Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 1, С. 21–30

УДК **513.881**

О СЛАБЫХ БАЗИСАХ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. П. Кондаков

Посвящается девяностолетию со дня рождения Глеба Павловича Акилова

В статье показывается, что в монтелевском строго сетевом (в смысле Де Вильде) пространстве с полным сепарабельным сильным сопряженным всякий слабый базис является базисом Шаудера с равностепенно непрерывной системой коэффициентных функционалов. Этот результат применяется к базисам в пространствах голоморфных функций. В частности, из него следует абсолютность всех базисов в ряде неметризуемых ядерных функциональных пространств.

Ключевые слова: слабые базисы, базисы Шаудера, монтелевские пространства, пространства бесконечномерной голоморфности.

1. Предварительные сведения

Приводимое ниже определение сети появилось в работах Де Вильде [1].

Сетью подмножеств в линейном топологическом пространстве E называют класс $\mathscr{W} = \{G_{n_1,\dots,n_k}\}$ подмножеств $G_{n_1,\dots,n_k}$ в E, где k и $n_1,\dots,n_k$ пробегают множество всех натуральных чисел, если выполняются соотношения

$$E = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} G_{n_1}, \quad G_{n_1,\dots,n_k} = \bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty} G_{n_1,\dots,n_k,n_{k+1}} \quad \text{для } k > 1 \text{ и всех } n_1,\dots,n_k. \qquad (DW)$$

Когда все множества сети замкнуты, уравновешены или абсолютно выпуклы, будем говорить, что, соответственно, сеть замкнута, уравновешена, выпукла.

Уравновешенную сеть $\mathscr{W}$ называют *C-сетью*, если выполнено следующее условие: для каждой фиксированной последовательности n_k, $k = 1, 2, \dots$, существует последовательность положительных чисел $(\lambda_k > 0)_{k=1}^{\infty}$ такая, что для всех $\mu_k \in [0, \lambda_k]$ и всех $x_k \in G_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$ сходятся в E. Заметим, что в данном случае ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$ сходится в E при условии $|\mu_k| \leqslant \lambda_k$ для всех k. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть последовательности $(\mu_k^+)_{k=1}^{\infty}$, $(\mu_k^-)_{k=1}^{\infty}$, $(\operatorname{Re} \mu_k^+)_{k=1}^{\infty}$, $(\operatorname{Im} \mu_k^+)_{k=1}^{\infty}$, где $\mu_k^+ = \sup(\mu_k, 0)$, $\mu_k^- = (-\mu_k)^+$ для действительных μ_k.

Сеть $\mathscr{W}$ называют *строгой*, если она абсолютно выпукла, и если для каждой последовательности n_k, $k = 1, 2, \dots$, существует последовательность $\lambda_k > 0$ такая, что для всех $x_k \in G_{n_1,\dots,n_k}$ и всех μ_k, $0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k$, ряды $\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k \lambda_k$ сходятся в E и $\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k x_k$ содержится в $G_{n_1,\dots,n_{k_0}}$ для всех $k_0 = 1, 2, \dots$ Очевидно, что строгая сеть является C-сетью.

Монтелевским называют локально выпуклое пространство, в котором каждое замкнутое абсолютно выпуклое поглощающее множество (бочка) является окрестностью нуля и каждое замкнутое ограниченное подмножество компактно.

Монтелевскими являются многие классические пространства голоморфных функций в конечномерных областях, наделенные топологиями равномерной сходимости на всех компактных множествах, в силу известной теоремы Монтеля. Класс монтелевских пространств включает также и многие пространства голоморфных функций, определенных на бесконечномерных пространствах Кёте — Фреше числовых последовательностей (см., например, [2, 3]).

Пусть $(E, \{\|\cdot\|_\alpha, \alpha \in A\})$ — локально выпуклое пространство. Если в пространстве E есть (топологический) базис $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, то это означает, что любой элемент $e \in E$ представляется единственным образом в виде сходящегося ряда

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$$

с числовыми коэффициентами из поля чисел (над которым взято пространство E). Тем самым корректно определены линейные функционалы $e_n^*(\cdot)$ формулой $e_n^*(e) = c_n$, $e \in E$, причем они непрерывны при дополнительных ограничениях на пространство E, например, когда E является пространством Фреше (полным метризуемым локально выпуклым пространством).

