Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 2, С. 59–69

УДК **519.17+512.54**

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ $(320, 99, 18, 36)$[1]

А. А. Махнев, А. М. Кагазежева

Псевдогеометрический граф для $pG_2(5, 32)$ имеет сильно регулярные подграфы — окрестность вершины (псевдогеометрический граф для $GQ(4, 8)$) и вторую окрестность вершины (граф с параметрами $(320, 99, 18, 36)$). В работе найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(320, 99, 18, 36)$.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, автоморфизм.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $[a] = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a. Для подмножества вершин S графа Γ через $\Gamma(S)$ обозначим $\bigcap_{a\in S}([a] - S)$.

Через k_a обозначим *степень вершины* a, т. е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *сильно регулярным с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ — регулярный граф степени k на v вершинах, в котором каждое ребро лежит точно в λ треугольниках и для любых двух несмежных вершин a, b верно равенство $\big|[a] \cap [b]\big| = \mu$.

Через $K_{m\times n}$ обозначим полный двудольный граф с m долями порядка n. Граф на множестве пар $X \times Y$ называется $p \times q$*-решеткой*, если $|X| = p$, $|Y| = q$, а пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$.

Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_2(5, 32)$, a — вершина графа Γ. Тогда Γ имеет собственные значения $k = 165$, $r = 3$, $s = -33$ и достигается равенство во втором условии Крейна
$$(s + 1)(k + s + 2rs) \leqslant (k + s)(r + 1)^2.$$
Поэтому $[a]$ является сильно регулярным графом с параметрами $(165, 36, 3, 9)$ (псевдогеометрический граф для $GQ(4, 8)$), и $\Gamma_2(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами $(320, 99, 18, 36)$ (см. [1, теорема 8.15]). В работе найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(320, 99, 18, 36)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 12-01-00012, № 12-01-91155-ГФЕН.

Теорема 1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(320, 99, 18, 36)$, $G = \mathrm{Aut}(G)$, g — *элемент простого порядка* p *из* G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω — *пустой граф,* $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) \in \{0, 120\}$ *или* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) \in \{0, 48, 96, 144, 192, 240, 288\}$;

(2) Ω *является одновершинным графом,* $p = 11$ *и* $\alpha_1(g) = 66$;

(3) Ω *является* m-*кокликой,* $p = 3$, $m = 3t + 2$, $3 \leqslant t \leqslant 14$ *и* $\alpha_1(g) - 9m - 6$ *делится на* 72;

(4) Ω — *объединение* l *изолированных ребер,* $2 \leqslant l \leqslant 29$, $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) - 6l$ *делится на* 48;

(5) $p = 11$ *и либо*

(i) $|\Omega| = 67$ *и* $\alpha_1(g) = 33$, *либо*

(ii) $|\Omega| = 78$ *и* $\alpha_1(g) = 66$, *либо*

(iii) $|\Omega| = 89$ *и* $\alpha_1(g) = 99$;

(6) $p = 7$ *и либо*

(i) $\Omega = K_{3\times 4}$ *и* $\alpha_1(g) \in \{84, 252\}$, *либо*

(ii) $|\Omega| = 7s + 5$, $2 \leqslant s \leqslant 10$, $\alpha_1(g) = 21r$ *и* $s - r + 3$ *делится на* 8, *либо*

(iii) $|\Omega| = 96$ *и* $\alpha_1(g) = 0$;

(7) $p = 5$ *и либо*

(i) $|\Omega| = 90$, $\alpha_1(g) = 90$, *на* $\Gamma - \Omega$ *имеются* 36 *пятиугольных* $\langle g\rangle$-*орбит и* 10 *кокликовых;*

(ii) $|\Omega| = 85$, $\alpha_1(g) = 15$, *на* $\Gamma - \Omega$ *имеются* 6 *пятиугольных* $\langle g\rangle$-*орбит и* 41 *кокликовая;*

(iii) $|\Omega| = 80$, $\alpha_1(g) \in \{0, 120\}$, *на* $\Gamma - \Omega$ *имеются* 48 *пятиугольных* $\langle g\rangle$-*орбит или* 48 *кокликовых;*

(iv) $|\Omega| = 5s$, $3 \leqslant s \leqslant 15$, $\alpha_1(g) = 120r + 15s$, $r \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;

(8) $p = 3$, $|\Omega| = 3t + 2$, Ω *не содержит вершин степени* $|\Omega| - 2$ *и либо*

(i) Ω *является объединением двух изолированных вершин и* $K_{3,3}$-*подграфа,* $\alpha_1(g)$ *делится на* 72, *либо*

(ii) $|\Omega| = 80$ *или* $|\Omega| = 140$ *и* $\alpha_1(g) = 0$, *либо*

(iii) $|\Omega| = 3t + 2$, $3 \leqslant t \leqslant 25$, $\alpha_1(g) = 72s + 9t + 54$ *и* $s \in \{-3, -2, \ldots, 4\}$;

(9) $p = 2$ *и либо*

(*i*) Ω — *куб и* $\alpha_1(g)/24$ — *нечетное натуральное число, либо*

(ii) $\alpha_1(g) = 0$, $|\Omega| = 16s$, $s \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, *либо*

(iii) $\alpha_1(g) \neq 0$, $|\Omega| = 2t$, $5 \leqslant t \leqslant 70$ *и* $\alpha_1(g) = 48r + 6t$.

1. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), Δ — *индуцированный подграф с* N *вершинами,* M *ребрами и степенями вершин* $d_1, \ldots, d_N$. *Тогда*

$$(v - N) - (kN - 2M) + \lambda M + \mu\left(\binom{N}{2} - M\right) - \sum \binom{d_i}{2} = x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i$$

и

$$\left(\sum i x_i\right)^2 \leqslant \sum x_i \sum i^2 x_i,$$

где x_i — *число вершин из* $\Gamma - \Delta$, *смежных точно с* i *вершинами из* Δ.

