*Владикавказский математический журнал*
*2008, Том 10, выпуск 4, С. 61–75*

*УДК* **619.642**

# КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ЯДРОМ КОШИ

**Ш. С. Хубежты**

*К 100-летию со дня рождения*
*академика С. Л. Соболева*

Рассматриваются квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядром Коши с оценками погрешностей. Описываются основные методы аппроксимации сингулярных интегралов достаточно общих классов плотностей. Анализируются основные квадратурные формулы, построенные в последние годы.

**Ключевые слова:** сингулярный интеграл, квадратурная формула, погрешность формулы, плотность, сходимость вычислительного процесса.

В настоящее время теория сингулярных интегралов и сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши находит широкое приложение в математических и технических исследованиях. Широко известным приложениям интеграла Коши и сингулярных интегральных уравнений посвящены монографии Н. И. Мусхелишвили [17, 18], И. Н. Векуа [3], С. Г. Михлина [15], Ф. Д. Гахова [6], З. Пресдорфа [20] и др.

Важность «доведения до числа» решений сингулярных интегральных уравнений не раз подчеркивали известные математики, такие, как Н. И. Мусхелишвили, М. А. Лаврентьев, С. Г. Михлин, Х. Мультопп, И. Н. Векуа. Первые важные результаты в этом направлении были получены в работе М. А. Лаврентьева [11] в 1932 г.

В предисловии академика С. А. Чаплигина к этой работе было отмечено важное значение результатов указанного характера и было выражено пожелание, чтобы эти исследования были продолжены, в частности, в направлении упрощения приема и увеличения его сходимости. Отмечая важность указанной работы, академик Н. И. Мусхелишвили во всех изданиях своей монографии [18] отмечает: «Дальнейшая разработка этого и аналогичных методов приближенного решения сингулярных интегральных уравнений является, как мне кажется, одной из важнейших очередных задач теории этих уравнений».

Важными публикациями середины XX века стали работы Г. Н. Пыхтеева [21], В. В. Иванова [9] и ряда их последователей. С точки зрения дальнейшего развития и важностью приложений численных методов решения сингулярных интегральных уравнений особо следует отметить работы С. М. Белоцерковского 1954 года по аэродинамике, послужившее основой создания существенно нового, хорошо известного в настоящее время метода численного решения сингулярных интегральных уравнений — метода дискретных особенностей. Позже этот метод был существенно развит С. М. Белоцерковским и И. К. Лифановым [1], А. Ф. Матвеевым [13], Ю. В. Генделем [5], В. Ф. Пивнем [19] и их многочисленными учениками.

Из работ других авторов, посвященных приближенному вычислению сингулярных интегралов и решению интегральных уравнений, содержащих такие интегралы, следует отметить работы И. В. Бойкова [2], Б. Г. Габдулхаева [4], Д. Эллиота [35], В. А. Золотаревского [7, 8], Х. Мультоппа [36], В. И. Мусаева [16], Д. Г. Саникидзе [22–24], В. Н. Сейчука [25], Н. Я. Тихоненко [28], М. А. Шешко [29], А. А. Корнейчука [10] и их учеников. Несомненно, этот перечень не является полным и его можно было бы продолжить. Подробную библиографию по этим вопросам можно найти в специальных обзорных работах В. В. Иванова [9], Б. Г. Габдулхаева [4], С. М. Белоцерковского и И. К. Лифанова [1], И. К. Лифанова [12].

Особо следует отметить большой вклад академика Соболева С. Л. в теорию квадратурных и кубатурных формул [26, 27]. Благодаря ему квадратурные и кубатурные формулы были исследованы методами функционального анализа и оптимизированы.

## 1. Предварительные сведения. Сингулярные интегралы

Приведем некоторые определения, используемые в дальнейшем.

*Гладкой разомкнутой кривой* (*дугой*, *контуром*) $L$ называется линия, которую можно описать параметрически следующим образом:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad s_a \leqslant s \leqslant s_b, \tag{1.1}$$

где $s_a$ и $s_b$ — некоторые постоянные, а $x(s)$, $y(s)$ — непрерывно дифференцируемые функции на $[s_a,\, s_b]$, причем производные $x'(s)$, $y'(s)$ одновременно в нуль не обращаются. Различным значениям параметра $s \in [s_a, s_b]$ соответствуют различные точки кривой $L$.

*Гладким замкнутым контуром* $L$ называется гладкая кривая, у которой $x(s_b) = x(s_a)$, $y(s_b) = y(s_a)$, причем $x'(s_b - 0) = x'(s_a + 0)$ и $y'(s_b - 0) = y'(s_a + 0)$. Таким образом, в этом случае функции $x(s)$, $y(s)$, $x'(s)$, $y'(s)$ можно рассматривать как периодические с периодом $T = s_b - s_a$.

*Гладкой линией* (*простой*) называется совокупность конечного числа замкнутых или разомкнутых гладких контуров, не имеющих общих точек (в том числе концов).

*Кусочно-гладкой* называется кривая, состоящая из конечного числа гладких разомкнутых кривых, не имеющих общих точек, за исключением, быть может, концов, которые не являются точками возврата.

Функция $\varphi(t)$ переменной $t$ (вообще говоря, комплексной) удовлетворяет условию $H(\mu)$ (*условию Гёльдера степени* $\mu$) на данном множестве $T$ значений этой переменной, если для любых значений $t_1$ и $t_2$ из этого множества имеем

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqslant A|t_1 - t_2|^{\mu}, \tag{1.2}$$

где $A$ и $\mu$ — положительные числа ($0 < \mu \leqslant 1$), не зависящие от $t_1$ и $t_2$.

Гладкая кривая ($t = x(s)+iy(s)$, $s$ — естественный параметр) называется *ляпуновской*, если производные $x'(s)$, $y'(s)$ удовлетворяют условию Гёльдера с некоторым показателем.

Функция $\varphi(t)$, определенная на контуре $L$, принадлежит классу $H_r(\mu)$, $r$ — натуральное число, $0 < \mu \leqslant 1$, если $\varphi(t)$ имеет непрерывные производные вплоть до $(r-1)$-го порядка, а производная $r$-го порядка $\varphi^{(r)}$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\mu$.

*Сингулярным интегралом* называется выражение

$$S(\varphi; t_0) \equiv \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0}\, dt \quad (t_0 \in L), \tag{1.3}$$

где $L$ — некоторый заданный контур, а $\varphi(t)$ — заданная на $L$ функция. Его будем рассматривать в смысле главного значения, т. е.

$$S(\varphi; t_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{L-l} \frac{\varphi(t)}{t - t_0}\, dt,$$

где $l = t't''$, $t'$, $t'' \in L$ и $|t' - t_0| = |t'' - t_0| = \varepsilon$.