Базис (e_n) называют *равностепенно непрерывным*, если выполнено условие

$$(\forall\, \alpha \in A)\ (\exists\, \alpha' = \alpha'(\alpha) \in A)\ (\exists\, C(\alpha) > 0)\ (\forall\, e \in E) \qquad \sup_n |e_n^*(e)| \|e_n\|_\alpha \leqslant C(\alpha) \|e\|_{\alpha'(\alpha)}.$$

Известно, что в пространстве Фреше всякий слабый базис является равностепенно непрерывным, однако, во многих случаях конкретных функциональных пространств условие метризуемости отсутствует, например, при рассмотрениях пространств непрерывных целых функций на пространствах Кёте с топологиями равномерной сходимости на компактах (см., например, в [2]). Поэтому представляет интерес нахождение условий, которым должно удовлетворять пространство E, чтобы всякий базис в E обладал свойством равностепенной непрерывности.

В [1] доказано, что в борнологическом секвенциально полном пространстве, имеющем так называемую «строгую сеть» всякий слабый базис будет базисом в исходной топологии с непрерывными коэффициентными функционалами. Обзор результатов о слабых базисах можно найти в [4] (см. также [5]).

Ниже будет рассмотрена немного другая ситуация, при которой коэффициентные функционалы слабого базиса непрерывны и этот базис будет базисом в исходной топологии.

Голоморфная функция на локально выпуклом пространстве E определяется как непрерывная функция $f : E \to \mathbb{C}$, которая голоморфна на всех конечномерных подпространствах E. Совокупность всех таких функций обозначают $\mathscr{H}(E)$ и рассматривают с различными топологиями, например, с топологией τ_0 равномерной сходимости на компактных подмножествах пространства E. Иногда рассматривают пространство $\mathscr{H}_b(E)$ голоморфных функций, ограниченных на каждом ограниченном подмножестве с топологией равномерной сходимости на всех ограниченных подмножествах E. Эти пространства будут совпадать, если E является монтелевским пространством. В частности, это имеет место и для рассматриваемого в ряде работ (см., например, [2]) класса совершенно ядерных пространств. *Совершенно ядерным* (fully nuclear) называют локально выпуклое пространство E такое, что и E, и E'_β (сильное сопряженное) являются полными рефлексивными ядерными пространствами. Для пространств Фреше это определение равносильно обычному определению ядерности. Наиболее интересны исследования пространств голоморфных функций на пространствах, имеющих базис.

Если E имеет базис $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, то *мономами* на E называют функции

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n e_n \mapsto z^m = z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot z_{k(m)}^{m_{k(m)}}.$$

Здесь m пробегает множество $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ финитных векторов $(m_1, \ldots, m_{k(m)}, 0, \ldots)$ с целочисленными координатами, среди которых конечное число отличных от нуля, и в записи z^m считаем $0^0 = 1$.

Пусть $[a_r(n)]_{r,n=1}^{\infty}$ — матрица неотрицательных действительных чисел с монотонностью по строкам $0 \leqslant a_r(n) \leqslant a_{r+1}(n)$, $r, n = 1, 2, \ldots$ (матрица Кёте). *Пространством Кёте* называют линейное пространство всех комплексных числовых последовательностей

$$l_1[a_r(n)] \doteq \left\{ z = (z_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| a_r(n) \doteq |z|_r < +\infty,\ r = 1, 2, \ldots \right\},$$

наделенное топологией, задаваемой системой полунорм $(|\cdot|_r)_{r=1}^{\infty}$.

Под открытым полидиском в $l_1[a_r(n)]$ понимают обычно множество

$$U = \left\{ z = (z_n)_{n=1}^{\infty} : \sup_n |z_n| a_n < 1 \right\}, \text{ где } a_n \in [0, \infty),$$

и существуют индексы $r(0), r(1) \in \mathbb{N}$ и числа $c(0) > 0$, $c(1) > 0$ такие, что

$$c(0)\, a_{r(0)}(n) \leqslant a_n \leqslant c(1)\, a_{r(1)}(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Напомним, что пространство Кёте $l_1[a_r(n)]$ ядерно тогда и только тогда, когда выполняется условие (см. [6, гл. III, упр. 25]):

$$(\forall\, r \in \mathbb{N})\ (\exists\, s \in \mathbb{N}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_s(n)} < +\infty.$$

Пространство Кёте $l_1[a_r(n)]$ относят к классу (d_1), следуя Драгилеву, если его матрица Кёте удовлетворяет условию [7]:

$$(\exists\, r)\ (\forall\, s)\ (\exists\, t) \quad \sup_n \frac{a_s^2(n)}{a_r(n) a_t(n)} < \infty.$$

2. Непрерывность коэффициентных функционалов

Начнем исследование свойств слабых базисов в монтелевских пространствах, имеющих полное сепарабельное сильное сопряженное.

