКИ В ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ В ТЕРМИНАХ СРЕЗАННЫХ СТЕПЕННЫХ МОМЕНТОВ

А. И. Саханенко

Аннотация: Получены оценки для распределений погрешностей, возникающих при аппроксимации случайной ломаной винеровским процессом, задаваемым на том же вероятностном пространстве. Ломаная строится на всей оси по суммам независимых разнораспределенных случайных величин, а в качестве расстояния между ней и винеровским процессом берется равномерное расстояние с растущим весом. Все оценки явным образом зависят от срезанных степенных моментов случайных величин, что выгодно отличает их от более ранних оценок Комлоша, Майора, Тушнади, в которых такая зависимость была неявной.

Ключевые слова: принцип инвариантности, расстояние Прохорова, метод одного вероятностного пространства, скорость сходимости, неулучшаемые оценки.

§ 1. Введение и основной результат

1.1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — бесконечная последовательность независимых случайных величин, удовлетворяющих условию

$$\forall j \quad \mathbf{E}\xi_j = 0, \quad \mathbf{D}\xi_j < \infty. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение случайную функцию $S = S(t)$, полагая

$$S(t_k) = \sum_{j \le k} \xi_j \quad \text{при } t_k = \sum_{j \le k} \mathbf{D}\xi_j, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

и доопределяя $S(t)$ так, что $t_0 = S(0) = 0$ и

$$\forall k \ge 1 \quad |S(t) - S(t_k)| \le |\xi_k| \quad \text{при } t \in [t_{k-1}, t_k]. \tag{3}$$

Подчеркнем, что в дальнейшем не исключается случай, когда $\xi_j = 0$ при $j > n$, и допускается также ситуация, когда $\sum\limits_j \mathbf{D}\xi_j = \infty$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, можно ли на одном вероятностном пространстве с ломаной S построить такой стандартный винеровский процесс W, чтобы величины вида

$$\Delta_n = \sup_{t \in [0, t_n]} |S(t) - W(t)| \tag{4}$$

были как можно меньше в некотором нужном нам смысле. В силу [1] всегда можно считать, что нужный нам процесс W является функцией лишь от S и некоторой случайной величины с равномерным распределением.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00810) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–8980.2006.1).

Этой задаче, которая является основной при изучении вопроса о скорости сходимости в принципе инвариантности, посвящено большое количество работ, среди которых надо в первую очередь отметить статьи Ю. В. Прохорова [2], А. В. Скорохода [3], Штрассена [4], А. А. Боровкова [5], Комлоша, Майора, Тушнади [6] и автора [7]. В частности, наиболее законченные результаты в терминах сумм моментов

$$L_\alpha = \sum_j \mathbf{E}|\xi_j|^\alpha, \quad \alpha \geq 2,$$

получены автором в [7], причем для разнораспределенных величин $\{\xi_j\}$. Для удобства дальнейших ссылок мы приведем здесь этот результат. Условимся, что далее символы C_A, C_1, C_2, C_3 и C_0 обозначают некоторые абсолютные постоянные, причем каждый раз одни и те же.

Теорема A. *Пусть дана последовательность независимых случайных величин $\{\xi_j\}$, удовлетворяющая условию (1), и фиксированы числа $\alpha \geq 2$ и $b \geq 1$. В этом случае найдется винеровский процесс $W = W_{\alpha,b}$ такой, что*

$$\forall y > 0 \quad \mathbf{P}(\sup_n \Delta_n \geq C_A \alpha b y) \leq (L_\alpha / b y^\alpha)^b + \mathbf{P}(\sup_n |\xi_n| > y). \tag{5}$$

Хорошо известно, что этот результат неулучшаем с точностью до абсолютной постоянной C_A. Однако его основной недостаток состоит в том, что при $\alpha = 2$ он дает очень грубую оценку, а при $\alpha > 2$ требует конечности моментов порядка $\alpha > 2$ у всех случайных величин $\{\xi_j\}$.

1.2. Главной задачей данной работы является получение оценок более общего вида, чем (5), в терминах более тонкой характеристики, чем L_α. Положим

$$\Delta = \sup_n \frac{\Delta_n}{r_n}, \quad \bar{\xi} = \sup_j \frac{|\xi_j|}{r_j}, \quad L_\alpha(y) = \sum_j \mathbf{E} \min\left\{\frac{|\xi_j|^\alpha}{y^\alpha r_j^\alpha}, \frac{\xi_j^2}{y^2 r_j^2}\right\} \text{ при } y > 0, \tag{6}$$

где числа $\{r_j\}$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$0 < r_1 \leq \ldots r_j \leq r_{j+1} \leq \ldots \quad \forall j \geq 1. \tag{7}$$

Подчеркнем особо, что мы не исключаем ни случая, когда все r_j равны 1, ни ситуации, когда $r_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Заметим еще, что всегда имеет место следующая простая оценка:

$$\forall y > 0 \quad L_\alpha(y) \leq y^{-\alpha} \sum_j \mathbf{E}|\xi_j|^\alpha / r_j^\alpha. \tag{8}$$

Далее мы предполагаем, что фиксирована некоторая последовательность чисел $\{r_n\}$, удовлетворяющая (7), и фиксированы распределения последовательности независимых случайных величин $\{\xi_j\}$, для которых справедливы условия (1). Подчеркнем, что способы построения всех винеровских процессов W, которые далее появляются в работе, всегда зависят от этих двух фиксированных последовательностей, хотя мы это больше оговаривать не будем. Кроме того, эти способы построения могут зависеть и от других параметров, которые далее в работе будем называть *фиксированными* и наличие которых всегда будем тщательно оговаривать.

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема 1. *Для любого фиксированного числа $\alpha \geq 2$ найдется винеровский процесс $W = W_\alpha$ такой, что*

$$\forall x \geq y > 0 \quad \mathbf{P}(\Delta \geq C_1 \alpha x, \ \bar{\xi} \leq y) \leq (L_\alpha(y))^{x/y}. \tag{9}$$

В частности,

$$\forall y > 0\ \forall x \geq y \quad \mathbf{P}(\Delta \geq C_1 \alpha x) \leq (L_\alpha(y))^{x/y} + \mathbf{P}(\bar{\xi} > y), \tag{10}$$

$$\forall x > 0 \quad \mathbf{P}(\Delta \geq 2C_1 \alpha x) \leq L_\alpha(x). \tag{11}$$

Поскольку из (8) при $r_j \equiv b^{1/\alpha}$ вытекает, что $L_\alpha(y) \leq L_\alpha / by^\alpha$, неравенство (10) значительно усиливает неравенство (5) теоремы А, заменяя в нем обычные моменты срезанными, которые у нас всегда существуют, и распространяя это неравенство на качественно более общий случай, когда вместо величины $\sup\limits_n \Delta_n$ используется $\Delta = \sup\limits_n (\Delta_n / r_n)$.

Но у оценки (10) есть еще одно важное преимущество перед (5): в данной работе величины x и y являются независимыми переменными, в то время как в теореме А они связаны соотношением $x/y = b$, поскольку способ построения винеровского процесса в теореме А существенно зависит от отношения x/y. Это было в свое время шагом вперед по сравнению с соответствующими результатами из [6], где в степенных случаях процессы W зависели и от x, и от y, причем неявным образом. В приведенных в данной работе результатах мы смогли полностью устранить такую зависимость.