$\lhd$ Подсчитав число вершин в $\Gamma - \Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ и число 2-путей с концами в Δ и средней вершиной в $\Gamma - \Delta$, получим равенства $v - N = \sum x_i$, $kN - 2M = \sum ix_i$ и $\lambda M + \mu\big(\binom{N}{2} - M\big) - \sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2} = \sum\binom{i}{2}x_i$.

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим равенство из заключения леммы.

Квадратный трехчлен $\sum(i-x)^2x_i = \sum i^2x_i - 2x\sum ix_i + x^2\sum x_i$ неотрицателен. Поэтому дискриминант квадратного трехчлена $(\sum ix_i)^2 - \sum x_i\sum i^2x_i$ неположителен. $\rhd$

Лемма 2 [2, лемма 2]**.** *Пусть Γ является сильно регулярным графом с целыми собственными значениями, g — автоморфизм графа Γ простого порядка p, и χ — характер проекции мономиального представления на подпространство размерности m собственных векторов матрицы смежности графа, отвечающих неглавному собственному значению. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого l, не кратного p и $m - \chi(g)$, делится на p.*

Лемма 3. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами* $(320, 99, 18, 36)$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *порядок коклики в Γ не больше* 44 *и порядок клики в Γ не больше* 4;

(2) *если Γ содержит регулярный подграф Δ степени d на w вершинах, то $-21 \leqslant d - (99-d)w/(320-w) \leqslant 3$, причем в случае равенства каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна точно с $(99-d)w/(320-w)$ вершинами из Δ;*

(3) *значение характера, полученного при проектировании мономиального представления на подпространство размерности* 44, *на элементе $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ равно $\chi_2(g) = (3\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/24 + 4$, и $44 - \chi_2(g)$ делится на p.*

$\lhd$ Ввиду границы Цветковича [3] порядок коклики в Γ не больше 44. Ввиду границы Хофмана для клик порядок клики в Γ не больше 5. Пусть L является 5-кликой из Γ, X_i — множество вершин из $\Gamma - L$, смежных точно с i вершинами из L, $x_i = |X_i|$. Тогда $\sum x_i = 315$, $\sum ix_i = 475$, $\sum\binom{i}{2}x_i = 150$, поэтому $x_0 + \sum\binom{i-1}{2}x_i = -10$, противоречие.

Если Γ содержит регулярный подграф Δ степени d на w вершинах, то по лемме 1.2 из [4] имеем $-21 \leqslant d - (99-d)w/(320-w) \leqslant 3$.

По лемме 2.6 из [4] значение характера, полученного при проектировании мономиального представления на подпространство размерности 44, на элементе $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ равно $\chi_2(g) = (3\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/24 + 4$. По лемме 2 число $44 - \chi_2(g)$ делится на p. $\rhd$

Лемма 4. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами* $(320, 99, 18, 36)$, *U — трехвершинный подграф из Γ, Y_i — множество вершин из $\Gamma - U$, смежных точно с i вершинами из U, $y_i = |Y_i|$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *для двух вершин u, w подграф $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(w)$ содержит* 156 *вершин, если u, w не смежны;* 140 *вершин, если u, w смежны;*

(2) *число $y_0 + y_3$ равно* 128, *если U является кокликой; равно* 77, *если U является кликой;*

(3) *число $y_0 + y_3$ равно* 95, *если U является* 2*-путем; равно* 112, *если U — объединение изолированной вершины и ребра.*

$\lhd$ Для двух несмежных вершин u, w граф Γ содержит 36 вершин из $[u] \cap [w]$, по 63 вершины из $[u] - [w]$, $[w] - [u]$ и 156 вершин из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$. Для смежных вершин u, w граф Γ содержит 18 вершин из $[u] \cap [w]$, по 80 вершин из $[u] - w^\perp$, $[w] - u^\perp$ и 140 вершин из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$.

Если U является 3-кокликой, то Γ содержит $3(36 - y_3)$ вершин из Y_2, $3(27 + y_3)$ вершин из Y_1 и $128 - y_3$ вершин из Y_0, поэтому $y_0 + y_3 = 128$. Аналогично доказывается, что $y_0 + y_3 = 77$, если U является кликой.

Если U является геодезическим 2-путем $u_1u_2u_3$, то Y_2 содержит $35-y_3$ вершин из $[u_1]\cap[u_3]$ и по $18-y_3$ вершин из $[u_1]\cap[u_2]$, $[u_2]\cap[u_3]$, Y_1 содержит $61+y_3$ вершин из $[u_2]$ и по $45+y_3$ вершин из $[u_1]$, $[u_3]$, Y_0 содержит $95-y_3$ вершин, поэтому $y_0+y_3=95$.

