Владикавказский математический журнал
апрель–июнь, 2007, Том 9, Выпуск 2

УДК **513.8+517.55**

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ И СТРОЕНИИ ПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

В. П. Кондаков

В работе содержатся замечания о введении дифференцируемости отображений в линейных борнологических пространствах и о строении пространств голоморфных функций, ограниченных на борнологии компактных множеств монтелевских пространств числовых последовательностей Кёте.

Ключевые слова: бесконечномерная голоморфность, борнология, пространство Кёте, борнологическая дифференцируемость.

Как известно, первые работы классиков (Вольтерра, Адамара, Фреше и др.), благодаря которым возник функциональный анализ, были посвящены нелинейному функциональному анализу и, в частности, обобщениям дифференциального исчисления на случаи бесконечномерных пространств, наделенных структурами сходимости, т. е. правилами, по которым определяется сходимость векторов этого пространства или их «малость». Наиболее распространенные способы задания структуры сходимости на множестве X состоят в определении метрики или равномерности, топологии или борнологии, а также, более общим образом, псевдотопологии (выделении сходящихся фильтров, см., например, [1–6]).

При рассмотрении линейного пространства X обычно предполагаются дополнительно условия согласования структуры сходимости с линейной структурой в виде непрерывности или ограниченности алгебраических операций сложения векторов и умножения векторов на элементы выделенного поля ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или др.). При введении основного инструмента нелинейного анализа — понятия производной, многие авторы, следуя направляющим идеям М. Фреше (и его последователя Р. Гато), исследовали многочисленные варианты дифференцируемости отображений и связанные с этими вариантами обобщения теорий бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций (см., например, [1, 3, 6]). Имея такой богатый выбор подходов, можно отдавать предпочтения тем вариантам, которые приводят к содержательной теории (с подходящими тейлоровскими разложениями отображений), удобной для решения конкретных задач структурной теории или задач, важных для приложений в математической физике (см., например, [7, 8]).

В настоящей работе мы коснемся подхода к дифференцируемости отображений при задании борнологии на пространстве X, а также рассмотрим отдельные вопросы строения пространств голоморфных отображений локально выпуклых пространств, в частности, пространств Кёте — Фреше.

---

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 07-01-00329-а.

1. Предварительные сведения о борнологиях в пространствах Кёте

Пусть X — некоторое множество и $S(X)$ — множество всех его подмножеств. Если $\mathscr{B}$ система подмножеств X, т. е. $\mathscr{B} \subset S(X)$, то говорят, что эта система определяет борнологию на X, если $\mathscr{B}$ имеет свойства:

1) $A \in \mathscr{B}$, $B \in \mathscr{B}$ влечет $A \cup B \in \mathscr{B}$;

2) $A \subset B$, $B \in \mathscr{B}$ влечет $A \in \mathscr{B}$;

3) все одноточечные множества вида $\{x\}$ принадлежат $\mathscr{B}$.

Множество X с заданной на нем борнологией называют *борнологическим множеством* и обозначают $(X, \mathscr{B})$. При этом подмножества борнологии $\mathscr{B}$ называются *ограниченными*.

Система всех ограниченных множеств линейного топологического пространства X задает на этом пространстве борнологию, которую называют *борнологией фон Неймана*.

Если X — линейное (векторное) пространство над полем K и алгебраические операции: сложения векторов $(x, y) \mapsto x + y$ $(X \times X \to X)$, умножения векторов на элементы из K

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (K \times X \to X)$$

ограниченные множества переводят в ограниченные (борнологии $\mathscr{B}$), то говорят, что $\mathscr{B}$ — линейная (векторная) борнология и она согласуется со структурой линейного пространства.

Легко видеть, что в случае, когда X — пространство Фреше, борнология фон Неймана будет линейной (векторной) борнологией.

Систему подмножеств $\mathscr{B}_0$ борнологии $\mathscr{B}$ на X называют *базой борнологии* (фундаментальной системой ограниченных множеств), если каждое множество из $\mathscr{B}$ содержится в некотором множестве из $\mathscr{B}_0$. Базу линейной борнологии можно всегда выбирать с некоторыми дополнительными свойствами из следующего известного утверждения (см., например, [2]).

Лемма 1. *Всякая линейная борнология на линейном пространстве X обладает базой ограниченных множеств $\mathscr{B}_0$ со следующими свойствами:*

B_1) *множества из $\mathscr{B}_0$ уравновешены;*

B_2) *для любых A, $B \in \mathscr{B}_0$ найдется такое $C \in \mathscr{B}_0$, что $A + B \subset C$;*

B_3) *$\lambda A \in \mathscr{B}_0$ для любых $A \in \mathscr{B}_0$ и $\lambda \in K$;*

B_4) *$\bigcup_{A \in \mathscr{B}_0} A = X$, т. е. $\mathscr{B}_0$ образует покрытие X.*

$\lhd$ Выберем в X какую-нибудь базу $\mathscr{D}$ борнологии $\mathscr{B}$. Рассмотрим теперь базу $\mathscr{D}_1$, состоящую из уравновешенных оболочек множеств из $\mathscr{D}$, которую еще расширим, в случае необходимости, присоединением всех множеств вида λA, $A \in \mathscr{D}_1$. В результате получим базу борнологии $\mathscr{B}_0$ с требуемыми свойствами, поскольку алгебраические операции ограничены, а B_2) выполняется автоматически. $\rhd$

Отметим, что верно и обратное утверждение: система множеств $\mathscr{B}_0$ в линейном пространстве X, имеющая свойства B_1)–B_4) является базой линейной борнологии, состоящей из всех подмножеств множеств из $\mathscr{B}_0$. Подробнее о линейных борнологиях и выборе их базы можно прочитать, например, в [2] (аналогичный выбор ограниченных множеств см., например, в [5, 7]).