1.3. Введенные в (6) функции $L_\alpha(y)$ мы называем *суммами срезанных моментов*. Эти функции достаточно часто встречаются в оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме, поскольку их введение вместо сумм обычных моментов приводит, как правило, к улучшению оценок. Отметим, что их определение можно также переписать следующими двумя эквивалентными способами, которыми иногда более удобно пользоваться:

$$L_\alpha(y) = y^{-\alpha} D_\alpha(y) + y^{-2} D(y) = (\alpha - 2) y^{-\alpha} \int\limits_0^y D(x) x^{\alpha - 3}\, dx, \tag{12}$$

где

$$D(y) := \sum_j \mathbf{E}\left\{ \frac{\xi_j^2}{r_j^2} : \frac{|\xi_j|}{r_j} > y \right\}, \quad D_\alpha(y) := \sum_j \mathbf{E}\left\{ \frac{|\xi_j|^\alpha}{r_j^\alpha} : \frac{|\xi_j|}{r_j} \leq y \right\}.$$

Нужные нам свойства функций $L_\alpha(y)$ собраны в п. 4.2. О связи этих характеристик с условием Линдеберга напоминается в замечании 2 в конце § 2.

1.4. В следующем § 2 приводится еще несколько утверждений, в первых трех из которых содержатся более точные оценки, чем те, что дает теорема 1. Наиболее общий из этих результатов — теорема 2 — доказывается в § 3. Доказательства остальных результатов работы собраны в § 4.

В п. 2.3 будет построена оценка снизу для распределения изучаемого нами расстояния Δ, которая не будет зависеть от способа построения изучаемых процессов на одном вероятностном пространстве. Тем самым здесь усиливается результат из [8].

В п. 2.4 наши результаты применяются к задаче оценивания расстояния Прохорова в классическом принципе инвариантности. Кроме того, в следствиях 4 и 6 разбираются два примера, показывающих, что в достаточно естественных частных случаях наши оценки действительно неулучшаемы с точностью до абсолютных постоянных.

Отметим, что всюду в работе, начиная с формулы (5), предполагается, что умножение выполняется перед делением, так что, например, $2ab/3cd =$

$(2ab)/(3cd)$. Символ $:=$ далее используется только тогда, когда слева от этого символа стоит обозначение для выражения, стоящего справа от него.

Пользуясь случаем, автору хотелось бы поблагодарить И. С. Борисова за полезные комментарии к данной работе, которые он высказал после доклада, сделанного автором в Институте математики имени С. Л. Соболева в августе 2006 г.

§ 2. Усиления и применения теоремы 1

2.1. Введем сначала два определения. Будем говорить, что *функция h принадлежит классу $\mathscr{H}$*, если

a$_0$) $h(0) = 0$ и $h(-x) = h(x)$ при $|x| \le 1$;

b$_0$) при $0 < x \le 1$ функция $h(x)/x^2$ положительна и не убывает;

c$_0$) $h(1) = 1$ и $\mathscr{K}_h := -\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \log h(2^{-k}) < \infty$.

Подчеркнем, что условие $h \in \mathscr{H}$ налагает ограничения на поведение функции $h(x)$ только при $|x| \le 1$.

Нам потребуется еще одно определение. Будем говорить, что *функция H принадлежит классу $\mathscr{H}_1(h)$*, если

a$_1$) функция h принадлежит классу $\mathscr{H}$;

b$_1$) $H(x) = H(1)h(x)$ при $|x| \le 1$;

c$_1$) $H(x)$ четная функция;

d$_1$) при всех $x > 0$ функция $H(x)/x^2$ положительна и не убывает;

e$_1$) при $x \ge 1$ функция $x^{-1} \log H(x)$ неотрицательна и не возрастает.

Для неотрицательных функций H условимся далее использовать обозначения

$$\mathscr{L}_H := \sum_j \mathbf{E} H(\xi_j) \quad \text{и} \quad \mathscr{L}_H(v) := \sum_j \mathbf{E} H(\xi_j / v r_j) \quad \text{при } v > 0. \tag{13}$$

С целью упростить обозначения положим

$$P(x, y) := \mathbf{P}(\Delta \ge x,\ \bar{\xi} \le y) \quad \text{при } x > 0,\ y > 0. \tag{14}$$

Теорема 2. *Пусть фиксированы число $v > 0$ и функция h из класса $\mathscr{H}$. Тогда найдется винеровский процесс $W = W_{h,v}$ такой, что неравенство*

$$P(C_2(x + z + v\mathscr{K}_h), y) \le e^{-x/v} + (y \mathscr{L}_H(v)/zH(y/v))^{z/y} \tag{15}$$

справедливо, если числа v, y, x, z и функция H удовлетворяют следующим соотношениям:

$$x > 0, \quad z \ge y \ge v > 0, \quad H \in \mathscr{H}_1(h), \quad \mathscr{L}_H(v) \le e^2 z/y. \tag{16}$$

2.2. Перейдем теперь к оценкам в терминах функций $L_\alpha(\cdot)$. В п. 4.1 покажем, что из теоремы 2 легко получается

Следствие 1. *Пусть фиксированы числа $\alpha \ge 2$ и $v > 0$. Тогда найдется винеровский процесс $W = W_{\alpha,v}$ такой, что неравенство*

$$P(C_2(x + z + 2\alpha v), y) \le e^{-x/v} + (v^2 L_\alpha(v)/zy)^{z/y} \tag{17}$$

справедливо, если

$$x > 0, \quad z \ge y \ge v > 0, \quad L_\alpha(v) \le z/y. \tag{18}$$

Следствие 2. *Пусть фиксированные числа $\alpha \geq 2$ и $v > 0$ таковы, что $L_\alpha(v) \leq 1$. Тогда для винеровского процесса $W = W_{\alpha,v}$, введенного в следствии 1, справедливо следующее утверждение:*

$$\forall z \geq \alpha y > 0 \quad P(4C_2 z, y) \leq (v/z)^{z/y}. \tag{19}$$

Для полноты картины установим оценку для моментов.

Следствие 3. *Пусть фиксировано число $\alpha \geq 2$. Тогда для процесса $W = W_\alpha$ из теоремы 1 верно следующее неравенство:*

$$\forall K > 0 \quad \mathbf{E}\min\{\Delta^\alpha, K^{\alpha-2}\Delta^2\} \leq 3K^\alpha L_\alpha(K/2C_1\alpha)$$
$$\leq 3(2C_1\alpha)^\alpha \sum_j \mathbf{E}\min\left\{|\xi_j|^\alpha/r_n^\alpha, K^{\alpha-2}\xi_j^2/r_n^2\right\}. \tag{20}$$

В частности,

$$\mathbf{E}\Delta^\alpha \leq 3(2C_1\alpha)^\alpha \sum_j \mathbf{E}|\xi_j|^\alpha/r_n^\alpha. \tag{21}$$

Отметим, что при $r_j \equiv 1$ оценка (21) ранее была установлена в [7] как следствие из теоремы A при $b = 2$.

2.3. В этом пункте мы покажем, что наши оценки неулучшаемы в некотором смысле. Но сначала, следуя идеям из [8], приведем достаточно простую оценку снизу для вероятностей, которые изучаются в работе. Положим

$$\bar\eta = \sup_j |\eta_j|/r_j \quad \text{при } \eta_j = W(t_j) - W(t_{j-1}). \tag{22}$$

Теорема 3. *Для любого винеровского процесса W, построенного на одном вероятностном пространстве с процессом S, справедливо неравенство*

$$\forall x > y > 0 \quad \mathbf{P}(\Delta > (x-y)/2) \geq \mathbf{P}(\bar\xi > x) - \mathbf{P}(\bar\eta \geq y). \tag{23}$$

Кроме того,

$$\forall y > 0\ \forall b \geq 1 \quad \mathbf{P}(\bar\eta \geq y\sqrt{\alpha b}) \leq L_\alpha^b(y). \tag{24}$$

А если $L_\alpha(v) \leq 1$, то

$$\forall z \geq \sqrt{\alpha} \quad \mathbf{P}(\bar\eta \geq \sqrt{2}L_\alpha^{1/\alpha}(v)vz) \leq \Phi_0(z) := \int_z^\infty \sqrt{2/\pi}e^{-x^2/2}dx. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь два более частных случая.

