ISSN 1472-2739 (on-line) 1472-2747 (printed)

Algebraic & Geometric Topology
Volume 1 (2001) 519–548
Published: 5 Octoberber 2001

La filtration de Krull de la catégorie $\mathcal{U}$ et la cohomologie des espaces

Lionel Schwartz

Abstract Cet article démontre une variante d'une conjecture due à N. Kuhn. Cette conjecture s'exprime à l'aide de la filtration de Krull de la catégorie $\mathcal{U}$ des modules instables. Notons $\mathcal{U}_n$, $n \geq 0$, le n-ième terme de cette filtration. La catégorie $\mathcal{U}$ est la plus petite sous catégorie épaisse contenant les catégories $\mathcal{U}_n$ et stable par colimite [7]. La catégorie $\mathcal{U}_0$ est celle des modules localement finis, c'est-à-dire limite directe de modules finis.

On entend par sous catégorie épaisse une sous-catégorie stable par sous-objet et quotient, et telle que pour toute suite exacte courte, si le premier et le troisième terme sont dans la sous-catégorie, alors le terme central l'est aussi.

La conjecture s'énonce comme suit, soit X un espace, alors :

- soit $H^*X \in \mathcal{U}_0$,
- soit $H^*X \notin \mathcal{U}_n$, pour tout n.

Par exemple la cohomologie d'un espace de dimension finie, ou celle de son espace des lacets sont toujours dans $\mathcal{U}_0$. Alors que la cohomologie du classifiant d'un groupe fini, d'ordre divisible par 2 n'est, elle, dans aucune des sous-catégories $\mathcal{U}_n$.

On démontre cette conjecture, modulo l'hypothèse supplémentaire que tous les quotients de la filtration nilpotente ont un nombre fini de générateurs. Cette condition implique en particulier que la cohomologie est de dimension finie en chaque degré. Mais elle est plus forte, et assure les conditions d'application du théorème de Lannes sur la cohomologie des espaces fonctionnels. Ce théorème est nécessaire pour appliquer la réduction de Kuhn [3].

Par commodité on ne considèrera dans cet article que le cas $p = 2$.

AMS Classification 55S10; 57S35

Keywords Steenrod operations, nilpotent modules, Eilenberg-Moore spectral sequence

Un problème important en topologie est de savoir quand un module instable sur l'algèbre de Steenrod, ou une algèbre instable, est la cohomologie singulière

© *Geometry & Topology Publications*

d'un espace. L'exemple le plus célèbre est celui de la réalisabilité des algèbres de polynômes comme cohomologie d'espaces. Ce problème, posé par N. E. Steenrod, est très lié au problème de l'invariant de Hopf 1 résolu par J. F. Adams. Les techniques développées au cours des années 80 et 90 par H. Miller et J. Lannes ont débouché sur les résultats spectaculaires de B. Dwyer, H. Miller et C. Wilkerson, entre autres, dans cette direction. Le présent article étudie une autre instance de ce problème, qui a été soulevée par N. Kuhn dans [3]. L'énoncé obtenu prolonge un résultat précédent de l'auteur [8], résultat qui avait été aussi conjecturé par Kuhn.

La catégorie $\mathcal{U}$ des modules instables sur l'algèbre de Steenrod admet une filtration décroissante par des sous-catégories pleines $\mathcal{N}il_k$, $k \geq 0$. Ces catégories sont définies comme suit. La catégorie $\mathcal{N}il_k$ est la plus petite sous-catégorie épaisse, stable par limite directe, et qui contient $\Sigma^k M$ pour tout module instable M. Chaque module instable admet donc une filtration décroissante, que l'on appellera filtration nilpotente du module. Si M est un module instable on notera M_s son plus grand sous-module instable s-nilpotent. Le quotient M_s/M_{s+1} est de la forme $\Sigma^s R_s(M)$, où $R_s(M)$ est un module instable réduit, c'est-à-dire ne contenant pas de suspension non-triviale.

Cet article démontre le théorème suivant :

Théorème 0.1 *Soit X un espace, et soit M la cohomologie singulière modulo 2 de l'espace X. Supposons que $M \in \mathcal{U}_n$ pour un certain entier n, et que pour tout s le quotient M_s/M_{s+1} ait un nombre fini de générateurs sur l'algèbre de Steenrod. Alors M est localement finie, c'est-à-dire limite directe de modules finis sur l'algèbre de Steenrod, i.e. $M \in \mathcal{U}_0$.*

En fait on démontrera que chacun des quotients M_s/M_{s+1} est fini, et non nul seulement en degré s car il est réduit. On en déduit que M est localement fini car :

Lemme 0.2 *Un module instable M tel que tous les quotients $R_s(M)$ sont localement finis est localement fini.*

Ce lemme résulte de l'exactitude de T, du fait que T commute aux suspensions, et de ce que $T(M) = M$ si M est localement fini, voir aussi [3].

Par comparaison, le cas de [8] est celui où la filtration nilpotente est finie, c'est-à-dire que le quotient M_s/M_{s+1} est nul pour tout s assez grand.

Une analyse précise de la démonstration montre que l'on peut obtenir des énoncés plus généraux. A titre d'exemple, le suivant (que par précaution nous appelons conjecture) semble á portée de main :

Conjecture 0.1 *Soit X un espace $2d$-connexe, $d \geq 1$. Soit M sa cohomologie réduite modulo 2, supposons que tous les cup-produits y soient triviaux. Supposons que $M \in \mathcal{N}il_d$, que $M/M_{2d} \in \mathcal{U}_1$, et que pour tout entier $s \leq d$ le module instable $\bar{T}^s(M)$ soit de dimension finie en chaque degré, alors $M \in \mathcal{N}il_{d+1}$.*

Il convient de noter que, relativement à la fitration de Krull, seul intervient le quotient M/M_{2d}.

Soit X un espace dont la cohomologie M satisfait à la condition de finitude imposée ci-dessus sur les quotients de la filtration nilpotente. Cette condition permet d'appliquer le théorème de Lannes sur la cohomologie des espaces fonctionnels. En effet elle implique que $T(M)$ est de dimension finie en chaque degré. On peut donc calculer la cohomologie de la cofibre $C(X)$ de $X \to \mathrm{map}(RP^\infty, X)$ et effectuer la réduction de Kuhn [3]. C'est-à-dire que si $H^*X \in \mathcal{U}_n$, mais $H^*X \notin \mathcal{U}_{n-1}$, la cohomologie $H^*C(X) \cong \bar{T}(H^*X) \in \mathcal{U}_{n-1}$, mais $H^*C(X) \notin \mathcal{U}_{n-2}$. On peut donc raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe un espace X dont la cohomologie est dans $\mathcal{U}_n$, mais non dans $\mathcal{U}_{n-1}$, et par itération, se ramener au cas d'un espace dont la cohomologie appartient à $\mathcal{U}_1$, mais pas à $\mathcal{U}_0$ et montrer que ceci est impossible.

La conjecture, sans l'hypothèse de finitude faite ci-dessus, ne peut être analysée dans la catégorie $\mathcal{U}$ et doit être remplacée par une conjecture portant sur la structure de l'homologie comme module instable à droite. Dans ce contexte on doit modifier la définition de la filtration de Krull dans le sens suggéré par [4], *i.e.* on doit considérer une fitration décroissante sur la catégorie des modules instables à droite. Ceci pose aussi la question d'une extension du théorème de Lannes.

Une autre approche pour lever cette restriction de finitude est d'appliquer les techniques de pro-espaces de F. Morel, ceci a été mis en oeuvre avec succès par F-X. Dehon et G. Gaudens.

Il reste la forme la plus générale de la conjecture de Kuhn (évoquée plus haut). Nous reformulons ici légèrement cette conjecture, et pour ce faire le language des foncteurs [2], [7] est plus commode. En fait un certain nombre d'exemples suggèrent que la description -et la technologie associée- qui suit pourraient constituer une approche intèressante à cette conjecture.

Rappelons que l'on peut associer à un module instable réduit un foncteur analytique (limite directe de foncteurs polynômiaux) de la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps $\mathbf{F}_2$ dans la catégorie des espaces vectoriels sur le corps $\mathbf{F}_2$, par exemple au module $F(1)$ est associé le foncteur identité de degré 1. Ce foncteur détermine le module initial à localisation près. On a en fait une équivalence de catégorie. Le module $R_s(H^*X)$ peut donc être interprété comme un tel foncteur :

Conjecture 0.2 *Soit X un espace. La suite des foncteurs $R_s(H^*X)$ est telle que :*

- *soit il y en a au moins un foncteur dont la série de Loewy (ou série des socles) est infinie et dont les facteurs de composition ne sont pas bornées en degré,*
- *soit tous les foncteurs R_s sont constants.*

En termes de modules instables cette conjecture 0.2 implique que l'un au moins des modules instables correspondants a un nombre infini de générateurs.

Le fait que la série des socles d'un foncteur associé à un module est infinie est plus fort que le fait que le module ne soit pas de type fini (*i.e.* ai un nombre fini de générateurs). La propriété correspondante du module est plus ennuyeuse à exprimer et moins naturelle. On renvoie à [9] pour des détails.

A ce propos on notera que G. Gaudens a montré que la série des socles du foncteur associé à une algèbre instable réduite non concentrée en degré zéro est infinie.

On peut préciser 0.2 : Soit d le plus petit entier tel que R_d soit un foncteur non-constant et de degré fini, supposons $d > 1$. Alors on a :

Conjecture 0.3 *Un, au moins, des foncteurs R_s, $d < s < 2d+1$ est de degré non borné.*

La conjecture 0.1 ci-dessus est un argument en faveur de 0.2. Un autre argument est l'exemple donné par Kuhn dans [3] de la filtration bar sur $K(\mathbf{Z}, 3)$. Le second cran de cette filtration fournit un espace X tel que $R_1(H^*X)$ soit isomorphe à $F(1)$, et donc à l'identité comme foncteur, mais $R_2(H^*X)$ a lui un nombre infini de générateurs et a, en tant que foncteur, une série des socles infinie.