Теорема 1. *Пусть в монтелевском пространстве E имеется строгая сеть и сильное сопряженное E'_β полно и сепарабельно. Если $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ — слабый базис в E, то он является равностепенно непрерывным базисом в исходной топологии.*

$\lhd$ Если E — монтелевское пространство, то сильное сопряженное E'_β тоже является монтелевским пространством, сопряженное к которому может быть отождествлено (теоретико-множественно и топологически) с E (см., например, [6]). Любое ограниченное множество в E содержится в абсолютно выпуклом компактном множестве и поэтому мы будем рассматривать непрерывность линейных функционалов сначала на произвольном компактном абсолютно выпуклом множестве $A \subset E$.

Обозначив $(x'_i)_{i=1}^\infty$ — счетное всюду плотное множество в E'_β, введем на A метрику

$$\rho(e,f) = \sum_{i=1}^\infty \frac{\max\limits_{k\leqslant i} |x'_k(e-f)|}{2^i\Big(1+\max\limits_{k\leqslant i}|x'_k(e-f)|\Big)} \quad (e,f\in A)$$

и соответствующую квазинорму $|||e||| = \rho(e,0)$, $e\in A$.

Так как E рефлексивно и E'_β сепарабельно, исходная топология пространства E на множестве A совпадает с топологией, определяемой метрикой ρ (см., например, [6, с.110, 112]). Поэтому можно считать A полным метрическим пространством в исходной топологии, хотя и не линейным.

Пусть в пространстве E задан слабый базис $(e_n)_{n=1}^\infty$, т. е. любой элемент единственным образом записывается в виде слабо сходящегося в E ряда

$$e = \sum_n e_n^*(e)e_n$$

(числовой ряд $x'(e) = \sum e_n^*(e)x'(e)$ сходится для любого $x'\in E'$).

Слабая сходимость разложения каждого элемента E обеспечивает слабую, а значит, и сильную ограниченность частичных сумм

$$S_n(e) = \sum_{k=1}^n e_k^*(e)e_k, \quad n=1,2,\ldots$$

(см., например, [5, 6, 8]). Поэтому в монтелевском пространстве слабый базис является и базисом в исходной топологии. Действительно, на замыкании абсолютно выпуклой оболочки частичных сумм произвольно взятого элемента, которая является ограниченным множеством, согласно сказанному выше, слабая сходимость совпадает со сходимостью в исходной топологии.

Пусть исходная топология τ пространства E определяется системой полунорм $\{|\cdot|_i,\ i\in I\}$. Сказанное выше позволяет корректно ввести в рассмотрение новую систему полунорм

$$\|e\|_i = \sup_{m,n(m<n)} |S_n(e)-S_{m-1}(e)|_i = \sup_{m,n}\left|\sum_{k=m}^n e_k^*(e)e_k\right|_i \quad (e\in E,\ i\in I),$$

определяющую на E топологию τ^*, которая, очевидно, не слабее τ. В топологии τ^* коэффициентные функционалы непрерывны, поскольку $|e^*_{k(0)}(e)||e_{k(0)}|_i \leqslant \|e\|_i$, $i\in I$, $k(0)=1,2,\ldots$, по определению полунорм $\|\cdot\|_i$.

Покажем, что топология τ^* на любом замкнутом ограниченном абсолютно выпуклом множестве A совпадает с топологией, определяемой метрикой ρ (квазинормой $|||\cdot|||$).

Отметим, что A τ^*-полно, т. е. полно относительно топологии τ^*. Если $\mathscr{F}$ — фильтр τ^*-Коши в A, то он определяет последовательность сходящихся числовых фильтров

$e_k^*(\mathscr{F})$, $k = 1, 2, \ldots$ Обозначив c_k, $k = 1, 2, \ldots$, соответствующие пределы этих фильтров, покажем принадлежность элемента $x(c) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ пространству E. Вместе с тем можно рассматривать сходящиеся фильтры $S_n(\mathscr{F})$, $n = 1, 2, \ldots$, пределами которых являются частичные суммы $S_n(x(c)) = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$, $n = 1, 2, \ldots$ Поскольку $\mathscr{F}$ — фильтр τ^*-Коши, а пределы фильтров принадлежат замыканиям всех множеств фильтра, в чем можно убедиться непосредственно, в некотором множестве фильтра $\mathscr{F}$, малом порядка $U_i = \{e \in E : \|e\|_i < 1\}$, можно выбрать такой элемент $x_0 \in E$, что $|S_n(x(c)) - S_n(x_0)|_i \leqslant 1$. Тогда будем иметь $|S_n(x(c))|_i \leqslant |S_n(x_0)|_i + 1$ и, поскольку $x_0 \in E$, последовательность $(S_n(x(c)))_{n=1}^{\infty}$ будет ограничена в E. В монтелевском пространстве E это означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ сходится и является разложением предела $x(c)$ фильтра $\mathscr{F}$. Так как $\mathscr{F}$ одновременно и τ-Коши в A, в силу единственности представления элемента по базису (e_k) и полноты A, имеем $x(c) \in A$.