Следствие 4. *Пусть при некоторых фиксированных числах s и l_s выполнено следующее условие:*

$$\forall x > 0 \quad D(x) \leq l_s/x^{s-2}, \quad s > 2. \tag{26}$$

Тогда найдется винеровский процесс $W = W_{s,l_s}$ такой, что верно неравенство

$$\forall x > 0 \quad \mathbf{P}(\Delta \geq 3sC_1x) \leq 3l_s/x^s. \tag{27}$$

А если верно (26) и, кроме того, при некотором x_1 справедливо также предположение

$$\forall x \geq x_1 > 0 \quad D(x) = l_s/x^{s-2}, \tag{28}$$

то для любого процесса W, заданного на одном вероятностном пространстве с S, имеет место неравенство

$$\forall x \geq x_2 > 0 \quad \mathbf{P}(\Delta > x/8) \geq (s-2)l_s/2sx^s, \tag{29}$$

где

$$x_2 := \max\{x_1, x_0\} \quad \text{и} \quad x_0 := 8sl_s^{1/s}/(s-2)^{1/s}. \tag{30}$$

В частности, из сравнения (27) и (29) вытекает, что оценка (27) неулучшаема с точностью до постоянной, зависящей лишь от s. Этот факт позволил нам во введении сделать вывод, что и более общие неравенства, которые получены в настоящей работе, являются в некотором смысле неулучшаемыми.

2.4. Рассмотрим простейший пример применения установленных выше оценок. Пусть при каждом $n = 1, 2, \dots$ заданы независимые случайные величины $\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \dots, \xi_{n,n}$, причем

$$\forall n \ \forall j \quad \mathbf{E}\xi_{j,n} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \mathbf{D}\xi_{j,n} = 1.$$

Построим на отрезке $[0,1]$ непрерывные процессы $S_n = S_n(t)$ аналогично тому, как мы это делали в (2) и (3) в общем случае. Обозначим через $\pi(S_n, W)$ расстояние Прохорова [2] между распределениями процессов S_n и W в пространстве $\mathscr{C}[0,1]$ непрерывных функций, заданных на $[0,1]$, когда это пространство рассматривается с равномерной метрикой.

Нам потребуются следующие обозначения:

$$L_{\alpha,n}(x) := \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E} \min\{|\xi_{j,n}/x|^\alpha, (\xi_{j,n}/x)^2\}, \quad x > 0,$$

$$\pi_{\alpha,n}(b) := \inf\bigl\{x : L_{\alpha,n}^b(x) + \mathbf{P}(\max_j |\xi_{j,n}| \ge x) \le x\bigr\}, \quad b \ge 1, \tag{31}$$

$$\pi_{\alpha,n} := \inf\{x : L_{\alpha,n}(x) \le x\}, \quad L_{\alpha,n} := \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|\xi_{j,n}|^\alpha.$$

Напомним [2], что если при некотором n на одном вероятностном пространстве с процессом S_n построен стандартный винеровский процесс W_n, то для получения оценки для расстояния Прохорова достаточно подобрать такое число π_n, чтобы было выполнено следующее простое утверждение:

$$\text{если } \mathbf{P}(\Delta_n := \sup_{t\in[0,1]} |S_n(t) - W_n(t)| > \pi_n) \le \pi_n, \text{ то } \pi(S_n, W) \le \pi_n.$$

В частности, из этого факта и оценок (10), (11) и (27) с учетом обозначений (31) немедленно вытекает

Следствие 5. *При всех n*

$$\pi(S_n, W) \le C_1 \inf_{\alpha\ge2} \inf_{b\ge1} \alpha b \pi_{\alpha,n}(b) \quad \text{и} \quad \pi(S_n, W) \le 2C_1 \inf_{\alpha\ge2} \alpha\pi_{\alpha,n}. \tag{32}$$

А если выполнено условие

$$\forall x > 0 \quad D_n(x) := \sum_j \mathbf{E}\bigl\{\xi_{j,n}^2 : |\xi_{j,n}| > x\bigr\} \le l_{s,n}/x^{s-2}, \tag{33}$$

то

$$\pi(S_n, W) \le 3C_1 s (l_{s,n})^{1/(s+1)}. \tag{34}$$

Отметим, что из (34) при $\alpha = s$ вытекает неравенство

$$\pi(S_n, W) \le 3C_1 s L_{s,n}^{1/(s+1)} \quad \text{при } s \ge 2, \tag{35}$$

которое ранее было получено в [7]. Заметим, что (35) при $s \in (2, 3]$ совпадает со знаменитой оценкой А. А. Боровкова [5]. Значит, наше неравенство (34) можно рассматривать как еще одно усиление оценки А. А. Боровкова, поскольку в (34) не требуется существования соответствующих моментов.

Следствие 6. *Пусть выполнено условие* (33) *и, кроме того,*

$$\forall x \geq x_{s,n} \quad D_n(x) = l_{s,n}/x^{s-2}, \tag{36}$$

причем

$$x_{s,n} = (4(s-2)l_{s,n}/s)^{1/(s+1)} \quad \text{и} \quad l_{s,n} \leq (s-2)^{2s+1}/(8s)^{s(s+2)}. \tag{37}$$

Тогда

$$\pi(S_n, W) \geq (4(s-2)l_{s,n}/s)^{1/(s+1)}/8. \tag{38}$$

В частности, из приведенного утверждения вытекает, что оценка (34) неулучшаема с точностью до постоянной. Следовательно, и более общие неравенства (32) также являются в некотором смысле неулучшаемыми.

Замечание 1. В частном случае, когда величины $\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \ldots, \xi_{n,n}$ одинаково распределены, неулучшаемые оценки, эквивалентные по точности первому неравенству в (32), впервые получены И. С. Борисовым в [9]. В частности, из оценок в [9] можно в принципе извлечь утверждения, эквивалентные (34) и (38). Однако метод работы [9] очень существенно использует одинаковую распределенность величин $\{\xi_{j,n}\}$.

Замечание 2. Следующие утверждения эквивалентны:

1) справедлив принцип инвариантности, т. е. распределение в пространстве $\mathscr{C}[0,1]$ случайной «ломаной» S_n сходится к распределению стандартного винеровского процесса W;

2) расстояние Прохорова $\pi(S_n, W)$ стремится к 0 при $n \to \infty$;

3) выполнено условие Линдеберга;

4) $\exists \alpha > 2\ \exists x > 0 \quad L_{\alpha,n}(x) \to 0$;

5) $\forall \alpha > 2\ \forall x > 0 \quad L_{\alpha,n}(x) \to 0$.

Действительно, эквивалентность условий 1–3 установлена еще в [2]. А тот факт, что условия 4 и 5 эквивалентны классическому условию Линдеберга, известен в исследованиях, связанных с центральной предельной теоремой. В частности, этот факт немедленно следует из интегрального представления в (12).

Таким образом, теорема 1 и ее следствия дают оценки в принципе инвариантности в терминах величины $L_{\alpha,n}(x)$, сходимость которой к нулю необходима для справедливости этого принципа. Использовавшиеся ранее отношения Ляпунова $L_{\alpha,n}$ этим свойством не обладают.

Отмеченный выше факт является одной из причин, побудивших автора к написанию данной работы. Впервые же мысль получить оценки в терминах срезанных моментов появилась при написании работы [10], когда выяснилось, что наличие неравенства (11) при $r_j \equiv 1$ серьезно облегчило бы задачу изучения диффузионной аппроксимации длин очередей для сетей обслуживания, работающих в условиях большой нагрузки. Как нетрудно понять, неравенства настоящей работы в случае $r_n \to \infty$ могут быть еще более полезными в этой задаче.