Le plan de la démonstration du théorème 0.1 est le même que dans [8]. Comme on l'a déjà dit, le cas de [8] correspond à l'énoncé 0.1 avec en plus l'hypothèse que les quotients M_s/M_{s+1} sont nuls pour tout entier s assez grand. Rappelons très brièvement l'idée de [8]. On raisonne par l'absurde, et on suppose donc qu'il existe un espace X dont la cohomologie est dans $\mathcal{U}_1$ mais n'est pas localement finie, *i.e.* n'appartient pas à $\mathcal{U}_0$. On montre alors que, dans la cohomologie d'un certain espace de lacets itérés de X, la relation reliant le cup-carré aux opérations de Steenrod ne peut être satisfaite.

La différence fondamentale avec [8] est que l'hypothèse faite dans cet article ne permet pas d'obtenir de zones d'annulation dans la cohomologie des espaces de lacets associés. On est amené à introduire des zones d'annulation modulo des termes de degré supérieur de nilpotence.

Ceci fait qu'il est difficile d'obtenir un résultat concernant des complexes finis, dont on déduirait celui cherché, comme cela est fait dans [8]. Ceci est néanmoins possible, mais il y a peu d'espoirs d'obtenir des énoncés généraux satisfaisants.

H. J. Baues a suggéré la question suivante. Soit M un module instable, supposons que $M \cong H^*X$. Quelles sont plus généralement les restrictions sur la structure de M imposées par les propriétés de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore calculant la cohomologie de ΩX, en particulier imposée par le fait que l'aboutissement de la suite spectrale doit avoir une structure d'algèbre instable?

Les sections 1 et 2 consistent d'abord en l'énoncé des résultats concernant le comportement des foncteurs R_s sur la cohomologie des espaces quand on passe de X à ΩX, puis en des rappels sur la filtration nilpotente et la filtration de Krull. Dans la section 3 on démontre ces résultats à l'aide de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore. On démontre le théorème dans les sections 4 et 5. La section 6 donne un complément sur la filtration nilpotente.

L'idée essentielle de cet article a été trouvée lors d'un séjour au CRM à l'Universitat Autònoma de Barcelona en Juin 1998. L'auteur tient à remercier le groupe de topologie algébrique, et en particulier J. Aguade et C. Broto, pour leur accueil chaleureux, Dagmar Meyer pour ses remarques, et le groupe de topologie algébrique de Tunis pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ce problème.

On fera partout l'hypothèse que les modules instables considérés sont de dimension finie en chaque degré.

L'auteur tient à remercier le rapporteur pour lui avoir signalé quelques ambiguités, entre autres dans la définition des classes α, et dans la formulation d'un résultat de [3]. Il le remercie aussi pour lui avoir signalé diverses références, en l'occurence celle de 0.2 dans [3] et celles de propositions 2.4 et 2.5 dans la même référence.

1 La filtration nilpotente de la catégorie $\mathcal{U}$, les foncteurs R_s et les espaces de lacets

On rappelle d'abord les deux définitions de la filtration nilpotente sur la catégorie $\mathcal{U}$ des modules instables. L'essentiel du matériel, concernant cette filtration, qui suit ne prétend pas à l'originalité, il est soit explicitement dans [6], [7], soit en est conséquence immédiate (voir [3]). Cependant les quelques ajouts (Propositions 1.8 à 1.12), faciles eux aussi, sont nécessaires à un traitement clair de la suite. Nous avons dans ce texte conservé les conventions de [7], on prendra garde au décalage dans la définition des catégories $\mathcal{N}il_k$ par rapport à [6]. Dans le contexte de [6] la catégorie $\mathcal{U}$ est $\mathcal{N}il_{-1}$. La notation choisie ici, celle de [7], pour $\mathcal{U}$ est $\mathcal{N}il_0$.

Définition 1.1 Soit un entier $s \geq 0$, la catégorie $\mathcal{N}il_s$ est la plus petite sous-catégorie épaisse stable par limite directe, et qui contienne $\Sigma^s M$ pour tout module instable M. Un module qui appartient à $\mathcal{N}il_s$ est dit de degré de nilpotence (au moins) s, ou (au moins) s-nilpotent.

On remarquera qu'un module s-nilpotent est $(s-1)$-connexe.

La filtration nilpotente est décroissante et convergente. La filtration de la catégorie induit sur chaque module instable une filtration décroissante, que l'on appellera filtration nilpotente du module.

Si M est un module instable on notera M_s son plus grand sous-module instable s-nilpotent, cette notation sera conservée dans tout l'article.

Définition 1.2 On dira qu'un élément d'un module instable est de degré de nilpotence au moins s, ou s-nilpotent, si le sous-module qu'il engendre est de degré de nilpotence au moins s. On dira qu'un élément est de degré de nilpotence exactement s s'il est de degré au moins s et s'il n'est pas de degré au moins $s+1$. Un tel élément est nécessairement non-nul.

Définition 1.3 On note Sq_k l'opération qui à un élément x de degré $|x|$ d'un module instable M associe la classe $\mathrm{Sq}^{|x|-k}x$ de degré $2|x|-k$.

Par convention $\mathrm{Sq}_k x = 0$ dès que $k > |x|$. A cause de l'instabilité on a $\mathrm{Sq}_k x = 0$ dès que $k < 0$.

Soit M un module instable et soit $\Sigma^s(M)$. Soit $x \in M$, on note $\sigma^s x$ la s-ième suspension de x. On a :

$$\sigma^s(\mathrm{Sq}_k)(x)) = (\mathrm{Sq}_{k+s})(\sigma^s x) \ .$$

Proposition 1.4 [6] *Soit M un module instable. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *M est (au moins) s-nilpotent,*
- *pour tout $x \in M$ et tout entier k tel que $0 \leq k < s$, il existe un entier c, dépendant de x et k, tel que $(\mathrm{Sq}_k)^c x = 0$.*

Pour $s = 0$ la condition est vide, on trouve donc bien $\mathcal{U}$.

C'est par la seconde condition de cette proposition que la filtration nilpotente a été introduite dans [6]. En fait, dans les applications qui en ont été données jusqu'ici, c'est, presque toujours, la première condition (*i.e.* la définition 1.1) qui a été utilisée. Dans cet article la condition originelle de [6] joue un rôle important. Pour cette raison, et parce que les indications de [6] sont un peu sèches, on redonnera en fin de l'article la démonstration du point clé de la proposition précédente.

Soit M un module instable et M_s son plus grand sous-module instable s-nilpotent. Chaque module instable admet une filtration décroissante et convergente :

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots M_s \supset \dots$$

Reprenant la notation de [3] on notera le quotient M_s/M_{s+1} sous la forme $\Sigma^s R_s(M)$, $R_s(M)$ est un module instable **réduit**, c'est-à-dire ne contenant pas de suspension non-triviale ([7] section 2.6). La définition de R_s est naturelle et R_s est un foncteur en M. On trouvera dans [3] une caractérisation intrinsèque de la filtration nilpotente.

Par ailleurs, comme les foncteurs T et $\bar{T}$ de Lannes commutent aux suspensions et sont exacts, ils respectent cette filtration. Par conséquent on a pour tout module instable M :

$$T(M_s) = T(M)_s \quad \text{et} \quad \bar{T}(M_s) = \bar{T}(M)_s \ .$$

Deux modules instables **réduits** M et N seront dits fortement F-isomorphes si ils ont même $\mathcal{N}il$-localisation ([7] section 6.3). On notera $M \cong_F N$. Ceci revient à dire qu'il existe un module instable L tel que :

- L admet un monomorphisme i dans M et un monomorphisme j dans N,
- pour tout élément non-nul x dans M il existe un entier c tel que $(\mathrm{Sq}_0)^c x$ est dans l'image de i et non-nul, pour tout élément non-nul x dans N il existe un entier c tel que $(\mathrm{Sq}_0)^c x$ soit dans l'image de j et non-nul.

Le module L ci-dessus est nécessairement réduit.

Un monomorphisme $i\ :\ N \to M$ est un F-isomorphisme fort si et seulement si pour tout $x \in M$, $x \neq 0$, il existe un entier c -dépendant de x- tel que $\mathrm{Sq}_0^c(x) \in N$, et $\mathrm{Sq}_0^c(x) \neq 0$.

Les trois théorèmes suivants décrivent le comportement de certains des foncteurs R_s quand on passe d'un espace X à son espace de lacets ΩX. Ils seront démontrés dans la section 3, ce sont eux qui permettent de démontrer la conjecture. Après leur énoncé, les sections 1 et 2 sont consacrés aux préliminaires algébriques à leur démonstration. Ainsi qu'il a été dit dans l'introduction ces préliminaires se trouvent pour une part substantielle dans les références, néanmoins un certain nombre de précisions apportées ici seraient totalement hors contexte, pour le non-expert, si des rappels n'étaient pas effectués.

Théorème 1.5 *Soit X un espace 1-connexe tel que H^*X est de dimension finie en chaque degré et que $H^*X \in \mathcal{N}il_d$, $d > 1$. Alors $H^*\Omega X \in \mathcal{N}il_{d-1}$ et pour $d-1 \leq s < 2d-2$ on a :*

$$R_s(H^*X) \cong_F R_{s-1}(H^*\Omega X)\ .$$

On peut se demander si il n'y a pas, en fait, isomorphisme.

Théorème 1.6 *Soit X un espace 1-connexe tel que H^*X soit de dimension finie en chaque degré et que $H^*X \in \mathcal{N}il_d$, $d > 1$. Alors $H^*\Omega X \in \mathcal{N}il_{d-1}$ et le module instable $R_{2d-2}(H^*\Omega X)$ est fortement F-isomorphe à un module instable E donné par une extension de la forme :*

$$\{0\} \to R_{2d-1}(H^*X) \to E \to M \to \{0\}\ ,$$

où M est un sous-module de $(R_d(H^*X))^{\otimes 2}$.

