Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 1, С. 31–37

УДК **517.98**

ОПИСАНИЕ СЛАБО АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ПЛОСКОСТИ, СОХРАНЯЮЩИХ ПОРЯДОК

К. К. Кудайбергенов, К. У. Бегжанова

Посвящается девяностолетию со дня
рождения Глеба Павловича Акилова

В работе получено описание пространства слабо аддитивных сохраняющих порядок функционалов на плоскости.

Ключевые слова: слабо аддитивный, сохраняющий порядок функционал, аффинный гомеоморфизм, крайняя точка.

В последнее время интенсивно изучаются пространства слабо аддитивных сохраняющих порядок функционалов на банаховой решетке непрерывных функций. В работе [1] были рассмотрены пространства всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных, полуаддитивных, полумультипликативных, положительно однородных функционалов на банаховой решетке $C(X)$ — всех действительных непрерывных функций на компакте X. Было установлено, что пространство функционалов с этими шестью условиями, снабженное топологией поточечной сходимости, гомеоморфно пространству $\exp(X)$ — всех непустых замкнутых подмножеств компакта X, снабженному топологией Вьеториса. Дальнейшему исследованию в этой области посвящены работы С. Альбеверио, Ш. А. Аюпова, Р. Б. Бешимова, Д. Е. Давлетова, Г. Ф. Джаббарова, Р. Е. Жиемуратова, А. А. Заитова, Т. Радуля и др. (см., например, [3–10]). В этих работах в основном изучены категорные и топологические свойства пространства слабо аддитивных сохраняющих порядок функционалов на пространстве непрерывных функций. В то же время изучение геометрических свойств пространства слабо аддитивных сохраняющих порядок функционалов остается вне поля зрения исследователей. В частности, до сих пор не получено описание пространства слабо аддитивных сохраняющих порядок функционалов на конечномерных пространствах. Отметим работу [5], где получено описание пространства слабо аддитивных положительно однородных функционалов на плоскости.

Настоящая работа посвящена описанию пространства слабо аддитивных функционалов на плоскости.

Пусть X — компакт. Через $C(X)$ обозначим пространство всех непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}$ с поточечными алгебраическими операциями и sup-нормой, т. е. с нормой $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in X\}$. Для каждого $c \in \mathbb{R}$ через c_X обозначим постоянную функцию, определяемую по формуле $c_X(x) = c$, $x \in X$. Пусть $\varphi, \psi \in C(X)$. Неравенство $\varphi \leqslant \psi$ означает, что $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ для всех $x \in X$.

Определение 1 [2]. Функционал $\nu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется:

1) *слабо аддитивным*, если для всех $\varphi \in C(X)$ и $c \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\nu(\varphi + c_X) = \nu(\varphi) + c \cdot \nu(1_X);$$

2) *сохраняющим порядок*, если для всех $\varphi, \psi \in C(X)$ из $\varphi \leqslant \psi$ вытекает $\nu(\varphi) \leqslant \nu(\psi)$;
3) *нормированным*, если $\nu(1_X) = 1$;
4) *нерасширяющим*, если $|\nu(\varphi) - \nu(\psi)| \leqslant \|\varphi - \psi\|$ при всех $\varphi, \psi \in C(X)$.

Для компакта X через $O(X)$ обозначается множество всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов. Элементы множества $O(X)$, для краткости, назовем слабо аддитивными функционалами.

Через $E(X)$ обозначим множество всех сохраняющих порядок, нерасширяющих функционалов μ на $C(X)$ с $\mu(0_X) = 0$.

Рассмотрим $O(X)$ и $E(X)$ как подпространства пространства $C_p(C(X))$ всех непрерывных функций на $C(X)$, снабженного топологией поточечной сходимости. Базу окрестностей функционала $\nu \in O(X)$ ($\nu \in E(X)$) образуют множества вида

$$\langle \nu; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \varepsilon \rangle = \bigl\{ \nu' \in O(X) : \ |\nu'(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon, \ i = 1, 2, \ldots, k \bigr\},$$

где $\varepsilon > 0$, $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Для любого компакта X пространства $O(X)$ и $E(X)$ являются выпуклыми компактами.