Если U объединение изолированной вершины u_1 и ребра $\{u_2,u_3\}$, то Y_2 содержит $18-y_3$ вершин из $[u_2]\cap[u_3]$ и по $36-y_3$ вершин из $[u_1]\cap[u_2]$, $[u_1]\cap[u_3]$, Y_1 содержит $27+y_3$ вершин из $[u_1]$ и по $44+y_3$ вершин из $[u_2]$, $[u_3]$, Y_0 содержит $112-y_3$ вершин, поэтому $y_0+y_3=112$. $\rhd$

2. Автоморфизмы графа с параметрами $(320,99,18,36)$

До конца работы будем предполагать, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(320,99,18,36)$. Пусть g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p=5$ и $\alpha_1(g)\in\{0,120\}$, либо $p=2$ и $\alpha_1(g)\in\{0,48,96,144,192,240,288\}$;*

(2) *если Ω является n-кликой, то $n=1$, $p=11$ и $\alpha_1(g)=66$;*

(3) *если Ω является m-кокликой, $m\geqslant 2$, то $p=3$, $m=3t+2$, $3\leqslant t\leqslant 14$ и $\alpha_1(g)-9m-6$ делится на 72;*

(4) *если Ω — объединение $l\geqslant 2$ изолированных клик, но Ω не является кокликой, то $p=2$, Ω является объединением изолированных ребер, $l\leqslant 29$ и $\alpha_1(g)-6l$ делится на 48.*

$\lhd$ Пусть Ω — пустой граф. Тогда $p\in\{2,5\}$. Если $p=5$, то по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)$ делится на 24. Но в случае $\alpha_1(g)=240$ на Γ возникает кликовая $\langle g\rangle$ орбита длины 5, противоречие с леммой 3.

Если $p=2$, то число $44-\chi_2(g)=40+\alpha_1(g)/24$ четно, поэтому $\alpha_1(g)$ делится на 48. Утверждение (1) доказано.

Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma-\Omega$, смежных точно с i вершинами из Ω, $x_i=|X_i|$.

Пусть Ω является n-кликой. Тогда $n\leqslant 4$. Если $n=1$, то p делит 99 и 220, поэтому $p=11$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)-3$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g)=99$.

Если $n\geqslant 2$, то p делит 80 и 140, поэтому $p\in\{2,5\}$. Но в случае $p=5$ число $18-(n-2)$ делится на 5, противоречие. Поэтому $p=2$ и $n\in\{2,4\}$. Так как каждая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω, то $n=4$. Отсюда $x_0+x_2+x_4=316$, $x_2+2x_4=192$ и $x_2+6x_4=96$, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Пусть Ω является m-кокликой, $m\geqslant 2$. Тогда p делит 36 и 63, поэтому $p=3$ и $m=3t+2$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)-9m-6$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g)=24r+9m+6$, $\chi_2(g)=r+4$. По лемме 3 число $44-\chi_2(g)=r$ делится на 3. Утверждение (3) доказано.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением l изолированных клик, $l\geqslant 2$. Тогда p делит 80 и 36, поэтому $p=2$. Если Ω содержит изолированную вершину, то p делит 99, противоречие. Пусть Ω содержит изолированную 4-клику L, Y_i — множество вершин из $\Gamma-L$, смежных точно с i вершинами из L, $y_i=|Y_i|$. Тогда $y_0+y_2=316$, $2y_2=4\cdot 96=384$, $y_2=6\cdot 16=96$, противоречие. Итак, Ω является объединением l изолированных ребер, и по лемме 3 имеем $l\leqslant 29$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)-6l$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g)=24r+6l$, $\chi_2(g)=-r+4$. По лемме 3 число $44-\chi_2(g)=40+r$ четно. $\rhd$

В леммах 6–8 предполагается, что Ω содержит геодезический 2-путь bac.

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов с* $\lambda = 18, \mu = 36$ *и* $|\Omega|$ *не больше* 156 (*не больше* 140, *если* $\alpha_1(g) \neq 0$);

(2) *если* $p > 2$ *и* $|\Omega| > 95$, *то* $\alpha_1(g) = 0$;

(3) *если* $\alpha_1(g) = 0$, *то* $\alpha_0(g)$ *делится на* 8, *а по лемме* 3 *число* $40 - \alpha_0(g)/8$ *делится на* p;

(4) *для любой вершины* $a \in \Omega$ *подграф* $[a]$ *не содержится в* Ω.

$\lhd$ Пусть Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Δ с параметрами $(v', k', 18, 36)$. Тогда $4(k' - 36) + 18^2 = n^2$ для некоторого натурального числа n. Отсюда $n \in \{18, 20, 22\}$ и $k' \in \{36, 55, 76\}$ соответственно. Но в последнем случае 36 не делит $k'(k' - 19)$, а во втором Δ имеет собственные значения 1, -19 и кратность 1 равна $18 \cdot 55 \cdot 74/(20 \cdot 36)$, противоречие. Значит, $n = 18$ и $\Delta = K_{2\times 18}$, получили противоречие с леммой 3. Теперь утверждение (1) следует из леммы 4.

Пусть U — трехвершинный подграф из $u^{\langle g\rangle}$, Y_i — множество вершин из $\Gamma - U$, смежных точно с i вершинами из U, $y_i = |Y_i|$. Из леммы 4 следует, что $|\Omega| \leqslant 95$, если $u^{\langle g\rangle}$ содержит геодезический 2-путь, и $|\Omega| \leqslant 77$, если $u^{\langle g\rangle}$ содержит 3-клику. В случае $|\Omega| > 95$ подграф $u^{\langle g\rangle}$ не содержит геодезических 2-путей и является кокликой. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\alpha_1(g) = 0$. Тогда по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_0(g)$ делится на 8, а по лемме 3 число $40 - \alpha_0(g)/8$ делится на p. Утверждение (3) доказано.