Soit F_{-2} le deuxième terme de la filtration d'Eilenberg-Moore de $H^*\Omega X$ (voir section 2). Si $d = 1$ les énoncés précédents sont remplacés par :

Théorème 1.7 *Soit X un espace 1-connexe tel que H^*X est de dimension finie en chaque degré et que $H^*X \in \mathcal{N}il_1$. Alors le module instable $R_0(F_{-2}(H^*\Omega X))$ est fortement F-isomorphe à un module E donné par une extension de la forme :*

$$\{0\} \to R_1(H^*X) \to E \to M \to \{0\}\ ,$$

où M est un sous-module de $(R_1(H^*X))^{\otimes 2}$.

Les propositions 1.8 et 1.9 décrivent le comportement des foncteurs R_s par rapport aux suites exactes.

Proposition 1.8 *Soit M un module instable, et soit d un entier donné, $k \geq 1$. On suppose qu'il existe une suite exacte :*

$$0 \to K \to M \to N \to 0 \ ,$$

avec $K \in \mathcal{N}il_k$. Alors si $s < k$ on a :

$$R_s(M) \cong R_s(N) \ .$$

Il suffit de démontrer que l'application $M/M_k \to N/N_k$ est bijective. Elle est surjective par construction, il suffit de donc montrer qu'elle est injective. La difficulté vient de ce que le foncteur $M \mapsto M_k$ n'est pas exact à droite. Mais un élément $x \in M/M_k$ d'image nulle dans N/N_k se relève en un élément $y \in M$ dont l'image dans N appartient au sous-module N_k. Il faut montrer que $y \in M_k$. Pour ce faire il suffit de montrer que $(\mathrm{Sq}_i)^c y$ est nul dès que c est assez grand, pour $0 \leq i < k$. Soit z l'image de y dans N, $z \in N_k$.

On a donc :

$$(\mathrm{Sq}_i)^c z = 0, \qquad 0 \leq i < k, \qquad \text{si} \quad c \geq c_0 \ .$$

Chacun des éléments $(\mathrm{Sq}_i)^{c_0} y$, $0 \leq i < k$ appartient donc à C qui est k-nilpotent. Le résultat suit.

Proposition 1.9 *Soit M un module instable, et soit d un entier donné, $d \geq 1$. On suppose qu'il existe une suite exacte :*

$$0 \to N \to M \to C \to 0 \ ,$$

avec

- $N \in \mathcal{N}il_d$,
- $C \in \mathcal{N}il_{2d}$.

Alors :

- *le module M est dans $\mathcal{N}il_d$,*
- *si $d \leq s < 2d$ on a :*
$$R_s(N) \cong_F R_s(M) \ ,$$
- *$R_{2d}(M) \cong_F E$ où E est donné par une extension de la forme :*
$$\{0\} \to R_{2d}(N) \to E \to L \to \{0\} \ ,$$
L désignant un sous-module de $R_{2d}(C)$.

Démonstration :

Une application de modules instables $f\ :\ N \to M$ respecte la filtration nilpotente et induit donc pour tout s une application $f_s\ :\ N_s \to M_s$ et une application $\bar{f}_s\ :\ R_s(N) \to R_s(N)$. Le foncteur $M \mapsto M_s$ est exact à gauche. Il est facile de voir que si f est un monomorphisme il en est de même pour chaque $\bar{f}_s$.

Le premier énoncé de la proposition est clair.

Passons à la seconde partie, soit $s < 2d$.

Notons i l'injection de N dans M et p la projection de M sur C. Considérons le diagramme où les notations sont évidentes :

$$\begin{array}{ccccccc}
\{0\} \to & N_{s+1} & \stackrel{i}{\to} & M_{s+1} & \stackrel{p}{\to} & C \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\{0\} \to & N_s & \stackrel{i}{\to} & M_s & \stackrel{p}{\to} & C \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\{0\} \to & \Sigma^s R_s(N) & \stackrel{\bar{i}}{\to} & \Sigma^s R_s(M) & \stackrel{\bar{p}}{\to} & \{0\}
\end{array}$$

On notera que $C_{s+1} = C_s = C$.

Par hypothèse le conoyau de l'injection $i_s\ :\ N_s \to\ M_s$ est dans $\mathcal{N}il_{2d}$ et $C_{s+1} = C_s = C$. Soit $\bar{x}$ une classe non-nulle dans M_s/M_{s+1} et soit $x \in M_s$, $x \neq 0$ un relèvement dans M_s. Soit y l'image de x dans C. Comme $s < 2d$ il existe un entier c -dépendant de x- tel que $(\mathrm{Sq}_s)^c y = 0$. Donc la classe $(\mathrm{Sq}_s)^c x$ est d'image nulle dans C et si $k \geq c$ $(\mathrm{Sq}_s)^k x \in i(N)$.

Soit $\sigma^{-s}\bar{x} \in R_s(M)$ la s-ième désuspension de l'image de

$$\bar{x} \in M_s/M_{s+1} \cong \Sigma^s R_s(M)\ .$$

On a :

$$\sigma^{-s}(\mathrm{Sq}_s)^k(\bar{x})) = (\mathrm{Sq}_0)^k(\sigma^{-s}\bar{x}) \in (\bar{(}R_s(N))\ ,$$

si $k \geq c$. On a donc démontré que $(\mathrm{Sq}_0)^k(\sigma^{-s}\bar{x})$ est non-nulle et dans l'image de $\bar{i}_s$ pour tout $k \geq c$. Ceci donne la seconde partie de la proposition.

Passons à la troisième partie, et faisons donc $s = 2d$. La démonstration va occuper la fin de cette section. Si on a une suite exacte :

$$\{0\} \to N \to M \to C \to \{0\}$$

le complexe :

$$\{0\} \to R_{2d}(N) \to R_{2d}(M) \to R_{2d}(C) \to \{0\}$$

n'est pas exact au centre et à droite. En fait le complexe de foncteurs [2] :

$$\{0\} \to f(R_{2d}(N)) \to f(R_{2d}(M)) \to f(R_{2d}(C))$$

est exact. Ceci se traduit, en termes de modules instables, par la proposition suivante :

Proposition 1.10 *Il existe un diagramme commutatif de modules instables où la ligne supérieure est exacte :*

$$\begin{array}{ccccccc}
\{0\} \to & R_{2d}(N) \to & K \to & L \to & \{0\} \\
 & \downarrow \mathrm{Id} & \downarrow i & \downarrow j & \\
\{0\} \to & R_{2d}(N) \to & R_{2d}(M) \to & R_{2d}(C) &
\end{array}$$

et où i est un F-isomorphisme fort, et j est un monomorphisme.

Démontrons cette propriété. Comme le foncteur $M \mapsto M_{2d}$ est exact à gauche on a évidemment un complexe exact à gauche et au centre :

$$0 \to N_{2d} \to M_{2d} \to C_{2d} \ ,$$

et donc un complexe :

$$0 \to R_{2d}(N) \to R_{2d}(M) \to R_{2d}(C) \ ,$$

où, *a priori*, on sait seulement que la première application est injective. Avec les mêmes notations que plus haut, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
\{0\} \to & N_{2d+1} & \xrightarrow{i} & M_{2d+1} & \xrightarrow{p} & C_{2d+1} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\{0\} \to & N_{2d} & \xrightarrow{i} & M_{2d} & \xrightarrow{p} & C_{2d} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\{0\} \to & \Sigma^{2d} R_{2d}(N) & \xrightarrow{\bar{i}} & \Sigma^{2d} R_{2d}(M) & \xrightarrow{\bar{p}} & \Sigma^{2d} R_{2d}(C)
\end{array}$$

La ligne inférieure est exacte au milieu au sens donné par le lemme suivant :

Lemme 1.11 *Si un élément $x \in \Sigma^{2d}R_{2d}(M)$ est dans le noyau de $\bar{p}$, alors pour tout k assez grand $(\mathrm{Sq}_{2d})^k x$ est dans l'image de $\bar{i}$.*

La démonstration est identique à celle donnée plus haut et laissée au lecteur.

Pour démontrer la proposition il reste à construire le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
\{0\} \to & R_{2d}(N) \to & K \to & L \to & \{0\} \\
 & \downarrow Id & \downarrow i & \downarrow j & \\
\{0\} \to & R_{2d}(N) \to & R_{2d}(M) \to & R_{2d}(C) &
\end{array}$$

avec les propriétés requises.

Le lemme suivant permet de construire K :

Lemme 1.12 *Soit H un module instable réduit, et soit J un sous-module. Alors il existe un sous-module H' de H tel que :*

- $H' \cong_F H$,
- *si* $x \in H'$ *et* $\mathrm{Sq}_0 x \in J$ *alors* $x \in J$.

La démonstration procède en deux étapes. D'abord si H a un nombre fini de générateurs sur l'algèbre de Steenrod on montre que $(\mathrm{Sq}_0)^k(H) + J$ convient dès que k est assez grand. En effet, soit J_h le sous-module de H constitué par les éléments $x \in H$ tels que $(\mathrm{Sq}_0)^h x \in J$, on a $J_h \subset J_{h+1} \subset \dots$. Comme J a un nombre fini de générateurs il existe un entier k tel que $J_k = J_{k+1} = \dots$. On vérifie que $(\mathrm{Sq}_0)^k(H) \cap J_k \subset J$ et que $(\mathrm{Sq}_0)^k(H) + J$ convient (on utilise l'injectivité de Sq_0). Puis un argument de limite directe convenable, utilisant le fait que les modules considérés sont de dimension finie en chaque degré permet de conclure. En fait on ne considérera que des modules ayant un nombre fini de générateurs et on n'aura pas besoin de cette généralisation.

Pour terminer la démonstration de la proposition on applique le lemme avec $H = R_{2d}(M)$ et $J = R_{2d}(N)$ Le module L est alors le quotient de K par l'image de $R_{2d}(N)$.