Покажем, что топология τ^* совпадает на множестве A с топологией, задаваемой метрикой ρ. Для этого достаточно проверить, что в произвольной τ^*-замкнутой окрестности нуля в (A, τ^*) содержится шар подходящего радиуса в метрике ρ.

Построим в (E, τ^*) строгую сеть. Пусть $\mathscr{W} = G_{n_1,\ldots,n_k}$ — строгая сеть на (E, τ). Для каждого $e \in E$ введем $B(e)$ как замыкание абсолютно выпуклой оболочки $\{e, S_1(e), S_2(e), \ldots\}$, которая ограничена в E, и, поскольку E секвенциально полно, $B(e)$ будет секвенциально полно. Согласно свойству строгой сети (см., например, [5]), для каждого $B(e)$ существует последовательность натуральных чисел n_k и последовательность положительных чисел α_k, $k = 1, 2, \ldots$, таких, что $B(e) \subset \alpha_k G_{n_1,\ldots,n_k}$ для всех k.

Далее нам удобно будет заменить сеть $\mathscr{W}$ другой строгой сетью $\mathscr{W}' = \{G'_{n'_1,\ldots,n'_k}\}$ на E, которая имеет свойство, что во вложениях выше можно предполагать $\alpha_k = 1$ для всех k. Это можно сделать следующим образом. Определяем последовательно:

$$
\begin{gathered}
G'_{n'_1} = m_1 G_{n_1}, \quad n'_1 = (m_1, n_1), \\
G'_{n'_1,n'_2} = G'_{n'_1} \cap m_2 G_{n_1,n_2}, \quad n'_2 = (m_2, n_2), \ldots \\
G'_{n'_1,\ldots,n'_k} = G'_{n'_1,\ldots,n'_{k-1}} \cap m_k G_{n_1,\ldots,n_k}, \quad n'_k = (m_k, n_k) \quad \text{и т. д.}
\end{gathered}
$$

Эти множества абсолютно выпуклы и соотношения для сети (DW) следуют непосредственно из соотношений для $\mathscr{W}$.

Остается показать, что $\mathscr{W}' = \{G'_{n'_1,\ldots,n'_k}\}$ — строгая сеть. Строгость $\mathscr{W}$ означает, что для каждой фиксированной последовательности (n_k) существует $(\lambda_k > 0)$ такая, что для всех $\mu_k :\ 0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k$ и всех $z_k \in G_{n_1,\ldots,n_k}$ ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z_k$ сходятся в E и $\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k z_k$ содержатся в $G_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$ для каждого k_0.

Рассмотрим фиксированную последовательность $n'_k = (m_k, n_k)$ и определим $\lambda'_k = \lambda_k (m_k)^{-1}$, где λ_k соответствует n_k в сети $\mathscr{W}$. Предположим $0 \leqslant \mu'_k \leqslant \lambda'_k$ и $z'_k \in G'_{n'_1,\ldots,n'_k}$. Тогда $0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k$ для $\mu_k = \mu'_k m_k$ и $z_k = z'_k / m_k \in G_{n_1,\ldots,n_k}$, так как $G'_{n'_1,\ldots,n'_k} \subset m_k G_{n_1,\ldots,n_k}$. Отсюда следует, что

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \mu'_k z'_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z_k \text{ сходится в } E.
$$

Более того,

$$
\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu'_k z'_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k z_k \in G_{n_1,\ldots,n_j} \subset m_j G_{n_1,\ldots,n_j} \quad (\forall\, j \leqslant k_0),
$$

так как $\mathscr{W}$ — строгая сеть. Это влечет по определению $G'_{n'_1,\ldots,n'_{k_0}}$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\lambda'_k z'_k \in G'_{n'_1,\ldots,n'_{k_0}}.$$

Следовательно, $\mathscr{W}'$ есть строгая сеть на E.

Наконец, если $B(e)\subset \alpha_k G_{n_1,\ldots,n_k}$ и если $\alpha_k \leqslant m_k$, m_k — натуральное число, то

$$B(e)\subset \bigcap_{j=1}^{k} m_j G_{n_1,\ldots,n_j}\subset G'_{n'_1,\ldots,n'_k},\quad n'_j=(m_j,n_j).$$

Поэтому можно предполагать, что существует строгая сеть $\mathscr{W}=G_{n_1,\ldots,n_k}$ на E такая, что для каждого $e\subset E$ существует последовательность чисел (n_k) таких, что $B(e)\subset G_{n_1,\ldots,n_k}$.

