Владикавказский математический журнал
2009, Том 11, выпуск 4, С. 32–43

УДК **512.542**

О РАСПОЗНАВАЕМОСТИ ПО СПЕКТРУ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУПП, II[1]

А. С. Кондратьев

Исследована распознаваемость по спектру одного класса конечных простых ортогональных групп с несвязным графом простых чисел.

Ключевые слова: конечная простая группа, спектр группы, граф простых чисел, распознавание по спектру, ортогональная группа.

Введение

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $\mathrm{GK}(G)$ группы G, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $\mathrm{GK}(G)$ через $s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leqslant i \leqslant s(G)\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$. Множество $\omega(G)$ однозначно определяется подмножеством $\mu(G)$ своих максимальных по делимости элементов.

Общее строение конечных групп с несвязным графом простых чисел дается теоремой Грюнберга — Кегеля [35, теорема A]. Конечные простые неабелевы группы с несвязным графом простых чисел описаны в [18, 35].

Результаты о конечных группах с несвязным графом Грюнберга — Кегеля нашли большое применение в исследованиях распознаваемости конечных групп по спектру (см., например, обзор В. Д. Мазурова [22]). Конечная группа G называется *распознаваемой* (по спектру), если для любой конечной группы H с условием $\omega(H) = \omega(G)$ имеем $H \cong G$.

Первый этап решения вопроса распознаваемости конечных простых групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля заключается в доказательстве условия квазираспознаваемости, более слабого, чем распознаваемость. Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой*, если любая конечная группа G с условием $\omega(G) = \omega(P)$ имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен P.

В [2–7, 11–17, 19, 32] доказана квазираспознаваемость конечной простой группы L в следующих случаях: 1) $s(L) \geqslant 3$ и L не изоморфна группе A_6; 2) $s(L) = 2$ и L изоморфна одной из групп $L_n(2^k)$, ${}^2D_{2^m}(q)$ $(m > 1)$, ${}^2D_{2^m+1}(2)$ $(m > 1)$, $B_{2^m}(q)$ $(m > 2)$, $C_{2^m}(q)$ $(m > 2)$, ${}^3D_4(q)$, $F_4(q)$, $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ $(q > 2)$, $B_p(3)$ ($p > 3$ — простое число), $C_p(3)$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00148), РФФИ-БРФФИ (проект № 08-01-90006), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

(p — нечетное простое число), ${}^2D_p(3)$) (p — нечетное простое число), ${}^2D_{2^m+1}(3)$, $D_p(q)$ ($p > 3$ — простое число и $q \in \{2, 3, 5\}$).

В данной работе продолжается изучение распознаваемости простых групп лиева типа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Доказана следующая

Теорема. *Если G — конечная группа с таким же спектром, как у простой группы $D_{p+1}(q)$, где p — нечетное простое число и $q \in \{2, 3\}$, то G изоморфна $D_4(q)$ или $B_3(q)$ при $p = 3$ и $G/O_q(G)$ изоморфна $D_{p+1}(q)$ при $p > 3$, причем $O_q(G) = 1$ при $q = 3$.*

Утверждение теоремы при $p = 3$ было доказано ранее в [21, 33].

§ 1. Обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [23, 25, 27, 31]. Если n — натуральное число и p — простое число, то через n_p и $\pi(n)$ обозначаются соответственно p-часть и множество всех простых делителей числа n. Для конечной группы G положим $\pi(G) = \pi(|G|)$ и $\mu_i(G) = \{n \in \mu(G) \mid \pi(n) \subseteq \pi_i(G)\}$. Через ϵ обозначается переменная, принимающая значения $+$ или $-$. Группы $A_n^\epsilon(q)$ обозначают соответственно $A_n(q)$ при $\epsilon = +$ и ${}^2A_n(q)$ при $\epsilon = -$. Если L — группа лиева типа, то через $\mathrm{Inndiag}(L)$ обозначается группа, порожденная внутренними и диагональными автоморфизмами группы L. Обозначим через $t(G)$ наибольшую из мощностей независимых множеств графа $\mathrm{GK}(G)$ (множество вершин графа называется *независимым множеством*, если его элементы попарно не смежны), а через $t(r, G)$ — наибольшую из мощностей независимых множеств графа $\mathrm{GK}(G)$, содержащих простое число r. Через $\rho(r, G)$ обозначается некоторое независимое множество наибольшей мощности в $\mathrm{GK}(G)$, содержащее простое число r.

В доказательстве теоремы используются следующие результаты.

Лемма 1.1 [20, лемма 4]. *Пусть P — конечная простая группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Тогда:*

(a) $|\mu_i(P)| = 1$ для $i > 1$ (пусть $n_i = n_i(P)$ обозначает единственный элемент из $\mu_i(P)$ для $i > 1$);

(b) для каждого $i > 1$ группа P содержит изолированную абелеву холлову $\pi(n_i)$-подгруппу X_i, причем эта подгруппа циклическая порядка n_i, за исключением следующих случаев:

(1) $P \cong L_3(4)$, $n_i(P) = 3$ и подгруппа X_i — элементарная абелева группа порядка 9;

(2) $P \cong L_2(q)$, где q — непростая степень нечетного простого числа p, $n_i(P) = p$ и подгруппа X_i — элементарная абелева группа порядка q;

(c) P, $\pi_1(P)$ и n_i для $2 \leqslant i \leqslant s(P)$ такие, как в приведенных ниже таблицах 1–3, где p обозначает нечетное простое число.

Лемма 1.2. *Пусть G — конечная группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля, не изоморфная группе Фробениуса или двойной группе Фробениуса, и P — неабелев композиционный фактор в G. Тогда для каждого $i \in \{2, \ldots, s(G)\}$ существует $j \in \{2, \ldots, s(P)\}$ такое, что $\mu_i(G) = \{n_j(P)\}$.*

Доказательство следует из теоремы Грюнберга — Кегеля и леммы 1.2.

Лемма 1.3 (теорема Жигмонди [36]**).** *Пусть q и n — натуральные числа, $q \geqslant 2$. Если пара (q, n) отлична от $(2, 6)$, то существует простое число, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$.*

В обозначениях леммы 1.3 простое число, делящее q^n-1 и не делящее q^i-1 при любом натуральном $i<n$, называется *примитивным простым делителем* числа q^n-1 и обозначается через $r_n(q)$ или просто через r_n, если q фиксировано.