En fait le lemme 1.12 peut être précisé en utilisant les notations de [2], et notamment les foncteurs m et f. On montre que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & \to & R_{2d}(N) & \to & R_{2d}(M) & \to & L & \to & \{0\} \\
 & & \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow j & & \\
\{0\} & \to & m\circ f(R_{2d}(N)) & \to & m\circ f(R_{2d}(M)) & \to & m\circ f(R_{2d}(C)) & &
\end{array}$$

où chaque ligne est exacte et j a un noyau dans $\mathcal{N}il_1$.

2 La filtration de Krull de la catégorie U

Rappelons la définition de la filtration de Gabriel-Krull sur la catégorie $\mathcal{U}$ (voir [1]).

Un module instable est localement fini s'il est limite directe de modules instables finis. La sous-catégorie pleine, $\mathcal{B}$ des modules localement finis est le premier terme de la filtration de Gabriel-Krull sur la catégorie $\mathcal{U}$. Rappelons la définition de cette filtration, $\mathcal{U}_0$ est la plus petite classe de Serre de $\mathcal{U}$, stable par limite directe et contenant tous les objets simples de $\mathcal{U}$. Comme ceux-ci sont de la forme $\Sigma^n\mathbf{F}_2$, $\mathcal{U}_0$ s'identifie à $\mathcal{B}$. Cette construction s'étend à toute catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Supposons que $\mathcal{U}_n$ ait été définie, définissons alors $\mathcal{U}_{n+1}$ comme étant la sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}$ définie comme suit. Dans la catégorie quotient $\mathcal{U}/\mathcal{U}_n$ on considère la plus petite sous-catégorie épaisse qui est stable par limite directe et qui contient tous les objets simples de $\mathcal{U}/\mathcal{U}_n$. Alors, un objet M de $\mathcal{U}$ appartient à $\mathcal{U}_n$, si et seulement si en tant qu'objet de la catégorie abélienne $\mathcal{U}/\mathcal{U}_n$, il appartient à la sous-catégorie $(\mathcal{U}/\mathcal{U}_n)_0$.

Théorème 2.1 ([7] section 6.2) *La plus petite sous-catégorie de $\mathcal{U}$ contenant toutes les catégories $\mathcal{U}_n$, et stable par limite directe, est $\mathcal{U}$ elle même.*

Voici une caractérisation de la filtration de Krull à l'aide de $\bar{T}$.

Théorème 2.2 ([7] 6.2.4) *Soit M un module instable. Alors M appartient à $\mathcal{U}_n$ si et seulement si $\bar{T}^{n+1}M$ est trivial.*

On décrit maintenant en détails les objets de $\mathcal{U}_1$, ce résultat est dans [8], avec l'hypothèse supplémentaire que le module a un nombre fini de générateurs. La démonstration, ne change en rien, et est donnée rapidement.

Proposition 2.3 *Soit un module instable M qui appartient à $\mathcal{U}_1$, mais qui n'appartient pas à $\mathcal{U}_0$. Soit $K = \bar{T}(M)$, alors K est localement fini et non-trivial, et il existe une suite exacte :*

$$0 \to L \to M \to K \otimes F(1) \to L' \to 0 \ ,$$

où L et L' sont localement finis.

Par définition de $\bar{T}$ on a une application

$$M \to K \otimes \bar{H}^* RP^\infty.$$

Le noyau de cette application est localement fini, notons le L. En effet, la définition de $\bar{T}$ donne, par adjonction, $\bar{T}L = \{0\}$. On a vu plus haut que cette condition caractérise les modules localement finis. On démontre comme dans [8], que cette application est à valeurs dans $K \otimes F(1)$.

Pour montrer que le conoyau L' est localement fini, affirmation la plus facile, il suffit d'appliquer le foncteur $\bar{T}$ à la suite exacte :

$$0 \to L \to M \to K \otimes F(1) \to L' \to 0 \ ,$$

ce qui donne $\bar{T}(L') = 0$.

On va maintenant décrire la filtration nilpotente sur un tel module. Le résultat suivant est une conséquence élémentaire de la définition de cette filtration.

Proposition 2.4 *Soit M un module instable localement fini. Le sous-module M_s de M est le sous-module des éléments de degré supérieur ou égal à s.*

La démonstration est laissée en exercice au lecteur (voir aussi [3]). Dans ce cas la filtration nilpotente s'identifie donc à la filtration par le degré.

Si $M \in \mathcal{U}_1$ on applique 1.14. Si le module K est localement fini c'est encore un exercice facile de vérifier que la filtration nilpotente sur $K \otimes F(1)$ est induite, par produit tensoriel par $F(1)$, par la filtration par le degré sur K. Ceci est démontré en détails et en plus grande généralité dans [3], et est d'ailleurs une conséquence immédiate de [6]. On en déduit donc que :

Corollaire 2.5 *Si K est localement fini on a :*

$$R_s(K \otimes F(1)) \cong K_s \otimes F(1) \ ,$$

K_s étant compris comme un module instable concentré en degré zéro.

Ceci décrit, par restriction, la filtration sur le quotient M/L.

Le résultat suivant est corollaire des deux propositions précédentes.

Corollaire 2.6 *Soit M un module instable qui appartient à $\mathcal{U}_1$. Supposons que M doit k-connexe. Soit alors s un entier tel que $s \leq k$, le module $R_s(M)$ est trivial dans les degrés qui ne sont pas une puissance de 2.*

La condition de connexité est là pour garantir que L est k-nilpotent, et que l'on peut appliquer 1.8.

On aura aussi considérer des modules réduits qui sont produit tensoriel de deux modules dans $\mathcal{U}_1$ et des extensions de tels modules par des modules dans $\mathcal{U}_1$. La proposition suivante est vraie, par construction, pour ces modules. Ces modules sont dans la catégorie $\mathcal{U}_2$ [FS], [7], et il est intèressant de donner la propostion dans son contexte général, ne serait ce que parce que pour montrer que le résultat n'est pas fortuit.

Proposition 2.7 [FS] *Soit M un module instable réduit qui appartient à $\mathcal{U}_2$. Supposons que M soit 0-connexe. Alors M est trivial dans les degrés qui ne sont pas de la forme 2^h, $h \geq 0$, ou $2^i + 2^j$, $i > j \geq 0$.*

La condition de connexité est là pour ne pas ne pas avoir à inclure 0 dans la liste des degrés.

Les énoncés qui suivent spécialisent la proposition 1.9 au cas considéré dans l'article.

Proposition 2.8 *Soit M un module instable, et soit d un entier donné, $d \geq 1$. On suppose qu'il existe une suite exacte :*

$$0 \to N \to M \to D \to 0 \ ,$$

avec

- $N \in \mathcal{N}il_d$,
- $D \in \mathcal{N}il_{2d}$,
- *la connectivité de M est supérieure ou égale à $2d$,*
- *le quotient N/N_{2d}, est dans $\mathcal{U}_1$,*
- *le module $R_{2d}(N)$ est dans $\mathcal{U}_1$, le module $R_{2d}(D)$ est dans $\mathcal{U}_2$.*

Alors :

- *le module M est dans $\mathcal{N}il_d$ et donc $R_s(M) = \{0\}$ si $s < d$. ,*
- *le module $R_k(M)$, avec $d \leq k < 2d$, est dans $\mathcal{U}_1$, connexe, et donc trivial dans les degrés qui ne sont pas une puissance de 2,*
- *le quotient $R_{2d}(M)$ est dans $\mathcal{U}_2$, connexe, et donc trivial dans les degrés qui ne sont pas de la forme 2^h, $h \geq 0$ ou de la forme $2^h + 2^j$, $h > j \geq 0$.*

Démonstration : La première partie est claire. La seconde résulte de 1.9 et 2.5, utilisant que le quotient N/N_{2d}, est dans $\mathcal{U}_1$. La troisième résulte de 1.9 et 2.6, utilisant que le module $R_{2d}(N)$ est dans $\mathcal{U}_1$ et connexe, et que le module $R_{2d}(D)$ est dans $\mathcal{U}_2$ et connexe.

Dans l'énoncé les conditions de connectivité sont de convenance. On pourrait les supprimer et remplacer les catégories $\mathcal{N}il_k$ par les catégories $\bar{\mathcal{N}}il_k$ [7], ou encore rajouter dans les conclusions, aux degrés 2^h, le degré 0, et aux degrés $2^j + 2^h$, le degré 0. Ceci entraînerait quelques modifications mineures dans la suite, dans les énoncés et les démonstrations. Il faudrait prendre garde à la convergence de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore. Ceci pourrait être fait comme dans [7].

Un énoncé analogue a lieu pour $d = 0$:

Proposition 2.9 *Soit M un module instable. On suppose qu'il existe une suite exacte :*

$$0 \to N \to M \to C \to 0 ,$$

avec

- *M est connexe,*
- *le quotient $N/N_1 \cong R_0(N)$, est dans $\mathcal{U}_1$, le quotient $C/C_1 \cong R_0(C)$, est dans $\mathcal{U}_2$.*

Alors :

- *le quotient $M/M_1 \cong R_0(M)$ est dans $\mathcal{U}_2$, connexe, et donc trivial dans les degrés qui ne sont pas de la forme 2^h, ≥ 0 ou de la forme $2^h + 2^j$ $j > h \geq 0$.*

Démonstration : Comme plus haut.

3 Applications à la suite spectrale d'Eilenberg-Moore

On va appliquer les résultats précédents dans le contexte de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore. Rappelons en les propriétés principales [Re], [10]. Soit X un espace 1-connexe.

La cohomologie modulo 2 de ΩX a une filtration naturelle décroissante et convergente par des modules instables :

$$\ldots \supset F_{-s} \supset F_{-s+1} \ldots \supset F_{-1} \supset F_0 \supset \{0\} \ .$$

Le quotient $\Sigma^d(F_{-d}/F_{-d+1})$ est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel gradué à la colonne $E_\infty^{-d,*}$ de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore.