Обозначим $G^*_{n_1,\ldots,n_k}$ множество всех $e\in E$ таких, что $B(e)\subset G_{n_1,\ldots,n_k}$. Соотношения (DW) легко проверяются, так что $\mathscr{W}^*=\{G^*_{n_1,\ldots,n_k}\}$ сеть на E. Остается доказать, что $\mathscr{W}^*$ есть C-сеть в (E,τ^*).

Пусть (n_k) — фиксированная последовательность натуральных чисел и (λ_k) — последовательность соответствующих чисел для $\mathscr{W}$. Можно предполагать (λ_k) монотонно убывающей с $\lambda_k<1$, $k=1,2,\ldots$ Достаточно показать, что для $\mu_k\in[0,\lambda_k^2]$ и $z_k\in G^*_{n_1,\ldots,n_k}$ ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k z_k \text{ сходятся в } (E,\tau^*).$$

Заметим, что по определению $\mathscr{W}$ элементы $z_k, S_1 z_k, S_2 z_k,\ldots$ все содержатся в $G_{n_1,\ldots,n_k}$. Поэтому ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k z_k,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k S_m z_k$$

сходятся (E,τ) к элементам y и y_m соответственно для всех $m=1,2,\ldots$

Наша цель теперь показать, что $y_m=S_m y$ и y_m слабо сходятся к y. По определению

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k S_1 z_k=\sum_{k=1}^{N}\mu_k e_1^*(z_k)e_1$$

сходится к y_1, значит, $y_1=\beta_1 e_1$, где

$$\beta_1=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k e_1^*(z_k).$$

Аналогично,

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k e_m^*(z_k)e_m=\sum_{k=1}^{N}\mu_k S_m z_k-\sum_{k=1}^{N}\mu_k S_{m-1}z_k$$

сходится к $y_m-y_{m-1}=\beta_m e_m$ с $\beta_m=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k e_m^*(z_k)$, отсюда $y_m=\sum_{i=1}^{m}\beta_i e_i$. Так как $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ — слабый базис, достаточно показать, что y_m слабо сходится к y, поскольку из единственности представления этого элемента вытекает $y_m=S_m y$.

Пусть e' — элемент E'. Будем оценивать

$$|e'(y-y_m)| \leqslant \left|e'\biggl(y-\sum_{k=1}^{N}\mu_k z_k\biggr)\right| + \left|e'\biggl(\sum_{k=1}^{N}\mu_k z_k - \sum_{k=1}^{N}\mu_k S_m z_k\biggr)\right|$$
$$+\sup_m \left|e'\biggl(\sum_{k=1}^{N}\mu_k S_m z_k - y_m\biggr)\right| = A+B+C.$$

Покажем, что для данного $\varepsilon>0$ можно выбрать N_0 таким образом, что $\max\{A,C\}\leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ для $N\geqslant N_0$. Вспомним, что последовательность ($\lambda_k<1$) монотонно убывающая ($0\leqslant \mu_k\leqslant \lambda_k^2$) и $z_k\in G^*_{n_1,\dots,n_k}$ ($B(z_k)\subset G_{n_1,\dots,n_k}$). Следовательно,

$$y-\sum_{k=1}^{N}\mu_k z_k = \sum_{k=N+1}^{\infty}\mu_k z_k = \lambda_{N+1}\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\mu_k}{\lambda_{N+1}}z_k, \quad \frac{\mu_k}{\lambda_{N+1}}\leqslant \lambda_k \text{ для } k\geqslant N+1.$$

Так как $\mathscr{W}$ — строгая сеть, имеем

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\mu_k}{\lambda_{N+1}}z_k\in G_{n_1,\dots,n_{N+1}}, \quad y-\sum_{k=1}^{N}\mu_k z_k\in \lambda_{N+1}G_{n_1,\dots,n_{N+1}}.$$

Аналогично

$$y_m-\sum_{k=1}^{N}\mu_k S_m z_k\in \lambda_{N+1}G_{n_1,\dots,n_{N+1}}.$$

Если U — окрестность нуля в (E,τ) такая, что

$$\sup_{e\in U}|e'(e)|\leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

согласно свойству строгой сети (см., например, [5]) существует N_0 такое, что $\lambda_{N+1}G_{n_1,\dots,n_{N+1}}\subset U$ для всех $N>N_0$. Для таких N, очевидно, $\max\{A,C\}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$.