*Сингулярным оператором* (с ядром Коши) называется оператор, определенный формулой

$$K\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{K(t_0, t)\varphi(t)}{t - t_0}\, dt, \tag{1.4}$$

где $t$, $t_0$ — точки на контуре $L$, а $A(t_0)$, $K(t_0, t)$ — заданные на $L$ функции класса $H$.

*Сингулярным интегральным уравнением* (с ядром Коши) называется уравнение вида

$$A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0}\, dt + \frac{1}{\pi i} \int\limits_L k(t_0, t)\varphi(t)\, dt = f(t_0),$$

где $t_0 \in L$, $A(t_0)$, $B(t_0)$, $k(t_0, t)$, $f(t_0)$ — заданные на $L$ функции класса $H$, причем $A^2(t_0) - B^2(t) \neq 0$ на $L$.

## 2. Приближенное вычисление сингулярных интегралов

Известно, что при решении сингулярных интегральных уравнений особое место занимает аппроксимация сингулярного интеграла (1.3). Существуют различные методы в этом направлении. Отметим некоторые из них.

**2.1.** В [9] строятся квадратурные формулы с помощью представления плотности $\varphi(t)$ отрезком ряда Лорана:

$$\varphi(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k t^k, \tag{2.1}$$

где

$$a_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} \varphi(t_j) t_j^{-k}, \quad t_j = e^{\frac{2\pi i}{2n+1} j}. \tag{2.2}$$

Тогда, если $L$ — окружность единичного радиуса с центром в начале координат, получаем

$$S_n(\varphi; t_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k t_0^k - \sum_{k=-n}^{-1} a_k t_0^k. \tag{2.3}$$

Подставив в (2.3) вместо $a_k$ их значения из (2.2), после некоторого упрощения, получим

$$S_n(\varphi; t_0) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} \varphi_j \left[ 1 + \frac{i \sin(2n+1)\frac{\theta - \theta_j}{2}}{2 \sin \frac{\theta - \theta_j}{2}} \right], \tag{2.4}$$

где $\varphi_j = \varphi(t_j)$, $t_j = e^{i\theta_j}$, $\theta_j = \frac{2\pi i}{2n+1} j$, $t_0 = e^{i\theta}$.

**Теорема 1.** *Справедлива оценка*

$$|S(\varphi;t_0)-S_n(\varphi;t_0)|\leqslant\Big[2+\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\ln\frac{2}{\pi}(2n+1)\Big]\rho_n(\varphi), \tag{2.5}$$

*где величина* $\rho_n(\varphi)$ *— наименьшее отклонение на множестве многочленов вида* (2.1).

**2.2.** В [10] в случае простой замкнутой гладкой кривой $L$, если плотность $\varphi(t)$ определена на $L$, причем $|\varphi''|<C$, строится полигон

$$'\varphi(t)=\varphi_k\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k}+\varphi_{k+1}\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k},\quad t\in t_kt_{k+1},\ t_k\in L \tag{2.6}$$

и получается следующая оценка

$$\Big|S(\varphi;t_0)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{'\varphi(t)\,dt}{t-t_0}\Big|<O\Big(\frac{\ln n}{n^2}\Big). \tag{2.7}$$

**2.3.** В [21] строятся квадратурные формулы с помощью представления

$$\Phi_n(\varphi;t,t_0)=\varphi(t_0)+\sum_{\sigma=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\omega_\sigma(t)}{(t-t_{\sigma k})\omega'_\sigma(t_{\sigma k})}\cdot\frac{t-t_0}{t_0-t_{\sigma k}}[L_\nu(\varphi;t_0)-\varphi(t_{\sigma k})], \tag{2.8}$$

где $t\in\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}$, $\tau_\sigma=t_{\sigma0}$, $\omega_\sigma(t)=\prod\limits_{k=0}^{m-1}(t-t_{\sigma k})$, $\omega'_\sigma(t_{\sigma k})=\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{m-1}(t_{\sigma k}-t_{\sigma j})$, точки $t_{\sigma k}$ ($\sigma=0,1,\dots,n-1$; $k=0,1,\dots,m-1$) делят контур равномерно относительно длины, $L_\nu(\varphi;t_0)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа на дуге $\tau_\nu\tau_{\nu+1}$, которому принадлежит точка $t_0$.

Подставляя (2.8) в (1.3), получаем следующую квадратурную формулу

$$S_n(\varphi;t_0)=L_\nu(\varphi;t_0)+\sum_{\sigma=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}p_{\sigma k}\frac{L_\nu(\varphi;t_0)-\varphi(t_{\sigma k})}{t_0-t_{\sigma k}}, \tag{2.9}$$

которая в точках $t_{\nu j}$ ($\nu=0,1,\dots,n-1; j=0,1,\dots,m-1$) при $m=4$ принимает вид

$$\begin{aligned}S_n(\varphi;t_{\nu j})=&\Bigg[1+\sum_{\substack{\sigma=0\\ \sigma\neq\nu}}^{n-1}\sum_{k=0}^{2}\frac{p^*_{\sigma k}}{t_{\nu j}-t_{\sigma k}}+\sum_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{2}\frac{p^*_{\nu k}}{t_{\nu j}-t_{\nu k}}+p^*_{\nu j}\sum_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{3}\frac{1}{t_{\nu j}-t_{\nu k}}\Bigg]\varphi(t_{\nu j})\\&-\sum_{\substack{\sigma=0\\ \sigma\neq\nu}}^{n-1}\sum_{k=0}^{2}\frac{p^*_{\sigma k}}{t_{\nu j}-t_{\sigma k}}\varphi(t_{\sigma k})-\sum_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{2}\frac{p^*_{\nu k}}{t_{\nu j}-t_{\nu k}}\varphi(t_{\nu k})+p^*_{\nu j}\sum_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{3}d_{\nu k}(t_{\nu j})\varphi(t_{\nu k}),\end{aligned} \tag{2.10}$$