Таблица 1

Конечные простые группы P с $s(P)=2$

P	Ограничения на P	$\pi_1(P)$	n_2
A_n	$6<n=p,p+1,p+2$; одно из чисел $n,n-2$ непростое	$\pi((n-3)!)$	p
$A_{p-1}(q)$	$(p,q)\neq(3,2),(3,4)$	$\pi\big(q\prod_{i=1}^{p-1}(q^i-1)\big)$	$\dfrac{q^p-1}{(q-1)(p,q-1)}$
$A_p(q)$	$(q-1)\mid(p+1)$	$\pi\big(q(q^{p+1}-1)\prod_{i=1}^{p-1}(q^i-1)\big)$	$\dfrac{q^p-1}{q-1}$
${}^2A_{p-1}(q)$		$\pi\big(q\prod_{i=1}^{p-1}(q^i-(-1)^i)\big)$	$\dfrac{q^p+1}{(q+1)(p,q+1)}$
${}^2A_p(q)$	$(q+1)\mid(p+1)$, $(p,q)\neq(3,3),(5,2)$	$\pi\big(q(q^{p+1}-1)\prod_{i=1}^{p-1}(q^i-(-1)^i)\big)$	$\dfrac{q^p+1}{q+1}$
${}^2A_3(2)$		$\{2,3\}$	5
$B_n(q)$	$n=2^m\geqslant 4$, q нечетно	$\pi\big(q\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)\big)$	$(q^n+1)/2$
$B_p(3)$		$\pi\big(3(3^p+1)\prod_{i=1}^{p-1}(3^{2i}-1)\big)$	$(3^p-1)/2$
$C_n(q)$	$n=2^m\geqslant 2$	$\pi\big(q\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)\big)$	$\dfrac{q^n+1}{(2,q-1)}$
$C_p(q)$	$q=2,3$	$\pi\big(q(q^p+1)\prod_{i=1}^{p-1}(q^{2i}-1)\big)$	$\dfrac{q^p-1}{(2,q-1)}$
$D_p(q)$	$p\geqslant 5$, $q=2,3,5$	$\pi\big(q\prod_{i=1}^{p-1}(q^{2i}-1)\big)$	$\dfrac{q^p-1}{q-1}$
$D_{p+1}(q)$	$q=2,3$	$\pi\big(q(q^p+1)\prod_{i=1}^{p-1}(q^{2i}-1)\big)$	$\dfrac{q^p-1}{(2,q-1)}$
${}^2D_n(q)$	$n=2^m\geqslant 4$	$\pi\big(q\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)\big)$	$\dfrac{q^n+1}{(2,q+1)}$
${}^2D_n(2)$	$n=2^m+1$, $m\geqslant 2$	$\pi\big(2(2^n+1)\prod_{i=1}^{n-2}(2^{2i}-1)\big)$	$2^{n-1}+1$
${}^2D_p(3)$	$5\leqslant p\neq 2^m+1$	$\pi\big(3\prod_{i=1}^{p-1}(3^{2i}-1)\big)$	$\dfrac{3^p+1}{4}$
${}^2D_n(3)$	$n=2^m+1\neq p$, $m\geqslant 2$	$\pi\big(3(3^n+1)\prod_{i=1}^{n-2}(3^{2i}-1)\big)$	$\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$
$G_2(q)$	$2<q\equiv\epsilon 1(3)$	$\pi\big(q(q^2-1)(q^3-\epsilon)\big)$	$q^2-\epsilon q+1$
${}^3D_4(q)$		$\pi(q(q^6-1))$	q^4-q^2+1
$F_4(q)$	q нечетно	$\pi\big(q(q^6-1)(q^8-1)\big)$	q^4-q^2+1
${}^2F_4(2)'$		$\{2,3,5\}$	13
$E_6(q)$		$\pi\big(q(q^5-1)(q^8-1)(q^{12}-1)\big)$	$\dfrac{q^6+q^3+1}{(3,q-1)}$
${}^2E_6(q)$	$q>2$	$\pi\big(q(q^5+1)(q^8-1)(q^{12}-1)\big)$	$\dfrac{q^6-q^3+1}{(3,q+1)}$
M_{12}		$\{2,3,5\}$	11
J_2		$\{2,3,5\}$	7
Ru		$\{2,3,5,7,13\}$	29
He		$\{2,3,5,7\}$	17
McL		$\{2,3,5,7\}$	11
Co_1		$\{2,3,5,7,11,13\}$	23
Co_3		$\{2,3,5,7,11\}$	23
Fi_{22}		$\{2,3,5,7,11\}$	13
F_5		$\{2,3,5,7,11\}$	19

Таблица 2

Конечные простые группы P с $s(P) = 3$

P	Ограничения на P	$\pi_1(P)$	n_2	n_3
A_n	$n > 6$, числа $n = p, p-2$ простые	$\pi((n-3)!)$	p	$p-2$
$A_1(q)$	$3 < q \equiv \epsilon 1(4)$	$\pi(q-\epsilon)$	$\pi(q)$	$(q+\epsilon)/2$
$A_1(q)$	$q > 2$, q четно	$\{2\}$	$q-1$	$q+1$
${}^2A_5(2)$		$\{2,3,5\}$	7	11
${}^2D_p(3)$	$p = 2^m+1 \geqslant 3$	$\pi(3(3^{p-1}-1)\prod_{i=1}^{p-2}(3^{2i}-1))$	$(3^{p-1}+1)/2$	$(3^p+1)/4$
$G_2(q)$	$q \equiv 0(3)$	$\pi(q(q^2-1))$	q^2-q+1	q^2+q+1
${}^2G_2(q)$	$q = 3^{2m+1} > 3$	$\pi(q(q^2-1))$	$q-\sqrt{3q}+1$	$q+\sqrt{3q}+1$
$F_4(q)$	q четно	$\pi(q(q^4-1)(q^6-1))$	q^4-q^2+1	q^4+1
${}^2F_4(q)$	$q = 2^{2m+1} > 2$	$\pi(q(q^3+1)(q^4-1))$	$q^2-\sqrt{2q^3}+q-\sqrt{2q}+1$	$q^2+\sqrt{2q^3}+q+\sqrt{2q}+1$
$E_7(2)$		$\{2,3,5,7,11,13,17,19,31,43\}$	73	127
$E_7(3)$		$\{2,3,5,7,11,13,19,37,41,61,73,547\}$	757	1093
M_{11}		$\{2,3\}$	5	11
M_{23}		$\{2,3,5,7\}$	11	23
M_{24}		$\{2,3,5,7\}$	11	23
J_3		$\{2,3,5\}$	17	19
HiS		$\{2,3,5\}$	7	11
Suz		$\{2,3,5,7\}$	11	13
Co_2		$\{2,3,5,7\}$	11	23
Fi_{23}		$\{2,3,5,7,11,13\}$	17	23
F_3		$\{2,3,5,7,13\}$	19	31
F_2		$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}$	31	47