Зафиксируем $N>N_0$ и заметим, что

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k S_m z_k = S_m\biggl(\sum_{k=1}^{N}\mu_k z_m\biggr) \text{ слабо сходится по } m \text{ к } \sum_{k=1}^{N}\mu_k z_k.$$

Значит, для достаточно больших m будем иметь $B\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ и последовательность (y_m) слабо сходится к y. Выше показано, что $y_m=S_m y$. Убедимся, что $\sum_{k=1}^{N}\mu_k z_k$ сходится к топологии τ^* к y. Снова имеем

$$y-\sum_{k=1}^{N}\mu_k z_k\in\lambda_{N+1}G_{n_1,\dots,n_{N+1}},$$

$$S_m y - S_m\biggl(\sum_{k=1}^{N}\mu_k z_k\biggr)\in\lambda_{N+1}G_{n_1,\dots,n_{N+1}}, \quad N=1,2,\dots$$

Пусть p_i — непрерывная полунорма на E и пусть N такое, что $p_i(e)\leqslant\varepsilon$ для $e\in\lambda_{N+1}G_{n_1,\dots,n_{N+1}}$. Тогда отсюда следует, что

$$p_i^*\biggl(y-\sum_{k=1}^{N}\mu_k z_k\biggr)=\sup_m p_i\biggl(S_m y - S_m\biggl(\sum_{k=1}^{N}\mu_k z_k\biggr)\biggr)\leqslant\varepsilon.$$

Это и означает, что $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k z_k$ сходится в (E,τ^*). Пусть $\mathscr{W}^*=\{G^*_{n_1,\dots,n_k}\}$ — построенная выше строгая сеть в (E,τ^*). Из определения сети (DW) следует

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}G^*_{n_1}\cap A,\quad G^*_{n_1,\dots,n_k}\cap A=\bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty}(G^*_{n_1,\dots,n_{k+1}}\cap A)\quad \text{для } k>1 \text{ и всех } n_1,\dots,n_k.$$

Так как $A=(A,\tau)$ — полное метрическое пространство, согласно теореме Бэра, найдется такое n_1, что $G^*_{n_1}\cap A$ — нетощее в A, затем можно указать такое n_2, что $G^*_{n_1,n_2}\cap A$ — нетощее в A и так далее. Таким образом, имеется последовательность $n_1,n_2,\dots$ такая, что $G^*_{n_1,n_2,\dots,n_k}\cap A$ является нетощим в A при любом k.

Пусть V — замкнутая абсолютно выпуклая окрестность нуля в (E,τ^*). Так как

$$G^*_{n_1,\dots,n_k}\cap A=\bigcup_{m=1}^{\infty}G^*_{n_1,\dots,n_k}\cap mV\cap A,$$

существует m_k такое, что $G^*_{n_1,\dots,n_k}\cap m_kV\cap A$ — нетощее в (A,τ). Так как $\mathscr{W}^*$ есть C-сеть, существует последовательность чисел $(\lambda_k>0)$ такая, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k z_k$ сходится в (E,τ) для всех $0\leqslant\mu_k\leqslant\lambda_k$ и всех $z_k\in G^*_{n_1,\dots,n_k}$.

Для заданного $\epsilon>0$ определим числа $\nu_k\in(0,\lambda_k]$ так, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k m_k\leqslant\epsilon$ (например, $\nu_k=\min\left\{\lambda_k,\frac{\epsilon}{2^k m_k}\right\}$) и положим $M_k=\nu_k G^*_{n_1,\dots,n_k}\cap\nu_k m_k V$. Ясно, что снова $M_k\cap A$ — нетощее множество в (A,τ). Рассматриваем случай, когда каждое M_k абсолютно выпукло и $\overline{M}_k$ содержит внутреннюю точку, а значит, существует $x_k\in M_k$ и абсолютно выпуклые окрестности $U^{(k)}\subset U_k$ такие, что $\overline{M}_k\supset x_k+U^{(k)}$. Достаточно показать, что $\overline{V\cap A}\subset(1+2\epsilon)(V\cap A)$, где замыкание берется в топологии τ.

