Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 1, С. 50–56

УДК **519.642**

МЕТОД ПОДОБЛАСТЕЙ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ЯДРОМ КОШИ

Л. Э. Хайруллина, Г. З. Хабибуллина

Исследуется метод подобластей решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши. Введена пара весовых пространств, являющихся сужением пространства непрерывных функций. Доказана корректность рассматриваемого уравнения на этой паре пространств. Установлены достаточные условия сходимости метода подобластей в равномерной метрике.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, ядро Коши, метод подобластей.

1. Введение. Решается сингулярное интегральное уравнение (с. и. у.) первого рода (см., например, [1, 2])

$$Kx \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\,\frac{x(\tau)}{(\tau-t)}\,d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\,h(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau = f(t), \quad |t|<1, \tag{1}$$

где $h(t,\tau)$, $f(t)$ — известные непрерывные функции, $x(\tau)$ — искомая функция, а сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

С. и. у. вида (1) часто встречаются в приложениях. Ввиду невозможности в большинстве случаев получения точного решения с. и. у. (1) актуальна задача нахождения приближенного решения и получения оценок погрешности. При этом как для теории, так и для практики наиболее интересны равномерные оценки. Однако в пространстве непрерывных функций задача решения с. и. у. (1) является некорректно поставленной [3]. Используя подход [4], основанный на возможности корректной постановки задачи решения с. и. у. (1), в работе вводится пара весовых функциональных пространств, являющихся некоторыми сужениями пространства непрерывных на $[-1,1]$ функций, и доказывается корректность рассматриваемой задачи.

2. Корректная постановка задачи. Пусть X_ρ — пространство непрерывных на $[-1,1]$ функций $x(t)$, для которых сингулярный интеграл $\sqrt{1-t}I(\rho x;t)$ является непрерывной на $(-1,1]$ функцией, допускающей непрерывное продолжение в точку $t=1$, где

$$I\rho x = I(\rho x;t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\rho(\tau)\,x(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,$$

$\rho \equiv \rho(\tau) = \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}$.

В качестве Y_q возьмем пространство непрерывных на $[-1,1]$ функций $f(t)$ таких, что $\sqrt{1+t}I(qf;t)$ является непрерывной на $[-1,1)$ функцией, допускающей непрерывное продолжение в точку $t=-1$, где $q \equiv q(t) = \frac{1}{\rho(t)}$.

Нормы в этих пространствах определим следующим образом:

$$\|x\|_{X_\rho} = \|\sqrt{1+t}x\|_C + \|\sqrt{1-t}I(\rho x)\|_C, \quad x \in X_\rho; \tag{2}$$

$$\|f\|_{Y_q} = \|\sqrt{1-t}f\|_C + \|\sqrt{1+t}I(qf)\|_C, \quad f \in Y_q. \tag{3}$$

Тогда с. и. у. (1) эквивалентно операторному уравнению

$$Kx \equiv Sx + Vx = f \quad (x \in X_\rho,\ f \in Y_q), \tag{4}$$

где операторы $S : X_\rho \to Y_q$, $V : X_\rho \to Y_q$ определяются по формулам

$$Sx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{x(\tau)}{\tau - t}\, d\tau; \quad Vx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\, h(t,\tau)\, x(\tau)\, d\tau.$$

Лемма 1. *Сингулярный оператор $S : X_\rho \to Y_q$ непрерывно обратим и справедливы равенства*

$$\|S\|_{X_\rho \to Y_q} = 1, \quad \|S^{-1}\|_{Y_q \to X_\rho} = 1.$$

$\lhd$ Рассмотрим характеристическое уравнение $Sx = f$. Решение этого уравнения может быть записано в замкнутой форме с помощью так называемых формул обращения. Для функций из классов Гёльдера эти формулы получены в [1, с. 486]. Для функций из классов суммируемых с весом функций они используются, например, в [5, с. 20]. Поскольку наши пространства являются сужением пространств квадратично суммируемых с соответствующим весом функций, то формулы обращения имеют место и в введенных пространствах X_ρ и Y_q.