Заметим, что всякий функционал $\mu \in O(X)$ является нерасширяющим. Действительно, для $f, g \in C(X)$ из неравенства

$$-\|f - g\| + g \leqslant f \leqslant g + \|f - g\|$$

имеем, что

$$-\|f - g\|\mu(1_X) + \mu(g) \leqslant \mu(f) \leqslant \mu(g) + \|f - g\|\mu(1_X),$$

т. е.

$$|\mu(f) - \mu(g)| \leqslant \|f - g\|. \tag{1}$$

Далее

$$\mu(1_X) = \mu(0_X + 1_X) = \mu(0_X) + \mu(1_X),$$

т. е. $\mu(0_X) = 0$.

Таким образом, $O(X) \subset E(X)$.

Отметим, что для n-точечного компакта $\mathbf{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, пространство $C(\mathbf{n})$ изоморфно пространству $\mathbb{R}^n$, при этом изоморфизм задается по правилу

$$f \in C(\mathbf{n}) \to (f(1), f(2), \ldots, f(n)) \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $L^\infty(\mathbb{R})$ ($L^1(\mathbb{R})$) — банахово пространство классов действительных существенно ограниченных измеримых (соответственно, классов действительных интегрируемых функций) на $\mathbb{R}$. Поскольку пространство $L^\infty(\mathbb{R})$ изометрически изоморфно сопряженному пространству пространства $L^1(\mathbb{R})$, то

$$L^\infty(\mathbb{R})_1^+ = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}) : 0 \leqslant f \leqslant \mathbf{1}\},$$

где $\mathbf{1}$ — единица в $L^\infty(\mathbb{R})$, является $*$-слабо компактным множеством.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пространство $O(\mathbf{2})$ аффинно гомеоморфно пространству $L^{\infty}(\mathbb{R})_1^+$, при этом гомеоморфизм $L^{\infty}(\mathbb{R})_1^+ \to O(\mathbf{2})$ задается по правилу*

$$\mu(x,y) = \int\limits_0^{x-y} \varphi(t)dt + y, \quad \varphi \in L^{\infty}(\mathbb{R})_1^+. \tag{2}$$

Доказательство теоремы вытекает из предложений 2 и 3.

Предложение 2. *Пространство $O(\mathbf{n})$ аффинно гомеоморфно пространству $E(\mathbf{n-1})$ для всех $n \geqslant 2$, при этом гомеоморфизм $\Phi : E(\mathbf{n-1}) \to O(\mathbf{n})$ задается по правилу*

$$\mu(x_1,\ldots,x_n) = \nu(x_1 - x_n,\ldots,x_{n-1} - x_n) + x_n, \tag{3}$$

где $\nu \in E(\mathbf{n-1})$, $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\lhd$ Для $\nu \in E(\mathbf{n-1})$ функционал $\mu = \Phi(\nu) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определим по правилу

$$\mu(x_1,\ldots,x_n) = \nu(x_1 - x_n,\ldots,x_{n-1} - x_n) + x_n.$$

Покажем, что $\mu \in O(\mathbf{n})$.

1) Для $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $c_{\mathbf{n}} = (c,\ldots,c) \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{gathered}\mu(x + c_{\mathbf{n}}) = \mu(x_1 + c,\ldots,x_n + c)\\ = \nu((x_1+c) - (x_n+c),\ldots,(x_{n-1}+c) - (x_n+c)) + x_n + c\\ = \nu(x_1 - x_n,\ldots,x_{n-1} - x_n) + x_n + c = \mu(x) + c,\end{gathered}$$

т. е.

$$\mu(x + c_{\mathbf{n}}) = \mu(x) + c.$$

2) Нормированность:

$$\mu(\underbrace{1,\ldots,1}_{n}) = \nu(\underbrace{1-1,\ldots,1-1}_{n-1}) + 1 = \nu(0,\ldots,0) + 1 = 0 + 1 = 1.$$

3) Покажем, что из $x = (x_1,\ldots,x_n) \leqslant y = (y_1,\ldots,y_n)$ следует, что $\mu(x) \leqslant \mu(y)$. Так как ν сохраняет порядок, то

$$\nu(x_1 - x_n,\ldots,x_{n-1} - x_n) \leqslant \nu(y_1 - x_n,\ldots,y_{n-1} - x_n).$$