Пусть $x_0\in\overline{V\cap A}$. Существует элемент $y_1\in V\cap A$ такой, что $x_0-y_1\in U^{(1)}$, и имеем $x_0-y_1+x_1\in\overline{M_1}$. Если $y_1,\dots,y_{k-1}$ уже определены, найдем $y_k\in M_{k-1}$ так, чтобы

$$x_0-\sum_{i=1}^{k}y_i+\sum_{i=1}^{k-1}x_i\in U^{(k)}\subset U_k,\quad x_0-\sum_{i=1}^{k}y_i+\sum_{i=1}^{k}x_i\in\overline{M}_k.$$

По построению, $x_i\in\nu_i G^*_{n_1,\dots,n_i}$ для $i\geqslant1$ и, согласно определению C-сети (с учетом выбора ν_i), $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ сходится в (E,τ^*). Аналогично, $y_{i+1}\in\nu_i G^*_{n_1,\dots,n_i}$ для всех $i\geqslant1$ и $\sum_{i=1}^{\infty}y_i$ сходится в (E,τ^*). Кроме того, поскольку $y_1\in V$, $y_{i+1}\in\nu_i m_i V$ и $x_i\in\nu_i m_i V$ для всех $i\geqslant1$ и так как V замкнута в (E,τ^*), $\sum_{i=1}^{k}y_i-\sum_{i=1}^{k-1}x_i$ сходится к элементу $y_0\in(1+2\epsilon)V$. Но $\sum_{i=1}^{k}y_i-\sum_{i=1}^{k-1}x_i$ сходится к x_0 ввиду полноты A относительно обоих τ и τ^*, имеем $x_0=y_0\in A$ и $\overline{V\cap A}\subset(1+2\epsilon)V\cap A$.

Итак, топологии τ и τ^* совпадают на ограниченных множествах E, поскольку каждое ограниченное множество монтелевского пространства помещается в компактное, и коэффициентные функционалы, непрерывные на каждом ограниченном множестве, будут непрерывны и на E, ввиду полноты сильного сопряженного E'_β (см., например, [6, с. 189). Последовательность (e_n) будет слабым базисом Шаудера, а, согласно свойству бочечности E, и равностепенно непрерывным базисом в исходной топологии (см., например, [4], [5, с. 248, 249]). $\triangleright$

Определение. Локально выпуклое пространство E называют (DF)-*пространством*, если E обладает фундаментальной последовательностью ограниченных множеств и каждое сильно ограниченное счетное объединение равностепенно непрерывных подмножеств в E' равностепенно непрерывно. Сильное сопряженное E'_β к (DF)-пространству E является пространством Фреше (см., например, [6, с. 249]).

Следствие. *Если (e_n) — базис квазиполного (DF)-пространства E, имеющего сепарабельное сильное сопряженное E'_β, то этот базис является базисом Шаудера.*

В данном случае E будет строго сетевым (см., например, [5]), и можно применить (часть) рассуждения теоремы 1.

Условие полноты сильного сопряженного не будет лишним, так как имеются монтелевские пространства, не являющиеся полными [9].

3. Базисы в классах функциональных пространств

Впервые М. М. Драгилевым [10] было показано, что в пространстве аналитических внутри единичного круга функций, наделенном топологией равномерной сходимости на компактах, все базисы абсолютны. Позже было доказано, что в ядерных пространствах Фреше базисы абсолютны (если они есть) и в ядерных локально выпуклых пространствах каждый равностепенно непрерывный базис абсолютен. Для тех функциональных неметризуемых пространств, в которых выполнены условия теоремы 1, могут быть получены аналоги результата Драгилева об абсолютности всех базисов в указанных пространствах. Прежде всего, речь пойдет о пространствах голоморфных функций, определенных на пространствах Кёте.

Боланд и Дайнин в [11] доказали, что мономы на совершенно ядерном пространстве с базисом образуют абсолютный базис в пространстве $(\mathscr{H}(E), \tau_0)$ голоморфных функций с топологией равномерной сходимости на компактных множествах. Позже Дайнин и Тимони [12] показали, что если мономы образуют абсолютный базис в пространстве $(\mathscr{H}(E), \tau_0)$, где E — локально выпуклое монтелевское пространство с базисом, то E должно быть ядерно. В указанных случаях система мономов является равностепенно непрерывным базисом в монтелевском пространстве. Теорема 1 дает информацию в ряде случаев о других базисах указанных пространств. Это справедливо в том случае, когда E является ядерным пространством Кёте.

Пространство голоморфных по Гато и непрерывных на компактных подмножествах функций, определенных на открытом полидиске $U \subset l_1[a_r(n)]$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактных множествах обозначается обычно $(\mathscr{H}(U), \tau_0)$. Если в качестве U берется все пространство $l_1[a_r(n)]$, то говорят о пространстве целых функций $(\mathscr{H}(l_1[a_r(n)]), \tau_0)$ с компактно открытой топологией.