Пусть для некоторой вершины $a \in \Omega$ имеем $[a] \subset \Omega$. Тогда для $u \in \Gamma - \Omega$ получим $|[u] \cap \Omega| = 36$ и $u^{\langle g\rangle}$ является кокликой, поэтому $\alpha_1(g) = 0$, и по утверждению (3) имеем $|\Omega| \geqslant 104$. Теперь для $b \in \Omega - a^{\perp}$ подграф $[b]$ не пересекает $\Gamma - \Omega$, поэтому $[u] \cap [b]$ содержится в Ω и совпадает с $[a] \cap [u] = [a] \cap [b]$. Противоречие с тем, что любые две вершины из $[u] \cap (\Gamma - \Omega)$ смежны с u и с 36 вершинами из $[a] \cap [b]$. $\rhd$

Лемма 7. *Если* $p \geqslant 3$, *то* $|\Omega| \leqslant \max\{95, 131 - p\}$. *Далее,* $p \leqslant 17$.

$\lhd$ Если $p > 36$, то Ω — сильно регулярный подграф с параметрами $(v', k', 18, 36)$, противоречие с леммой 6. Если $p > 17$, то Ω — подграф с $\lambda_\Omega = 18$.

Пусть $p \geqslant 3$. Если $|\Omega| > 95$, то по лемме 6 любая орбита $u^{\langle g\rangle}$ является кокликой. Поэтому для любой 3-коклики U из $u^{\langle g\rangle}$ подграф $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит Ω и $p - 3$ вершин из $u^{\langle g\rangle} - U$. Значит, $|\Omega| \leqslant 128 - (p - 3)$.

Пусть $p = 31$. Тогда степень вершины в графе Ω равна 37 или 68, $|\Omega| \in \{72, 103\}$ и $\mu_\Omega \in \{5, 36\}$. Если $|\Omega| = 72$, то Ω — регулярный граф степени 37 (иначе Ω содержит по крайней мере 2 вершины a, b степени 68 и $|\Omega(a) \cup \Omega(b)| > 72$). В этом случае Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(72, 37, 18, 36)$, получили противоречие. Значит, $|\Omega| = 103$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) - 3$ делится на 24, — противоречие.

Пусть $p = 29$. Тогда степень вершины в графе Ω равна 41 или 70, $|\Omega| \in \{59, 88\}$ и $\mu_\Omega \in \{7, 36\}$. Если $|\Omega| = 59$, то Ω — регулярный граф степени 41, получили противоречие. Значит, $|\Omega| = 88$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)$ делится на 24, противоречие.

Пусть $p = 23$. Тогда степень вершины в графе Ω равна 30, 53 или 76, $|\Omega| \in \{44, 67, 90\}$ и $\mu_\Omega \in \{13, 36\}$. Если $|\Omega| = 44$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(44, 30, 18, 13)$, получили противоречие с тем, что 13 не делит $30 \cdot 11$. Если $|\Omega| = 67$, то Ω — регулярный граф степени 30 и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^{\perp}$ равно $30 \cdot 11$, но не меньше $36 \cdot 13$, — противоречие. Значит, $|\Omega| = 90$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) - 6$ делится на 24, — противоречие.

Пусть $p = 19$. Тогда степень вершины в графе Ω равна 23, 42, 61 или 80, $|\Omega| \in$

$\{54, 73, 92\}$ и $\mu_\Omega \in \{17, 36\}$. Если $|\Omega| = 54$, то по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) - 6$ делится на 24, получили противоречие.

Если $|\Omega| = 92$, то по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) - 12$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g) = 228$. Противоречие с тем, что каждая $\langle g\rangle$-орбита длины 19 является кликой.

Пусть $|\Omega| = 73$. Тогда степень каждой вершины в Ω равна 23 или 42. Допустим, что Ω содержит вершину a степени 23. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ не больше $23{\cdot}23{+}18{\cdot}17$, но не меньше $49{\cdot}17$, — противоречие. Значит, Ω — регулярный граф степени 42 на 73 вершинах. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega{-}a^\perp$ равно $23{\cdot}42 = 36x{+}17(30{-}x)$. Отсюда $x = 24$ и $\Omega - a^\perp$ содержит 6 вершин степени 25. Для двух смежных вершин d, e степени 25 в $\Omega - a^\perp$ подграф $\Omega(d) \cap [e]$ содержит не менее 20 вершин из $\Omega - a^\perp$, — противоречие. $\rhd$

Лемма 8. *Верно неравенство $p \neq 17$.*

$\lhd$ Пусть $p = 17$. Тогда степень вершины в графе Ω равна 14, 31, 48, 65 или 82, $|\Omega| \in \{31, 48, 65, 82\}$, $\lambda_\Omega \in \{1, 18\}$ и $\mu_\Omega \in \{2, 19, 36\}$.

Если $|\Omega| = 31$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(31, 14, 1, 2)$, получили противоречие с тем, что $31 \cdot 14 \cdot 1$ не делится на 3.

Если $|\Omega| = 48$, то по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)$ делится на 24, — противоречие.

Если $|\Omega| = 65$, то по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) - 3$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g) = 51$. Далее, степень вершины в Ω равна 14, 31 или 48. Допустим, что Ω содержит вершину a степени 14. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно 50, но не меньше $14{\cdot}12$, — противоречие. Значит, Ω содержит вершину a степени 48. Тогда любая вершина из $\Omega(a)$ имеет степень 31 в Ω, и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $48 \cdot 12$, но не больше $16 \cdot 36$. Поэтому степень каждой вершины из $\Omega - a^\perp$ в Ω равна 48, получили противоречие.

Если $|\Omega| = 82$, то по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) - 6$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g) = 102$. Далее, степень вершины в Ω равна 31, 48 или 65. Допустим, что Ω содержит вершину a степени 65. Тогда любая вершина из $\Omega(a)$ имеет степень 31 в Ω, и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $65 \cdot 12$, но не больше $16 \cdot 36$, — противоречие.

Если Ω — регулярный граф степени 31 на 82 вершинах, то ввиду леммы 3 имеем $31 - 68 \cdot 82/238 \leqslant 3$, получили противоречие.