Поэтому

$$\begin{gathered}\nu(x_1 - x_n,\ldots,x_{n-1} - x_n) - \nu(y_1 - y_n,\ldots,y_{n-1} - y_n)\\ \leqslant \nu(y_1 - x_n,\ldots,y_{n-1} - x_n) - \nu(y_1 - y_n,\ldots,y_{n-1} - y_n)\\ \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n-1} |(y_i - x_n) - (y_i - y_n)| = |y_n - x_n| = y_n - x_n.\end{gathered}$$

Отсюда

$$\nu(x_1 - x_n,\ldots,x_{n-1} - x_n) - \nu(y_1 - y_n,\ldots,y_{n-1} - y_n) \leqslant y_n - x_n,$$

т. е.

$$\nu(\{x_i - x_n\}) + x_n \leqslant \nu(\{y_i - y_n\}) + y_n.$$

Это означает, что $\mu(x) \leqslant \mu(y)$. Таким образом, $\mu \in O(\mathbf{n})$.

Теперь докажем, что для всякого $\mu \in O(\mathbf{n})$ существует $\nu \in E(\mathbf{n-1})$ такое, что $\Phi(\nu) = \mu$. Для $\mu \in O(\mathbf{n})$ положим

$$\nu(x_1, \dots, x_{n-1}) = \mu(x_1, \dots, x_{n-1}, 0), \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Покажем, что $\nu \in E(\mathbf{n-1})$. Имеем

$$\nu(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}) = \mu(\underbrace{0, \dots, 0}_{n}) = 0.$$

Для $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x \leqslant y$ имеем

$$\nu(x) = \mu(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \leqslant \mu(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) = \nu(y).$$

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Используя неравенство (1), имеем

$$|\nu(x) - \nu(y)| = |\mu(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) - \mu(y_1, \dots, y_{n-1}, 0)| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |x_i - y_i| \leqslant \|x - y\|,$$

т. е. $|\nu(x) - \nu(y)| \leqslant \|x - y\|$. Таким образом, $\nu \in E(\mathbf{n-1})$.

Следовательно, отображение $\Phi : E(\mathbf{n-1}) \to O(\mathbf{n})$, определяемое по правилу (3), является взаимно однозначным. Непосредственно из (3) следует, что отображение Φ — непрерывно. Поскольку $E(\mathbf{n-1})$ и $O(\mathbf{n})$ — компактные пространства, то Φ — аффинный гомеоморфизм между $O(\mathbf{n})$ и $E(\mathbf{n-1})$. $\rhd$

Предложение 3. *Пространство $E(\mathbf{1})$ аффинно гомеоморфно пространству $L^\infty(\mathbb{R})_1^+$, при этом гомеоморфизм $\Psi : L^\infty(\mathbb{R})_1^+ \to E(\mathbf{1})$ задается по правилу*

$$\mu(t) = \int\limits_0^t \varphi(s)\, ds, \quad \varphi \in L^\infty(\mathbb{R})_1^+. \tag{4}$$

$\lhd$ Пусть $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})_1^+$. Покажем, что функционал μ, определяемый по правилу (4), принадлежит $E(\mathbf{1})$. Имеем

$$\mu(0) = \int\limits_0^0 \varphi(s) ds = 0.$$

Монотонность μ следует из положительности подынтегральной функций.

Пусть $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ и $s_1 \leqslant s_2$. Поскольку μ — неубывающая функция, то

$$0 \leqslant \mu(s_2) - \mu(s_1).$$

Поскольку $0 \leqslant \varphi \leqslant \mathbf{1}$, то

$$\mu(s_2) - \mu(s_1) = \int\limits_0^{s_2} \varphi(t)\, dt - \int\limits_0^{s_1} \varphi(t)\, dt = \int\limits_{s_1}^{s_2} \varphi(t)\, dt \leqslant \int\limits_{s_1}^{s_2} \mathbf{1}(t)\, dt = s_2 - s_1,$$

т. е. $\mu(s_2) - \mu(s_1) \leqslant s_2 - s_1$. Таким образом,

$$|\mu(s_2) - \mu(s_1)| \leqslant |s_2 - s_1|.$$

Теперь покажем, что всякий функционал из $E(\mathbf{1})$ имеет вид (4).