Известно, что в пространстве $(\mathscr{H}(U), \tau_0)$, при условии ядерности пространства $l_1[a_r(n)] \supseteq U$, система мономов $(z^m)_{m\in\mathbb{N}_0^N}$, где $\mathbb{N}_0^N = \{m = (m_i),\ m_i \in \mathbb{N},\ m_i = 0$ при $i > J(m)\}$, $z^m := (z_i)_{i=1}^\infty \mapsto z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot z_{J(m)}^{m_{J(m)}}$ образует абсолютный базис [2]. В [2] показано, что пространство $(\mathscr{H}(U), \tau_0)$ борнологично, если $l_1[a_r(n)] \in (d_1)$. Заметим, что используемое в [2] понятие B-ядерного пространства соответствует принадлежности классу (d_1) (иногда еще говорят о свойстве (DN)). Комбинируя все эти факты, получаем из теоремы 1 следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть U — открытый полидиск в ядерном пространстве Кёте $l_1[a_r(n)]$ из класса (d_1). Тогда в пространстве $(\mathscr{H}(U), \tau_0)$ все базисы абсолютны.*

Свойство секвенциальной (и даже ограниченной) полноты вытекает из рефлексивности пространства $(\mathscr{H}(U), \tau_0)$. Полнота и сепарабельность сильного сопряженного следует из борнологичности $(\mathscr{H}(U), \tau_0)$ и наличия базиса (с учетом рефлексивности). В указанных пространствах голоморфных функций, определенных на ядерном пространстве Кёте E, имеется строгая сеть, поскольку это пространство можно рассматривать как подпространство счетного произведения строго сетевых пространств m-однородных полиномов по разложению функций в ряд Тэйлора (см., например, [3, 5, 8]). Это утверждение имеет место и для пространства целых функций.

Интересно было бы выяснить, можно ли получить любой базис $(\mathscr{H}(U), \tau_0)$ при сделанных в теореме 2 предположениях из базиса мономов путем возможных операций перестановки элементов, умножения элементов на числа, отличных от нуля, и действия автоморфизма пространства.

Литература

1. *De Wilde M.* On the equivalence of weak and Schauder bases // Proc. Internat. Coll on Nuclear Spaces and Ideals in Operator Algebras. Studia Math. (Warsaw, 1969).—1970.—Vol. 38.—457 p.
2. *Dineen S.* Analytic functionals on fully nuclear spaces // Studia Math.—1982.—Vol. 73.—P. 11–32.
3. *Кондаков В. П.* О дифференцируемости отображений и строении пространств голоморфных функций на пространствах числовых последовательностей // Владикавк. мат. журн.—2007.—Т. 9, вып. 2.—С. 9–21.
4. *McArthur C. W.* Developments in Schauder basis theory // Bull. of the Amer. Math. Soc.—1972.—Vol. 78, № 6.—P. 877–908.
5. *Köthe G.* Topological vector spaces II.—Berlin: Springer-Verlag, 1979.
6. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1971.—359 с.
7. *Драгилев М. М.* О правильных базисах в ядерных пространствах // Мат. сб.—1965.—Т. 68, вып. 2—С. 153–173.
8. *Кондаков В. П.* Три основных принципа линейного функционального анализа, их обобщения и приложения.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2007.—208 с.
9. *Kömura Y.* Some examples on linear topological spaces // Math. Ann.—1964.—Vol. 153.—P. 150–162.
10. *Драгилев М. М.* О регулярной сходимости базисных разложений аналитических функций // Науч. докл. высш. школы. Физ.-мат. науки.—1958.—№ 4.—С. 27–32.
11. *Boland P. J., Dineen S.* Holomorphic functions on fully nuclear spaces // Bull. Soc. Math. France.—1978.—Vol. 106.—P. 311–336.
12. *Dineen S., Timoney R. M.* Absolute bases, tensor products and a theorem of Bohr // Studia Math.—1989.—Vol. 94.—P. 227–234.

Статья поступила 1 марта 2010 г.

Кондаков Владимир Петрович
Южный федеральный университет,
заведующий каф. теории функций и функцион. анализа
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;

Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
заведующий лаб. вещественного анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: kond@sfedu.ru

ON WEAK BASES IN FUNCTIONAL SPACES

Kondakov V. P.

For a strictly webbed Montel space E with complete separable E'_β (strong dual of E), we show that a weak bases in E is Schauder basis with equicontinuons coefficientive functionals. This result is applied to bases in spaces of holomorphic functions. In particular, from it the absolutenes of all bases in some classes of nonmetrizable nuclear functional spaces follows.

Key words: weak bases, Schauder bases, Montel spaces, spaces of infinite-dimensional holomorphy.