2. Дифференцируемость отображений и голоморфные функции

При рассмотрении линейных борнологических пространств можно дополнительно предполагать, что ограниченные множества не содержат прямых (множеств вида λx_0, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x_0 \in X$ — какой-нибудь фиксированный элемент). Борнологии фон-Неймана отделимых линейных топологических пространств, как известно, этим свойством обладают. Это предположение удобно при введении производных в смысле борнологии.

Напомним, что отделимую линейную топологию на линейном пространстве X можно задать определением некоторого семейства неотрицательных функционалов

$$\mathscr{P} = \{p : X \to \mathbb{R}(x) : \ 0 \leqslant p(x) < \infty \quad \forall\, x \in X\}$$

со следующими свойствами:

1) для любого $x \in X$ существует $p \in \mathscr{P}$ такой, что $p(x) \neq 0$;

2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ для любых $p \in \mathscr{P}$, $x \in X$;

3) для любых p_1, $p_2 \in \mathscr{P}$ и $\varepsilon > 0$ существует $p \in \mathscr{P}$, для которого $\max_{i=1,2} p_i(x) \leqslant \varepsilon p(x)$ при всех $x \in X$;

4) для любого $p \in \mathscr{P}$ существует такой $p_1 \in \mathscr{P}$, что $p(x+y) \leqslant p_1(x) + p_2(y)$, x, $y \in X$.

Базис окрестностей нуля этой топологии состоит из множеств

$$U_{p\varepsilon} = \{x \in X : p(x) \leqslant \varepsilon\}, \quad p \in \mathscr{P}, \ \varepsilon > 0.$$

С другой стороны, если отделимая линейная топология на X задана, то всегда найдется базис окрестностей нуля $\mathscr{U} = \{U\}$ такой, что семейство функционалов

$$\mathscr{P} = \{p_U(x) = \inf\{\lambda \geqslant 0 : x \in \lambda U\}, \quad x \in X, \ U \in \mathscr{U}\}$$

имеет свойства 1)–4).

Заметим, что в случае, когда для каждого функционала $p_U(\cdot)$ существует $c(U) > 0$ такое, что вместо 4) выполняется более сильное свойство

$$p_U(x+y) \leqslant c(U)[p_U(x) + p_U(y)], \quad x, y \in X,$$

то пространство X называют *локально псевдовыпуклым пространством* (см., например, [4]).

Хорошо известно, что на некоторых даже локально псевдовыпуклых пространствах отсутствуют (отличные от тождественно равного нулю) непрерывные линейные функционалы. Поэтому производные Фреше отображений линейных топологических пространств определяют не как линейные операторы, а как однородные степени 1 (см., например, [6]).

Напомним, что функцию $f(x)$, определенную на X со значениями в Y называют *однородной степени* n, если $f(\lambda x) = \lambda^n f(x)$, $x \in X$. В линейных борнологических пространствах могут рассматриваться следующие (варианты) определений производных, аналогичным производным Гато и Фреше.

Пусть X и Y — линейные борнологические пространства и $f : X \to Y$ — ограниченное отображение. Отображение f будем рассматривать на некотором множестве $\mathscr{D} \subset X$, которое обладает свойством звездности относительно каждой своей точки, т. е. для каждой пары точек x, h таких, что $x \in \mathscr{D}$ и $x + h \in \mathscr{D}$ следует, что существует такое число $\rho(x,h) > 0$, что $x + \lambda h \in \mathscr{D}$ для всех $\lambda \in [0, \rho(x,h)]$.

Определение 1. Будем говорить, что при сделанных предположениях функция f в каждой точке $x \in \mathscr{D}$ дифференцируема по Гато (G — дифференцируема в смысле борнологии), если существует уравновешенное ограниченное множество B, не содержащее прямых, такое, что для каждой пары x, h, $x+h \in \mathscr{D}$, существует элемент

$$\delta f(x,h) = \delta_x^h f = \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\left[f(x+\lambda h) - f(x)\right] \in \bigcup_{\mu>0} \mu B$$

в том смысле, что

$$\left\| \frac{1}{\lambda}[f(x+\lambda h) - f(x)] - \delta f(x,h) \right\|_B \to 0 \ \text{ при } \ \lambda \to 0,$$

где

$$\|y\|_B = \inf\{\mu > 0 : \, y \in \mu B\}, \quad y \in Y.$$

$\delta f(x,h)$ называется *первой вариацией* $f(x)$ *по направлению* h.

Так как $\delta f(x,h)$, согласно такому определению, является однородной функцией степени 1 по h и B не содержит прямых, она определяется единственным образом. В самом деле, если предположить, что имеются два ограниченных множества B_1, B_2, которые определяют $\delta_1 f(x,h) \neq \delta_2 f(x,h)$, то, переходя к ограниченному множеству $B_1 \cup B_2$, которое снова будет уравновешенным и не содержит прямых, получим противоречие

$$\|\delta_1 f(x,h) - \delta_2 f(x,h)\|_{B_1\cup B_2} = 0,$$

т. е. $\delta_1 f(x,h) = \delta_2 f(x,h)$, $h \in B_1 \cup B_2$.