Значит, Ω содержит вершину a степени 48. Пусть $\Omega - a^\perp$ содержит вершину e, смежную точно с двумя вершинами из $\Omega(a)$. Тогда $[e]$ содержит 29 вершин из $\Omega - a^\perp$, и для $b \in \Omega(a) \cap [e]$ подграф $\Omega(b) \cap [e]$ содержит 0 или 1 вершину из $[a]$ и от 9 до 12 вершин из $\Omega - a^\perp$, — противоречие.

Пусть Ω_0 подграф из Ω, индуцированный вершинами, имеющими степень 48 в Ω, $A = \Omega_0(a)$, $B = \Omega_0 - a^\perp$, A_0 — множество вершин из $\Omega(a)$, смежных с 29 вершинами из $\Omega - a^\perp$, B_0 — множество вершин из $\Omega - a^\perp$, смежных с 36 вершинами из $\Omega(a)$. Тогда A_0 и B_0 являются кокликами и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $29x + 12(48 - x) = 36y + 19(33 - y)$, поэтому $x = y + 3$. Если c, d — две вершины из A, то $\Omega(c) \cap [d]$ содержит от 25 до 29 вершин из $\Omega - a^\perp$, поэтому $A = A_0$ и $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 18, содержащий x вершин из Ω_0.

Покажем, что если $|\Omega(a) \cap [e]| = 19$ для $e \in \Omega - a^\perp$, то степень e в Ω равна 31. В противном случае Ω содержит 19 вершин из $[a] \cap [e]$, по 29 вершин из $[a] - [e]$, $[e] - [a]$ и 3 вершины f_1, f_2, f_3 вне $a^\perp \cup e^\perp$. Ясно, что $[a] \cap [e]$ состоит из вершин степени 31 в Ω. Пусть $\Omega(e)$ содержит j вершин $b_1, \ldots, b_j$ из B. Без ограничения общности $j \geqslant x$. Противоречие с тем, что $x = y + 3$.

Итак, Ω_0 содержит $y+3$ вершин из $[a]$ и y вершин вне $a^{\perp}$, получили противоречие с тем, что $\Omega_0(c)$ содержит $y+2$ вершин для $c \in \Omega_0(a)$. $\rhd$

Лемма 9. *Число* p *не равно* 13.

$\lhd$ Пусть $p = 13$. Тогда степень вершины в графе Ω равна 21, 34, 47, 60, 73 или 86, $|\Omega| \in \{34, 47, 60, 73, 86, 112\}$, $\lambda_\Omega \in \{5, 18\}$ и $\mu_\Omega \in \{10, 23, 36\}$.

Если $|\Omega| = 34$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(34, 21, 18, 10)$, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 47$. Тогда степень вершины в Ω равна 21 или 34. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)+3$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g) = 117$. Если Ω содержит вершину a степени 21, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^{\perp}$ равно $250 = 15x + 2(21-x)$, поэтому $x = 16$. Пусть $c_1, \ldots, c_5$ — вершины из $\Omega(a)$, смежные с парами вершин из $\Omega - a^{\perp}$. Так как Γ не содержит 5-клик, то можно считать, что вершины c_1, c_2 не смежны, — противоречие с тем, что $[c_1] \cap [c_2]$ содержит не менее 17 вершин из $\Omega(a)$. Значит, Ω — регулярный граф степени 34, поэтому Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(47, 34, 18, 23)$, получили противоречие.

Если $|\Omega| = 60$, то по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) - 12$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g) = 156$. Далее, степень вершины в Ω равна 21, 34 или 47. Если Ω содержит вершину a степени 47, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^{\perp}$ равно $94 = 36x + 23y + 10(12 - x - y)$, — противоречие. Если Ω содержит вершину a степени 21, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^{\perp}$ равно $380 = 28x + 15y + 2(21 - x - y)$, поэтому $2x + y = 26$ и $21 - x - y = x - 5$. Так как $\Omega(a)$ содержит x вершин степени 5, то x четно. В случае $x \geqslant 9$ противоречие получается как и в предыдущем абзаце. Значит, $x \leqslant 8$, $\Omega(a)$ содержит 13 вершин степени 18, поэтому $\Omega(a)$ содержит 4-клику, получили противоречие. Значит, Ω — регулярный граф степени 34, и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^{\perp}$ равно $34 \cdot 15 = 23x + 10(25 - x)$, поэтому $x = 20$ и $\Omega - a^{\perp}$ содержит 5 вершин степени 24, образующих клику, — противоречие.

Если $|\Omega| = 73$, то $|\Gamma - \Omega| = 13 \cdot 19$, по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) - 3$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g) = 195$. Для любой четверки индексов $i_1, \ldots, i_4 \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ найдутся три $\langle g \rangle$-орбиты длины 13, в которых вершина u смежна с u^j для $j \in \{i_1, \ldots, i_4\}$. Ввиду леммы 1.5 из [5] каждая такая орбита содержит 4-клику и не попадает в окрестность никакой вершины из Ω. Так как число четверок в $\{1, 2, \ldots, 6\}$ равно 15, то 45 орбит вида $u^{\langle g \rangle}$ не попадают в окрестность никакой вершины из Ω. Противоречие с тем, что число $\langle g \rangle$-орбит длины 13 равно 19.

Если $|\Omega| = 86$, то по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) + 6$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g) = 306$, — противоречие.