Таблица 3

Конечные простые группы P с $s(P) > 3$

$s(P)$	P	Ограничения на P	$\pi_1(P)$	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
4	$A_2(4)$		$\{2\}$	3	5	7		
	${}^2B_2(q)$	$q{=}2^{2m+1}{>}2$	$\{2\}$	$q-1$	$q-\sqrt{2q}+1$	$q+\sqrt{2q}+1$		
	${}^2E_6(2)$		$\{2,3,5,7,11\}$	13	17	19		
	$E_8(q)$	$q{\equiv}2,3(5)$	$\pi\big(q(q^8-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)(q^{20}-1)\big)$	$\frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1}$	q^8-q^4+1	$\frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1}$		
	M_{22}		$\{2,3\}$	5	7	11		
	J_1		$\{2,3,5\}$	7	11	19		
	$O'N$		$\{2,3,5,7\}$	11	19	31		
	LyS		$\{2,3,5,7,11\}$	31	37	67		
	Fi'_{24}		$\{2,3,5,7,11,13\}$	17	23	29		
	F_1		$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,47\}$	41	59	71		
5	$E_8(q)$	$q{\equiv}0,1,4(5)$	$\pi\big(q(q^8-1)(q^{10}-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)\big)$	$\frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1}$	$\frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1}$	q^8-q^4+1	$\frac{q^{10}+1}{q^2+1}$	
6	J_4		$\{2,3,5,7,11\}$	23	29	31	37	43

Лемма 1.4 [28]**.** *Пусть p, q — простые числа такие, что $p^a - q^b = 1$ для некоторых натуральных чисел a, b. Тогда пара (p^a, q^b) равна $(3^2, 2^3)$, $(p, 2^b)$ или $(2^a, q)$.*

Лемма 1.5 [21, лемма 1]**.** *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.*

Лемма 1.6 [26, предложение 10]. *Каждый максимальный тор T простой группы $D_n(q)$, где $n \geqslant 4$, имеет порядок*

$$\frac{1}{(4,q^n-1)}(q^{n_1}-1)(q^{n_2}-1)\cdots(q^{n_k}-1)(q^{l_1}+1)(q^{l_2}+1)\cdots(q^{l_m}+1)$$

для подходящего разбиения числа $n = n_1+n_2+\ldots+n_k+l_1+l_2+\ldots+l_m$, где m четно.

Лемма 1.7 [10, табл. 4, 6, 8]. *Пусть $L = D_{p+1}(q)$, где p — нечетное простое число и $q \in \{2,3\}$. Тогда $t(L) = \left[\frac{3p+4}{4}\right]$, $t(q,L) = 3$, $t(2,L) = 2$ при $q = 3$, $\rho(q,L) = \{q, r_p, r_{2p}\}$, $\rho(2,L) = \{2, r_p\}$ при $q = 3$.*

§ 2. Доказательство теоремы

Пусть $L = D_{p+1}(q)$, где p — нечетное простое число и $q \in \{2,3\}$. Ввиду [21, 33] можно считать, что $p \geqslant 5$.

Докажем сначала квазираспознаваемость группы L. По лемме 1.1 имеем $s(L) = 2$. Пусть G — конечная группа с условием $\omega(G) = \omega(L)$ и $N = F(G)$. Положим $\overline{G} = G/N$. В силу теоремы Грюнберга — Кегеля, результата М. Р. Зиновьевой (Алеевой) [1] и лемм 1.1 и 1.2 имеем $\mathrm{Inn}(P) \trianglelefteq \overline{G} \leqslant \mathrm{Aut}(P)$, где P — конечная простая группа с условиями

$$s(P) \geqslant 2, \quad \pi(N) \cup \pi(\bar{G}/\mathrm{Inn}(P)) \subseteq \pi_1(G),$$
$$n_2(L) = (q^p-1)/(q-1) \in \{n_i(P) \mid 2 \leqslant i \leqslant s(P)\}.$$

По теореме А. В. Васильева [9] и лемме 1.7 имеем $t(P) \geqslant t(L) - 1 = [3p/4] \geqslant 3$ и $t(2,P) \geqslant t(2,L) \geqslant 2$.

Далее рассматриваются все возможности для P, описываемые в таблицах 1–3.

Если P изоморфна одной из спорадических групп или одной из групп ${}^2A_3(2)$, ${}^2F_4(2)'$, ${}^2A_5(2)$, $E_7(2)$, $E_7(3)$, $A_2(4)$, ${}^2E_6(2)$, $E_6(2)$, то непосредственными вычислениями показываем, что из включения $(q^p-1)/(q-1) \in \{n_i(P) \mid 2 \leqslant i \leqslant s(P)\}$ следует, что пара (L,P) равна $(D_8(2), E_7(2))$, $(D_8(3), E_7(3))$, $(D_6(2), O'N)$, $(D_6(2), F_3)$, $(D_6(2), F_2)$, $(D_6(2), Ly)$ или $(D_6(2), J_4)$. Но $\pi_1(P) \setminus \pi_1(L)$ содержит 73 в первом случае, 757 во втором случае, 19 в случаях с третьего по пятый и 37 в последних двух случаях, что невозможно.

(1) Пусть P — конечная простая исключительная группа лиева типа над полем порядка r.

Предположим, что $p > 7$. Тогда $t(P) \geqslant 8$. Ввиду леммы 1.1 и [10, табл. 9] (поправку см. в [13, предложение 2]) получаем $t(P) = 12$ и $P \cong E_8(r)$. Поэтому $p \in \{11, 13, 17\}$ и

$$(q^p-1)/(q-1) \in \left\{\frac{r^{10}+r^5+1}{r^2+r+1}, \frac{r^{10}+1}{r^2+1}, r^8-r^4+1, \frac{r^{10}-r^5+1}{r^2-r+1}\right\}.$$

Легко проверить, что

$$\frac{r^{10}+r^5+1}{r^2+r+1} < \frac{r^{10}+1}{r^2+1} < r^8-r^4+1 < \frac{r^{10}-r^5+1}{r^2-r+1}.$$

Поэтому множество $\{n_i(P) \mid 2 \leqslant i \leqslant s(P)\}$ принадлежит отрезку $[151, 331]$ при $r = 2$, отрезку $[4561, 8401]$ при $r = 3$, отрезку $[49981, 80581]$ при $r = 4$, отрезку $[315121, 464881]$ при $r = 5$, отрезку $[4956001, 6568801]$ при $r = 7$, отрезку $[14709241, 18837001]$ при $r = 8$ и отрезку $[38316961, 47763361]$ при $r = 9$, отрезку $[195019441, 158681234401]$ при $11 \leqslant r \leqslant 25$

и полуинтервалу $[271983020401, +\infty)$ при $r \geqslant 27$. Поскольку $n_2(L) = (q^p-1)/(q-1)$ принадлежит $\{2047, 8191, 797151, 12207031, 131071, 64570081\}$, получаем $n_2(L) = 8191$ и $r = 3$. Но тогда $n_2(L) = 8191 \in \{4561, 5905, 6481, 8401\}$; противоречие.