§ 3. Доказательство теоремы 2

3.1. В этом пункте подробно рассмотрим случай, когда $r_j \equiv 1$, $v = 1$ и, значит, $\mathscr{L}_H(v) = \mathscr{L}_H$ в силу (13). Наша цель получить оценки для вероятностей вида

$$P_1(x,y) := \mathbf{P}(\sup_n \Delta_n \geq x,\ \sup_n |\xi_n| \leq y).$$

В первую очередь нам понадобится

Лемма 1. *Пусть фиксирована функция h из класса $\mathscr{H}$. Тогда найдется винеровский процесс $W = W_h$ такой, что неравенство*

$$P_1(C_0(x + \mathscr{K}_h) + 8bz, z) \le (1 + b)e^{-x} + (e\mathscr{L}_H/bH(z))^b \tag{39}$$

верно, если числа b, x, z и неотрицательная функция H удовлетворяют следующим условиям:

$$b \ge 1, \quad x > 0, \quad z \ge 1, \quad 0 < \mathscr{L}_H < \infty, \quad bH(\cdot)/\mathscr{L}_H \in \mathscr{H}_1(h). \tag{40}$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что условия леммы 1 совпадают с точностью до небольших отличий в обозначениях с условиями теоремы 3 из [7] при $v = 1$. Утверждение леммы 1 является небольшим уточнением этой теоремы. Чтобы убедиться в последнем, достаточно повторить вывод упомянутой теоремы при $v = 1$ и заметить, что неравенства вида

$$\mathbf{P}(A) \le P + \mathbf{P}(\sup_n |\xi_n| > z),$$

которые присутствуют в формулах (33), (37) и (44) в § 4 работы [7], можно заменить чуть более сильными неравенствами следующего вида:

$$\mathbf{P}(A, \sup_n |\xi_n| \le z) \le P$$

при тех же самых событиях A и величинах P. $\square$

Приведем утверждение леммы 1 к виду, более удобному для целей данной работы. Условимся, что далее

$$C_3 = (C_0 + 8)e^2, \quad C_2 = 2C_3 + 1, \quad C_1 = 4C_2 \ge 1. \tag{41}$$

Лемма 2. *Пусть фиксирована функция $h \in \mathscr{H}$. Тогда для определенного в лемме 1 винеровского процесса $W = W_h$ неравенство*

$$P_1(C_3(x_0 + z_0 + \mathscr{K}_h), y_0) \le e^{-x_0} + (y_0\mathscr{L}_H/z_0H(y_0))^{z_0/y_0} \tag{42}$$

имеет место, если числа x_0, y_0, z_0 и функция H удовлетворяют условиям

$$x_0 > 0, \quad z_0 \ge y_0 \ge 1, \quad H \in \mathscr{H}_1(h), \quad 0 < \mathscr{L}_H \le e^2 z_0/y_0. \tag{43}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что

$$bH(\cdot)/\mathscr{L}_H \in \mathscr{H}_1(h), \quad \text{если } H \in \mathscr{H}_1(h) \text{ и } b/\mathscr{L}_H \ge 1. \tag{44}$$

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что функция

$$\lambda(x) := x^{-1}\log(bH(x)/\mathscr{L}_H) = x^{-1}\log H(x) + x^{-1}\log(b/\mathscr{L}_H) \tag{45}$$

не возрастает при $x \ge 1$. Но этот факт очевиден, поскольку ввиду условий из (44) в правой части формулы (45) стоит сумма двух невозрастающих функций.

Мы собираемся воспользоваться утверждением леммы 1 при

$$x = x_0 + e^2 z_0 > 0, \quad z = y_0 \quad \text{и} \quad b = e^2 z_0/y_0. \tag{46}$$

Мы можем это сделать, поскольку в силу (44) условия (43) и (46) достаточны для справедливости предположений (40) леммы 1. Отметим еще, что в этом случае ввиду (41)

$$1 + b \le e^b \le e^{e^2 z_0} \quad \text{и} \quad C_0(x + \mathscr{K}_h) + 8bz \le C_3(x_0 + z_0 + \mathscr{K}_h).$$

Подставив эти оценки в (39), получим, что

$$P_1(C_3(x_0 + z_0 + \mathscr{K}_h), y_0) \le e^{e^2 z_0}e^{-x_0 - e^2 z_0} + p^{e^2}, \tag{47}$$

где $p := (y_0\mathscr{L}(H)/z_0H(y_0))^{z_0/y_0}$. Из (47) немедленно приходим к (42) в случае, когда $p \le 1$. Если $p > 1$, то (42) верно подавно, поскольку в этом случае правая часть этого неравенства больше единицы. $\square$

3.2. Приступим непосредственно к выводу теоремы 2. При $k = 1, 2, \dots$ введем обозначения

$$\tilde{\xi}_k := \xi_k / v r_k, \quad \tilde{\xi} := \sup_n |\tilde{\xi}_n|, \quad \tilde{t}_k = \sum_{j \le k} \mathbf{D} \tilde{\xi}_j, \quad \tilde{t}_0 = 0,$$

$$\widetilde{S}(0) = 0, \quad \widetilde{S}(\tilde{t}_k) = \sum_{j \le k} \tilde{\xi}_j \quad \text{при } \tilde{t} \in [\tilde{t}_k, \tilde{t}_{k+1}). \tag{48}$$

Наша ближайшая цель — построить некоторый винеровский процесс $\widetilde{W}$ и оценить величину

$$\widetilde{\Delta} := \sup_n \widetilde{\Delta}_n, \quad \text{где } \widetilde{\Delta}_n = \sup_{\tilde{t} \in [0, \tilde{t}_n]} |\widetilde{S}(\tilde{t}) - \widetilde{W}(\tilde{t})|. \tag{49}$$

Лемма 3. *Пусть фиксированы число $v \in (0, \infty)$ и функция h из класса $\mathscr{H}$. Тогда найдется винеровский процесс $\widetilde{W} = \widetilde{W}_{h,v}$ такой, что неравенство*

$$\mathbf{P}(\widetilde{\Delta} \ge C_3(x_0 + z_0 + \mathscr{K}_h), \ \tilde{\xi} \le y_0) \le e^{-x_0} + (y_0 \mathscr{L}_H(v) / z_0 H(y_0))^{z_0/y_0} \tag{50}$$

справедливо, если числа x_0, y_0, z_0 и функция H удовлетворяют условиям

$$x_0 > 0, \quad z_0 \ge y_0 \ge 1, \quad H \in \mathscr{H}_1(h), \quad 0 < \mathscr{L}_H(v) \le e^2 z_0 / y_0. \tag{51}$$

Это утверждение немедленно получится из леммы 2, если в ней предварительно величины $\{\xi_j\}$ заменить на $\{\tilde{\xi}_j = \xi_j / v r_j\}$ и заметить, что в этом случае $\mathscr{L}_H(v) = \sum\limits_j \mathbf{E} H(\tilde{\xi}_j)$.

Введем в рассмотрение функции $r(\tilde{t})$ и $T(t)$, полагая

$$r(0) = v r_1, \quad r(\tilde{t}) = v r_k \quad \text{при } \tilde{t} \in (\tilde{t}_{k-1}, \tilde{t}_k],$$

$$T(0) = 0, \quad T(t) = \tilde{t}_{k-1} + (t - t_{k-1}) / v^2 r_k^2 \quad \text{при } t \in (t_{k-1}, t_k], \tag{52}$$

где $k = 1, 2, \dots$. Кроме того, нам понадобятся следующие случайные процессы:

$$\widetilde{S}_0(\tilde{t}) = \int_0^{\tilde{t}} r(u) d\widetilde{S}(u), \quad S_0(t) = \widetilde{S}_0(T(t)), \tag{53}$$

$$\widetilde{W}_0(\tilde{t}) = \int_0^{\tilde{t}} r(u) d\widetilde{W}(u), \quad W(t) = \widetilde{W}_0(T(t)). \tag{54}$$

Условимся далее использовать обозначения из (4) с процессом W, введенным в (54).