Если $|\Omega| = 112$, то $|\Gamma - \Omega| = 13 \cdot 16$ и $\alpha_1(g) = 0$. Пусть U является 3-кокликой из $u^{\langle g \rangle}$. Тогда $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 112 вершин из Ω, 10 вершин из $u^{\langle g \rangle}$ и еще 6 вершин. Пусть $w \in \Gamma - (\Omega \cup u^{\langle g \rangle})$. Если w смежна не более чем с 2 вершинами из $u^{\langle g \rangle}$, то $X_0(U)$ содержит не менее 7 вершин из $w^{\langle g \rangle}$. Если w смежна точно с 3 вершинами из $u^{\langle g \rangle}$, то для $U = [w] \cap u^{\langle g \rangle}$ подграф $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 7 вершин из $w^{\langle g \rangle}$. В обоих случаях имеем противоречие.

Допустим, что w смежна точно с 4 вершинами из $u^{\langle g \rangle}$. Тогда $X_0(U)$ содержит вершину из $w^{\langle g \rangle}$. Поэтому для по крайней мере 9 орбит $w^{\langle g \rangle}$ вершина w смежна по крайней мере с 5 вершинами из $u^{\langle g \rangle}$. Таким образом, число 3-лап с концевыми вершинами в $u^{\langle g \rangle}$ и центральной вершиной в $\Gamma - (u^{\langle g \rangle} \cup \Omega)$ не меньше $4 \cdot 13 \cdot 6 + 10 \cdot 13 \cdot 9 = 13 \cdot 114$. Число троек вершин в $u^{\langle g \rangle}$ равно $13 \cdot 22$, поэтому некоторая 3-коклика U из $u^{\langle g \rangle}$ попадает в окрестности 6 вершин из $\Gamma - (u^{\langle g \rangle} \cup \Omega)$. Противоречие с тем, что $X_0(U)$ содержит вершину из $\Gamma - (u^{\langle g \rangle} \cup \Omega)$.

Теперь каждая вершина из $\Gamma-(u^{\langle g\rangle}\cup\Omega)$ смежна по крайней мере с 5 вершинами из $u^{\langle g\rangle}$, число 3-лап с концевыми вершинами в $u^{\langle g\rangle}$ и центральной вершиной в $\Gamma-(u^{\langle g\rangle}\cup\Omega)$ не меньше $10\cdot 13\cdot 15$. Противоречие с тем, что некоторая 3-коклика U из $u^{\langle g\rangle}$ попадает в окрестности по крайней мере 7 вершин из $\Gamma-(u^{\langle g\rangle}\cup\Omega)$. $\rhd$

Лемма 10. *Если $p=11$, то верно одно из утверждений:*
(1) $|\Omega|=67$ *и* $\alpha_1(g)=33$;
(2) $|\Omega|=78$ *и* $\alpha_1(g)=66$;
(3) $|\Omega|=89$ *и* $\alpha_1(g)=99$.

$\lhd$ Пусть $p=11$. Тогда степень вершины в графе Ω равна $11t$, $t\in\{2,3,\dots,8\}$, $|\Omega|\in\{34,45,56,67,78,89\}$, $\lambda_\Omega\in\{7,18\}$ и $\mu_\Omega\in\{3,14,25,36\}$. Заметим, что Ω не содержит вершин степени $|\Omega|-1$. Если Ω содержит вершину a степени $|\Omega|-12$, то $\Omega-a^\perp$ — регулярный граф степени 8 на 11 вершинах. Противоречие с тем, что $\Omega-a^\perp$ содержит 5-клику. Отсюда, в частности, $|\Omega|\neq 34$.

Пусть $|\Omega|=45$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)+9$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g)=231$. Противоречие с тем, что на $\Gamma-\Omega$ имеется кликовая $\langle g\rangle$-орбита.

Пусть $|\Omega|=56$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g)=264$. Противоречие с тем, что на $\Gamma-\Omega$ имеется кликовая $\langle g\rangle$-орбита.

Пусть $|\Omega|=67$. Тогда степень вершины в Ω равна 22, 33 или 44. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)-9$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g)=33$.

Если $|\Omega|=78$, то по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)+6$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g)=66$. Далее, степень вершины в Ω равна 22, 33, 44 или 56.

Если $|\Omega|=89$, то $|\Gamma-\Omega|=11\cdot 23$, по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)-3$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g)=99$. $\rhd$

Лемма 11. *Если $p=7$, то верно одно из утверждений:*
(1) $\Omega=K_{3\times 4}$ *и* $\alpha_1(g)\in\{84,252\}$;
(2) $|\Omega|=7s+5$, $2\leqslant s\leqslant 10$, $\alpha_1(g)=21r$ *и* $s-r+3$ *делится на* 8;
(3) $|\Omega|=96$ *и* $\alpha_1(g)=0$.

$\lhd$ Пусть $p=7$. Тогда степень вершины в графе Ω равна $7t+1$, $t\in\{1,2,\dots,13\}$, $|\Omega|=7s+5$, $s\in\{1,2,\dots,11\}$ или $s=13$, $\lambda_\Omega\in\{4,11,18\}$ и $\mu_\Omega\in\{1,8,15,22,29,36\}$.

Пусть $|\Omega|=12$. Тогда любая связная компонента графа Ω является одновершинным графом или сильно регулярным графом с параметрами $(v',8,4,8)$. Поэтому $\Omega=K_{3\times 4}$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)-12$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g)\in\{84,252\}$.

Пусть $|\Omega|=96$. По лемме 6 имеем $\alpha_1(g)=0$.

Пусть $|\Omega|=7s+5$, $2\leqslant s\leqslant 11$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)+3s+9$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g)=21r$ и $s-r+3$ делится на 8.