Определение 2. Пусть f — отображение из X в Y, определенное на множестве $\mathscr{D} \subset X$, где X, Y — линейные борнологические пространства, а $\mathscr{D}$ обладает свойством звездности, описанным выше. Будем говорить, что f дифференцируемо по Фреше (F-дифферецируемо) борнологически в $\mathscr{D}$, если существуют ограниченное отображение $\delta_F f(x,h)$ (однородная функция степени 1) и ограниченное уравновешенное множество B, не содержащее прямых, такие, что

$$\lim_{\|h\|_B\to 0} \frac{1}{\|h\|_B} \cdot \|f(x+h) - f(x) - \delta_F f(x,h)\|_{f(B)^\sim} = 0$$

для каждой точки $x \in \mathscr{D}$, где $f(B)^\sim$ — уравновешенная оболочка (ограниченного) множества $f(B)$ в Y.

Стандартными рассуждениями можно проверить, что если f дифференцируемо по Фреше борнологически в точке x, то $\delta_F f(x,h)$, которую будем называть *борнологической производной*, определяется единственным образом.

В самом деле, отправляясь от противного, когда имеются ограниченные множества B_1, B_2 и

$$f(x+h) - f(x) - \delta_{F,B_1} f(x,h) = u_1(x,h),$$

$$f(x+h) - f(x) - \delta_{F,B_2} f(x,h) = u_2(x,h),$$

где

$$\lim_{\|h\|_{B_i}\to 0} \frac{\|u_i(x,h)\|_{f(B_i)^\sim}}{\|h\|_{B_i}} = 0, \quad i = 1,2,$$

получаем

$$\lim_{\|h\|_{B_1\cap B_2}\to 0} \frac{\|\delta_{F,B_1} f(x,h) - \delta_{F,B_2} f(x,h)\|_{f(B_1)^\sim \cup f(B_2)^\sim}}{\|h\|_{B_i\cap B_2}} = 0.$$

Вполне возможно, что пространства гладких и аналитических функций на борнологических или локально псевдовыпуклых пространствах более удобно строить, опираясь на понятия производных в смысле борнологии или других аналогов производных Гато, Фреше или Лорха (см., например, [6]) для линейных топологических пространств.

Все структурные вопросы линейных топологических пространств, связанные с заданной в них топологией, могут решаться в терминах однородных полунепрерывных снизу функционалов, являющихся функционалами Минковского множеств некоторого базиса окрестностей нуля с дополнительными свойствами (как было указано выше). Из-за отсутствия непрерывных выпуклых полунорм в пространствах типа $L_p(a, b)$, $0 < p < 1$, полноценных аналогов понятий производных и голоморфности отображений указанных пространств нет, а известные варианты обобщений этих понятий довольно сложны (см., например, [1, 6] и др.).

3. Замечания о строении пространств голоморфных функций, определенных на пространствах Фреше

Перейдем к рассмотрению отображений локально выпуклых пространств. В классической теории функций нескольких комплексных переменных есть два способа введения голоморфности на открытом множестве. Первый предполагает исходное положение о дифференцируемости в смысле комплексного анализа в каждой точке, а второй — возможности представления функции в виде суммы степенного ряда, сходящегося к функции в окрестности каждой точки этого открытого множества (см., например, [9, 10]).

Оба эти подхода использовались при введении так называемой *бесконечномерной голоморфности*, когда определялись голоморфные отображения банаховых и, более общим образом, локально выпуклых пространств (см., например, [6, 11, 12] и др.).

Пространства голоморфных функций на бесконечномерных пространствах используются в разных разделах анализа, связанных с теорией обобщенных функций, теорией меры и их приложениями в математической физике (см., например, [7, 8] и альтернативные конструкции в [13]).

Пусть E, F — локально выпуклые пространства. Рассмотрим в линейном пространстве F^E (произведение множества $\operatorname{card} E$ экземпляров F), представляющем собой семейство всех отображений из E в F, счетный набор подпространств $P(^nE, F)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, которые определяются следующим образом: $P(^0E, F)$ есть множество отображений, при которых все E переходит в один элемент из F (ясно, что это пространство можно отождествить с F), $P(^1E, F) = \mathscr{L}(E, F)$ — пространство непрерывных линейных отображений из E в F, при $n \geqslant 2$ $P(^nE, F)$ обозначает пространство непрерывных n-однородных полиномов из E в F. Напомним, что под полиномами подразумеваются конечные суммы однородных полиномов, а n-однородным полиномом на E называют отображение вида $P = L \circ \Delta$, где $\Delta :\, E \to E^n$ — диагональное отображение, т. е. $\Delta(e) = (\underbrace{e, \ldots, e}_{n})$, а L есть n-линейное отображение из E^n в F. Путем замыкания части ($n \geqslant n_0$) или всего набора подпространств $P(^nE, F)$, $n = 0, 1, \ldots$, в различных топологиях, используемых в пространствах непрерывных отображений, могут быть получены пространства гладких (по Фреше) и голоморных функций. Чаще всего во всех указанных подпространствах выбираются так называемые *σ-топологии*, в которых в качестве определяющего семейства σ множеств в E берется какая-нибудь борнология (или базис борнологии), например, семейство всех абсолютно выпуклых предкомпактных множеств.