Следующее утверждение можно рассматривать как непрерывный аналог неравенства Кронекера.

Лемма 4. *Если выполнено условие* (7), *то введенный в* (54) *процесс W является винеровским и верны следующие соотношения:*

$$\Delta \le 2v\widetilde{\Delta} + \bar{\xi} \quad \text{и} \quad \bar{\xi} = v\tilde{\xi}. \tag{55}$$

В частности, в этом случае очевидно, что

$$\forall u \ \forall y \quad \mathbf{P}(\Delta \ge 2C_3 u + y, \ \bar{\xi} \le y) \le \mathbf{P}(\widetilde{\Delta} \ge C_3 u / v, \ \tilde{\xi} \le y/v). \tag{56}$$

Доказательство. Определенные в (54) процессы $\widetilde{W}_0(\tilde{t})$ и $W(t)$ являются по построению гауссовскими процессами с независимыми приращениями. Следовательно,

$$\mathbf{D}\widetilde{W}_0(\tilde{t}) = \int_0^{\tilde{t}} r^2(u)\, du, \quad \mathbf{D}W(t) = \int_0^{T(t)} r^2(u)\, du = t. \tag{57}$$

Последнее равенство в (57) вытекает из определения (52) функции $T(t)$, а из него следует, что введенный в (54) процесс W является винеровским.

Кроме того, из (52) нетрудно извлечь, что

$$\forall k \geq 1 \quad T(t_k) = \tilde{t}_k \quad \text{и} \quad r(T(t)) \leq r(T(t_k)) = vr_k \quad \text{при } t \leq t_k. \tag{58}$$

Следовательно, из определений (48) и (53) имеем

$$S_0(t_k) = \widetilde{S}_0(\tilde{t}_k) = \sum_{j\leq k} vr_j\tilde{\xi}_j = \sum_{j\leq k} \xi_j = S(t_k), \quad k = 1, 2, \dots.$$

Значит, процесс $S_0(t)$ является ступенчатым вариантом построенного в (2) процесса $S(t)$. Из этого факта и из предположения (3) немедленно вытекает следующее неравенство:

$$\delta_{1,n} := \sup_{t\in[0,t_n]} |S(t) - S_0(t)| \leq \sup_{j\leq n} |\xi_j| \leq r_n\bar{\xi}. \tag{59}$$

Интегрируя по частям, мы можем переписать определения (53) и (54) в следующем виде:

$$S_0(t) = r(T(t))\widetilde{S}(T(t)) - \int_0^{T(t)} \widetilde{S}(u)\,dr(u),\ W(t) = r(T(t))\widetilde{W}(T(t)) - \int_0^{T(t)} \widetilde{W}(u)\,dr(u).$$

Вычитая эти равенства одно из другого, находим, что

$$|S_0(t) - W(t)| \leq 2r(T(t)) \sup_{u\in[0,T(t)]} |\widetilde{S}(u) - \widetilde{W}(u)|.$$

Используя определение (49) и отмеченные в (58) свойства функции $T(t)$, нетрудно получить, что

$$\delta_{2,n} := \sup_{t\in[0,t_n]} |S_0(t) - W(t)| \leq 2vr_n\widetilde{\Delta}_n.$$

Из этого соотношения и (59) с учетом определения (4) имеем

$$\forall n \quad \Delta_n \leq \delta_{1,n} + \delta_{2,n} \quad \text{и} \quad \Delta_n/r_n \leq \bar{\xi} + 2v\widetilde{\Delta}_n \leq 2v\widetilde{\Delta} + \bar{\xi}.$$

Последняя оценка доказывает справедливость первого утверждения в (55). Равенство $\bar{\xi} = v\tilde{\xi}$ следует из сравнения определений (6) и (48). □

3.3. Доказательство теоремы 2. Предположим, что выполнены все условия теоремы 2, причем $\mathscr{L}_H(v) > 0$. В этом случае из (16) находим, что

$$x_0 := x/v > 0, \quad z_0 := z/v \geq y_0 := y/v \geq 1, \quad u := x + z + v\mathscr{K}_h \geq y$$

и $0 < \mathscr{L}_H(v) \leq e^2 z_0/y_0$. Таким образом, при указанных x_0, z_0 и y_0 выполнены все условия (51) леммы 3, а утверждение (50) этой леммы можно переписать в виде

$$\mathbf{P}(\widetilde{\Delta} \geq C_3u/v,\ \tilde{\xi} \leq y/v) \leq e^{-x/v} + (y\mathscr{L}_H(v)/3zH(y/v))^{z/y}.$$

Подставляя эту оценку в (56), получим требуемое утверждение (15), поскольку в рассматриваемом случае $2C_3u + y \leq C_2u$ ввиду (41).

Ситуация, когда $\mathscr{L}_H(v) = 0$, будет разобрана в приводимой ниже лемме 5, которая имеет и самостоятельный интерес. □

Лемма 5. *Если $\mathscr{L}_H(v) = 0$ при некотором $v > 0$, то*

$$\mathbf{P}(\Delta \neq 0) = \mathbf{P}(\bar{\eta} \neq 0) = \mathbf{P}(\bar{\xi} \neq 0) = 0$$

для любого винеровского процесса W. В частности, в этом случае верны все утверждения теорем 1–3 и следствий 1–3.

Доказательство. В силу неравенства Чебышева при всех j

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbf{P}(|\xi_j| > \varepsilon) \leq \mathbf{E}H(\xi_j/vr_j)/H(\varepsilon/vr_j) \leq \mathscr{L}_H(v)/H(\varepsilon/vr_j) = 0.$$

Значит, все ξ_j равны 0 почти наверное, а потому все $\mathbf{D}\xi_j$ равны 0 и все t_k равны 0 в (2), т. е. мы строим процесс $W(t)$ в одной точке $t = 0$. В этом случае $W(0) = S(0) = \Delta = 0 = \bar{\eta} = \bar{\xi}$, и все утверждения теорем 1–3 и следствий 1–3, очевидно, справедливы. $\square$

§ 4. Доказательства остальных утверждений работы

4.1. Прежде всего заметим, что

$$L_\alpha(y) = \sum_j \mathbf{E}H_\alpha(\xi_j/yr_j) \quad \text{при } H_\alpha(x) := \min\{|x|^\alpha, x^2\}. \tag{60}$$

Изучим свойства функции $H_\alpha(x)$.

Лемма 6. *При всех $\alpha \geq 2$ функция $h_\alpha(x) := x^\alpha$ принадлежит классу $\mathscr{H}$ при $\mathscr{K}_h < 2\alpha$, а функция $H(x) := e^2 H_\alpha(x)$ принадлежит классу $\mathscr{H}_1(h_\alpha)$.*

Доказательство. Заметим, что

$$\mathscr{K}_{h_\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \log \frac{1}{(1/2^k)^\alpha} = \alpha \log 2 \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-k} = 2\alpha \log 2 < 2\alpha.$$

Значит, $h_\alpha \in \mathscr{H}$.