Пусть $\mu \in E(\mathbf{1})$. Поскольку μ — неубывающая функция, то она имеет почти всюду определенную неотрицательную производную. Из неравенства $|\mu(s_1) - \mu(s_2)| \leqslant |s_1 - s_2|$ непосредственно следует, что $0 \leqslant \mu' \leqslant \mathbf{1}$ и μ — абсолютна непрерывная функция. По теореме Лебега о восстановлении абсолютно непрерывной функции по ее производной получим, что

$$\mu(t) = \int\limits_0^t \mu'(s)\, ds.$$

Таким образом,

$$\mu(t) = \int\limits_0^t \mu'(s)\, ds.$$

Это означает, что всякий элемент из $E(\mathbf{1})$ имеет вид (4).

Теперь покажем непрерывность. Пусть $\varphi_\alpha, \varphi \in L^\infty(\mathbb{R})_1^+$ и $\{\varphi_\alpha\}$ $*$-слабо сходится к φ, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\alpha(s) f(s)\, ds \to \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) f(s)\, ds \tag{5}$$

при всех $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Обозначим $\mu_\alpha(t) = \int\limits_0^t \varphi_\alpha(s)\, ds$ и $\mu(t) = \int\limits_0^t \varphi(s)\, ds$.

Пусть $s \in \mathbb{R}$. Положим в (5)

$$f = \begin{cases} \chi_{(0,s]}, & s \geqslant 0, \\ \chi_{[s,0]}, & s < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_0^t \varphi_\alpha(s)\, ds \to \int\limits_0^t \varphi(s)\, ds,$$

т. е. $\mu_\alpha(t) \to \mu(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Следовательно, отображение $\Psi : L^\infty(\mathbb{R})_1^+ \to E(\mathbf{1})$, определяемое по правилу (4), является взаимно однозначным и непрерывным. Поскольку $L^\infty(\mathbb{R})_1^+$ и $E(\mathbf{1})$ — компактные пространства, то Ψ — аффинный гомеоморфизм между $L^\infty(\mathbb{R})_1^+$ и $E(\mathbf{1})$. $\triangleright$

Хорошо известно, что экстремальными точками выпуклого компакта $L^\infty(\mathbb{R})_1^+$ являются классы, содержащие характеристические функции измеримых подмножеств $\mathbb{R}$, т. е.

$$\operatorname{ext} L^\infty(\mathbb{R})_1^+ = \{\chi_E : E \text{ — измеримое подмножество в } \mathbb{R}\}.$$

Следовательно, в силу (2) экстремальными точками выпуклого компакта $O(\mathbf{2})$ являются функционалы вида

$$\mu_E(x, y) = \int\limits_0^{x-y} \chi_E(s)\, ds + y,$$

где E — измеримое подмножество в $\mathbb{R}$, т. е.

$$\mu_E(x, y) = \begin{cases} m\,(E \cap [0, x - y]) + y, & x \geqslant y, \\ m\,(E \cap [x - y, 0]) + y, & x < y. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $m(E)$ обозначает меру Лебега на прямой множества E.

Предложение 4. *Экстремальными точками выпуклого компакта* $O(\mathbf{2})$ *являются функционалы вида* μ_E *и только они, где* μ_E *— функционал, определяемый по правилу* (6).

Пусть A — замкнутое подпространство компакта X. Скажем, что функционал $\mu \in O(X)$ сосредоточен на A, если $\mu(f) = \mu(g)$ для всех $f, g \in C(X)$ с $f|_A = g|_A$. Наименьшее по включению замкнутое множество $A \subset X$, на котором функционал μ сосредоточен, называется носителем функционала $\mu \in O(X)$ и обозначается $\operatorname{supp}\mu$, т. е.

$$\operatorname{supp}\mu = \bigcap \{A : \mu \text{ — сосредоточен на } A\}.$$

Через $O_2(X)$ обозначим множество всех функционалов $\mu \in O(X)$, носители которых состоят не более чем из двух точек.

Следующее утверждение дает описание множества $O_2(X)$.

Предложение 5. *Пусть* X *— компакт. Тогда всякий функционал* $\mu \in O_2(X)$ *имеет вид*

$$\mu(f) = \int\limits_0^{f(x_1)-f(x_2)} \varphi(t)\,dt + f(x_2), \tag{7}$$

где $\operatorname{supp}\mu = \{x_1, x_2\}$, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})_1^+$.