Пусть $|\Omega|=82$. Тогда $\langle g\rangle$-орбиты длины 7 не содержат треугольников. Далее, $r=6$ и $\alpha_1(g)=126$, поэтому найдутся две $\langle g\rangle$-орбиты длины 7, являющиеся графами степени 4. Противоречие с тем, что такая орбита содержит треугольник. $\rhd$

3. Автоморфизмы малых порядков

В этом параграфе предполагается, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(320,99,18,36)$, g — автоморфизм простого порядка p графа Γ, и подграф $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$ содержит геодезический 2-путь.

Лемма 12. *Пусть $p=5$ и $|\Omega|=5s$. Тогда выполняются следующие утверждения:*
(1) $|\Omega|=90$, $\alpha_1(g)=90$, *на* $\Gamma-\Omega$ *имеются* 36 *пятиугольных* $\langle g\rangle$*-орбит и* 10 *кокликовых;*
(2) $|\Omega|=85$, $\alpha_1(g)=15$, *на* $\Gamma-\Omega$ *имеются* 6 *пятиугольных* $\langle g\rangle$*-орбит и* 41 *кокликовая;*

(3) $|\Omega| = 80$, $\alpha_1(g) \in \{0, 120\}$, *на* $\Gamma - \Omega$ *имеются* 48 *пятиугольных* $\langle g\rangle$*-орбит или* 48 *кокликовых;*

(4) $|\Omega| = 5s$, $3 \leqslant s \leqslant 15$, $\alpha_1(g) = 120r + 15s$, $r \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

$\lhd$ Пусть $p = 5$. Тогда степень вершины в графе Ω равна $5t + 4$, $t \in \{1, 2, \ldots, 18\}$, $|\Omega| = 5s$, $s \in \{3, 4, \ldots, 19\}$ или $s = 24$, $\lambda_\Omega \in \{3, 8, 13, 18\}$ и $\mu_\Omega \in \{1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36\}$.

Пусть Ω содержит вершину a степени 9. Тогда $\Omega(a)$ содержит вершину c степени 8. Поэтому либо $\Omega(a)$ — сумма 3-клики и 6-коклики, либо $\Omega(a) \cap [b]$ — восьмиугольник или объединение двух четырехугольников.

Если $|\Omega| = 120$, то по лемме 6 имеем $\alpha_1(g) = 0$. Если U является 3-кокликой из $u^{\langle g\rangle}$, то $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 120 вершин из Ω и 2 вершины из $u^{\langle g\rangle}$. Пусть $w \in \Gamma - (\Omega \cup u^{\langle g\rangle})$. Если $[w]$ содержит не более 1 вершины из $u^{\langle g\rangle}$, то $X_0(U)$ содержит не менее 2 вершин из $w^{\langle g\rangle}$. Если $[w]$ содержит не менее 3 вершин из $u^{\langle g\rangle}$, то для $U \subset [w]$ подграф $X_3(U)$ содержит w. В обоих случаях имеем противоречие. Значит, $[w]$ содержит точно 2 вершины из $u^{\langle g\rangle}$, граф $\Gamma - \Omega$ регулярен степени 78. По лемме 3 выполняются неравенства $-21 \leqslant 78 - 21 \cdot 200/120 \leqslant 3$, — противоречие.

Если $|\Omega| \in \{80, 85, 90, 95\}$, то по лемме 6 на $\Gamma - \Omega$ нет кликовых $\langle g\rangle$-орбит.

Пусть $|\Omega| = 95$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) + 3$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g) \in \{45, 165\}$. Но в случае $\alpha_1(g) = 165$ на $\Gamma - \Omega$ найдется кликовая $\langle g\rangle$-орбита. Значит, на $\Gamma - \Omega$ имеются 18 пятиугольных $\langle g\rangle$-орбит и 27 кокликовых, причем ввиду леммы 4 пятиугольная орбита не попадает в окрестность никакой вершины из Ω. Пусть A (B) — множество вершин из $\Gamma - \Omega$, лежащих в пятиугольных (кликовых) $\langle g\rangle$-орбитах. Тогда $|A| = 90$, $|B| = 135$. Для $u \in A$ имеется $95 \cdot 36$ 2-путей с началом в u, концом в Ω и средней вершиной в B. Поэтому $|[u] \cap B| \geqslant 95$. Противоречие с тем, что $|[u] \cap [u^g]|$ содержит не менее 55 вершин из B.

Пусть $|\Omega| = 90$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) + 6$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g) = 90$, на $\Gamma - \Omega$ имеются 36 пятиугольных $\langle g\rangle$-орбит и 10 кокликовых. Ввиду леммы 4 пятиугольная орбита попадает в окрестности не более 5 вершин из Ω.

Пусть $|\Omega| = 85$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) + 9$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g) = 15$, на $\Gamma - \Omega$ имеются 6 пятиугольных $\langle g\rangle$-орбит и 41 кокликовая. Ввиду леммы 4 пятиугольная орбита попадает в окрестности не более 10 вершин из Ω.

Пусть $|\Omega| = 80$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g) \in \{0, 120\}$. В случае $\alpha_1(g) = 120$ на $\Gamma - \Omega$ имеются 48 пятиугольных $\langle g\rangle$-орбит, и ввиду леммы 4 пятиугольная орбита попадает в окрестности не более 15 вершин из Ω.

Пусть $|\Omega| = 5s$, $s \leqslant 15$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) - 15s$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g) = 120r + 15s$, $r \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. $\rhd$

Лемма 13. *Если* $p = 3$ *и* $|\Omega| = 3t + 2$, *то* Ω *не содержит вершин степени* $|\Omega| - 2$ *и выполняются следующие утверждения:*

(1) Ω *является объединением двух изолированных вершин и* $K_{3,3}$*-подграфа,* $\alpha_1(g)$ *делится на* 72*;*

(2) $|\Omega| = 80$ *или* $|\Omega| = 140$ *и* $\alpha_1(g) = 0$*;*

(3) $|\Omega| = 3t + 2$, $3 \leqslant t \leqslant 25$, $\alpha_1(g) = 72s + 9t + 54$ *и* $s \in \{-3, -2, \ldots, 4\}$.