Окрестности в соответствующем подпространстве F^E определяются парами (S, V), где $S \in \sigma$ и V принадлежит базису $\mathscr{V}$ окрестностей нуля в F, как

$$\mathscr{M}(S, V) = \{T : E \to F : T(S) \subset V\}.$$

Определение 3. Отображение $T : E \to F$ называют *σ-голоморфным* (при условии выбора σ-топологии), если существует последовательность $P_n \in P({}^nE \to F)$, $n = 0, 1, \ldots$, такая, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n e$$

сходится к $T(e)$ при любом $e \in E$ равномерно на множествах $S \in \sigma$, т. е. в топологии, определяемой базисом окрестностей $\mathscr{M}(S, V)$, $S \in \sigma$, $V \subset \mathscr{V}$. Разложение

$$T(e) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n e$$

называют *разложением в ряд Тэйлора*.

Заметим, что в случае $\mathbb{C}$-значных голоморфных функций определение целиком зависит от выбора борнологии σ. К примеру, если в качестве σ берется система абсолютно выпуклых предкомпактных множеств, то соответствующие голоморфные функции будут непрерывны, а, значит, и ограничены на предкомпактных множествах. Более общим образом голоморфные функции определяются на бесконечномерных пространствах как функции аналитические (голоморфные) в обычном смысле на любом конечномерном подпространстве, что, примерно, соответствует поточечной сходимости разложения в ряд Тэйлора. Эквивалентное, согласно теореме Гартогса — Осгуда, определение получается, если потребовать, чтобы для любых $e_1,\ e_2 \in E$ функция $f(e_1 + ze_2)$, $z \in \mathbb{C}$, была голоморфной функцией одного переменного z. Аналогично определяют голоморфное отображение $T : E \to F$ как обладающее свойством: при любых $e_1, e_2 \in E$ и $\varphi \in F'$ функция $\varphi(T(e_1 + ze_2))$ является голоморфной функцией от z.

Легко построить пример голоморфной в указанном смысле $\mathbb{C}$-значной функции, которая будет неограниченной на компактном множестве и не будет σ-голоморфной, где σ — любая борнология, содержащая все предкомпактные множества.

Пусть на пространстве Кёте

$$E = l_1[a_r(n)] = \left\{\xi = (\xi_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| a_r(n) \doteq |\xi|_r < +\infty,\ r \in \mathbb{N}\right\}$$

с топологией, задаваемой системой полунорм $(|\cdot|_r)$ (можно предполагать $0 \leqslant a_r(n) \leqslant a_{r+1}(n)$, $r, n \in \mathbb{N}$ и тогда $|\cdot|_r \leqslant |\cdot|_{r+1}$ для любого r), рассматривается $\mathbb{C}$-значная функция $f(\xi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\xi_n - b_n^{-1}(1+\alpha_n)}$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\alpha_n \neq 0$, $b_n = na_n(n)$, $n \in \mathbb{N}$. На компактном множестве $B = \left\{\xi = (\xi_n) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n| b_n \leqslant 1\right\}$ эта функция аналитична как сумма дробно-линейных функций, равномерно сходящаяся на конечномерных пространствах, но не будет ограничена на подмножестве B, состоящем из точек $(0, \ldots, 0, b_n^{-1}, 0, \ldots)$, $n = 1, 2, \ldots$

Этот пример еще показывает, что голоморфные функции не обязательно непрерывны и ограничены даже на компактных множествах. При изучении строения пространств голоморфных функций, определенных на пространствах Фреше, т. е. полных метризуемых локально выпуклых пространствах, часто дополнительно к голоморфности накладывается требование непрерывности отображения в каждой точке.

В случае, когда рассматриваются σ-голоморфные отображения, определенные на метризуемом локально выпуклом пространстве с борнологией σ, содержащей все абсолютно выпуклые предкомпактные множества, требование непрерывности излишне, поскольку оно автоматически вытекает из условия σ-голоморфности и следующего утверждения.

Лемма 2 [5, 14]**.** *Каждое метризуемое локально выпуклое пространство E допускает представление в виде индуктивного предела нормированных пространств*

$$E_A = \left\{ e \in \bigcup_{n=1}^{\infty} nA, \quad \|e\|_A = \inf\{\lambda > 0 : e \in \lambda A\} \right\}$$

относительно тождественных вложений J_A: $E_A \to E$, где A пробегает всю совокупность $\mathscr{K}$ замкнутых абсолютно выпуклых предкомпактных множеств из E.

$\lhd$ Будем обозначать индуктивный предел из формулировки леммы через $G = \operatorname{ind} \lim\limits_{A \in \mathscr{K}} E_A$. Так как тождественные вложения $\widetilde{J}_A : E_A \to E$ непрерывны в исходной топологии на E, согласно определению топологии индуктивного предела (сильнейшей локально выпуклой топологии, при которой эти вложения непрерывны), тождественное отображение $E \to G$ — непрерывно. Покажем, что и тождественное отображение непрерывно.