где

$$\begin{aligned}p_{\sigma k}=&\frac{1}{\pi i\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{3}(t_{\sigma k}-t_{\sigma j})}\Bigg\{\frac{\tau^4_{\sigma+1}-\tau^4_\sigma}{4}-\frac{\tau^3_{\sigma+1}-\tau^3_\sigma}{3}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{3}t_{\sigma j}\\&+\frac{\tau^2_{\sigma+1}-\tau^2_\sigma}{2}\sum_{\substack{k\neq j,j=0\\ j<j_0}}^{3}t_{\sigma j}t_{\sigma j_0}-(\tau_{\sigma+1}-\tau_\sigma)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{3}t_{\sigma j}\Bigg\},\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$p^*_{\sigma k} = \begin{cases} p_{\sigma k}, & \sigma = 0,1,\dots,n-1, \quad k = 1,2, \\ p_{\sigma-1,3} + p_{\sigma 0}, & \sigma = 0,1,\dots,n-1, \quad k = 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

$$d_{\nu k}(t_{\nu j}) = \prod_{\substack{j_0=0 \\ j_0\neq k,j}}^{3} (t_{\nu j} - t_{\nu j_0}) \Big/ \prod_{\substack{j_0=0 \\ j_0\neq k}}^{3} (t_{\nu k} - t_{\nu j_0}). \tag{3.13}$$

**Теорема 2.** *Если $\varphi \in H_r(\alpha)$, $L$ — гладкий замкнутый контур, то для погрешности квадратурной формулы* (2.9) *имеет место неравенство*

$$|S(\varphi; t_0) - S_n(\varphi; t_0)| \leqslant O\Big(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\Big). \tag{2.14}$$

**2.4.** В [22] рассматриваются сингулярные интегралы вида

$$S(\varphi; x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}\, dt \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1), \tag{2.15}$$

$$S^*(\varphi; x) = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{t-x}\, dt \quad (-1 < x < 1). \tag{2.16}$$

Для существования их в смысле главного значения Коши достаточно требовать, чтобы $\varphi(t)$ удовлетворяла на заданном отрезке условию Гёльдера. Изучаются следующие квадратурные процессы

$$S_n(\varphi; x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}\,U_{n-1}(x) - 1}{x - x_k}\, \varphi(x_k), \tag{2.17}$$

$$S^*_n(\varphi; x) \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}\,(H_{n-1}(x) + T_n(x) \ln \frac{1-x}{1+x}) - A_k n}{x - x_k}\, \varphi(x_k), \tag{2.18}$$

где

$$T_n(x) = \cos n \arccos x, \; U_{n-1}(x) = \frac{\sin n \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x_k = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi \quad (k = 1,2,\dots,n),$$

$$A_k = \frac{2}{n}\Big[1 - 2\sum_{r=1}^{\frac{m}{2}} \frac{1}{4r^2-1} \cos \frac{r(2k-1)}{n}\pi\Big],$$

$$m = \begin{cases} n-1, & n \text{ — нечетное}, \\ n-2, & n \text{ — четное}, \end{cases} \qquad H_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{T_n(x)}{x - x_k}.$$

Формулы (2.17) и (2.18) являются точными, когда $\varphi$ представляет произвольный многочлен степени не выше $n-1$.

**Теорема 3.** *Если $\varphi \in H_r(\alpha)$ $(r \geqslant 0, 0 < \alpha \leqslant 1)$, что при $n = 2,3,\dots$ справедливы неравенства*

$$\max_{x\in[-\xi,\xi]} |R_n(\varphi; x)| \leqslant (C_1 + C_2 \ln n) \frac{1}{(n-1)^{r+\alpha}}, \tag{2.19}$$

$$\max_{x\in[-\xi,\xi]} |R^*_n(\varphi; x)| \leqslant (C^*_1 + C^*_2 \ln n + C_3 \ln^2 n) \frac{1}{(n-1)^{r+\alpha}}, \tag{2.20}$$

*где $C_1$, $C_2$, $C_1^*$, $C_2^*$, $C_3^*$, — не зависящие от $n$ константы, известным образом определяемые постоянной Гёльдера функции $\varphi^{(r)}$; $R_n(\varphi;x)$ и $R_n^*(\varphi;x)$, соответственно, остаточные члены формул* (2.17) *и* (2.18), $[-\xi;\xi]$ $(0<\xi<1)$ *— произвольный отрезок содержащийся в* $(-1,1)$.

**2.5.** Одним из наиболее простых способов приближенного вычисления сингулярного интеграла является метод дискретных особенностей [12]. Суть этого метода состоит в следующем. Для сингулярного интеграла строится квадратурная формула

$$S_n(\varphi;t_{0j})=\frac{1}{\pi i}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(t_k)\Delta t_k}{t_k-t_{0j}}, \tag{2.21}$$

где $t_k=e^{i\theta_k}$, $t_{0k}=e^{i\theta_{0k}}$, $\theta_k=\frac{2\pi}{n}k$, $\theta_{0k}=\theta_k+\frac{\pi}{n}$, $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$, $k=1,2,3,\ldots,n$, т. е. имеем каноническое разбиение контура множествами $E=\{t_k\}(k=\overline{1,n})$ и $E_0=\{t_{0j}\}$ $(j=\overline{1,n})$.

**Теорема 4** [12]. *Пусть $\varphi$ удовлетворяет условию $H(\alpha)$ на $L$. Тогда выполняется неравенство*

$$\begin{gathered}|S(\varphi;t_{0j})-S_n(\varphi;t_{0j})|\leqslant\theta(t_{0j}),\quad j=1,2,\ldots,n,\\ \theta(t_{0j})=O\Big(\frac{\ln n}{n^\alpha}\Big)+|\varphi(t_{0j})|O\Big(\frac{1}{n}\Big).\end{gathered} \tag{2.22}$$

*В случае разомкнутого контура $L=[a,b]$ получается такая оценка*

$$|S(\varphi;t_{0j})-S_n(\varphi;t_{0j})|\leqslant O\left(\frac{h^\alpha|\ln h|+|\varphi(t_{0j}|h}{(t_{0j}-a)(b-t_{0j})}\right),\ \ h=\frac{b-a}{n+1}. \tag{2.23}$$

**2.6.** Эффективные оценки приближенного процесса построенного в [21], см. п. 2.3.

В оценке (2.14) ничего не оговорено на счет постоянных, присутствующих в последнем выражении. Мы поставили задачу сделать эффективные оценки для указанного процесса, т. е. оценить в нем существующие постоянные.