Если же $x \geq 1$, то $H(x) = e^2 H_\alpha(x) = e^2 x^2$ и нетрудно проверить, что функция

$$\lambda(x) := x^{-1} \log H(x) = 2x^{-1}(1 + \log x)$$

убывает при $x \geq 1$. Таким образом, $H \in \mathscr{H}_1(h_\alpha)$. $\square$

Доказательство следствия 1. Пусть выполнены условия (18) следствия 1. Используя (60) и лемму 6, нетрудно проверить, что в этом случае справедливы все предположения теоремы 2 при

$$h_\alpha(x) = x^\alpha, \quad H(x) = e^2 H_\alpha(x), \quad \mathscr{L}_H(v) = e^2 L_\alpha(v).$$

Значит, мы можем воспользоваться утверждением (15) теоремы 2, которое в этом частном случае можно переписать в виде (17). $\square$

Доказательство следствия 2. Нетрудно убедиться, что если справедливы условия

$$x = z \geq \alpha y > 0, \quad L_\alpha(v) \leq 1 \quad \text{и} \quad y \geq v > 0, \tag{61}$$

то выполнены также все предположения (18) следствия 1, причем в этом случае утверждение (17) следствия 1 можно переписать в виде

$$P(C_2(2z + 2\alpha v), y) \leq e^{-z/v} + (v^2/zy)^{z/y}. \tag{62}$$

Но из (61) вытекает, что

$$(v^2/zy)^{z/y} \leq (v/z)^{z/y} \leq (v/\alpha y)^{z/y} = (v/y)^{z/y}/\alpha^{z/y} \leq (v/y)^{z/y}/2. \tag{63}$$

Далее, $e^{-t} \leq (1/et)$ при всех возможных значениях $t = y/v > 0$. Следовательно,

$$e^{-z/v} = (e^{-y/v})^{z/y} \leq (v/\mathrm{e}y)^{z/y} = (v/y)^{z/y} e^{-z/y} \leq (v/y)^{z/y}/2. \tag{64}$$

Подставляя теперь оценки (63) и (64) в (62), получим

$$P(4C_2 z, y) \leq P(C_2(2z + 2\alpha v), y) \leq (v/y)^{z/y}. \tag{65}$$

Таким образом, мы доказали (65) при выполнении условий (61), т. е. установили справедливость (19), но при дополнительном предположении, что $y \geq v$. Однако если $0 < y < v$, то неравенство (19) также верно, поскольку в этом случае правая часть в нем больше единицы. $\square$

4.2. В этом пункте изучим некоторые свойства функции $L_\alpha(\cdot)$.

Лемма 7. *Функции $L_\alpha(x)$ и $x^2 L_\alpha(x)$ убывают, а $x^\alpha L_\alpha(x)$ возрастает на интервале $(0, \infty)$. В частности,*

$$\forall z \geq u > 0 \quad z^2 L_\alpha(u)/u^2 \leq L_\alpha(u) \leq z^\alpha L_\alpha(u)/u^\alpha. \tag{66}$$

Приведенное утверждение нетрудно получить непосредственно из представления (12).

Лемма 8. *Если верно одно из следующих условий:*

$$\text{либо } \forall v > 0 \ L_\alpha(v) = 0, \quad \text{либо } \forall v > 0 \ L_\alpha(v) = \infty, \tag{67}$$

то все утверждения теоремы 1 и следствия 3 имеют место для любого винеровского процесса W, заданного на одном вероятностном пространстве с ломаной S. Если ни одно из предположений в (67) не выполнено, то справедливо следующее утверждение:

$$\exists v_\alpha \in (0, \infty) \quad L_\alpha(v_\alpha) = 1. \tag{68}$$

Доказательство. Случай, когда справедливо первое предположение в (67), уже разобран в лемме 5. Ситуация, когда верно второе условие в (67), также очевидна, поскольку в этом случае правые части соответствующих неравенств обращаются в бесконечность.

Если же ни одно из условий в (67) не верно, то найдется такое $u > 0$, что $0 < L_\alpha(u) < \infty$. В этом случае в силу неравенств (66)

$$L_\alpha(x) \geq u^2 L_\alpha(y)/x^2 \to \infty \quad \text{при } u \geq x \to 0,$$
$$L_\alpha(x) \leq u^2 L_\alpha(y)/x^2 \to \infty \quad \text{при } u \leq x \to \infty.$$

Поскольку функция $L_\alpha(x)$ непрерывна, то выполнено условие (68). $\square$

Лемма 9. *Если верно условие (68), то*

$$\forall y \in (0, v_\alpha] \quad L_\alpha(y) \geq v_\alpha^2/y^2 \geq 1, \quad \forall y \geq v_\alpha \quad (v_\alpha/y)^\alpha \leq L_\alpha(y). \tag{69}$$

В частности, если события A_y таковы, что

$$\forall y > v_\alpha \quad \mathbf{P}(A_y) \leq (v_\alpha/y)^{\alpha b} \quad \text{при некотором } b \geq 0, \tag{70}$$

то

$$\forall y > 0 \quad \mathbf{P}(A_y) \leq L_\alpha^b(y). \tag{71}$$

Доказательство. Если $y \geq v_\alpha$, то из правого неравенства в (66) вытекает правая оценка в (69), поскольку при сделанном предположении

$$v_\alpha^\alpha/y^\alpha = v_\alpha^\alpha L_\alpha(v_\alpha)/y^\alpha \leq L_\alpha(y).$$

В частности, в этом случае из (70) получаем (71) при $y \geq v_\alpha$.

Если $0 < y < v_\alpha$, то из левой оценки в (66) следует левое неравенство в (69), так как $L_\alpha(y) \geq v_\alpha^2/y^2 L_\alpha(v_\alpha) = v_\alpha^2/y^2 \geq 1$. В частности, в этом случае неравенство в (71) также верно, потому что правая часть в нем не меньше единицы. $\square$

4.3. В этом пункте мы закончим доказательства теоремы 1 и следствия 3. В силу леммы 8 осталось рассмотреть лишь случай, когда выполнено условие (68).

Подчеркнем, что в этом случае в качестве $W = W_\alpha$ будем использовать винеровский процесс, введенный в следствии 1 при $v = v_\alpha$. В частности, в этом случае уже доказанное неравенство (19) можно записать в виде

$$\forall b \geq 1 \ \forall y > 0 \quad P(C_1\alpha by, y) \leq (v_\alpha/y)^{\alpha b}, \tag{72}$$

поскольку $C_1 = 4C_2$ ввиду (41). Нам потребуется оценка

$$\mathbf{P}(\Delta \geq x) \leq P(x,y) + \mathbf{P}(\bar{\xi} > y) \leq P(x,y) + \sum_j \mathbf{P}(|\xi_j| > yr_j), \tag{73}$$

которая справедлива при всех $x > 0$ и $y > 0$ в силу определений (6) и (14) величин $\bar{\xi}$ и $P(x,y)$.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что выполнены все условия теоремы 1 и (68). В этом случае в силу леммы 9 из (72) имеем, что

$$\forall b \geq 1 \ \forall y > 0 \quad P(C_1\alpha by, y) \leq L_\alpha^b(y).$$

Полагая $b = x/y \geq 1$ в этом соотношении, получим (9).