Поскольку E метризуемо и борнологично (пространство Макки) (см., например, [5, с. 122–123]), достаточно убедиться, что любая последовательность $(x_n) \subset E$, которая сходится к нулю в исходной топологии E сходится к нулю и в G. Если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

и топология E задается системой полунорм $(\|\cdot\|_r)_{r=1}^{\infty}$, $\|\cdot\|_r \leqslant \|\cdot\|_{r+1}$, то $\|x_n\|_r \to 0$ $(n \to \infty)$ для любого $r \in \mathbb{N}$. Выберем последовательность $(r(n))_{n=1}^{\infty}$, $r(n) \to \infty$, так, что $\|x_n\|_{r(n)} \to 0$ при $n \to \infty$ и положим $\lambda_n = \sqrt{\|x_n\|_{r(n)}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим замкнутую абсолютно выпуклую оболочку L последовательности $(\lambda^{-n} x_n)_{n=1}^{\infty}$. Тогда L предкомпактно (см., например, [5, гл. 2, с. 80]) и $\|x_n\|_L \leqslant \lambda_n$, так как $\|\lambda^{-n} x_n\|_L \leqslant 1$. Следовательно, последовательность (x_n) сходится в топологии индуктивного предела G. Тождественное отображение $E \to G$ поэтому является ограниченным (ограниченные в E множества будут ограничены и в G), а, значит (ввиду борнологичности), и непрерывным. $\rhd$

Очевидно, что σ-голоморное отображение метризуемого локально выпуклого пространства E будет непрерывно на предкомпактных подмножествах, которые все входят в σ, а значит, в силу леммы 2, и на всем E.

Перейдем к рассмотрению пространств $\mathscr{H}_\sigma(E)$ σ-голоморфных комплекснозначных функций как подпространств $\mathscr{H}(E)$ голоморфных по Гато функций.

Для удобства проведения стандартных конечномерных рассмотрений обычно используют следующие обозначения для $f \in \mathscr{H}(E)$, $f : E \to \mathbb{C}$:

$$f_{e;u}(z) \equiv f(e + z_1 u_1 + \ldots + z_n u_n), \text{ где } u = (u_1, \ldots, u_n) \in E^n,$$

$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ и $e \in E$. Простейшие свойства пространства $\mathscr{H}(E)$ такие, как замкнутость относительно сдвига, умножения на функцию из $\mathscr{H}(E)$, а также частного дифференцирования в том смысле, что для любого $u \in E$

$$\partial_u f(e) \equiv \frac{d}{dz} f_{e;u}(0)$$

и функция $\partial_u f : E \to \mathbb{C}$ принадлежит $\mathscr{H}(E)$ легко получаются привлечением простых соображений (см., например, [6, гл. 3]). Для любого $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$ и любого мультииндекса $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ производная $\partial_u^m f$ удовлетворяет равенству $\partial_u^m f(e) = \partial^m f_{e;u}(0)$. Поскольку порядок дифференцирования не играет роли при каждом $e_0 \in E$ отображение

$$e = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \to \partial_e f(e_0) = \partial_{e_1, \ldots, e_n}^{(1, \ldots, 1)} f(e_0)$$

является симметрической n-линейной формой, а значит, $\partial_{e,e,\ldots,e}^n f(e_0)$ есть однородный полином степени n. Как известно, любая функция $f \in \mathscr{H}(E)$ разлагается в аналог степенного ряда

$$f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial_{(\cdot)}^n f(0), \tag{1}$$

сходящийся поточечно. Такое представление единственно, т. е. когда $f \in \mathscr{H}(E)$ и

$$f(e) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(e), \text{ где } P_n \in \mathscr{P}(^n E, \mathbb{C}) = \mathscr{P}(^n E), \text{ то } P_n(e) = \frac{1}{n!} \partial_e^n f(0).$$

Это получается, как и в классическом комплексном анализе, из замечания о том, что

$$f(ze) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(e) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial_e^n f(0) z^n$$

для всех $e \in E$ и $z \in \mathbb{C}$ (подр. см., например, в [6, гл. 3, 26]).

Далее нам потребуется формула Коши:

$$\partial_u^m f(e) = \frac{m!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{C_1} \cdots \int\limits_{C_k} \frac{f(e + \zeta_1 u_1 + \ldots + \zeta_n u_n)}{\zeta_1^{m_1+1} \cdot \ldots \cdot \zeta_n^{m_n+1}} d\zeta, \quad e \in E,$$

где $u = (u_k)_{k=1}^n \in E^n$, $m = (m_k)_{k=1}^n \in \mathbb{N}^n$, а C_k, $k = 1, \ldots, n$, могут быть гладкие кривые, например, окружности, обходящие вокруг начала координат в комплексной плоскости.

Пусть теперь в линейном пространстве E задана линейная борнология σ, содержащая абсолютно выпуклые множества, удовлетворяющие также свойствам, перечисленным в лемме 1. При рассмотрении естественных борнологий в локально выпуклых пространствах (например, борнологий фон Неймана или борнологий выпуклых множеств в нормированных пространствах) эти свойства обусловлены согласованием борнологий с линейной структурой и абсолютной выпуклостью множеств канонического базиса окрестностей нуля.

Пространство $\mathscr{H}_\sigma(E)$ $\mathbb{C}$-значных σ-голоморфных функций наделяется топологией равномерной сходимости на множествах борнологии σ, т. е. порождается полунормами

$$\|f\|_A = \sup_{e \in A} |f(e)|, \quad A \in \sigma.$$

Согласно сделанному выше замечанию о единственности аналога разложения в степенной ряд, для σ-голоморфных функций справедливо представление (1), которое сходится уже равномерно на всех множествах из σ. Можно утверждать большее, если принять во внимание однородность полиномов, входящих в разложение (1). В теореме, приведенной ниже, E может быть локально выпуклым пространством или просто линейным пространством с выделенной борнологией.