**Теорема 5** (см. [34]). *Если $\varphi(t)$ имеет на $L$ ( $L$ — замкнутая простая гладкая линия) непрерывные производные $(r-1)$-го порядка и производная $r$-го порядка удовлетворяет условию Гёльдера, то справедливо неравенство*

$$|S(\varphi;t_0)-S_n(\varphi;t_0)|\leqslant(C_1\ln n+C_2)\frac{1}{n^{r+\alpha}}, \tag{2.24}$$

*где*

$$C_1=\frac{(b-a)^{r+\alpha}H_\varphi^{(r)}p}{\pi(r-1)!}\left[1+3^{r+\alpha}p^m+\frac{2mp^{2m-1}}{min(x_{k+1}-x_k)^{m-1}}+\frac{3mp^{2m}}{min(x_{k+1}-x_k)^{m-1}}\right],$$

$$C_2=\frac{(b-a)^{r+\alpha}H_\varphi^{(r)}}{\pi(r-1)!}\left[3+\frac{mp^{m-1}}{\min\limits_k(x_{k+1}-x_k)^{m-1}}(\pi+\ln 2p^2)+\frac{6m(m-1)p^{2m-1}2^{r+\alpha}}{\min\limits_k(x_{k+1}-x_k)^{2m-2}}\right],$$

$p=\max\limits_{t\in L}\frac{|s-s_0|}{|t-t_0|}$ *— характеристика контура $L$, $H_\varphi^{(r)}$ — постоянная Гёльдера для функции $\varphi^{(r)}$, $\{x_k\}_{k=0}^{m-1}$ — некоторая система точек, заданных на отрезке $[0,1]$, $b-a$ — длина контура $L$.*

## 3. Квадратурные формулы интерполяционного типа

**3.1. Сингулярный интеграл на окружности.** Пусть функция $\varphi(t)$ принадлежит классу $H_r(\alpha)$ на окружности $L$ единичного радиуса с центром в начале координат. Рассмотрим для нее следующий многочлен:

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\varphi(t_k)\frac{t^{2n+1}-t_k^{2n+1}}{(t-t_k)t^n t_k^n}, \tag{3.1}$$

где точки $t_k$ разбивают окружность $L$ на $2n+1$ равных частей. С помощью деления многочлена на многочлен несложно показать, что $\varphi_n(t_k) = \varphi(t_k),\ k = 0,1,\ldots,2n$. Так как

$$\frac{1}{2n+1}\frac{t^{2n+1}-t_k^{2n+1}}{(t-t_k)t^n t_k^n} = \begin{cases} 1 & \text{при } t = t_k,\ k = 0,1,\ldots,2n, \\ 0 & \text{при } t = t_m,\ m \neq k, k = 0,1,\ldots,2n. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь сингулярный интеграл

$$S(\varphi;t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\,dt, \tag{3.2}$$

где $\varphi(t) \in H_r(\alpha)$ на окружности $L$. Обозначим $S_n(\varphi;t_0)$ функцию, получаемую из (3.2), если вместе $\varphi(t)$ в нее подставить многочлен $\varphi_n(t)$. Тогда можно написать приближенную формулу

$$S_n(\varphi;t_0) = \sum_{k=0}^{2n}\frac{\varphi(t_k)}{t_k-t_0}\frac{1}{2n+1}\left[2t_k - \frac{t_0^{2n+1}+t_k^{2n+1}}{t_0^n t_k^n}\right]. \tag{3.3}$$

**Теорема 6.** *Если $\varphi \in H_r(\alpha)$, то справедлива оценка*

$$|S(\varphi,t_{0m}) - S_n(\varphi,t_{0m})| \leqslant O\Big(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\Big),\quad m = 0,1,2,\ldots,2n. \tag{3.4}$$

**3.2. Сингулярный интеграл на отрезке.** Теперь рассмотрим интеграл

$$S(\varphi;x) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} p(t)\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt, \tag{3.5}$$

где $p(t) = (1+t)^p(1-t)^q$, $-1 < p,\ q < 0$, $\varphi(t) \in H_r(\alpha)$.

Если $p = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$, то в [34] построена следующая квадратурная формула:

$$S_n(\varphi;x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{x-x_j}\left(\sqrt{1-x_j^2}\,T_n(x) + \lambda_j(x)\right)\varphi(x_j), \tag{3.6}$$

где $\lambda_j(x) = \sqrt{1-x_j^2}\sum\limits_{\sigma=1}^{n} B_\sigma\frac{T_n(x)}{x-x_\sigma} + (-1)^j B_j n$, $B_\sigma = \frac{2}{n}\cos^2\frac{2\sigma-1}{4n}\pi$ $(\sigma = 1,2,\ldots,n)$, $x_j = \cos\frac{2j-1}{2n}\pi$.

**Теорема 7.** *Если $\varphi \in H_r(\alpha)$ $(r > 1, 0 < \alpha \leqslant 1)$ и $\gamma \in (1/2,1]$, то справедливо неравенство*

$$\|S(\varphi;x) - S_n(\varphi;x)\|_{H(\gamma-1/2)} \leqslant O\Big(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha+\gamma-1}}\Big), \tag{3.7}$$

*где $\|\cdot\|$ — гёльдеровская норма.*

**3.3.** Среди интерполяционных квадратурных формул (см. [29]) следует отметить формулы вида

$$S_n(\varphi;t_0)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}}\frac{\varphi_n^{(1)}(t)}{t-t_0}\,dt,$$

где $\varphi_n^{(1)}(t)$ — линейная аппроксимация функции $\varphi$ на дугах $t_kt_{k+1}$, $k=0,1,2,\ldots,n-1$, $t_k$ — точки гладкого разомкнутого контура $L=ab$.

**Теорема 8.** *Если $\varphi\in H(\alpha)$, $0<\alpha\leqslant 1, t_0\in L, L=a$ — гладкая разомкнутая дуга, то последовательность $S_n(\varphi;t_0)$ равномерно сходится к $S(\varphi;t_0)$ при $t_0\in L$ и справедлива оценка*

$$|S(\varphi,t_0)-S_n(\varphi;t_0)|\leqslant C\frac{\ln n}{n^\alpha},\quad t_0\in L, \tag{3.8}$$

*где $C$ — некоторая постоянная, не зависящая от $n$.*

## 4. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов, с наперед заданными узлами

В прикладных задачах часто возникает необходимость построения таких квадратурных формул, часть узлов которых задается заранее. Квадратурные формулы указанного вида впервые рассмотрел выдающий русский ученый XIX столетия А. А. Марков. Результаты А. А. Маркова обобщил В. И. Крылов. Но он ограничился лишь регулярными интегралами.