Таким образом, $p \in \{5, 7\}$ и, следовательно, $n_2(L)$ принадлежит $\{31, 121\}$ при $p = 5$ и $\{127, 1093\}$ при $p = 7$.

Пусть P изоморфна ${}^3D_4(r)$ или $F_4(r)$. По лемме 1.1 $n_2(L) = (q^p-1)/(q-1) \in \{r^4 - r^2 + 1, r^4 + 1\}$. Если $(q^p-1)/(q-1) = r^4 - r^2 + 1$, то $r^4 - r^2 + 1 \in \{31, 121, 127, 1093\}$, откуда $n_2(L) - 1 = r^2(r^2-1) \in \{2 \cdot 3 \cdot 5, 2^3 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 7 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13\}$; противоречие. Если $n_2(L) = r^4 + 1$, то $n_2(L) - 1 = r^4$; противоречие.

Пусть $P \cong {}^2F_4(r)$, где $r = 2^{2m+1} > 2$. Тогда

$$n_2(L) = (q^p-1)/(q-1) = r^2 + \epsilon\sqrt{2r^3} + r + \epsilon\sqrt{2r} + 1,$$

откуда $n_2(L) - 1 = 2^{m+1}(2^{3m+1} + \epsilon 2^{2m+1} + 2^m + \epsilon 1)$ и, следовательно, $m \in \{1, 2\}$. Если $m = 1$, то $r = 8$ и $n_2(L) = 73 + \epsilon 36$ равно 109 при $\epsilon = +$ и 37 при $\epsilon = -$; противоречие. Если $m = 2$, то $r = 32$ и $n_2(L) = 1057 + \epsilon 264$ равно 1321 при $\epsilon = +$ и 793 при $\epsilon = -$; противоречие.

Пусть $P \cong {}^2B_2(r)$, где $r = 2^{2m+1} > 2$. Тогда

$$n_2(L) = (q^p-1)/(q-1) \in \{r-1, r + \epsilon\sqrt{2r} + 1\}.$$

Предположим, что $n_2(L) = r - 1$. Тогда $q = 2$. Если $p = 5$, то $r = 32$ и, следовательно, $31, 41 \in \pi(P) \setminus \pi(L)$; противоречие. Если $p = 7$, то $r = 128$ и, следовательно, $113, 127 \in \pi(P) \setminus \pi(L)$; противоречие. Поэтому $n_2(L) = r + \epsilon\sqrt{2r} + 1$, откуда $n_2(L) - 1 = 2^{m+1}(2^m + \epsilon 1)$ и, следовательно, $m \in \{1, 2\}$. Если $m = 1$, то $r = 8$ и $n_2(L) = 9 + \epsilon 4$ равно 13 при $\epsilon = +$ и 5 при $\epsilon = -$; противоречие. Если $m = 2$, то $r = 32$ и $n_2(L) = 33 + \epsilon 8$ равно 41 при $\epsilon = +$ и 25 при $\epsilon = -$; противоречие.

Пусть $P \cong {}^2G_2(r)$, где $r = 3^{2m+1} > 3$. Тогда

$$n_2(L) = r + \epsilon\sqrt{3r} + 1,$$

откуда $n_2(L) - 1 = 3^{m+1}(3^m + \epsilon 1)$ и, следовательно, $m = 1$. Поэтому $r = 27$, $p = 7$ и $n_2(L) = 9(3 + \epsilon 1)$ равно 36 при $\epsilon = +$ и 18 при $\epsilon = -$; противоречие.

(2) Пусть $P \cong A_n$, $n > 6$. По лемме 1.1 $n_2(L) := r$ — нечетное простое число, принадлежащее множеству $\{n, n-1, n-2\}$. Тогда $r = r_p(q) = (q^p-1)/(q-1)$. Пусть $s = r_{2p}(q)$. Тогда s делит $(q^p+1)/(q+1)$ и поэтому $s \leqslant (q^p+1)/(q+1) = r - ((q^p-1)/(q-1) - (q^p+1)/(q+1)) = r - 2(q^p-q)/(q^2-1) < r - 4$. Но тогда числа q и s смежны в графе $\mathrm{GK}(P)$, что противоречит лемме 1.7.

(3) Пусть $n = 2^m \geqslant 2$ и P изоморфна $B_n(r)$ (r нечетно и $n \geqslant 4$), $C_n(r)$, ${}^2D_n(r)$ ($n \geqslant 4$) или ${}^2D_{n+1}(r)$ ($r \in \{2, 3\}$). По лемме 1.1 возможны два случая: либо $P \cong {}^2D_{n+1}(3)$, $n+1$ — простое число и $(q^p-1)/(q-1) = (3^{n+1}+1)/4$, либо

$$(q^p-1)/(q-1) = (r^n+1)/(2, r-1).$$

Предположим, что выполняется первый случай. Пусть $q = 2$. Тогда $2^p - 1 = (3^{n+1} + 1)/4$. Вычитая 1 из обеих частей последнего равенства, получим $2^p - 2 = (3^{n+1} - 3)/4$, откуда $8(2^{p-1} - 1) = 3(3^n - 1)$ и, следовательно, $(3^n - 1)_2 = 8$. Но тогда $n = 2$ и, следовательно, $p = 3$, что противоречит условию $p \geqslant 5$. Если $q = 3$, то $3^p - 1 = (3^{n+1} + 1)/2$, откуда $3^p = 3(3^n + 1)/2$; противоречие.

Поэтому выполняется второй случай. Если r четно, то $(q^p-1)/(q-1) = r^n+1$, откуда $r^n = q(q^{p-1}-1)/(q-1)$; противоречие. Значит, r нечетно.

Пусть $q = 2$. Тогда $2^p - 1 = (r^n + 1)/2$. Вычитая 1 из обеих частей последнего равенства, получим $2^p-2 = (r^n-1)/2$, откуда $r^n - 1 = 4(2^{p-1}-1)$. Но r^n-1 делится на 8; противоречие.

Поэтому $q = 3$ и $3^p - 1 = r^n + 1$, откуда $r^n - 1 = 3(3^{p-1} - 1)$. Ясно, что 3 не делит r, следовательно, $r \geqslant 5$.

Если $n > p-1$, то $r^n-1 = 3(3^{p-1}-1) \geqslant 5^p-1$, откуда $3^p-3 \geqslant 5^p-1$ и, следовательно, $2 < (5/3)^p \leqslant 1-2/3^p < 1$; противоречие. Поэтому $n \leqslant p-1$.