Теорема 1. *Пусть E — линейное пространство, в котором определена линейная выпуклая борнология σ, т. е. выделена система абсолютно выпуклых множеств со свойствами, описанными в лемме 1. Тогда $\mathscr{H}_\sigma(E)$ является полным локально выпуклым пространством, а именно, проективным пределом*

$$\mathscr{H}_\sigma(E) = \operatorname{proj}\lim_{A\in\sigma} \mathscr{H}_A(E) = \bigcap_{A\in\sigma} \mathscr{H}_A(E),$$

где $\mathscr{H}_A(E)$ есть пространство всех аналитических функций, ограниченных на A, относительно естественных тождественных вложений. Кроме того, для любой функции $f \in \mathscr{H}_\sigma(E)$ имеем $\partial^n_{(\cdot)} f(0) \in \mathscr{H}_\sigma(E)$, $n = 0, 1, \ldots$, и разложение (1) (*аналог ряда Тэйлора*) *сходится абсолютно в $\mathscr{H}_\sigma(E)$.*

$\lhd$ Описанная выше операция дифференцирования не выводит из пространства $\mathscr{H}_\sigma(E)$, что непосредственно вытекает из формулы Коши

$$\sup_{e\in A} |\partial_u f(e)| = \sup_{e\in A} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(e + (\exp i\theta)u) \exp(-i\theta) d\theta \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{e\in A, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} |f(e + (\exp i\theta)u)| = \|f\|_{\widetilde{A}}, \text{ где } \widetilde{A} = A + \bigcup_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} (\exp i\theta)u.$$

Так как борнология σ содержит множество $A_1 \supset \widetilde{A}$, то при любом $A \in \sigma$ существует $A_1 \in \sigma$, при котором $\|\partial_u f\|_A \leqslant \|f\|_{A_1}$ и отображение $\partial_u(\cdot) : f \to \partial_u f$ непрерывно в $\mathscr{H}_\sigma(E)$. Пусть теперь $A \in \sigma$ и $r > 1$. Так как A абсолютно выпукло, имеем $rA \supseteq A$ и, согласно формуле Коши, получаем неравенства $|\partial^n_e f(0)| \leqslant \frac{n!}{r^n} \|f\|_{rA}$, $e \in A$. Это означает непрерывность отображения $\partial^n_{(\cdot)} : f \to \partial^n_{(\cdot)} f(0) \in \mathscr{H}_\sigma(E)$ с оценкой: для любого A существует $\widetilde{A}$

$$\|\partial^n_{(\cdot)} f(0)\|_A \leqslant \frac{n!}{r^n} \|f\|_{\widetilde{A}}, \quad n = 0, 1, \ldots, \ \widetilde{A} = rA.$$

Абсолютная сходимость разложения (1) следует теперь из объединения этих оценок

$$\sum_n \frac{1}{n!} \|\partial^n_{(\cdot)} f(0)\|_A \leqslant \|f\|_{rA} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} = \frac{r}{(r-1)} \|f\|_{rA} < +\infty.$$

Заметим, что для суммы однородных полиномов $\sum\limits_n P_n$ ($P_n \in \mathscr{P}(^n E)$) условие:

$$\sum_n \|P_n\|_A < +\infty$$

для любого $A \in \sigma$ сильнее условия равномерной сходимости $\sum\limits_n P_n$ на каждом ограниченном множестве $A \in \sigma$ (т. е. условия, при котором $\sum_n P_n = f \in \mathscr{H}_\sigma(E)$). $\rhd$

Из характера сходимости разложения (1) (в ряд Тэйлора) можно судить о блочном строении пространств голоморфных функций. Блоками являются пространства n-однородных полиномов $\mathscr{P}({}^nE)$, которые исследуются и самостоятельно (см., например, [15]). В случае, когда в качестве E берутся пространства Кёте числовых последовательностей, все пространства $\mathscr{P}({}^nE)$ могут иметь безусловный базис, и тогда безусловный базис существует в соответствующем пространстве голоморфных функций.

Наличие одного только разложения (1) в ряд Тэйлора позволяет для пространств голоморфных функций на довольно общих пространствах (с выделенной борнологией) без предположения о наличии в них базиса получить ряд утверждений, аналогичных отдельным классическим фактам, как например, частичный аналог теоремы Пэли — Винера — Шварца [7]. Вместо базиса при этом подходе использовались биортогональные системы, а «глобальные» результаты получались за счет некоторых «размерностно-инвариантных» соображений [7, лемма 4.12].

Далее будем рассматривать пространства голоморных функций на пространствах Кёте числовых последовательностей. Этому разделу бесконечномерной голоморфности посвящено уже большое число работ (см., например, [11, 12, 16, 17]). Сравнительно хорошо изучены случаи, когда голоморфные функции определяются на ядерных пространствах Фреше с базисом, либо на открытых подмножествах сильного сопряженного к ядерному пространству Кёте — Фреше. Известно, что в пространстве непрерывных голоморфных функций на пространстве Фреше E с базисом система мономов (z^m), здесь z^m есть отображение $E \ni z = (z_k)_{k=1}^{\infty} \to z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot z_{k(m)}^{m_{k(m)}}$, $m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} = \{m = (m_k)_{k=1}^{\infty} : (\exists\, k(m))\ m_k = 0 \text{ при } k > k(m)\}$ является абсолютным базисом в топологии равномерной сходимости на всех ограниченных множествах из E тогда и только тогда, когда E ядерно, т. е. является ядерным пространством Кёте [16, 17].