Le terme $E_2^{-d,*}$ de la suite spectrale est isomorphe à $\mathrm{Tor}_{H^*X}^{-d}(\mathbf{F}_2,\mathbf{F}_2)$. Ce module est un sous-quotient de $\bar{H}^*X^{\otimes d}$, et la formule de Cartan y détermine une structure de module instable.

Soit $r \geq 2$, les différentielles s'interprètent comme des applications de degré zéro :

$$d_r \ : \ E_r^{s,*} \to \Sigma^{r-1}(E_r^{s+r,*}) \ .$$

Ce sont des applications de modules instables. On a donc sur le terme $E_\infty^{-d,*}$ une seconde structure de module instable. Elle est identique à la précédente.

On va étudier le comportement des foncteurs R_s quand on passe de X à ΩX. On a :

Proposition 3.1 *Soit X un espace tel que H^*X soit de dimension finie en chaque degré et que $\bar{H}^*X \in \mathcal{N}il_d$, $d > 1$. Alors $\bar{H}^*\Omega X \in \mathcal{N}il_{d-1}$ et pour $d \leq s < 2d-1$ on a :*

$$R_s(\bar{H}^*X) \cong_F R_{s-1}(\bar{H}^*\Omega X) \ .$$

On a évidemment $R_s(\bar{H}^*X) = \{0\}$ si $s < d$, et $R_s(\bar{H}^*\Omega X) = \{0\}$ si $s < d-1$.

Démonstration : On va comparer H^*X, F_{-1} et $H^*\Omega X$. Pour ce faire on commence par considérer l'homomorphisme de coin, dont on rappelle qu'il est induit par l'application canonique d'évaluation

$$\Sigma\Omega X \to X \ .$$

Il se décompose comme suit :

$$\bar{H}^*X \to QH^*X \to \Sigma F_{-1} \to \Sigma H^*\Omega X \ ,$$

où $QH^*X \cong \bar{H}^*X/(\bar{H}^*X)^2$.

Commençons par examiner le conoyau de $F_{-1} \to H^*\Omega X$. Le module instable $\Sigma^s(F_{-s}/F_{-s+1})$ est un sous-quotient de $\mathrm{Tor}_{H^*X}^{-s}(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2)$, qui est lui même un sous-quotient de $\bar{H}^*X^{\otimes s}$. Or, il résulte de [6] que le produit tensoriel d'un module L dans $\mathcal{N}il_u$ par un module L' dans $\mathcal{N}il_v$ est dans $\mathcal{N}il_{u+v}$. On en déduit que

$$\mathrm{Tor}_{H^*X}^{-s}(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2)$$

est dans $\mathcal{N}il_{sd}$. Le sous-quotient itéré $E_\infty^{-s,*}$ est dans $\mathcal{N}il_{sd}$. Donc le quotient F_{-s}/F_{-s+1} est dans $\mathcal{N}il_{sd-s}$. Le quotient $H^*\Omega X/F_{-1}$ admet une filtration décroissante dont les termes sont les modules F_{-i}/F_{-2}, $i \geq 2$. Changeant $-i$ en i, $i \geq 2$ on obtient une filtration croissante dont le i-ième quotient est dans $\mathcal{N}il_{i(d-1)}$. Comme les catégories $\mathcal{N}il_k$ sont des classes de Serre, et sont stables par limite directe, on en conclut que le quotient $H^*\Omega X/F_{-1}$ est $(2d-2)$-nilpotent.

On peut appliquer la proposition 1.9 à :

$$\{0\} \to F_{-1} \to \bar{H}^*\Omega X \to \bar{H}^*\Omega X/F_{-1} \ ,$$

et en conclure que :

$$R_s(F_{-1}) \cong_F R_s(\bar{H}^*\Omega X)$$

pour $s < 2d-2$.

Le noyau de $\bar{H}^*X \to QH^*X$ est égal à $(\bar{H}^*X)^2$ et est $2d$-nilpotent. Il en résulte (Proposition 1.8) que l'application :

$$R_s(\bar{H}^*X) \to R_s(QH^*X)$$

est un isomorphisme pour $s < 2d$. Le noyau de $QH^*X \to \Sigma F_{-1}$ est l'image des différentielles dans $E_2^{-1,*} \cong QH^*X$. La description des différentielles donnée plus haut et le fait que la colonne $E_r^{-s,*}$ soit sd-nilpotente implique que cette image est $2d$-nilpotente, $d \geq 1$. Il en résulte (Proposition 1.8) que l'application :

$$R_s(H^*X) \to R_s(\Sigma F_{-1})$$

est un isomorphisme pour $s < 2d$.

L'ensemble de ces résultats donne la proposition.

On étudie maintenant le cas de $R_{2d-2}(H^*\Omega X)$. Le résultat suivant est conséquence de la proposition 1.9 :

Proposition 3.2 *Soit X un espace. On suppose que H^*X est d-nilpotent, $d > 1$. Alors :*

- *$R_{2d-2}(\bar{H}^*\Omega X)$ est fortement F-isomorphe à un module E donné par une extension de la forme :*

$$\{0\} \to R_{2d-1}(\bar{H}^*X) \to E \to L \to \{0\} ,$$

où L est un sous-module de $R_d(\bar{H}^*X)^{\otimes 2}$

Si $d=1$ on a un résultat analogue en substituant F_{-2} à $H^*\Omega X$.

Démonstration : On commence par observer que

$$R_{2d-2}(F_{-2}) \cong_F R_{2d-2}(\bar{H}^*\Omega X) .$$

Ceci résulte de 1.9 et du fait que $H^*\Omega X/F_{-2}$ est $3d-3$-nilpotent, démontré comme plus haut. Il reste donc à analyser $R_{2d-2}(F_{-2})$, ce qu'on fait par dévissage et application de 1.9 en considérant la suite exacte :

$$\{0\} \to F_{-1} \to F_{-2} \to F_{-2}/F_{-1} \to \{0\} .$$

Le module instable ΣF_{-1} est -à suspension près- l'image de l'homomorphisme de coin (voir la démonstration qui précède). Le module instable $\Sigma^2(F_{-2}/F_{-1})$ est un sous-quotient de $\mathrm{Tor}^{-2}_{H^*X}(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2)$, qui est lui même un sous-quotient de $\bar{H}^*X^{\otimes 2}$. Du fait que les différentielles ont des images au moins $3d$-nilpotentes et de la proposition 1.8 et on déduit que $R_{2d}(\Sigma^2(F_{-2}/F_{-1}))$ est isomorphe à un sous-module de $R_d(\bar{H}^*X)^{\otimes 2}$.

Le résultat suit.

Les énoncés suivants adaptent et précisent les énoncés précédents au contexte, ils en sont conséquence directe.

Théorème 3.3 *Soit d un entier strictement supérieur 1, soit X un espace, et soit $\bar{H}^*X$ sa cohomologie réduite. Supposons que :*

- *$\bar{H}^*X$ appartient à $\mathcal{N}il_d$,*
- *la connectivité de $\bar{H}^*X$ est strictement supérieure à $2d$,*
- *le quotient $H^*X/(H^*X)_{2d}$ est dans $\mathcal{U}_1$.*

Alors

- *$\bar{H}^*\Omega X$ appartient à $\mathcal{N}il_{d-1}$,*
- *la connectivité de $\bar{H}^*\Omega X$ est supérieure à $2d-2$,*
- *le module $R_s(\bar{H}^*\Omega X)$, $d-1 \leq s < 2d-2$, est dans $\mathcal{U}_1$, connexe, et donc trivial dans les degrés qui ne sont pas de la forme 2^h, $h \geq 0$,*

- *le module* $R_{2d-2}(\bar{H}^*\Omega X)$ *est dans* $\mathcal{U}_2$*, connexe, et donc trivial dans les degrés qui ne sont pas de la forme* 2^h*,* $h \geq 0$*, ou* $2^h + 2^j$*,* $h > j \geq 0$*.*

La démonstration est conséquence de 3.1, 3.2, 2.5, et 2.6.

Un énoncé particulier est nécessaire dans le cas, exclu ci-dessus, où $d = 1$. L'énoncé est similaire, mais le résultat ne s'applique qu'au sous-module F_{-2} de $\bar{H}^*\Omega X$:

Théorème 3.4 *Soit* X *un espace, et soit* $\bar{H}^*X$ *sa cohomologie réduite. Supposons que :*

- $\bar{H}^*X$ *appartient à* $\mathcal{N}il_1$*,*
- *la connectivité de* $\bar{H}^*X$ *est supérieure à* 2*,*
- *le module* $R_1(\bar{H}^*X)$ *est dans* $\mathcal{U}_1$*.*

Alors

- *le quotient* $R_0(F_{-2}(\bar{H}^*\Omega X))$ *est dans* $\mathcal{U}_2$*, connexe, et donc trivial dans les degrés qui ne sont pas de la forme* 2^h*,* $h \geq 0$ *et* $2^h + 2^j$*,* $j > h \geq 0$*.*

La démonstration est identique à celle faite plus haut mais on doit se restreindre à F_{-2}.

4 Construction de classes dans la cohomologie des espaces de lacets

On va maintenant donner le début de la démonstration du théorème 0.1. La réduction de Kuhn permet de supposer qu'il existe un espace X dont la cohomologie appartienne à $\mathcal{U}_1$, mais pas à $\mathcal{U}_0$. Cette réduction s'effectue comme dans le cas précédent, le seul problème est d'assurer les conditions d'application du théorème de Lannes sur la cohomologie des espaces fonctionnels.

On peut appliquer le théorème de Lannes pour la raison suivante. On a supposé que chaque quotient de la filtration nilpotente a un nombre fini de générateurs, ceci implique que H^*X est de dimension finie en chaque degré. De plus l'hypothèse est préservée par application de T. Ceci implique que $T(H^*X)$ est de dimension finie en chaque degré, ce qui permet de calculer la cohomologie de l'espace fonctionnel à l'aide du théorème de Lannes.