Но из (9) и (73) вытекает (10), а из (10) и (73) при $x = y$ с учетом неравенства Чебышева находим, что

$$\mathbf{P}(\Delta > C_1\alpha y) \leq L_\alpha(y) + \sum_j \mathbf{P}(|\xi_j| > yr_j) \leq L_\alpha(y) + L_\alpha(y). \tag{74}$$

Поскольку $L_\alpha(2x) \leq L_\alpha(x)/4$ ввиду (66), то из (74) при $y = 2x$ следует (11). $\square$

Доказательство следствия 3. Предполагая условие (68) выполненным, фиксируем некоторое число $u > 0$ и будем использовать неравенство (72) при $b = 2$ и $y = ux$. В этом случае из (72) и (73) вытекает, что

$$\forall x, u > 0 \quad \mathbf{P}(\Delta/2C_1\alpha u \geq x) \leq (v_\alpha/ux)^{2\alpha} + \sum_j \mathbf{P}(|\xi_j| > uxr_j).$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}H_\alpha(\Delta/2C_1\alpha u) = \int_0^\infty \mathbf{P}(\Delta/2C_1\alpha u > x)\, dH_\alpha(x) \leq H_\alpha(a) + I_1 + I_2, \tag{75}$$

где

$$a = v_\alpha/u, \quad I_1 = \int_a^\infty (v_\alpha/ux)^{2\alpha}\, dH_\alpha(x) = a^{2\alpha} \int_a^\infty x^{-2\alpha} H'_\alpha(x)\, dx,$$

$$I_2 := \sum \int_0^\infty \mathbf{P}(|\xi_j|/ur_j > x)\, dH_\alpha(x) = \sum \mathbf{E}H_\alpha(\xi_j/ur_j) = L_\alpha(u). \tag{76}$$

Поскольку всегда $H'_\alpha(x) \leq \alpha x^{\alpha-1}$, то при $a = v_\alpha/u \leq 1$

$$H_\alpha(a) + I_1 \leq a^\alpha + a^{2\alpha} \int_a^\infty x^{-2\alpha} \alpha x^{\alpha-1} dx = 2a^\alpha \leq 2L_\alpha(u). \tag{77}$$

Последнее неравенство в (77) следует из (69) при $y = u \geq v_\alpha$.

Если $a = v_\alpha/u > 1$, то $H_\alpha(x) = x^2$ при $x \geq a$ и

$$H_\alpha(a) + I_1 = a^2 + a^{2\alpha} \int_a^\infty x^{-2\alpha} dx^2 = \alpha a^2/(\alpha - 1) \leq 2L_\alpha(u). \tag{78}$$

Здесь $\alpha a^2/(\alpha - 1) \leq 2a^2 = 2v_\alpha^2/u^2 \leq 2L_\alpha(u)$ в силу (69).

Таким образом, из (77) и (78) вытекает, что в обоих возможных случаях $H_\alpha(a) + I_1 \le 2L_\alpha(u)$. Но из этого факта, (75) и (76) имеем

$$\mathbf{E}H_\alpha(\Delta/(2C_1\alpha u)) \le 3L_\alpha(u) \le 3(2C_1\alpha)^\alpha L_\alpha(2C_1\alpha u). \tag{79}$$

Второе неравенство в (79) следует из (66).

Нетрудно убедиться, что (79) совпадает с (20) при $u = K/2C_1\alpha$. Полагая $K \to \infty$ в (20), получим и (21). $\square$

4.4. В этом пункте мы докажем теорему 3. При некоторых $\alpha \ge 2$ и $v > 0$ введем следующие обозначения:

$$\tilde{\xi}_j := \xi_j/vr_j, \quad \tilde{\eta}_j := \eta_j/vr_j, \quad \sigma_j^2 := \mathbf{D}\tilde{\eta}_j, \quad \beta^\alpha := \sum_j \sigma_j^\alpha. \tag{80}$$

Далее нам потребуется элементарное неравенство

$$\forall a > 0 \ \forall t \ge t_0 \ge \sqrt{a} \quad \Phi_0(t) \le (t_0/t)^a \Phi_0(t_0) \le (\sqrt{a}/t)^a \Phi_0(\sqrt{a}), \tag{81}$$

которое следует из того факта, что функция $t^a\Phi_0(t)$ убывает при $t \ge \sqrt{a}$.

Лемма 10. *Если* $0 < \beta < \infty$, *то*

$$\forall b \ge 1 \ \forall x \ge \sqrt{\alpha b} \quad \mathbf{P}(\bar{\eta} \ge x\beta v) \le \Phi_0(x) \le (\sqrt{\alpha b}/x)^{\alpha b}\Phi_0(\sqrt{\alpha b}). \tag{82}$$

Доказательство. Из определений (22) и (80) получаем, что все величины $\tilde{\eta}_j$ имеют нормальные распределения, $\bar{\eta}/v = \sup\limits_j |\tilde{\eta}_j|$, а потому

$$\mathbf{P}(\bar{\eta} \ge \beta v x) \le \sum_j \mathbf{P}(|\tilde{\eta}_j| > \beta x) = \sum_j \Phi_0(\beta x/\sigma_j). \tag{83}$$

Но $\sigma_j \le \beta$ в силу (80). Значит, мы можем использовать (81) при $a = \alpha$ и $t = \beta x/\sigma_j \ge x\sqrt{\alpha}$. В итоге из (81) и (83) получим

$$\mathbf{P}(\bar{\eta} \ge \beta v x) \le \sum_j (\sigma_j/\beta)^\alpha \Phi_0(x) = \Phi_0(x),$$

где последнее равенство следует из (80).

Тем самым мы доказали первое неравенство в (82), а вторая оценка в (82) немедленно получается из (81) при $a = \alpha b$. $\square$

Лемма 11. *Если* $L_\alpha(v) \le 1$, *то* $\beta \le \sqrt{2}L_\alpha^{1/\alpha}(v)$ *и*

$$\mathbf{P}(\bar{\eta} \ge y\sqrt{2\alpha b}) \le (v^\alpha L_\alpha(v)/y^\alpha)^b \Phi_0(\sqrt{\alpha b})/2^b \tag{84}$$

при всех $b \ge 1$ *и* $y \ge vL_\alpha^{1/\alpha}(v)$.

Доказательство. Положим

$$\forall m \ge 2 \quad M_{j,m}^m := \mathbf{E}\{|\tilde{\xi}_j|^m : |\tilde{\xi}_j| \le 1\}, \quad M_j^2 := \mathbf{E}\{\tilde{\xi}_j^2 : |\tilde{\xi}_j| > 1\}. \tag{85}$$

Нетрудно видеть, что

$$\sigma_j^2 = \mathbf{D}\tilde{\eta}_j = \mathbf{D}\tilde{\xi}_j = \mathbf{E}\tilde{\xi}_j^2 = M_{j,2}^2 + M_j^2 \le M_{j,\alpha}^{2/\alpha} + M_j^2.$$

Следовательно,

$$\sigma_j^\alpha \le \left(M_{j,\alpha}^{2/\alpha} + M_j^2\right)^{\alpha/2} \le 2^{\alpha/2-1}\left(M_{j,\alpha} + M_j^\alpha\right). \tag{86}$$

Далее, из определений (12) и (85) вытекает, что

$$\forall j \quad M_j^2 \le \sum_j \left(M_{j,\alpha} + M_j^2\right) = L_\alpha(v) \le 1.$$

Но из этих соотношений и (86) получаем, что $M_j^\alpha \le M_j^2$, а потому

$$\beta_\alpha^\alpha = \sum_j \sigma_j^\alpha \le 2^{\alpha/2-1} \sum_j \left(M_{j,\alpha} + M_j^2\right) = 2^{\alpha/2-1} L_\alpha(v). \tag{87}$$

Значит, $\beta \le \sqrt{2} L_\alpha^{1/\alpha}(v)$.