Ввиду [10, табл. 8] имеем $t(P) = 3n/4+1 \geqslant [3p/4]$, откуда $n \geqslant p-2$. Но $n = 2^m \neq p-2$, следовательно, $n \geqslant p-1$.

Таким образом, $n = p-1 \geqslant 4$ и, следовательно, $r^n-1 = 3(3^n-1)$. Но тогда $r^n = 3\cdot 3^n-2$, откуда $7 < (5/3)^4 \leqslant (r/3)^n = 3-2/3^n < 3$; противоречие.

(4) Пусть $P \cong A_r^\epsilon(s)$, где r — нечетное простое число, $(s-\epsilon 1) \mid (r+1)$ и $(r,s) \neq (3,3),(5,2)$ при $\epsilon = -$.

По лемме 1.1 имеем $(q^p-1)/(q-1) = (s^r-\epsilon 1)/(s-\epsilon 1)$. Вычитая 1 из обеих частей последнего равенства, получим $q(q^{p-1}-1)/(q-1) = s(s^{r-1}-1)/(s-\epsilon 1)$.

Пусть $r = 3$. Тогда пара (s,ϵ) равна $(3,+)$ или $(5,+)$ и $q^p - 1 = (q-1)s(s+1)/q \in \{6,8,15,20\}$, откуда $p = 3$; противоречие.

Таким образом, $r \geqslant 5$. Предположим, что $r \leqslant 7$, $s = 2$ и $\epsilon = +$. Тогда $q(q^{p-1}-1)/(q-1) \in \{30,126\}$ и, следовательно, $q = 2$ и $p = r = 7$. Согласно таблице 1 $\pi_1(G) \setminus \pi_1(\overline{G}) = \{11,13,43\}$, поэтому $\{11,13,43\} \subseteq \pi(N)$. Поскольку подгруппа N нильпотентна, $11\cdot 13\cdot 43 \in \omega(N) \subseteq \omega(L)$. Элемент порядка $11\cdot 13\cdot 43$ из L принадлежит некоторому максимальному тору группы L, что противоречит лемме 1.6. Итак, пара (s,ϵ) не равна $(2,+)$ при $r \leqslant 7$ и, следовательно, по [10, табл. 8] имеем $t(P) = [(r+2)/2] = (r+1)/2 \geqslant [3p/4]$, откуда легко увидеть, что $r \geqslant (3p-5)/2$. Допустим, что q делит s. Тогда $q = s$ и $(q^{p-1}-1)/(q-1) = (q^{r-1}-1)/(q-\epsilon 1)$. Пусть $\epsilon = -$. Тогда $(q^{p-1}-1)/(q-1) = (q^{r-1}-1)/(q+1)$. Прибавляя 1 к обеим частям этого равенства, получим $(q^{p-1}+q-2)/(q-1) = q(q^{r-2}-1)/(q+1)$, что невозможно Поэтому $\epsilon = +$ и $p = r$, откуда ввиду неравенства $r \geqslant (3p-5)/2$ следует, что $p = 5$.

Следовательно, q не делит s. Имеем

$$s^{r-1}-1 = \frac{q(s-\epsilon 1)}{s(q-1)}(q^{p-1}-1).$$

Предположим, что $s > q$. Тогда $s \geqslant 3$. Легко проверить, что $q(s-\epsilon 1)/(s(q-1)) < 3$. Поэтому $s^{r-1}-1 < 3(q^{p-1}-1)$ и, следовательно, $s^{r-1} < 3q^{p-1} < s^p$, откуда $r \leqslant p$ и, следовательно, $r = p = 5$. Поэтому $s^4 < 3q^4$, откуда $(s/q)^4 < 3$. Если $q = 2$, то $3 < (3/2)^4 \leqslant (s/q)^4 < 3$; противоречие. Если $q = 3$, то $3 < (4/3)^4 \leqslant (s/q)^4 < 3$; противоречие.

Таким образом, $s < q$ и, следовательно, $s = 2$ и $q = 3$. Но тогда $4(2^{r-1}-1) = 3(2-\epsilon 1)(3^{p-1}-1)$, что невозможно, так как правая часть последнего равенства делится на 8, а левая — нет.

(5) Пусть r — нечетное простое число и P изоморфна $B_r(s)$ $(s=3)$, $C_r(s)$ $(s \in \{2,3\})$, $D_r(s)$ $(r \geqslant 5,\ s \in \{2,3,5\})$ или $D_{r+1}(s)$ $(r \geqslant 5,\ s \in \{2,3\})$. Тогда $(q^p-1)/(q-1) = (s^r-1)/(s-1)$.

Если $r = 3$, то $q < s$ и, следовательно, $q = 2$ и $s = 3$, откуда $31 = 2^5-1 \leqslant (q^p-1)/(q-1) = (s^r-1)/(s-1) = 13$; противоречие.

Итак, $r \geqslant 5$. Предположим, что $r \neq p$ и, следовательно, $s \neq q$. Если $r = 5$, $s = 2$ и $P \cong C_5(2)$, то $(q^p - 1)/(q-1) = 2^5 - 1 = 31$ и, следовательно, $p = r$. Поэтому ввиду [10, табл. 8] число $t(P)$ равно $[(3r+5)/4]$, $[(3r+5)/4]$, $[(3r+1)/4]$ и $[(3r+4)/4]$, если группа P изоморфна $B_r(s)$, $C_r(s)$, $D_r(s)$ и $D_{r+1}(s)$ соответственно. Теперь из неравенства $t(P) \geqslant [3p/4]$ легко получается, что $r \geqslant p-2$. Если $s < q$, то $r > p$, $s = 2$ и $q = 3$ и, следовательно, $2^r - 1 = (3^p - 1)/2$, откуда $2^{r+1} - 3^p = 1$, что противоречит лемме 1.4. Поэтому $s > q$, откуда $r < p$ и, следовательно, $r = p - 2$ и $p \geqslant 7$. Если $s = 3$, то $q = 2$ и, следовательно, $2^p - 1 = (3^{p-2} - 1)/2$, откуда $2^{p+1} - 3^{p-2} = 1$, что противоречит лемме 1.4. Поэтому $s = 5$ и $5^{p-2} - 1)/4 = (q^p - 1)/(q-1)$, откуда

$$5^{p-2} = \frac{4q^2}{q-1} q^{p-2} + 1 - \frac{4}{q-1}$$

и, следовательно,

$$(5/q)^{p-2} < \frac{4q^2}{q-1}.$$

Если $q = 2$, то $16 < (5/2)^5 \leqslant (5/2)^{p-2} < 16$; противоречие. Поэтому $q = 3$. Если $p > 7$, то $16 < (5/3)^7 \leqslant (5/2)^{p-2} < 16$; противоречие. Таким образом, $p = 7$. Но тогда $781 = 5^5 - 1)/4 = (3^7 - 1)/2) = 1093$, что невозможно.