La proposition 2.3 s'applique à la cohomologie de X en posant $M = \bar{H}^*X$ et $K = \bar{T}(\bar{H}^*X)$. Le module instable K est non trivial. Soit $d-1$ sa connexité,

l'entier d désignera dorénavant, et pour toute la suite cette constante. Le module instable K est inchangé quand on remplace H^*X par un sous-module M' tel que le quotient H^*X/M' soit fini. Ceci implique, en particulier, que K est inchangé, quand on quotiente X par un sous-complexe de dimension finie. On peut donc supposer, par commodité, la connectivité de X aussi grande que l'on veut, donc on peut la supposer supérieure à $2d$.

On doit traiter d'abord le cas où $d=0$. Dans ce cas, par hypothèse, et à cause de 2.5, le quotient de H^*X par son sous-module nilpotent maximal est non-nul seulement en degré de la forme 2^h. Le sous-module nilpotent maximal est un idéal, le quotient est donc aussi une algèbre instable. Soit x est un élément non-nul dans ce quotient. Toutes les puissances x^{2^h} sont non nulles. L'élément x^3 est aussi non-nul, car x^4 est non-nul. Le degré de x^3 n'est pas une puissance de 2, il y a donc une contradiction et d n'est pas nul.

Supposons donc $d \geq 1$, et introduisons, comme dans [8], des classes dans la cohomologie de X et de ses espaces de lacets itérés. Rappelons que l'on identifie $F(1)$, comme à l'ordinaire, avec le sous-module instable, de $H^*B\mathbf{Z}/2 \cong \mathbf{F}_2[u]$, engendré par u et qui admet pour base sur $\mathbf{F}_2$ les éléments u^{2^i}. On peut appliquer la proposition 2.3 à $\bar{H}^*X$. Considérons alors une classe $\omega \in K^d$, $\omega \neq 0$ et les classes

$$\omega \otimes u^{2^j} \in K \otimes F(1) \ .$$

Faisons l'hypothèse suivante. Soit $\mathcal{A}\omega$ le module instable engendré par ω. On sait qu'il est fini puisque c'est un sous-module de K qui est localement fini. Supposons $\mathcal{A}\omega$ nul en degré supérieur ou égal à h. Soit un entier k tel que $2^{k-1} \geq h$, sous cette hypothèse la formule de Cartan montre que : $Sq^{2^{k+i}}(\omega \otimes u^{2^{k+i}}) = \omega \otimes u^{2^{k+i+1}}$.

D'après 2.3 il existe un entier positif k_0, dépendant de ω, tel que $\omega \otimes u^{2^j} \in K \otimes F(1)$ se relève à $\bar{H}^*X$ dès que $j \geq k_0$. On notera $\alpha_{i,d}$ ces relèvements, ils sont de degré $2^{k_0+i}+d$. *A priori* ils ne sont définis que modulo un élément localement fini, mais on peut les déterminer de manière univoque en choisissant $\alpha_{0,d}$ et en supposant qu'ils vérifient $Sq^{2^{k_0+i}}(\alpha_{i,d}) = \alpha_{i+1,d}$.

L'entier k_0 restera fixe dans toute la suite de la démonstration.

Quitte à suspendre l'espace X on peut supposer que tous les produits de classes de degré strictement positif sont nuls. On peut donc supposer que :

$$\alpha_{i,d}^2 = 0 \ .$$

Soit ℓ tel que $0 \leq \ell \leq d$. Définissons des classes $\alpha_{i,\ell}$, $i \geq 0$, de degré $2^{k_0+i}+\ell$, dans $\tilde{H}^*\Omega^{d-\ell}X$ comme étant les images, désuspendues $d-\ell$ fois, des classes

$\alpha_{i,d}$ par l' homomorphisme de coin itéré

$$Q(H^*X) \to \Sigma^{d-\ell} H^* \Omega^{d-\ell} X \ .$$

Elles sont de degré $2^{k_0+i} + \ell$ dans $\tilde{H}^*\Omega^{d-\ell}X$. On va démontrer qu'elles ont les propriétés suivantes :

- $\alpha_{i,\ell}$ est détectée dans la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de $\Omega(\Omega^{d-(\ell+1)}X)$ par l'image des classes $\alpha_{i,\ell+1}$ dans la colonne -1,
- $Sq^{2^{k_0+i}} \alpha_{i,\ell} = \alpha_{i+1,\ell}$,
- ces classes sont de degré de nilpotence ℓ, exactement,
- $\alpha_{i,\ell}^2 = 0$, pour tout i assez grand.

On ne donne pas de borne pour i dans la dernière condition.

Pour $\ell = 0$, les deux dernières conditions, sont contradictoires. Ceci démontrera le théorème.

Les propriétés de ces classes vont être démontrées par récurrence descendante. Les classes $\alpha_{i,d}$ introduites plus haut satisfont aux conditions requises. Ceci permet de débuter la récurrence.

Supposons donc les propriétés établies pour les classes $\alpha_{i,\ell}, \ell \geq 1$, et démontrons les pour les classes $\alpha_{i,\ell-1}$.

Lemme 4.1 *Les classes $\alpha_{i,\ell-1}$, $i \geq 0$ de $\bar{H}^*\Omega^{d-\ell+1}X$ de degré $2^{k_0+i} + \ell - 1$ sont telles que :*

- *$\alpha_{i,\ell-1}$ est détecté dans la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de $\Omega(\Omega^{d-\ell}X)$ par l'image des classes $\alpha_{i,\ell}$ dans la colonne -1,*
- *$Sq^{2^{k_0+i}} \alpha_{i,\ell-1} = \alpha_{i+1,\ell-1}$,*
- *ces classes sont de degré de nilpotence $\ell - 1$, exactement,*
- *$\alpha_{i,\ell-1}^2 = 0$, pour tout i assez grand.*

Démonstration :

La première affirmation est conséquence de la définition des classes.

La seconde affirmation, c'est-à-dire la description de l'action des opérations de Steenrod, est une conséquence directe des propriétés de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore ([5], [10]) et de la construction des $\alpha_{i,\ell-1}$ à partir de l'homomorphisme de coin. Les suspensions itérées $\Sigma^{d-\ell+1}\alpha_{i,\ell-1}$ sont, par construction, image par l'homomorphisme de coin itéré :

$$Q(H^*X) \to \Sigma^{d-(\ell-1)} H^* \Omega^{d-(\ell-1)} X$$

des classes $\alpha_{i,d}$. La relation correspondante a lieu dans la source, pour les classes $\alpha_{i,d}$.

A priori les classes $\alpha_{i,\ell}$ sont au moins ℓ-nilpotentes et déterminent des classes $\bar{\alpha}_{i,\ell} \in R_\ell(H^*\Omega^{d-\ell}X)$

Par construction les classes $\bar{\alpha}_{i,\ell-1}$ sont images des classes $\bar{\alpha}_{i,\ell} \in R_\ell(H^*\Omega^{d-\ell}X)$ par le F-isomorphisme fort $R_\ell(H^*\Omega^{d-\ell}X) \cong_F R_{\ell-1}(H^*\Omega^{d-\ell+1}X)$. Les classes $\alpha_{i,d}$ étant non-nulles il en est de même, par récurrence, des classes $\alpha_{i,\ell-1}$.

Compte tenu de l'action des opérations de Steenrod l'affirmation concernant le degré de nilpotence de $\alpha_{i,\ell-1}$ en résulte.

Il reste à montrer que le cup-carré de ces classes est nul si i est assez grand. La méthode ne donne pas de borne pour i. C'est, comme dans [8], la partie la plus délicate de la démonstration, l'argument se simplifie quelque peu, dans la mesure où on ne cherche pas à démontrer de résultat sur des complexes finis. Il sera exposé dans la prochaine section, avec la partie finale de la démonstration du théorème.

5 Fin de la démonstration de 4.1, démonstration du théorème 0.1

Pour achever la démonstration on va introduire une famille de classes $\omega_{i,\ell-1}$ dans la cohomologie de $\Omega^{d-\ell+1}X$, puis on étudiera l'action des opérations de Steenrod sur ces classes. Ceci donnera la nullité du cup-carré. Si $\ell = 1$, on aura la contradiction annoncée. On doit étudier tous les cas, car c'est la nullité du cup-carré $\alpha_{i,\ell}^2$ qui entraîne l'existence de $\omega_{i,\ell-1}$.

Supposons donc le cup-carré $\alpha_{i,\ell}^2$ nul pour $i \geq i_\ell$. Il faut montrer que $\alpha_{i,\ell-1}^2 = 0$ l'est aussi, pour $i \geq i_{\ell-1}$, où $i_{\ell-1}$ est assez grand.

Comme le cup-carré de $\alpha_{i,\ell}$ est nul la classe

$$\alpha_{i,\ell} \otimes \alpha_{i,\ell} \in (\bar{H}^*\Omega^{d-\ell}X)^{\otimes 2}$$

détermine, pour tout $i \geq i_\ell$, un élément dans le terme :

$$E_2^{-2,*} \cong \mathrm{Tor}^{-2,*}_{H^*\Omega^{d-\ell}X}(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2)$$

de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de $\Omega(\Omega^{d-\ell}X)$ en degré $2^{k_0+i+1} + 2\ell$.

Cet élément est non-nul. En effet, la classe $\alpha_{i,\ell} \otimes \alpha_{i,\ell} \in (\bar{H}^*\Omega^{d-\ell}X)^{\otimes 2}$ est exactement 2ℓ-nilpotente car elle réduit non-trivialement dans

$$\Sigma^{2\ell}R_{2\ell}(\mathrm{Tor}^{-2,*}_{H^*\Omega^{d-\ell}X}(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2)) \subset \Sigma^{2\ell}R_{2\ell}((\bar{H}^*\Omega^{d-\ell}X)^{\otimes 2}) \cong \Sigma^{2\ell}R_\ell(\bar{H}^*\Omega^{d-\ell}X)^{\otimes 2} .$$

La première inclusion est conséquence de 1.8, car les bords, qui proviennent de $(\bar{H}^*\Omega^{d-\ell}X)^{\otimes 3}$, sont au moins 3ℓ-nilpotents, et comme $\ell \geq 1$, on peut appliquer la proposition, l'isomorphisme vient de ce que $\bar{H}^*\Omega^{d-\ell}X \in \mathcal{N}il_d$.