Теперь рассмотрим сингулярный интеграл вида (3.5). Для него построена следующая квадратурная формула [30]:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt\approx A(x)\varphi(-1)+\sum_{k=1}^{n}A_k(x)\varphi(x_k), \tag{4.1}$$

где

$$A(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\frac{\omega(t)}{\omega(-1)(t-x)}\,dt,$$

$$A_k(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\frac{(t+1)\omega(t)}{(t-x_k)(x_k+1)\omega'(x_k)}\frac{dt}{t-x},\quad k=1,2,\ldots,n,$$

$$\omega(x)=\frac{2^n\cdot n!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}P_n^{(\alpha,\beta)}(x),$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\Big((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\Big)$$

— многочлен Якоби, $\Gamma(x)$ — функция Эйлера.

Формула (4.1) имеет один наперед заданный узел $x=-1$.

Строится и такая формула

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt\approx B(x)\varphi(1)+\sum_{k=1}^{n}A_k(x)\varphi(x_k), \tag{4.2}$$

где

$$B(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\frac{\omega(t)}{\omega(1)(t-x)}\,dt,$$

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\frac{(t-1)\omega(t)}{(t-x_k)(x_k-1)\omega'(x_k)(t-x)}\,dt,$$

$k = 1, 2, \ldots, n$.

Формула (4.2) тоже имеет один фиксированный узел. Построена и такая формула

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt \approx A(x)\varphi(-1)+B(x)\varphi(1)+\sum_{k=1}^{n}A_k(x)\varphi(x_k), \tag{4.3}$$

где

$$A(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\frac{(t-1)\omega(t)}{(-2)\omega(-1)(t-x)}\,dt,$$

$$B(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\frac{(t+1)\omega(t)}{2\omega(1)(t-x)}\,dt,$$

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\frac{(t^2-1)\omega(t)}{(t-x_k)(x_k^2-1)\omega'(x_k)(t-x)}\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Отметим один частный случай. Пусть $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, т. е. $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Тогда для формулы (4.3) имеем

$$A(x) = \frac{(x-1)T_n(x)}{(-2)(-1)^n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{x-x_k}+\frac{B}{x-1}+\frac{A}{x+1}\right\}-\frac{A}{x+1},$$

$$B(x) = \frac{(x+1)T_n(x)}{2}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{x-x_k}+\frac{B}{x-1}+\frac{A}{x+1}\right\}-\frac{B}{x-1},$$

$$A_k(x) = \frac{(x^2-1)T_n(x)}{n(-1)^k\sqrt{1-x_k^2}(x-x_k)}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{x-x_j}+\frac{B}{x-1}+\frac{A}{x+1}\right\}-\frac{A_k}{x-x_k},$$

где $T_n(x)$ — многочлен Чебышева первого рода,

$$A = \begin{cases}0, & n>0,\\ \frac{1}{4}, & n=1,\end{cases} \qquad B = \begin{cases}0, & n>0,\\ \frac{1}{4}, & n=1,\end{cases} \qquad A_k = \begin{cases}\frac{1}{n}, & n>1,\\ \frac{1}{2}, & n=1.\end{cases}$$

**Теорема 9.** *Если $\varphi \in H_r(\lambda)$, то для погрешности справедливо представление*

$$|S(\varphi,x)-S_n(\varphi,x)| \leqslant O\Big(\frac{\ln n}{n^{r+\lambda-1/2}}\Big). \tag{4.4}$$

## 5. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов с применением внешних узлов

Пусть $L$ — замкнутый ляпуновский контур на плоскости и $\varphi(t)$ — заданная на $L$ (достаточно гладкая) функция. Под $t = t(s) = x(s) + iy(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant l)$ будем подразумевать уравнение $L$ относительно дуговой абсциссы $s$. Введем на $L$ систему равноотстоящих (по длине $L$) узлов $\{\tau_j\}_{j=1}^{2n}$ $(\tau_j = t(s_j), s_j = j\frac{l}{n})$. Подобно классическому методу дискретных особенностей (см. [1, 12]), ниже мы применим приближенную схему для интеграла вида (1.3) на основе двоякого разбиения контура $L$.

Заменим на каждой дуге $\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}$ $(\sigma = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ выражение $\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}$ линейным интерполянтом по схеме

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0} \approx \frac{t-\tau_{2\sigma+1}}{\tau_{2\sigma-1}-\tau_{2\sigma+1}} \cdot \frac{\varphi(\tau_{2\sigma-1}-\varphi(t_0)}{\tau_{2\sigma-1}-t_0}$$
$$+\frac{t-\tau_{2\sigma-1}}{\tau_{2\sigma+1}-\tau_{2\sigma-1}} \cdot \frac{\varphi(\tau_{2\sigma+1}-\varphi(t_0)}{\tau_{2\sigma+1}-t_0}, \quad t \in \tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}, \;\; t_0 \in \{\tau_{2p}\}_{p=1}^{n}. \tag{5.1}$$

Тогда получается следующая квадратурная формула

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\,dt \approx S_n(\varphi; t) = \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=0}^{n-1}(p_{2\sigma-1}+p_{2\sigma+1})\frac{\varphi(\tau_{2\sigma+1})-\varphi(t_0)}{\tau_{2\sigma+1}-t_0}, \quad t_0 \in \{\tau_{2p}\}_{p=1}^{n}. \tag{5.2}$$

Аналогично, заменяя на дугах $\tau_{2\sigma}\tau_{2\sigma+2}$ $(\sigma = 0, 1, \ldots, n-1)$ $\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}$ на соответствующий линейный интерполянт, получаем

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\,dt \approx S_n(\varphi; t_0) = \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=0}^{n-1}(p_{2\sigma}+p_{2\sigma+2})\frac{\varphi(\tau_{2\sigma+2})-\varphi(t_0)}{\tau_{2\sigma+2}-t_0}, \tag{5.3}$$

$t_0 \in \{\tau_{2p-1}\}_{p=1}^{n}$, где $p_j = \frac{1}{2\pi i}(\tau_{j+2}-\tau_j)$, $\;j = 1, 2, \ldots, 2n$.