Для этого случая дано представление пространства $\mathscr{H}_\sigma(E)$ в виде пространства Кёте [18]. Еще раньше были известны и некоторые другие реализации пространств целых и голоморфных фкунклий на открытых множествах сопряженного пространства [19, 20]. Параллельно изучались пространства голоморфных функций на банаховых пространствах. В работе [14], в частности, доказано, что система мономов $\{z^m : m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}\}$ является равностепенно непрерывным безусловным базисом Шаудера для пространства $\mathbb{C}$-значных голоморфных функций на l_1 с топологией равномерной сходимости на компактных множествах, т. е. в $\mathscr{H}_\sigma(l_1)$, где σ — борнология абсолютно выпуклых компактных множеств в l_1.

Приведем результат о базисности системы мономов, который можно рассматривать как развитие и обобщение отдельных утверждений [14, 18].

Предварительно напомним, что *монтелевским пространством* называют отделимое бочечное пространство, каждое замкнутое ограниченное подмножество которого компактно. Пространство Кёте $l_p[a_r(n)]$, $p \geqslant 1$ — монтелевское, если выполнено условие:

$$\forall\, r \quad \exists\, s(r) \in \mathbb{N} : \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_r(n)}{a_{s(r)}(n)} = 0.$$

Теорема 2. *Система мономов $\{z^m : m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}\}$ является равностепенно непрерывным безусловным базисом в $\mathscr{H}_\sigma(l_1[a_r(n)])$, где σ — борнология абсолютно выпуклых ограниченных подмножеств в монтелевском пространстве Кёте $E = l_1[a_r(n)]$.*

$\lhd$ Предварительно заметим, что систему полунорм $(|\cdot|_r)$, определяющую топологию в E, всегда можно предполагать выбранной так, что

$$|e|_r = \sum_{n=1}^{\infty} |e'_n(e)| a_r(n) \leqslant \frac{1}{2^r} |e|_{r+1}, \quad r = 1, 2, \ldots, \quad e \in E,$$

где $e'_n(\cdot)$ — координатные функционалы базиса ортов (e_n).

С использованием такого выбора системы полунорм в [21] показано, что в монтелевском пространстве Кёте $E = l_p[a_r(n)]$, $p \geqslant 1$, любое предкомпактное множество содержится в p-эллипсоиде вида

$$K_a = \left\{ e = (e'_k(e)) : \sum_{k=1}^{\infty} |e'_k(e)|^p \frac{1}{a_k^p} \leqslant 1 \right\},$$

где (a_k) удовлетворяет условию: $\exists\, (r(n))_{n=1}^{\infty}$, $r(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ $(r(n) \in \mathbb{N})$

$$a_n < \frac{1}{a_{r(n)}(n)}, \quad n > N.$$

Поэтому базу борнологии компактных множеств в пространстве $l_p[a_r(n)]$ можно считать состоящих из p-эллипсоидов указанного вида. Кроме того, если K_a — компактный p-эллипсоид, то

$$a = b \cdot \alpha, \quad a_n = 2^{r(n)} a_n \cdot \frac{1}{2^{r(n)}} = b_n \cdot \alpha_n,$$

где K_b снова компактный p-эллипсоид, а

$$\alpha_n = \frac{1}{2^{r(n)}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ввиду

$$a_n < \frac{1}{a_{r(n)}(n)} \leqslant \frac{1}{2^{r(n)} a_{r(n)-1}(n)},$$

$n > N$. За счет умножения множеств K_a или K_b на подходящие константы, можно добиться, чтобы указанные неравенства были справедливы для всех n и $r(n) \geqslant 1$. Нам потребуются еще модификации оценок норм мономов.

Лемма 3 [14, 18]**.** *В пространстве $l_p(a^{-1})$ нормы мономов равны*

$$\|z^m\| = \left(\frac{m^m}{|m|^{|m|}} \right)^{\frac{1}{p}} a^m \text{ для каждого } m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})},$$

где $\|f\| = \sup\{|f(z)| : z \in l_p, z\| \leqslant 1\}$.

Пусть $f \in \mathscr{H}(l_1[a_r(n)])$, $f \neq 0$, $f(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}} c_m z^m$ — мономиальное разложение f и $\|f\|_{K_a} = \sup\{|f(z)| : z \in K_a\}$ — полунорма, определяемая компактным эллипсоидом $K_a \subset l_1[a_r(n)]$. Для выбранного произвольно $\varepsilon > 0$ и фиксированного $q > 0$, считая для $a = (a_n)$ $(a_n \to 0)$ выполненными условия, описанные перед леммой, найдем сначала $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\frac{1}{2^{r(n)}} < \frac{\varepsilon q}{(1+q)\|f\|_{K_b}} \text{ для } n > n_0 \quad (b_k = 2^{r(k)} e(1+q) a_k),$$

а затем n_1 такой, что

$$\left(\sup_k \frac{1}{2^{r(k)}} \right)^n < \frac{\varepsilon q}{(1+q)\|f\|_{K_b}} \text{ при } n > n_1.$$

В мономиальном разложении f выделим конечное множество

$$J_0 = \left\{ m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} : \, |m| \leqslant n_1 \text{ и } m_j = 0 \text{ для } j > n_0 \right\}.$$

Если теперь $m \notin J_0$, то либо существует $j_0 > n_0$ с $m_{j_0} \geqslant 1$ и

$$\prod_j \frac{1}{2^{m_j r(j)}} = \frac{1}{2^{m_{j_0} r(j_0)}} \prod_{j \neq j_0} \frac{1}{2^{m_j r(j)}} < \left(\frac{\varepsilon q}{(1+q) \|f\|_{K_b}} \right)^{m_{j_0}} \leqslant \frac{\varepsilon q}{(1+q)\|f\|_{K_b}},$$