Итак, $r = p$ и, следовательно, $s = q$. Изоморфизм $P \cong L \cong D_{p+1}(q)$ означает квазираспознаваемость группы L. Поэтому можно считать, что $P \cong B_p(q)$, $C_p(q)$ или $D_p(q)$.

Предположим, что $P \cong D_p(q)$. Пусть $t = r_{2p}(q)$. В силу таблицы 1 и леммы 1.3 имеем $t \in \pi(L) \setminus \pi(P) = \{t\}$, поэтому $t \in \pi(N)$. По [31, утверждение 4.1.20] группа P содержит подгруппу P_1, изоморфную группе $U : L_p(q)$, где $|U| = q^{p(p-1)/2}$. Ввиду [10, табл. 4] и леммы 1.7 в P_1 найдется элемент x простого порядка $r_p(q)$, несмежного с q в графе $\mathrm{GK}(P)$. Поэтому $P_2 := O_q(P_1) : \langle x \rangle$ есть группа Фробениуса. Пусть X — полный прообраз в G группы P_2. Применяя к факторгруппе $X/O_{t'}(N)$ лемму 1.4, получим, что $r_{2p}(q) \cdot r_p(q) \in \omega(L)$, а это противоречит лемме 1.7.

Таким образом, $P \cong B_p(q)$ или $C_p(q)$. Но тогда ввиду леммы 1.3 и [8, теоремы 3–5, 7] $(q^p + 1)/(2, q-1) \in \omega(P) \setminus \omega(L)$, что невозможно.

(6) Пусть $P \cong A_1(s)$, где $s > 3$. Тогда $t(P) = 3 \leqslant [3p/2]$ и, следовательно, $p = 5$.

Допустим, что $s = 2^b$ для некоторого $b \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\frac{q^5 - 1}{q-1} = 2^b + \epsilon 1.$$

Пусть $q = 2$. Тогда $2^b = 31 \pm 1 \in \{30, 32\}$ и, следовательно, $b = 5$ и $\epsilon = -$. Поэтому множество $\pi(L) \setminus \pi(P) = \{17\}$ содержится в $\pi(N)$. Но P содержит группу Фробениуса, изоморфную $2^5 : 31$. Применяя лемму 1.5, получаем, что $17 \cdot 31 \in \pi(L)$, что противоречит лемме 1.6. Поэтому $q = 3$. Если $\epsilon = +$, то $2^b = 3(3^4 - 1)/2$; противоречие. Следовательно, $\epsilon = -$ и $2^{b+1} - 3^5 = 1$, что противоречит лемме 1.4.

Таким образом, $s \equiv \epsilon 1(4)$ и $s = r^b$, где r — простое число и $b \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\frac{q^5 - 1}{q-1} \in \Big\{ r, \frac{s + \epsilon 1}{2} \Big\}.$$

Пусть $q = 3$. Тогда $(q^5 - 1)/(q-1) = 121 = 11^2$, откуда $121 = (s + \epsilon 1)/2$, т. е. $s = 242 \pm 1 \in \{243, 241\}$. Поскольку 241 не делит порядок группы $P \cong D_6(3)$, $s = 243 = 3^5$. Но тогда $11 \in \pi(P) \setminus \pi(L)$; противоречие.

Поэтому $q = 2$ и $(q^5 - 1)/(q - 1) = 31$. Предположим, что $31 = (s + \epsilon 1)/2$. Тогда $s = 62 \pm 1 \in \{61, 63\}$ и, следовательно, $s = 61 \in \pi(P) \setminus \pi(L)$; противоречие.

(7) Пусть $P \cong A^{\epsilon}_{r-1}(s)$, где r — нечетное простое число и $(r, s) \neq (3, 2), (3, 4)$ при $\epsilon = +$.

Ввиду лемм 1.1 и 1.2 имеем

$$\frac{s^r - \epsilon 1}{(s - \epsilon 1)(r, s - \epsilon 1)} = \frac{q^p - 1}{q - 1},$$

откуда

$$\frac{s^r - \epsilon 1}{s - \epsilon 1} = \frac{(r, s - \epsilon 1)(q^p - 1)}{q - 1}.$$

Вычитая единицу из обеих частей последнего равенства, получаем

$$s\frac{s^{r-1} - 1}{s - \epsilon 1} = \frac{(r, s - \epsilon 1)(q^p - 1) - q + 1}{q - 1}.$$

Пусть $r = 3$. Ввиду [10, табл. 8] $4 \geqslant t(P) \geqslant [3p/4]$, поэтому $p = 5$.

Предположим, что $(3, s - \epsilon 1) = 1$. Тогда $s(s + \epsilon 1) = q(q^4 - 1)/(q - 1)$. Если $q = 3$, то $s(s + \epsilon 1) = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, откуда $s = 8$ и $s(s + \epsilon 1) = 8(8 \pm 1) < 120$; противоречие. Поэтому $q = 2$ и $s(s + \epsilon 1) = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, откуда $s = 5$ и $\epsilon = +$. Но тогда множество $\pi(L) \setminus \pi(P) = \{11, 17\}$ содержится в $\pi(N)$. Отсюда $11 \cdot 17 \in \omega(L)$, что противоречит лемме 1.6.

Таким образом, $(3, s - \epsilon 1) = 3$ и $s(s + \epsilon 1) = 3(q^5 - 1)/(q - 1) - 1 \in \{2^2 \cdot 23, 2 \cdot 181\}$; противоречие.

Итак, $r \geqslant 5$. Если $5 \leqslant r \leqslant 11$ и $s = 2$, то ввиду [10, табл. 8] неравенство $t(P) \geqslant [3p/4]$ и условие $n_2(L) = n_2(P)$ влекут, что $p = r = 5$ и $\epsilon = +$, а значит, $q = 2$. Но тогда $7 \in \pi(P) \setminus \pi(L)$; противоречие. Поэтому опять по [10, табл. 8] имеем $t(P) = (r+1)/2 \geqslant [3p/4]$, откуда легко увидеть, что $r \geqslant (3p - 5)/2$.

Пусть $(r, s - \epsilon 1) = 1$.