Для оценки погрешности справедлива (см. [32])

**Теорема 10.** *Если существует производной $\varphi'''$ на $L$, контур $L$ ляпуновски с показателем $\delta$, тогда справедливо неравенство*

$$|S(\varphi, t_0) - S_n(\varphi, t_0)| \leqslant O\Big(\frac{\ln n}{n^{2+\delta}}\Big). \tag{5.4}$$

Построенные формулы (5.2) и (5.3) принадлежат классу формул типа дискретных особенностей (см. [12]), так как $t_0$ принимает значения в серединных точках дуги $\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}$ или $\tau_{2\sigma}\tau_{2\sigma+2}$, и узлы $\{\tau_j\}_{j=1}^{2n}$ осуществляют кононическое разбиение контура $L$ на множествах $E = \{\tau_1, \tau_3, \ldots, \tau_{2n-1}\}$ и $E_0 = \{\tau_2, \tau_4, \ldots, \tau_{2n}\}$, которые, как расчетные и контрольные, сменяют друг друга. В формулах (5.2) точки $E_0$ — контрольные, точки принадлежащие $E$ — расчетные, а в формулах (5.3) — наоборот.

Очевидно, применением более точных квадратурных формул может быть всегда увеличена точность приближения самого интеграла (1.3). Однако, что касается численного решения сингулярных интегральных уравнений, то обоснование построенных на таких квадратурных формулах схем не всегда укладывается в общие принципы схем метода дискретных вихрей (так это имеет место для формул типа Симпсона и аналогичных) и оказывается в значительной степени затруднительным.

Тем не менее, если вместо класса замкнутых квадратурных формул рассматривать формулы, содержащие узлы вне множества интегрирования, можно указать конкретную квадратурную формулу довольно высокой степени точности, для которой получение интересующих нас утверждений оказывается возможным.

В начале мы приведем соответствующую квадратурную формулу в существующем ее виде для случая промежутков $[s_j, s_{j+2}]$ действительной оси:

$$\int\limits_{s_j}^{s_{j+2}} \psi(s)ds \approx \frac{s_{j+2}-s_j}{24}\{-\psi(s_{j-2}) + 13(\psi(s_j) + \psi(s_{j+2})) - \psi(s_{j+4})\}. \tag{5.5}$$

Остаточный член (в известных предположениях относительно $\psi$) имеет вид [14]:

$$R = -\frac{11}{720}(2h)^5\varphi^{(4)}(\xi).$$

Теперь, зафиксировав $t_0 = \tau_\nu$ в одной из систем узлов $E = \{\tau_{2p-1}\}_{p=1}^n$, $E_0 = \{\tau_{2p}\}_{p=1}^n$, к интегралу от функции $\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}$ на каждой из дуг $\tau_j\tau_{j+2}$, с принадлежащей к другой системе концами, применим формулу комплексного аналога (5.5) (при изменении четности указанные две системы узлов взаимозаменяются), получим

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-\tau_\nu}\,dt \approx \varphi(\tau_\nu) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} C_\sigma(\nu)\frac{\varphi(\tau_{\nu+2\sigma+1}) - \varphi(\tau_\nu)}{\tau_{\sigma+2\sigma+1}-\tau_\nu}, \tag{5.6}$$

где $C_\sigma(\nu) = l_{\nu+2\sigma-3} + l_{\nu+2\sigma-1} + l_{\nu+2\sigma+1} + l_{\nu+2\sigma+3}$, $l_j$ обозначают коэффициенты формулы комплексного аналога (5.5). Погрешность формулы (5.6) при соответствующих предположениях относительно функции и контура (см. [32]) имеет вид $O\Big(\frac{\ln n}{n^{4+\delta}}\Big)$.

Ставится вопрос: можно ли построить квадратурные формулы с применением внешних узлов более высокой точности, которые можно использовать в вычислениях сингулярных интегралов на замкнутых контурах $L$. По крайней мере с точки зрения практического использования представляет интерес рассмотрение таких формул шестью узлами, т. е. если ввести дополнительно еще два внешних узла. Для этого сперва построим квадратурную формулу с внешними шестью узлами в случае промежутков $[s_j, s_{j+2}]$ действительной оси. Она имеет вид [34]

$$\int\limits_{s_j}^{s_{j+2}} \psi(s)ds \approx \frac{2h}{7200}\Big\{55(\psi(s_{j-4})+\psi(s_{j+6}))-465(\psi(s_{j-2})+\psi(s_{j+2}))+4010(\psi(s_j)+\psi(s_{j+2}))\Big\}. \tag{5.7}$$

Остаточный член при соответствующей гладкости функции $\psi$ есть $O(h^7)$.

Применяя последнюю формулу, получаем

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-\tau_\nu}\,dt \approx \varphi(\tau_\nu) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} C_\sigma(\nu)\frac{\varphi(\tau_{\nu+2\sigma+1}) - \varphi(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+2\sigma+1}-\tau_\nu}, \tag{5.8}$$

где

$$C_\sigma(\nu) = l_{\nu+2\sigma-5} + l_{\nu+2\sigma-3} + l_{\nu+2\sigma-1} + l_{\nu+2\sigma+1} + l_{\nu+2\sigma+3} + l_{\nu+2\sigma+5},$$

$l_j$ обозначает тоже самое что и в (5.6).

**Теорема 11.** *Если $\varphi$ имеет ограниченную производную седьмого порядка, $L$ — контур Ляпунова с показателем $\delta$, то для погрешности формулы* (5.8) *справедлива оценка*

$$|S(\varphi;t_0) - S_n(\varphi,t_0)| \leqslant O\Big(\frac{\ln n}{n^{6+\delta}}\Big). \tag{5.9}$$

## 6. Приближенное вычисление интегралов типа Коши

Для интегралов типа Коши $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}$, где $\gamma$ — единичная окружность с центром в начале координат, в [9] построена квадратурная формула

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} = \begin{cases} \Phi^{+}(z) \approx \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k, & |z| \leqslant 1, \\ \Phi^{-}(z) \approx -\sum\limits_{k=-n}^{-1} a_k z^k, & |z| \geqslant 1, \end{cases} \tag{6.1}$$

где $a_k$ даются формулой (2.2).

**Теорема 12.** *Справедлива оценка*

$$\max_{|z|\leqslant 1}\Big|\Phi^{+}(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\Big| + \max_{|z|\geqslant 1}\Big|\Phi^{-}(z) - \sum_{-n}^{-1} a_k z^k\Big| \leqslant \Big[2 + \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi}\ln\frac{2}{\pi}(2n+1)\Big]\rho_n(\varphi). \tag{6.2}$$

Численная реализация тех или иных задач с применением метода граничных интегральных уравнений на завершающем этапе обычно требует приближенного вычисления интегралов типа Коши вида

$$I(\varphi;z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt \tag{6.3}$$

и их производных различных порядков для значений $z$ из некоторой конечной или бесконечной области $D$ комплексной плоскости, ограниченной контуром $L$. Такие интегралы могут быть приближенно вычислены в фиксированных точках $z \in D$ обычными квадратурными формулами. Однако точность таких формул может существенно понижаться при сколь угодном приближении $z$ к границе области. В работе [23] предлагается приближенная вычислительная схема для интегралов типа Коши, основанная на определенном процессе аппроксимации их плотностей. Такие схемы приводят к довольно удобно реализуемым процессам и позволяют получить равномерные оценки погрешности по всей области вплоть до ее границы.