Известно [1], что оператор $S : X_\rho \to Y_q$ обратим, причем

$$S^{-1}(f;t) = -I(qf;t).$$

Используя определения норм (2) и (3), получим

$$\begin{aligned} \|Sx\|_{Y_q} = \|I(\rho x)\|_{Y_q} &= \|\sqrt{1-t}I(\rho x)\|_C + \|\sqrt{1+t}I(q(I\rho x))\|_C \\ &= \|\sqrt{1-t}I(\rho x)\|_C + \|\sqrt{1+t}x\|_C = \|x\|_{X_\rho}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \|S^{-1}f\|_{X_\rho} = \|x\|_{X_\rho} &= \|\sqrt{1+t}x\|_C + \big\|\sqrt{1-t}I(\rho x)\big\|_C \\ &= \|\sqrt{1+t}I(qf)\|_C + \|\sqrt{1-t}f\|_C. \end{aligned} \tag{6}$$

Из соотношений (5) и (6) следует утверждение леммы.

Из леммы 1 и теории Рисса — Шаудера для уравнений, приводящихся к уравнениям второго рода, следует

Теорема 1. *Пусть ядро $h(t,\tau)$ таково, что оператор $V : X_\rho \to Y_q$ вполне непрерывен. Если однородное уравнение, соответствующее уравнению* (1), *имеет только нулевое решение, то оператор $K : X_\rho \to Y_q$ непрерывно обратим.*

3. О приближениях полиномами в пространстве Y_q. Обозначим через Π_n оператор подобластей, ставящий в соответствие любой функции $\varphi \in C[-1,1]$ алгебраический полином $\Pi_n(\varphi;s)$, однозначно определяющийся из условий (см., например, [6])

$$\int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} \Pi_n(\varphi;s)\,ds = \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} \varphi(s)\,ds, \quad s_j = \cos\frac{2j+1}{2n+2}\,\pi, \quad j=0,\dots,n.$$

Пусть

$$Q_n(t) = \frac{\sqrt{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos t}{\sqrt{1-t}}, \quad n\in\mathbb{N},$$

$$R_n(t) = \frac{\sqrt{2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos t}{\sqrt{1+t}}, \quad n\in\mathbb{N},$$

— полиномы степени n из системы полиномов, ортогональных с весом $q(t)$ и $\rho(t)$ на отрезке $[-1,1]$ соответственно (полиномы Чебышева третьего и четвертого родов).

Лемма 2. *Для любой функции $\varphi\in C[-1,1]$ справедлива оценка*

$$\|\Pi_n\varphi\|_{Y_q} = O\left(\sqrt{n}\right)\|\varphi\|_C. \tag{7}$$

$\lhd$ По определению нормы (3) имеем

$$\|\Pi_n\varphi\|_{Y_q} = \|\sqrt{1-t}\,\Pi_n\varphi\|_C + \|\sqrt{1+t}\,I(q\Pi_n\varphi)\|_C.$$

Известно (см., например, [6]), что

$$\|\sqrt{1-t}\,\Pi_n\varphi\|_C = O(\ln n)\|\varphi\|_C. \tag{8}$$

Рассмотрим второе слагаемое. Разложим $\Pi_n(\varphi;t)$ в ряд Фурье по полиномам Чебышева третьего рода. С учетом соотношения [4]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\frac{Q_k(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = R_k(t),$$