Lemme 5.1 *Ce cycle détermine une classe non-nulle, notée $\omega_{i,\ell-1}$, dans la cohomologie de $\Omega^{d-\ell+1}X$.*

L'élément considéré de la colonne -2 ne peut être source d'une différentielle non-nulle car la colonne 0 est triviale.

L'image de la différentielle d_t dans $E_t^{-2,*}$, est un sous-module au moins $((t+2)\ell - t + 1)$-nilpotent. Comme $\ell \geq 1$, on a $(t+2)\ell - t + 1 > 2\ell$. On a donc une suite exacte :

$$\{0\} \to D \to \mathrm{Tor}^{-2,*}_{H^*\Omega^{d-\ell}X}(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2) \to E_\infty^{-2,*} \to \{0\} \ ,$$

où D est au moins $(4\ell-1)$-nilpotent, et les classes $\alpha_{i,\ell} \otimes \alpha_{i,\ell}$ sont donc non-triviales dans l'aboutissement de la suite spectrale.

Les classes

$$\omega_{i,\ell-1} \in \bar{H}^*\Omega^{d-\ell+1}X$$

sont non-nulles, et de degré $2^{k_0+i+1} + 2\ell - 2$. Elles appartiennent au terme F_{-2} de la filtration d'Eilenberg-Moore de $\tilde{H}^*\Omega^{d-\ell+1}X$. Le terme F_{-1} de la filtration n'est pas nul dans ce degré. Il y a donc une indétermination sur la définition des classes $\omega_{i,\ell-1}$, seule leur image dans F_{-2}/F_{-1} est bien déterminée. L'indétermination appartient au terme F_{-1} de la filtration en degré $2^{k_0+i+1} + 2\ell - 2$, et est donc détectée dans $E_\infty^{-1,*}$ en degré $2^{k_0+i+1} + 2\ell - 1$.

On va calculer l'action de certaines opérations de Steenrod sur les classes $\omega_{i,\ell-1}$. Ce calcul sera fait modulo l'ordre de nilpotence $2\ell - 1$. En fait ces calculs vont avoir lieu dans le complexe :

$$R_{2\ell-1}(H^*\Omega^{d-\ell}X) \to R_{2\ell-2}(H^*\Omega^{d-\ell+1}X) \to (R_\ell(H^*\Omega^{d-\ell}X)^{\otimes 2}$$

qui est exact au centre au sens donné en 1.11. On a, à cause de 1.10 et 3.2, un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
R_{2\ell-1}F_{-1}(\ell) & \to & E & \to & L \\
\downarrow\cong_F & & \downarrow\cong_F & & \downarrow j \\
R_{2\ell-2}F_{-1}(\ell-1) & \to & R_{2\ell-2}F_{-2}(\ell-1) & \to & R_{2\ell-2}(F_{-2}(\ell-1)/F_{-1}(\ell-1))
\end{array}$$

où on note $F_{-i}(h)$ pour $F_{-i}(H^*\Omega^{d-h}X)$, et $L \subset (R_\ell(F_{-1}(\ell))^{\otimes^2}$, et j est un monomorphisme.

Considérons l'image de la classe $\sigma^{-2\ell}(\alpha_{i,\ell} \otimes \alpha_{i,\ell})$ dans $L \subset (R_\ell(F_{-1}(\ell))^{\otimes^2}$. Son image par la flèche verticale est l'image de la classe $\sigma^{-2\ell}\omega_{i,\ell-1}$ dans $R_{2\ell-2}(F_{-2}(\ell-1)/F_{-1}(\ell-1))$.

Lemme 5.2 *La classe $\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}(\omega_{i,\ell-1})$ ne dépend pas du choix du relèvement $\omega_{i,\ell-1}$.*

Par application itérée de 3.3 on sait que $R_{2\ell-2}(F_{-1})$ dans $\mathcal{U}_1$. Comme il est par définition réduit il est fortement F-isomorphe à une somme directe de copies de $F(1)$. Il en résulte aussitôt que l'opération $\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}$ est nulle en degré 2^{k_0+i+1}. Ce qui donne le résultat annoncé.

Dans la proposition suivante, les éléments associés à $\alpha_{i,\ell}$ et $\alpha_{i,\ell} \otimes \alpha_{i,\ell}$ dans la suite spectrale d'Eilenberg-Moore pour $\Omega(\Omega^{d-\ell}X)$ sont indiqués entre crochets.

Proposition 5.3 *Dans le terme E_2 de la suite spectrale on a la relation*

$$Sq^{2^{k_0+i}}([\alpha_{i,\ell} \otimes \alpha_{i,\ell}]) = [\alpha_{i+1,\ell} \otimes \alpha_{i,\ell} + \alpha_{i,\ell} \otimes \alpha_{i+1,\ell}] \ .$$

Cet élément persiste à l'infini en une classe non nulle.

Corollaire 5.4 *Dans la cohomologie de $\Omega^{d-\ell+1}X$ on a la relation :*

$$Sq^{2^{k_0+i}}\omega_{i,\ell-1} = \alpha_{i+1,\ell-1} \cup \alpha_{i,\ell-1} \quad \mod \quad (F_{-1})_{2\ell-1} \ .$$

La première partie de la proposition résulte de la description de l'action des opérations de Steenrod dans la suite spectrale ([5], [10], [11]) et de la formule de Cartan. Comme seules Sq^0 et $\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}$ ont une action non-nulle sur $u^{2^{k_0+i}}$ la classe :

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}((\omega \otimes u^{2^{k_0+i}}) \otimes (\omega \otimes u^{2^{k_0+i}}))$$

est somme de :

$$(\omega \otimes u^{2^{k_0+i+1}}) \otimes (\omega \otimes u^{2^{k_0+i}}) + (\omega \otimes u^{2^{k_0+i}}) \otimes (\omega \otimes u^{2^{k_0+i+1}}) \ ,$$

et de :

$$(\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}(\omega) \otimes u^{2^{k_0+i}}) \otimes (\omega \otimes u^{2^{k_0+i}}) + (\omega \otimes u^{2^{k_0+i}}) \otimes (\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}(\omega) \otimes u^{2^{k_0+i}}) \ .$$

Ces derniers termes sont nuls, en effet la condition $2^{k-1} \geq h$ imposée plus haut implique que $\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}(\omega) = 0$.

Cette classe ne peut être l'image d'une différentielle pour les mêmes raisons que $\alpha_{i,\ell} \otimes \alpha_{i,\ell}$. La proposition en résulte.

Pour ce qui est du corollaire il résulte des propriétés de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore par rapport au cup-produits, du lemme, et de ce qui a été dit plus haut : la formule a lieu modulo F_{-1}, et ne dépend pas du choix du rélèvement.

Corollaire 5.5 *On a :*

$$\mathrm{Sq}^{2^k}\mathrm{Sq}^{2^k}\omega_{i,\ell-1} = \alpha^2_{i+1,\ell-1} \ ,$$

modulo des termes de degré de nilpotence supérieur ou égal à $2\ell - 1$.

La démonstration est identique à ce qui précède.

Lemme 5.6 *Les classes* $\omega_{i,\ell-1}$ *sont de degré de nilpotence exactement* $2\ell - 2$. *Il en est de même des classes* $\alpha^2_{i+1,\ell-1}$, *si elles sont non-nulles pour tout* i.

En effet, les classes $\omega_{i,\ell-1}$ sont non-nulles et on calcule facilement que

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i+1}}(\omega_{i,\ell-1}) = \mathrm{Sq}_{2\ell-2}(\omega_{i,\ell-1}) = \omega_{i+1,\ell-1} \ .$$

Le même argument s'applique à l'autre cas, car on a :

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i+1}}(\alpha^2_{i,\ell-1}) = \mathrm{Sq}_{2\ell-2}(\alpha^2_{i,\ell-1}) = \alpha^2_{i+1,\ell-1} \ .$$

On va en déduire, par l'absurde, la nullité des cup-carrés, et conclure. En fait, l'argument sera le même, simplement on utilisera en plus, si $\ell = 1$, la relation de cup-carré des algèbres instables qui donnera la contradiction.

On va commencer par énoncer une formule concernant les opérations de Steenrod.

Lemme 5.7 [8] *Pour tout entier* n

$$\mathrm{Sq}^{2^n}\mathrm{Sq}^{2^n} \in \bar{\mathcal{A}}(n-1)\mathrm{Sq}^{2^n}\bar{\mathcal{A}}(n-1) \ ,$$

où $\mathcal{A}(n-1)$ *est la sous-algèbre engendrée par* $\mathrm{Sq}^1, \ldots, \mathrm{Sq}^{2^{n-1}}$ *et* $\bar{\mathcal{A}}(n-1)$ *est l'idéal des éléments de degré strictement positif.*

La démonstration est basée sur les relations d'Adem. On écrit la relation d'Adem pour $\mathrm{Sq}^{2^n}\mathrm{Sq}^{2^n}$:

$$\mathrm{Sq}^{2^n}\mathrm{Sq}^{2^n} = \sum_{t=1}^{t=n-1} \mathrm{Sq}^{2^{n+1}-2^t}\mathrm{Sq}^{2^t} \ .$$

Puis on montre, par récurrence sur h, que toute opération Sq^{2^n+h}, avec $0 < h < 2^n$, est dans $\bar{\mathcal{A}}(n-1)\mathrm{Sq}^{2^n}\bar{\mathcal{A}}(n-1)$.

En fait on a seulement besoin d'une relation de la forme :

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}} = \sum_j a_j b_j \ ,$$

avec $2^{k_0+i+1} > \deg(b_j) > 2^{k_0+i}$. Ceci résulte du lemme, mais peut aussi être montré en utilisant l'anti-involution c et la base de Cartan-Serre.