Будем считать контур $L$ гладким, а также замкнутым. Вводится система точек (узлов) $\{\tau_j\}_{j=1}^{n}$, разбивающих $L$ на равные части, причем возрастание индексов соответствует положительному направлению обхода с учетом периодичности. Пусть

$$L_\nu(\varphi;t) = l_{\nu 0}(t)\varphi(\tau_\nu) + l_{\nu 1}(t)\varphi(\tau_{\nu+1})$$

— лагранжев линейный интерполянт, $t_0 \in \tau_\nu\tau_{\nu+1}$ $(1 \leqslant \nu \leqslant n)$. Будем приближать $\varphi(t)$, где $t \in \tau_\sigma\tau_{\sigma+1}(1 \leqslant \sigma \leqslant n)$ следующим образом:

$$\varphi(t) \approx L_\nu(\varphi;t_0) + (t-t_0)\sum_{k=0}^{1} l_{\sigma k}(t)\frac{\varphi(\tau_{\sigma+k}) - L_{nk}(\varphi;t_0)}{\tau_{\sigma+k}-t_0}, \tag{6.4}$$

где $t_0 \neq \tau_{\sigma+k}$, $L_{nk}(\varphi; t_0) = \varphi(t_0)$ при $\sigma + k \neq \nu$, $\nu + 1$ и $L_{nk}(\varphi; t_0) = L_\nu(\varphi; t_0)$ при $\sigma + k = \nu$, $\nu + 1, \sigma = \overline{1, n}$. На основе замены $\varphi(t)$ в $I(\varphi; t)$ выражением (6.4) имеем

$$I(\varphi; z) \approx I(1, z) L_\nu(\varphi; t_0) + \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{k=0}^{1} p_{\sigma k}(t_0, z) \frac{\varphi(\tau_{\sigma+k}) - L_{nk}(\varphi; t_0)}{\tau_{\sigma+k} - t_0}, \tag{6.5}$$

где

$$p_{\sigma k}(t_0, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} l_{\sigma k}(t)\, dt + \frac{z - t_0}{2\pi i} \int\limits_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{l_{\sigma k}(t)\, dt}{t - z}.$$

Если $\varphi(t)$ дважды дифференцируемая функция, то для остаточного члена справедлива равномерная оценка вида $O\Big(\frac{\ln n}{n^2}\Big)$, которая очевидна при $z$ внутри области $D$. Но если $z$ близко к контуру интегрирования, то под $t_0$ будем подразумевать ближайшую к $z$ точку контура $L$ и снова получаем равномерную относительно $z$ аналогичную оценку $O\Big(\frac{\ln n}{n^2}\Big)$.

Кроме интегралов типа Коши вида (6.3) в задачах математической теории упругости для вычисления компонентов напряжения и смещения широко используются интегралы типа Коши следующего вида:

$$\begin{gathered} u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t - z}\, dt, \quad u_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t - z} d\bar{t}, \\ u_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\bar{t}\varphi(t)}{(t - z)^2}\, dt, \quad u_3(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\bar{t}\varphi(t)}{(t - z)^3}\, dt. \end{gathered} \tag{6.6}$$

В работе [23] построена вычислительная схема основанная на методе свободных параметров, пригодная только для первого интеграла из (6.6). В работе [31] обобщается указанный метод до такой степени, чтобы можно было вычислить все интегралы, приводимые в (6.6). Далее метод применяется для вычисления компонентов напряжения и смещения в задачах плоской теории упругости.

Полагая, что $t_0$, $t_1$, $t_2$ (свободные параметры) — произвольные точки контура $L$, а $\nu$ $(1 \leqslant \nu \leqslant n)$ — номер, для которого $t_0$, $t_1$, $t_2 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}$, представим функцию $\varphi(t)$, $t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$ $(1 \leqslant \sigma \leqslant n)$, следующим образом:

$$\begin{gathered} \varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi(t_0, t_1) + (t - t_0)(t - t_1)\varphi(t_0, t_1, t_2) \\ +(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)\varphi(t, t_0, t_1, t_2), \end{gathered} \tag{6.7}$$

т. е. по формуле Ньютона, где $\varphi(t_0, t_1)$, $\varphi(t_0, t_1, t_2)$, $\varphi(t, t_0, t_1, t_2)$ — соответствующие разделенные разности. Тогда приближенную формулу $\varphi(t)$ можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered} \tilde{\varphi}(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi(t_0, t_1) + (t - t_0)(t - t_1)\varphi(t_0, t_1, t_2) \\ +(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) \sum_{k=0}^{2} l_{\sigma k}(t) \varphi(\tau_{\sigma+k}, t_0, t_1, t_2) \end{gathered} \tag{6.8}$$

для погрешности

$$r_n(\varphi; t, t_0, t_1, t_2) = \varphi(t, t_0, t_1, t_2) - \sum_{k=0}^{2} l_{\sigma k}(t) \varphi(\tau_{\sigma+k}, t_0, t_1, t_2).$$

В предположении существования ограниченной 6-ой производной на $L$ функции $\varphi$ справедливо представление

$$|r_n(\varphi, t, t_0, t_1, t_2)| \leqslant O\Big(\frac{1}{n^3}\Big). \tag{6.9}$$

Подставляя (6.8) в первом интеграле из (6.6) и выполнив соответствующие выкладки, получаем

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt \approx \varphi(t_0) + (z-t_0)\varphi(t_0,t_1) + (z-t_0)(z-t_1)\varphi(t_0,t_1,t_2) \\ + \sum_{\sigma=1}^{n}(A_\sigma(z)\varphi(\tau_\sigma,t_0,t_1,t_2) + A_{\sigma+1}(z)\varphi(\tau_{\sigma+1},t_0,t_1,t_2) + A_{\sigma+2}(z)\varphi(\tau_{\sigma+2},t_0,t_1,t_2)),\end{gathered} \tag{6.10}$$

где коэффициенты $A_\sigma(z)$, $A_{\sigma+1}(z)$, $A_{\sigma+2}(z)$ вычисляются точно.