Предположим, что q делит s. Тогда $q = s$ и так же, как в (4), получаем $r = p$ и $\epsilon 1 = +$, откуда $p \geqslant (3p - 5)/2$ и, следовательно, $p = 5$. Пусть $q = 2$. Тогда множество $\pi_1(L) \setminus \pi_1(P)$ содержится в $\pi(N)$ и равно $\{11, 17\}$. Отсюда $11 \cdot 17 \in \omega(L)$, что противоречит лемме 1.6. Таким образом, $q = 3$ и, следовательно, множество $\pi_1(L) \setminus \pi_1(P)$ содержится в $\pi(N)$ и равно $\{7, 41, 61\}$. Отсюда $7 \cdot 41 \cdot 61 \in \omega(L)$, что противоречит лемме 1.6.

Таким образом, q не делит s. Имеем

$$s^{r-1} - 1 = \frac{q(s - \epsilon 1)}{s(q - 1)}(q^{p-1} - 1).$$

Предположим, что $s > q$ и, в частности, $s \geqslant 3$. Тогда, как в (4), показываем, что $r \leqslant p$. Отсюда следует, что $r = p = 5$. Легко проверить, что $\frac{q(s-\epsilon 1)}{s(q-1)} < 3$. Поэтому $s^4 - 1 < 3(q^4 - 1)$ и, следовательно, $s^4 < 3q^4$, откуда $(s/q)^4 < 3$. Если $q = 2$, то $3 < (3/2)^4 \leqslant (s/q)^4 < 3$; противоречие. Если $q = 3$, то $3 < (4/3)^4 \leqslant (s/q)^4 < 3$; противоречие.

Итак, $(r, s - \epsilon 1) = r$. Тогда

$$\frac{s^{r-1} - 1}{s - \epsilon 1} = \frac{rq^p - r - q + 1}{s(q - 1)} = \frac{rq^p}{s(q - 1)} - \frac{r + q - 1}{s(q - 1)}.$$

Кроме того, ввиду неравенства $r \geqslant 5$ имеем $s \geqslant 4$.

Предположим, что $\epsilon = +$. Тогда $r/(s(q-1)) < 1$ и, следовательно,

$$s^{r-2} < s^{r-2} + \ldots + s + 1 = \frac{s^{r-1}-1}{s-1} < q^p,$$

откуда $s^{r-2} < q^p$. Ввиду неравенства $r \geqslant 5$ и делимости $s-1$ на r имеем $s \geqslant 8$.

Пусть $r = 5$. Тогда $s \geqslant 11$ и $p = 5$ (ввиду неравенства $r \geqslant (3p-5)/2$). Поэтому $1331 = 11^3 \leqslant s^3 < q^5 \leqslant 3^5 = 243$; противоречие.

Таким образом, $r \geqslant 7$. Ввиду неравенства $r \geqslant (3p-5)/2$ имеем $8^{r-2} \leqslant s^{r-2} < q^p \leqslant 5^p$ и, следовательно, $r-2 < p$, откуда $r \leqslant p$. Теперь неравенство $r \geqslant (3p-5)/2$ влечет $r = p = 5$; противоречие.

Итак, $\epsilon = -$.

Предположим, что $s = 4$. Тогда $r = 5$. Ввиду неравенства $3 = t(P) \geqslant [3p/4]$ имеем $p = 5$. Но тогда $41 = (s^r+1)/(r(s+1)) = (q^p-1)/(q-1) \in \{31, 121\}$; противоречие.

Таким образом, $s > 4$ и, следовательно, $s \geqslant 9$. Имеем

$$\frac{s^{r-1}-1}{s+1} = \frac{rq^p - r - q + 1}{s(q-1)} = \frac{rq^p}{s(q-1)} - \frac{r+q-1}{s(q-1)}.$$

Предположим, что $r/(s(q-1)) \leqslant 1$. Тогда

$$\frac{s^{r-1}-1}{s+1} = s^{r-2} - \frac{s^{r-2}-1}{s+1} > 4s^{r-2}/5.$$

Отсюда $4\cdot 9^{r-2}/5 < q^p \leqslant 3^p$ и, следовательно, $(4/5)\cdot 3^{2(r-2)} \leqslant 3^p$. Но тогда $3^{2(r-2)-p} \leqslant 5/4$, откуда $2(r-2)-p < 1$, т. е. $p = 2(r-2)$; противоречие.

Таким образом, $r/(s(q-1)) > 1$ и, следовательно, $q = 2$ и $r = s+1$. Но тогда s четно и $s(s^{r-1}-1)/(s+1)2 = 2(2^{p-1}-1)$, откуда получаем $s = 2$; противоречие с тем, что $s \geqslant 9$.

Итак, $P \cong L$, т. е. квазираспознаваемость группы L доказана.

Предположим, что $N \neq 1$. Можно считать, что N — элементарная абелева r-группа для некоторого простого числа r из $\pi_1(G)$ и P действует точно и неприводимо на N.

Предположим, что $r \neq q$. Рассмотрим стабилизатор R $(p+1)$-мерного вполне изотропного подпространства в $\Omega^+_{2(p+1)}(q)$. Положим $\overline{R} = R/Z(\Omega^+_{2(p+1)}(q))$. Можно считать, что $\overline{R} < P$. Тогда по [31, утверждение 4.1.20] имеем $\overline{R} \cong U : L_{p+1}(q)$, где $|U| = q^{p(p+1)/2}$. Ввиду [10, табл. 4] и леммы 1.7 в $\overline{R}$ найдется элемент x простого порядка $r_p(q)$, не смежного с q в графе $\mathrm{GK}(G)$. Поэтому $U : \langle x\rangle$ есть группа Фробениуса. Применяя к группе $N : U : \langle x\rangle$ лемму 1.4, получим, что $r \cdot r_p(q) \in \omega(L)$. Элемент порядка $r \cdot r_p(q)$ из L принадлежит некоторому максимальному тору T группы L. По лемме 1.6 $|T| = q^p - 1$. Поскольку $q^p - 1$ взаимно просто с $q^i - 1$ для всех $i < p$, можно считать, что $r = r_p(q)$. Но тогда подгруппа $N : U$ является группой Фробениуса и, следовательно, U является либо циклической группой, либо (обобщенной) группой кватернионов; противоречие с тем, что на группе U точно действует неразрешимая группа $L_{p+1}(q)$.

Таким образом, $r = q$. Если $q = 3$, то по [30, теорема 1.3] каждый элемент из P фиксирует некоторый неединичный элемент из N, что противоречит лемме 1.1.

Итак, $N = 1$ при $q = 3$ и $N = O_2(G)$ при $q = 2$.

Предположим, что $\mathrm{Inn}(P) < \overline{G}$. Если $\mathrm{Inn}(P) < \overline{G} \cap \mathrm{Inndiag}(P)$, то граф $\mathrm{GK}(G)$ связен, что не так. Поэтому ввиду строения группы $\mathrm{Out}(P)$ и [29, (1)–(9)] имеем $\overline{G} = \mathrm{Inn}(P) : \langle t\rangle$, где t — инволютивный графовый автоморфизм группы P. По [34] централизатор $C_P(t)$ содержит подгруппу, изоморфную группе $B_p(q)$. Поэтому $r_p(q) \in \omega(C_P(t))$. Но по лемме 1.7 числа 2 и $r_p(q)$ не смежны в графе $\mathrm{GK}(G)$; противоречие. Таким образом, $\overline{G} = \mathrm{Inn}(P)$.