On écrit la décomposition de $c(\mathrm{Sq}^{2^n}\mathrm{Sq}^{2^n})$ sur la base des monômes admissibles. On observe qu'un monôme admissible de degré 2^{n+1} commence toujours par une opération de degré strictement supérieur à 2^n. On observe aussi, en évaluant sur $u^{2^{n+1}}$, que $\mathrm{Sq}^{2^{n+1}}$ n'apparaît pas dans la décomposition. Puis on réapplique c.

Fin de la démonstration : Le module $R_{2\ell-2}(H^*\Omega^{d-\ell+1}X)$, $\ell > 1$ est non-trivial (éventuellement) seulement dans les degrés de la forme 2^h ou $2^h + 2^j$.

Pour ce qui est de la cohomologie de $H^*\Omega^d X$, c'est-à-dire si $\ell = 1$, la même observation a lieu, si on se restreint au sous-module F_{-2}. Les relations établies plus haut (corollaires 5.3 et 5.4) ont lieu, à désuspension près, dans ce sous-module. On a pour tout $i > i_\ell$ la relation

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}\sigma^{-2\ell+2}(\overline{\omega_{i,\ell-1}}) = \sigma^{-2\ell+2}(\overline{\alpha^2_{i+1,\ell-1}}) \ ,$$

avec les notations évidentes.

D'après le lemme ci-dessus, on a :

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}} = \sum_j a_j b_j \ ,$$

avec $2^{k_0+i+1} > \deg(b_j) > 2^{k_0+i}$. Pour que les classes

$$\sigma^{-2\ell+2}(\overline{b_j(\omega_{i,\ell-1})})$$

soient non-nulles elles doivent être de degré de la forme 2^a, ou $2^a + 2^b$.

Il faut donc que l'on ait une équation de la forme $\deg(b_j) + 2^{k_0+i+1} = 2^a$, soit de la forme $\deg(b_j) + 2^{k_0+i+1} = 2^a + 2^b$. La première équation est impossible car $\deg(b_j) < 2^{k_0+i+1}$. La seconde implique que $\deg(b_j)$ est une puissance de 2, ce qui est également impossible car $2^{k_0+i+1} > \deg(b_j) > 2^{k_0+i}$. En fait on a $\alpha(\deg(\sigma^{-2\ell+2}(\overline{b_j(\omega_{i,\ell-1})})) \geq 3$.

Les classes $\sigma^{-2\ell+2}(\overline{b_j(\omega_{i,\ell-1})})$ sont donc nulles. Il en résulte que les classes

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}(\sigma^{-2\ell+2}\overline{\omega_{i,\ell-1}}) \in R_{2\ell-2}(H^*\Omega^{d-\ell+1}X)$$

sont nulles. Donc que les classes

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}(\omega_{i,\ell-1})$$

sont de degré de nilpotence strictement supérieur à $2\ell-2$.

On en déduit, par 1.4, que la classe $\alpha_{i+1,\ell-1}^2$ est nulle dès que i est assez grand. En effet, on a :

$$\mathrm{Sq}_{2\ell-2}^t(\alpha_{i,\ell-1}^2)=\alpha_{i+t,\ell-1}^2\ .$$

Le terme F_{-2} de la filtration de $H^*\Omega^d X$ quotienté par le sous-module des éléments nilpotents est nul dans les degrés qui ne sont pas de la forme 2^h ou 2^h+2^j. Insistons sur le fait que ceci n'est pas vrai pour la cohomologie de $\Omega^d X$, mais la relation utilisée ci-dessous a lieu dans F_{-2}.

On a, dans ce sous-module la relation

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}\omega_{i,0}=\alpha_{i+1,0}^2=\alpha_{i+2,0}\neq 0\ .$$

Cette dernière est, exactement, de degré de nilpotence 0. On a donc une contradiction. Ce qui achève la démonstration du théorème.

En conclusion, on observera que l'on a utilisé nulle part des propriétés des foncteurs R_s, $s>2d-1$. En fait l'argument doit permettre de démontrer la conjecture 0.1.

6 Démonstration de 1.5

On énoncera et démontrera dans cette section la proposition suivante, mal dégagée dans [6] :

Proposition 6.1 *Soit M un module instable, soit $h\geq 0$ un entier. Alors l'ensemble des éléments x tels que pour tout $h\geq k\geq 0$ il existe un entier k_x, tel que :*

$$(\mathrm{Sq}_k)^{k_x}x=0\ ,$$

est un sous-module de M.

Cette proposition résulte évidemment de :

Lemme 6.2 *Soit M un module instable, soit $h\geq 0$ un entier. Alors l'ensemble des éléments x tels que pour tout $0\leq k\leq h$:*

$$\mathrm{Sq}_k x=0\ ,$$

est un sous-module de M.

Ce lemme est conséquence des relations d'Adem. Notons M_h le sous-espace vectoriel gradué déterminé par la condition du lemme. Il faut montrer que c'est un module sur l'algèbre de Steenrod.

Soit donc $x \in M_h$. Supposons avoir démontré que pour $i \leq t-1$ $\mathrm{Sq}^i x \in M_h$, et montrons que $\mathrm{Sq}^t x \in M_h$.

On calcule $\mathrm{Sq}^{2t}\mathrm{Sq}_k(x)$ à l'aide des relations d'Adem. On a par définition :

$$\mathrm{Sq}^{2t}\mathrm{Sq}_k(x) = \mathrm{Sq}^{2t}\mathrm{Sq}^{|x|-k}(x) \ .$$

Si $2t < 2(|x|-k)$ les relations d'Adem donnent :

$$\mathrm{Sq}^{2t}\mathrm{Sq}_k(x) = \sum_0^t \ \varepsilon_i \mathrm{Sq}^{2t+|x|-k-i}\mathrm{Sq}^i(x) \ ,$$

avec $\varepsilon_i = \binom{|x|-k-i-1}{2t-2i}$.

Si $2t+|x|-k-i > i+|x|$, soit si $2i < 2t-k$, le terme $\mathrm{Sq}^{2t+|x|-k-i}\mathrm{Sq}^i(x)$ est nul par instabilité. La somme ci-dessus se réduit donc à :

$$\mathrm{Sq}^{2t}\mathrm{Sq}_k(x) = \sum_{t-\frac{k}{2}\leq i\leq t} \varepsilon_i \mathrm{Sq}^{2t+|x|-k-i}\mathrm{Sq}^i(x) \ .$$

Le coefficient ε_t est égal à $\binom{|x|-k-t-1}{0}$ soit à 1, car $|x|-k-t-1 \geq 0$ par hypothèse. On a donc :

$$\mathrm{Sq}^{2t}\mathrm{Sq}_k(x) = \mathrm{Sq}_k\mathrm{Sq}^t(x) + \sum_{t-\frac{k}{2}\leq i\leq t-1} \varepsilon_i \mathrm{Sq}_{k-2(t-i)}\mathrm{Sq}^i(x) \ .$$

On en déduit que $\mathrm{Sq}_k\mathrm{Sq}^t(x)$ est nul car l'hypothèse de récurrence implique que tous les autres termes du membre de droite sont nuls, et car celui de gauche l'est par hypothèse.

Si $|x| < t+k$ on peut appliquer les relations d'Adem à $\mathrm{Sq}_k\mathrm{Sq}^t(x)$ directement. On obtient :

$$\mathrm{Sq}_k\mathrm{Sq}^t(x) = \sum_0^{\frac{t+|x|-k}{2}} \epsilon_i \mathrm{Sq}^{2t+|x|-k-i}\mathrm{Sq}^i(x) \ ,$$

avec $\epsilon_i = \binom{t-i-1}{t+|x|-k-2i}$. Soit

$$\mathrm{Sq}_k\mathrm{Sq}^t(x) = \sum_{t-\frac{k}{2}\geq i\geq \frac{t+|x|-k}{2}} \epsilon_i \mathrm{Sq}_{k-2(t-i)}\mathrm{Sq}^i(x) \ .$$

Or $i \leq \frac{t+|x|-k}{2} < t$, et donc $k-2(t-i) < k$, on peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence.

References

[1] **P. Gabriel**, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France 90 (1962) 323-348.

[2] **H. W. Henn, J. Lannes, L. Schwartz**, *The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects*, Am. J. of Math. 115 (1993) 1053-1106.

[3] **N. Kuhn**, *On topologically realizing modules over the Steenrod algebra*, Ann. of Math. 141 (1995) 321-347.

[4] **J. Lannes, L. Schwartz**, *A propos de conjectures de Serre et Sullivan*, Invent. Math. 83 (1986) 153-169.

[5] **D. Rector**, *Steenrod operations in the Eilenberg-Moore spectral sequence*, Comment. Math. Helvet. 45 (1970) 540-552.

[6] **L. Schwartz**, *La filtration nilpotente de la catégorie $\mathcal{U}$ et la cohomologie des espaces de lacets*, Proceedings Louvain La Neuve 1 Springer LMN 1318 (1988) 208-218.

[7] **L. Schwartz**, *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics Series (1994).

[8] **L. Schwartz**, *A propos de la conjecture de non-réalisation due à N. Kuhn* Invent. Math. 134 (1998) 211-227.

[9] **L. Schwartz**, *Unstable modules, functors, and the mod-2 cohomology of spaces*, Proceedings Eurocoference Bielefeld 1998.

[10] **L. Smith**, *On Kunneth theorem 1*, Math. Zeit. 116 (1970) 94-140.

[11] **L. Smith**, *Lectures on the Eilenberg-Moore spectral sequence*, Springer LNM 134.

Université Paris-Nord, Institut Galilée, LAGA, UMR 7539 du CNRS
Av. J.-B. Clément, 93430, Villetaneuse, France

Email: `schwartz@math.univ-paris13.fr`

Received: 9 October 2000 Revised: 4 July 2001