Для погрешности получена равномерная оценка

$$|R_n(\varphi; z)| \leqslant O\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

Аналогично строятся квадратурные формулы и для остальных интегралов в (6.6). Благодаря выбору параметров $t_0$, $t_1$, $t_2$, для погрешности также получается равномерная оценка порядка $O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$.

В заключение следует отметить, что теория и приложения сингулярных интегралов развивается бурно. Соответственно развиваются методы аппроксимации таких интегралов. Поэтому вышеизложенный обзор не является полным.

## Литература


1. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы сингулярных интегральных уравнениях.—М.: Наука, 1985.—252 с.
2. *Бойков И. В.* Об одном прямом методе решения сингулярных интегральных уравнений // Журн. выч. мат. и матем. физики.—1972.—Т. 12, № 6.—С. 1381–1390.
3. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений.—М.-Л.: Физматгиз, 1948.—296 с.
4. *Габдулхаев Г. Б.* Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Мат. анализ.—1980.—Т. 18.—С. 251–303.
5. *Гандель Ю. В., Лифанов И. К., Матвеев А. Ф.* Численное решение сингулярных краевых задач математической физики, сводящихся к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков.—М.: ИТЭФ, 1984.—№ 174.—55 с.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.—М.: Наука, 1963.—638 с.
7. *Золотаревский В. А.* Конечномерные методы решения сингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах интегрирования.—Кишинев: Штиница, 1991.—136 с.
8. *Золотаревский В. А., Сейчук В. Н.* О приближенном методе решения сингулярных интегральных уравнений со сдвигом // Исследование операций и программирование.—Кишинев: Штиница, 1982.—С. 55–59.
9. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.—Киев: Наукова думка, 1968.—288 с.
10. *Корнейчук А. А.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // В сб. Численные методы решения дифференциальных уравнений и квадратурные формулы.—М.: Наука, 1964.—Т. 4, № 4.—С. 64–74.
11. *Лаврентьев М. А.* О построении потока, обтекающего дугу заданной формы // Тр. ЦАГИ.—1932.—вып. 118.—С. 3–56.
12. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО Янус, 1995.—520 с.
13. *Матвеев А. Ф.* Приближенное решение некоторых сингулярных интегральных уравнений.—М.—1992.—32 с. (Препр. / ИТЭФ; № 103)
14. *Микеладзе Ш. Е.* Численные методы математического анализа.—М.: Гостехиздат, 1953.—526 с.

15. *Михлин С. Г.* Интегральные уравнения.—М.-Л.: Физматгиз, 1949.—380 с.
16. *Мусаев Б. И.* К вопросу обоснования метода механических квадратур для полного сингулярного интегрального уравнения на отрезке.—Баку, 1998.—22с. (Препр. / Ин-т физики АН АзССР; № 1.)
17. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.—М.: Наука, 1966.—720 с.
18. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1966.—512 с.
19. *Пивень В. Ф.* Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости.—Орел.—2006.—506 с.
20. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений.—М.: Наука, 1979.—494 с.
21. *Пыхтеев Г. Н.* Точные методы вычисления интегралов типа Коши.—Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1980.—118 с.
22. *Саникидзе Д. Г.* О некоторых линейных процессах аппроксимации сингулярных интегралов в смысле главного значения // Тезисы докл. третьей научной сессии ин-та прикл. мат. Тбилисского гос. ун-та.—Тбилиси, 1971.—С. 50.
23. *Саникидзе Д. Г.* О порядке приближения некоторых сингулярных операторов квадратурными суммами // Изв. АН АрмССР. Мат.—1970.—Т. 5, № 4.—С. 371–384.
24. *Саникидзе Д. Г., Нинидзе К. Р.* Метод свободных параметров в приближенном вычислении интегралов типа Коши // Тр. X международного симпозиума, Харков — Херсон, 29 мая–5 июня 2001г.—С. 299–302.
25. *Саникидзе Д. Г., Хубежты Ш. С.* К вопросу применения внешних узлов в модифицированных схемах дискретных вихрей // Тр. IX международного симпозиума (29 мая–2 июля 2000г).—Орел, 2000.—С. 395–397.
26. *Сейчук В. Н.* On direct methods of solving nonlinear singular integral equations and theirs sistems given on closed smooth contours // Тр. IX международного симпозиума «МДОЗМФ-2000».—Орел, 2000.—С. 406–409.
27. *Соболев С. Л.* Различные типы сходимости кубатурных и квадратурных формул // Докл. АН СССР.—1962.—Т. 146, №1.—С. 41–42.
28. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул.—М.: Наука, 1974.—808 с.
29. *Тихоненко Н. Я.* Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений на вещественной оси и уравнений типа свертки // Тр. IX международного симпозиума «МДОЗМФ-2000».—Орел, 2000.—С. 440–444.
30. *Шешко М. А.* Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши и Гильберта и их приближенное решение.—Люблин: Научное общество Католического университета в Люблине.—2003.—288 с.
31. *Хубежты Ш. С.* О квадратурных формулах для сингулярных интегралов, содержащих наперед заданные узлы // Диф. уравнения.—2001.—Т. 12.—С. 1708–1710.
32. *Хубежты Ш. С.* Вычисление интегралов типа Коши в задачах плоской теории упругости // Вістник Харківского університета.—2003.—Т. 590, вып. 1.—С. 235–239.
33. *Хубежты Ш. С.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов повышенной точности // Исследования по математического анализу, математического моделированию и информатике.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2007.—С. 174–182.
34. *Хубежты Ш. С.* Об аппроксимации некоторых сингулярных операторов и приближенном решении сингулярных интегральных уравнений // Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008.—С. 336–348.
35. *Хубежты Ш. С.* Сингулярные интегральные уравнения в моделировании и численном решении задач математической физики и теории упругости, диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.—Владикавказ.—2004.—292 с.
36. *Elliot D.* Orthogonal polinomialle associated with singular integral equations having a Couchy kernel // SIAM J. Numer. Anal.—1982.—V. 13, № 6.—P. 1041–1052.
37. *Multhopp H.* Die Berechnung der Auftriebsverteilung von tragflugeln // Luftfahrtforschung.—1938.—V. 15, № 4.—P. 153–169.

*Статья поступила 9 сентября 2008 г.*

Хубежты Шалва Соломонович
Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН, *вед. научн. сотр.*
РОССИЯ, 362040, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `shalva57@rambler.ru`