$\lhd$ Пусть $\mu \in O_2(X)$ и $f \in C(X)$. Тогда по определению носителя существуют точки $x_1, x_2 \in X$ такие, что $\operatorname{supp}\mu = \{x_1, x_2\}$. Так как $\mu \in O(\operatorname{supp}\mu) = O(\mathbf{2})$, то μ можно представить в виде (7) в силу равенства (2). $\rhd$

В заключение отметим, что в работах [3–10], в основном, установлены категорные и топологические свойства пространства $O(X)$, ранее известные для случая $P(X)$ — пространства вероятностных мер на компакте X.

Хорошо известно, что пространство $P(\mathbf{n})$, $n \in \mathbb{N}$, аффинно гомеоморфно $(n-1)$-мерному симплексу S^{n-1}, где

$$S^{n-1} = \left\{(t_1, \ldots, t_n) : \ t_i \in \mathbb{R}, \ t_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ \sum_{i=1}^n t_i = 1\right\}.$$

Этот факт существенно используется при изучении геометрических свойств пространства $P(X)$ (см., например, [11, 12]). Теорема 1 показывает, что в отличие от пространства $P(\mathbf{n})$, пространство $O(\mathbf{n})$ — бесконечномерно. Это означает, что те методы, которые использованы при изучении геометрических свойств пространства $P(X)$, нельзя прямо применить для случая пространства $O(X)$.

Литература

1. *Шапиро Л. Б.* Об операторах продолжения функций и нормальных функторах // Вест. МГУ. Сер. мат.-мех.—1992.—№ 1.—С. 35–42.
2. *Radul T.* On the functor of order-preserving functionals // Comment. Math. Univ. Carol.—1998.—Vol. 39, № 3.—P. 609–615.
3. *Albeverio S., Ayupov Sh. A., Zaitov A. A.* On certain properties of the spaces of order-preserving functionals // Topology and its Applications.—2008.—Vol. 155, № 16.—P. 1792–1799.
4. *Давлетов Д. Е.* Описание пространства полуаддитивных функционалов // Узб. мат. журн.—2009.—№ 2.—С. 49–54.
5. *Джаббаров Г. Ф.* Описание экстремальных точек пространства слабо аддитивных положительно-однородных функционалов двухточечного множество // Узб. мат. журн.—2005.—№ 3.—С. 17–24.

6. *Джаббаров Г. Ф.* Категорные свойства функтора слабо аддитивных положительно-однородных функционалов // Узб. мат. журн.—2006.—№ 1.—С. 20–28.
7. *Жиемуратов Р. Е., Заитов А. А.* О вещественной полноте пространства слабо аддитивных σ-гладких функционалов // Владикавк. мат. журн.—2009.—Т. 11, № 1.—С. 22–28.
8. *Жиемуратов Р. Е.* О монадичности функтора O_σ слабо аддитивных σ-гладких функционалов // Узб. мат. журн.—2009.—№ 2.—С. 62–69.
9. *Zaitov A. A.* On categorical properties of order-preserving functionals // Methods of Functional Analysis and Topology.—2003.—Vol. 9, № 4.—P. 357–364.
10. *Заитов А. А.* Некоторые категорные свойства функторов O_τ и O_R слабо аддитивных функционалов // Мат. заметки.—2006.—Т. 79, № 5.—С. 681–693.
11. *Федорчук В. В.* Вероятностные меры в топологии // Успехи мат. наук.—1991.—Т. 46, № 1.—С. 41–80.
12. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции.—М.: МГУ, 1988.—288 с.

Статья поступила 5 мая 2009 г.

Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович
Каракалпакский государственный университет,
зав. кафедрой функционального анализа
УЗБЕКИСТАН, 100142, г. Нукус, ул. Ч. Абдирова, 1
E-mail: karim2006@mail.ru

Бегжанова Камила Уснатдиновна
Каракалпакский государственный университет,
ассистент кафедры функционального анализа
УЗБЕКИСТАН, 100142, г. Нукус, ул. Ч. Абдирова, 1
E-mail: kamok76@mail.ru

DESCRIPTION OF WEAKLY ADDITIVE ORDER-PRESERVING FUNCTIONALS ON THE PLANE

Kudaybergenov K. K., Begjanova K. U.

Description of weakly additive order-preserving functional on the plane is given.

Key words: weakly additive, order-preserving functionals, affine homeomorphism, extremal point.