Теорема доказана.

Литература

1. *Алеева М. Р.* О конечных простых группах с множеством порядков элементов, как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса // Мат. заметки.—2003.—Т. 73, вып. 3.—С. 323–339.
2. *Алексеева О. А.* Квазираспознаваемость по множеству порядков элементов групп ${}^3D_4(q)$, q четно // Алгебра и логика.—2006.—Т. 45, № 1.—С. 3–19.
3. *Алексеева О. А., Кондратьев А. С.* О распознаваемости группы $E_8(q)$ по множеству порядков элементов // Укр. мат. журн.—2002.—Т. 54, № 7.—С. 1003–1008.
4. *Алексеева О. А., Кондратьев А. С.* Квазираспознаваемость одного класса конечных простых групп по множеству порядков элементов // Сиб. мат. журн.—2003.—Т. 44, № 2.—С. 241–255.
5. *Алексеева О. А., Кондратьев А. С.* Квазираспознаваемость по множеству порядков элементов групп ${}^3D_4(q)$ и $F_4(q)$ для нечетного q // Алгебра и логика.—2005.—Т. 44, № 5.—С. 517–539.
6. *Алексеева О. А., Кондратьев А. С.* Распознаваемость по спектру групп ${}^2D_p(3)$ для нечетного простого числа p // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.—2008.—Т. 14, № 4.—С. 3–11.
7. *Алексеева О. А., Кондратьев А. С.* О распознаваемости по спектру некоторых простых ортогональных групп // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.—2009.—Т. 15, № 1.—С. 30–43.
8. *Бутурлакин А. А., Гречкосеева М. А.* Циклическое строение максимальных торов в конечных классических группах // Алгебра и логика.—2007.—Т. 46, № 2.—С. 129–156.
9. *Васильев А. В.* О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн.—2005.—Т. 46, № 3.—С. 511–522.
10. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика.—2005.—Т. 44, № 6.—С. 682–725.
11. *Васильев А. В., Горшков И. Б., Гречкосеева М. А., Кондратьев А. С., Старолетов А. М.* О распознаваемости по спектру конечных простых групп типов B_n, C_n и ${}^2D_n$ при $n = 2^k$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.—2009.—Т. 15, № 2.—С. 30–43.
12. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А.* О распознаваемости конечных простых ортогональных групп размерности 2^m, 2^m+1 и 2^m+2 // Сиб. мат. журн.—2004.—Т. 45, № 3.—С. 510–526.
13. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А.* Распознавание по спектру конечных простых линейных групп малых размерностей над полями характеристики 2 // Алгебра и логика.—2008.—Т. 47, № 5.—С. 558–570.
14. *Гречкосеева М. А.* Распознаваемость по спектру группы $\Omega_{10}^{+}(2)$ // Сиб. мат. журн.—2003.—Т. 44, № 4.—С. 734–741.
15. *Гречкосеева М. А.* Распознавание по спектру конечных простых линейных групп над полями характеристики 2 // Алгебра и логика.—2008.—Т. 47, № 4.—С. 405–427.
16. *Зиновьева М. Р.* Распознавание по спектру простых групп $C_p(3)$ для нечетного простого числа p // Алгебра и ее приложения: Тр. Межд. алгебр. конф., посв. 80-летию со дня рождения А. И. Кострикина.—Нальчик: КБУ, 2009.—С. 56–57.
17. *Зиновьева М. Р., Шен Р., Ши В.* Распознавание простых групп $B_p(3)$ по множеству порядков элементов // Тез. докл. Междунар. алгебр. конф., посв. 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша.—М.: Изд-во мат.-мех. фак-та МГУ, 2008.—С. 105–106.
18. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб.—1989.—Т. 180, № 6.—С. 787–797.
19. *Кондратьев А. С.* Квазираспознаваемость по множеству порядков элементов групп $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$ // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48, № 6.—С. 1250–1271.
20. *Кондратьев А. С., Мазуров В. Д.* Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн.—2000.—Т. 41, № 2.—С. 359–369.
21. *Мазуров В. Д.* Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика.—1997.—Т. 36, № 1.—С. 37–53.
22. *Мазуров В. Д.* Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та.—2005.—№ 36.—С. 119–138.—(Математика и механика; вып. 7.)
23. Семинар по алгебраическим группам.—М.: Мир, 1973.—315 с.
24. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле.—М.: Мир, 1975.—262 с.
25. *Aschbacher M.* Finite group theory.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.—274 p.
26. *Carter R. W.* Centralizers of semisimple elements in the finite classical groups // Proc. London Math. Soc. Ser. 3.—1981.—Vol. 42, № 1.—P. 1–41.

27. *Conway J. H., Curtis R. G., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups.—Oxford: Clarendon Press, 1985.—252 p.
28. *Gerono G. C.* Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math.—1870.—Vol. 9, № 2.—P. 469–471.
29. *Gorenstein D., Lyons R.* The local structure of finite groups of characteristic 2 type.—Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1983.—(Mem. Amer. Math. Soc.—Vol. 42, № 276.)
30. *Guralnick R. M., Tiep P. H.* Finite simple unisingular groups of Lie type // J. Group Theory.—2003.—Vol. 6, № 3.—P. 271–310.
31. *Kleidman P., Liebeck M.* The subgroup structure of the finite classical groups.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.—303 p.
32. *Kondrat'ev A. S.* Recognition by spectrum of the groups ${}^2D_{2^m+1}(3)$ // Science in China. Ser. A: Mathematics.—2009.—Vol. 52, № 2.—P. 293–300.
33. *Shi W. J., Tang C. Y.* A characterization of some orthogonal groups // Progr. Nat. Sc.—1997.—Vol. 7, № 2.—P. 155–162.
34. *Stensholt E.* Certain embeddings among finite groups of Lie type // J. Algebra.—1978.—Vol. 53, № 1.—P. 136–187.
35. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra.—1981.—Vol. 69, № 2.—P. 487–513.
36. *Zsigmondy K.* Zur theorie der potenzreste // Monatsh. Math. Phys.—1892.—Vol. 3, № 1.—P. 265–284.

Статья поступила 10 ноября 2009 г.

Кондратьев Анатолий Семенович
Институт математики и механики УрО РАН,
зав. сектором
Россия, 620219, Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: `a.s.kondratiev@imm.uran.ru`