Из (87) и (82) при $x = y\sqrt{2\alpha b}/\beta v \ge \sqrt{\alpha b}$ следует неравенство (84) в случае, когда $L_\alpha > 0$. Если $L_\alpha = 0$, то (84) верно в силу леммы 5. $\square$

Доказательство теоремы 3. Если винеровский процесс W задан на одном вероятностном пространстве с ломаной S, то из определений (2) и (22) имеем

$$\xi_j = S(t_j) - W(t_j) - S(t_j) + W(t_{j-1}) + \eta_j.$$

Следовательно, ввиду (6), (7) и (22)

$$|\xi_j| \le \Delta_j + \Delta_{j-1} + |\eta_j| \le \Delta r_j + \Delta r_{j-1} + \bar\eta r_j \le (2\Delta + \bar\eta) r_j.$$

Из этих соотношений и (6) вытекает, что имеет место полезное соотношение

$$\bar\xi \le 2\Delta + \bar\eta. \tag{88}$$

Неравенство (23) немедленно следует из (88). Далее, (25) получится из (82), если мы воспользуемся оценкой для β, установленной в лемме 12. Наконец, неравенство (24) вытекает из (84), если мы воспользуемся утверждением леммы 9. $\square$

4.5. В этом пункте докажем следствие 4.

Лемма 12. *Если верно условие* (26), *то*

$$\forall c > 1 \ \forall y > 0 \quad L_{cs}(y) \le c l_s/(c-1) y^s. \tag{89}$$

Доказательство. Из (12) и (26) нетрудно извлечь, что

$$L_\alpha(y) \le (\alpha - 2) y^{-\alpha} \int_0^y x^{\alpha-3} l_s / x^{s-2}\, dx = (\alpha-2) y^{-\alpha} y^{\alpha-s}/(\alpha - s)$$

при $\alpha > s$. Отсюда немедленно следует (89). $\square$

Лемма 13. *Если верно условие* (28), *то при всех* $x \ge x_0$

$$p(x) := \sum_j p_j(x) = (s-2) l_s / s x^s, \quad \text{где} \ \ p_j(x) := \mathbf{P}(|\xi_j|/r_j \ge x). \tag{90}$$

Кроме того,

$$\forall x \ge x_0 \quad \mathbf{P}(\bar\xi > x) > p(x)/(1 + p(x)) \ge p(x)/(1 + 2^{-7}). \tag{91}$$

Доказательство. Из определений (26) и (90) с учетом условия (28) нетрудно получить, что

$$p(x) = -\int_x^\infty t^{-2} dD(t) = \int_x^\infty t^{-2} (s-2) t^{s-3} t = (s-2) l_s / s x^s.$$

Тем самым мы доказали представление (90).

Далее, из определения (6) имеем

$$\mathbf{P}(\bar\xi > x) = 1 - \prod_j (1 - p_j(x)) \ge 1 - e^{-\sum\limits_j p_j(x)} = 1 - e^{-p(x)}.$$

Подставив в это соотношение равенство из (90), немедленно получим (91), если заметим, что ввиду (30) в рассматриваемом случае $x_0^s > s^{s-1} 8^s l_s \ge 28^2 l_s = 2^7 l_s$, а потому $p(x) \le l_s / x_0^s \le 2^{-7}$. $\square$

Лемма 14. *Если верно условие* (27), *то*

$$\forall x \geq x_0 \quad \mathbf{P}(\bar{\eta} \geq 3x/4) \leq p(x)/5. \tag{92}$$

Доказательство. Мы собираемся использовать оценку (84) при

$$b = 1, \quad \alpha = 2s, \quad v^s = 2l_s, \quad y = (3x/4)/\sqrt{2\alpha b} \geq x/\sqrt{8s}. \tag{93}$$

Заметим, что в этом случае при x_0, определенном в (30),

$$1/y^\alpha \leq (\sqrt{8s})^{2s}/x^{2s} \leq (8s)^s/x^s x_0^s = (s-2)/l_s x^s = sp(x)/l_s^2, \tag{94}$$

$$L_\alpha(v) \leq 1, \quad v^\alpha L_\alpha(v) \leq 4l_s^2 < (8s)^s l_x^2/(s-2)^2 = (x_0/\sqrt{8s})^{2s} < y^\alpha. \tag{95}$$

При выводе (95) мы существенно использовали (89) при $c = 2$.

Далее, из (81) при $a = t_0 = 2$ получаем

$$\Phi_0(\sqrt{\alpha b}) \leq (2/\sqrt{\alpha b})^2 \Phi_0(2) = 2\Phi_0(2)/s < 2/20s. \tag{96}$$

Подставляя теперь (93)–(96) в (84), находим, что неравенство

$$\mathbf{P}(\bar{\eta} \geq 3x/4) \leq \mathbf{P}(\bar{\eta} \geq y\sqrt{2\alpha}) \leq \Phi_0(\sqrt{\alpha}) v^\alpha L_\alpha(v)/2y^\alpha \leq p(x)/5$$

справедливо при всех $x \geq x_0$. □

Доказательство следствия 4. Первое утверждение этого следствия вытекает из теоремы 1 при $\alpha = 3s/2$. Действительно, подставляя в (11) оценку (89), получим (27).

Для доказательства второго утверждения воспользуемся неравенством (24) при $y = 3x/4$ и $(x-y)/2 = x/8$. Учитывая (91) и (92), получаем

$$\mathbf{P}(\Delta > x/8) \geq p(x)/(1 + 2^{-7}) - p(x)/5 > p(x)/2. \quad \square$$

4.6. Из утверждений п. 2.4 только одно осталось недоказанным.

Доказательство следствия 6. Воспользуемся вторым утверждением из следствия 4 в случае, когда $S = S_n$, $\Delta = \Delta_n$, $l_\alpha = l^{\alpha,n}$ и $r_j \equiv 1$. В этом случае условия (33) и (36) достаточны для справедливости всех условий следствия 4. Дополнительное условие (37) гарантирует нам, что мы можем положить $x_2 := x_{s,n} \geq x_1 := x_0$. Кроме того, при $x = x_{s,n}$ из (29) вытекает, что

$$\mathbf{P}(\Delta > x_{s,n}/8) > (s-2)l_{s,n}/2s x_{s,n}^s = x_{s,n}/8. \tag{97}$$

Подчеркнем, что неравенство (97) имеет место *для всех винеровских процессов*, которые возможно построить на одном вероятностном пространстве с ломаной $S = S_n$. Этот факт и теорема Штрассена [11] показывают, что выбранное нами число $x_{s,n}/8$ не больше расстояния Прохорова $\pi(S_n, W)$. □

Таким образом, все утверждения работы полностью доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скороход А. В.* Об одном представлении случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1976. Т. 21, № 3. С. 645–648.
2. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1, № 2. С. 177–238.
3. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов. Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1961.
4. *Strassen V.* Almost sure behaviours of sums of independent random variables and martingales // Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab., II. 1965. N 1. P. 315–343.
5. *Боровков А. А.* О скорости сходимости в принципе инвариантности // Теория вероятностей и ее применения. 1973. Т. 18, № 2. С. 217–234.

6. *Komlos J., Major P., Tusnady G.* An approximation of partial sums of independent RV's and sample DF. II // Z. Wahrsch. Verw. Geb. 1976. Bd 34. H. 1. S. 33–58.
7. *Саханенко А. И.* О точности нормальной аппроксимации в принципе инвариантности // Труды Ин-та математики СО АН СССР. 1989. Т. 19. С. 4–49.
8. *Саханенко А. И.* Оценки скорости сходимости в принципе инвариантности // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219, № 5. С. 1076–1078.
9. *Борисов И. С.* К вопросу о скорости сходимости в принципе инвариантности Донскера — Прохорова // Теория вероятностей и ее применения. 1983. Т. 28, № 2. С. 267–272.
10. *Sakhanenko A. I.* Approximations of open queueing networks by reflection mappings // Queueing Systems. 1999. V. 32. P. 41–64.
11. *Strassen V.* The existence of probability measure with given marginals // Ann. Math. Statist. 1965. V. 36, N 2. P. 423–439.

Статья поступила 30 мая 2006 г.

Саханенко Александр Иванович
Югорский гос. университет, ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
aisakh@mail.ru