либо $|m| > n_1$ и тогда

$$\prod_j \frac{1}{2^{m_j r(j)}} \leqslant \prod_j \left(\sup_k \frac{1}{2^{r(k)}} \right)^{m_j} \leqslant \left(\sup_k \frac{1}{2^{r(k)}} \right)^{|m|} < \frac{\varepsilon q}{(1+q)\|f\|_{K_b}}.$$

Наконец, возьмем произвольное конечное множество $J \subset \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \setminus J_0$ и оценим соответствующую часть разложения f с использованием указанного выбора индексов и с привлечением оценок полунорм, получающихся из интегральной формулы Коши для коэффициентов (подробнее см. [14]):

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{m \in J} c_m z^m \right\|_{K_a} &\leqslant \frac{1+q}{q} \sup \left\{ |c_m| \frac{m^m}{|m|^{|m|}} [e(1+q)a]^m : m \in J \right\} \leqslant \\
&\leqslant \frac{1+q}{q} \sup \left\{ |c_m| \frac{m^m}{|m|^{|m|}} b^m \alpha^m : m \in J \right\} \leqslant \\
&\leqslant \frac{1+q}{q} \|f\|_{K_b} \sup_{m \in J} \prod_j \frac{1}{2^{m_j r(j)}} < \varepsilon \quad \left(\alpha_j = \frac{1}{2^{r(j)}} \right).
\end{aligned}$$

Из этих оценок следует безусловная сходимость мономиального разложения в топологии компактной сходимости. Так как выбор b (зависит только от a и q) не зависит от множества J, то отсюда следует равностепенная непрерывность базиса мономов. $\triangleright$

Приведенные рассуждения допускают обобщение на случай пространств $l_p[a_r(n)]$, $p > 1$, с использованием леммы 3 и технических приемов из [14, 18]. Для получения других свойств базиса мономов в рассматриваемых пространствах потребуется дополнительное исследование характера сходимости мономиальных разложений в пространствах m-однородных полиномов.

Литература

1. *Фрелихер А., Бухер В.* Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы.—М.: Мир, 1970.—168 с.
2. *Hogbe-Nlend H.* Theorie des bornologies et applications.—LNM; Springer, 1971.—144 p.
3. *Авербух В. И., Смолянов О. Г.* Различные определения производной в линейных топологических пространствах // Успехи мат. наук.—1968.—Т. 23, вып. 48.—С. 67—116.
4. *Rolewich S.* Metric linear spaces.—Dordrecht etc.: D-Reidel Publishing Company; Warszawa: PWN-Polich Scientific Publishers, 1984.—495 p.
5. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—257 с.
6. *Hille E., Phillips R. S.* Functional Analysis and Semi-Groups // Colloquium Publications.—Rhode Island: Providence, 1957.—V. 31.—796 p.
7. *Хренников А. Ю., Петерсон Х.* Теорема Пэли — Винера для обобщенных целых функций на бесконечномерных пространствах // Изв. РАН. Сер. мат.—2001.—Т. 65, № 2.—С. 201–224.

8. *Kondratiev Y., Streit L., Westerkamp W., Yan J.* Generalized Functions in Infinite Dimensional Analysis // Arxiv math.—2002.—V. 1, FA/0211196.—P. 1–45.
9. *Эрве М.* Функции многих комплексных переменных.—М.: Мир, 1965.—165 с.
10. *Нарасимхан Р.* Анализ на действительных и комплексных многообразиях.—М.: Мир, 1971.—232 с.
11. *Chae S. B.* Holomorphy and calculus in normed spaces // Pure and Appl. Math.—New York etc.: Dekker, 1985.—V. 92.
12. *Dineen S.* Complex analysis in locally convex spaces // Math. Studies.—1981.—№ 57.
13. *Березанский Ю. М., Самойленко Ю. С., Ус Г. Ф.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных // В кн. «Теория операторов в функциональных пространствах».—Новосибирск: Наука, 1977.—С. 20–41.
14. *Ryan R. A.* Holomorphie Mappings on l_1 // Trans. Amer. Math. Soc.—1987.—V. 302, № 2.—P. 797–811.
15. *Defant A., Kalton N.* Unconditionality in spaces of m-hologeneons polynomials // Quart. J. Math.—2005.—V. 56.—P. 53–64.
16. *Boland P. J., Dineen S.* Holomorphic functions on fully nuclear spaces // Bull. Soc. Math. France.—1978.—V. 106.—P. 311–336.
17. *Dineen S., Timoney R. M.* Absolute bases, tensor products and a theorem of Bohr // Studia Math.—1989.—V. XCIV.—P. 227–234.
18. *Кондаков В. П.* О представлении в виде пространств Кёте пространств голоморфных функций // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 4.—С. 22–29.
19. *Borgens J., Meise R., Vogt D.* Entire functions on nuclear sequence spaces // J. Reine Angew. Math.—1981.—V. 322.—P. 196–220.
20. *Meise R., Vogt D.* Structure of spaces of functions on infinite-dimensional polydiscs // Studia Math.—1983.—V. 75.—P. 235–252.
21. *Кондаков В. П.* Вопросы геометрии ненормируемых пространств.—Ростов-на-Дону: РГУ, 1983.—72 с.

Статья поступила 12 февраля 2007 г.

Кондаков Владимир Петрович, д. ф.-м. н.
Южный федеральный университет,
Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
Ростов-на-Дону, 344090, РОССИЯ
E-mail: kond@math.rsu.ru