$\lhd$ Пусть $p = 3$ и $|\Omega| = 3t + 2$. Тогда степень вершины в графе Ω равна $3i$, любое ребро графа Ω лежит в $3j$ треугольниках из Ω, а для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Ω, имеем $|\Omega(a) \cap [b]| = 3l$.

Если Ω содержит вершину a степени $|\Omega| - 2$, то для $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит a, кратное 3 число вершин из $\Omega(a)$ и еще не более одной вершины, — противоречие.

Пусть $|\Omega| = 8$. Тогда степень вершины в Ω равна 0 или 3, поэтому Ω является объединением двух изолированных вершин и $K_{3,3}$-подграфа. Далее, $\alpha_1(g) = 24r$ и $44 - \chi_2(g) = 39 + r$ делится на 3.

Пусть $t > 25$. Тогда $\alpha_1(g) = 0$, поэтому $|\Omega| \in \{80, 104\}$.

Пусть $|\Omega| = 3t+2$, $t \leqslant 25$. Тогда $\alpha_1(g)-9t-6$ делится на 24, поэтому $\alpha_1(g) = 24r+9t+6$ и $r \in \{-9, -8, \dots, 12\}$. Далее $44 - \chi_2(g) = 40 + r$ делится на 3, поэтому $r = 3s + 2$. $\rhd$

Лемма 14. *Пусть $p = 2$. Тогда верны следующие утверждения:*

(1) Ω *— куб и* $\alpha_1(g)/24$ *— нечетное натуральное число;*

(2) $\alpha_1(g) = 0$, $|\Omega| = 16s$, $s \in \{1, 2, \dots, 9\}$;

(3) $\alpha_1(g) \neq 0$, $|\Omega| = 2t$, $5 \leqslant t \leqslant 70$, *и* $\alpha_1(g) = 48r + 6t$.

$\lhd$ Пусть $p = 2$ и $|\Omega| = 2t$. Тогда степень вершины в графе Ω равна $2i+1$, любое ребро графа Ω лежит в $2j$ треугольниках из Ω, а для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Ω, имеем $|\Omega(a) \cap [b]| = 2l$.

Пусть $|\Omega| = 6$. Если Ω содержит вершину a степени 5, то подграф $\Omega(a)$ имеет нечетные параметры λ' и μ', — противоречие. Значит, любая вершина имеет степень 1 или 3 в Ω, снова получили противоречие. Пусть $|\Omega| = 8$. Если Ω содержит вершину a степени 7, то подграф $\Omega(a)$ имеет нечетные параметры λ' и μ', — противоречие. Если любая вершина имеет степень 1 или 3 в Ω, то Ω получается удалением из $K_{4,4}$ максимального паросочетания (Ω — куб). Если Ω содержит вершину a степени 5, то подграф $\Omega(a)$ имеет нечетные параметры λ' и μ', противоречие. Далее, $\chi_2(g) = 5 - \alpha_1(g)/24$, $44 - \chi_2(g) = 39 + \alpha_1(g)/24$, поэтому $\alpha_1(g)/24$ — нечетное натуральное число. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\alpha_1(g) = 0$. По лемме 6 имеем $|\Omega| = 16s$, $s \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\alpha_1(g) \neq 0$. По лемме 6 имеем $|\Omega| \leqslant 140$. Далее, $\chi_2(g) = (6t - \alpha_1(g))/24 + 4$ и число $44 - \chi_2(g) = 40 - (6t - \alpha_1(g))/24$ четно. Поэтому $\alpha_1(g) = 48r + 6t$. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны. $\rhd$

Литература

1. *Cameron P., Van Lint J.* Designs, Graphs, Codes and their Links.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.—240 p.—(London Math. Soc. Student Texts. Vol. 22).
2. *Гаврилюк А. Л., Махнев А. А.* Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН.—2010.—Т. 432, № 5.—С. 512–515.
3. *Brouwer A., van Lint J.* Strongly regular graphs and partial geometries // Enumeration and Design / Ed. by M. Jackson, S. Vanstone.—New York: Academic Press, 1984.—P. 85–122.
4. *Журтов А. Х., Махнев А. А., Нирова М. С.* Об автоморфизмах 4-изорегулярных графов // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН.—2010.—Vol. 16, № 3.—С. 94–102.
5. *Cameron P.* Permutation Groups.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.—220 p.—(London Math. Soc. Student Texts. Vol. 45).

Статья поступила 23 мая 2012 г.

Кагазежева Алена Мухамедовна
Кабардино-Балкарский государственный университет,
математический факультет, ассистент кафедры алгебры
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 175
E-mail: zhurtov_a@mail.ru

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
зав. отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

ON AUTOMORPHISMS OF STRONGLY REGULAR GRAPHS WITH PARAMETERS $(320, 99, 18, 36)$

Kagazezheva A. M., Makhnev A. A.

Pseudo-geometric graph for $pG_2(5, 32)$ has strongly regular subgraphs — local subgraph (pseudo-geometric graph for $GQ(4, 8)$) and second neighborhood of vertex (graph with parameters $(320, 99, 18, 36)$). In this paper it is founded orders and fixed-point subgraphs of automorphisms of strongly regular graphs with parameters $(320, 99, 18, 36)$.

Key words: strongly regular graph, automorphism.