находим

$$\left|\sqrt{1+t}\,I(q\Pi_n\varphi;t)\right| = \left|\frac{\sqrt{1+t}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\frac{\Pi_n(\varphi;\tau)}{\tau-t}\,d\tau\right|$$

$$= \left|\frac{\sqrt{1+t}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}c_k^Q(\Pi_n\varphi)Q_k(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\right|$$

$$= \left|\sqrt{1+t}\sum_{k=0}^{n}c_k^Q(\Pi_n\varphi)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\frac{Q_k(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\right|$$

$$= \left|\sqrt{1+t}\sum_{k=0}^{n}c_k^Q(\Pi_n\varphi)R_k(t)\right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n}\left|c_k^Q(\Pi_n\varphi)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\sqrt{1+t}R_k(t)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \|\Pi_n\varphi\|_{L_{2q}} \left(\sum_{k=0}^{n} \left| \sqrt{1+t} \frac{\sqrt{2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos t}{\sqrt{1+t}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2}\|\varphi\|_C \sqrt{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \left| \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos t \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{n}\|\varphi\|_C.$$

Таким образом,

$$\|\sqrt{1+t}I(q\Pi_n\varphi)\|_C = O(\sqrt{n})\|\varphi\|_C. \tag{9}$$

Из оценок (8) и (9) следует оценка (7).

Через $W^r H_\alpha = W^r H_\alpha[-1,1]$ обозначим множество функций, имеющих непрерывные производные до r-го порядка, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем α, $0 < \alpha \leqslant 1$, $r \geqslant 0$.

Лемма 3. *Если* $\varphi(t) \in W^r H_\alpha[-1,1]$, *то справедливо соотношение*

$$\|\varphi - \Pi_n\varphi\|_{Y_q} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-\frac{1}{2}}}\right). \tag{10}$$

$\lhd$ Имеем

$$\|\varphi - \Pi_n\varphi\|_{Y_q} = \left\|\sqrt{1-t}(\varphi - \Pi_n\varphi)\right\|_C + \left\|\sqrt{1+t}I(q(\varphi - \Pi_n\varphi))\right\|_C.$$

Оценка первого слагаемого известна [6]:

$$\|\sqrt{1-t}(\varphi - \Pi_n\varphi)\|_C \leqslant \sqrt{2}\|\varphi - \Pi_n\varphi\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \quad 0 < \alpha \leqslant 1,\ r \geqslant 0. \tag{11}$$

Рассмотрим второе слагаемое:

$$\left\|\sqrt{1+t}I(q(\varphi - \Pi_n\varphi))\right\|_C = \left| \frac{\sqrt{1+t}}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \frac{\varphi(\tau) - \Pi_n(\varphi;\tau)}{\tau - t} d\tau \right|.$$

Разложим $\varphi(\tau) - \Pi_n(\varphi;\tau)$ в ряд Фурье по полиномам Чебышева третьего рода. С помощью оценок (см., например, [4, с. 127], [7, с. 31]) и теоремы Джексона получим

$$\begin{aligned} \left\|\sqrt{1+t}I(q(\varphi - \Pi_n\varphi))\right\|_C &= \left\| \frac{\sqrt{1+t}}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} c_k^Q(\varphi - \Pi_n\varphi)Q_k(\tau)}{\tau - t} d\tau \right\|_C \\ &= \left\| \sqrt{1+t} \sum_{k=0}^{n} c_k^Q(\varphi - \Pi_n\varphi)R_k(t) \right\|_C \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \left| c_k^Q(\varphi - \Pi_n\varphi) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} \left(\sum_{k=0}^{n} \left| \sqrt{1+t}R_k(t) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\varphi - \Pi_n\varphi\|_{2,q}\sqrt{n} \\ &\leqslant \sqrt{\pi n}\left(\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)E_n(\varphi) = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-\frac{1}{2}}}\right), \quad 0 < \alpha \leqslant 1,\ r \geqslant 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует доказываемая оценка (10). $\rhd$

4. Метод подобластей. Рассмотрим вычислительную схему метода подобластей (см., например, [6, 7]). Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k R_{k-1}(t), \tag{13}$$

где коэффициенты определяем из условий

$$\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (Kx_n)(t)\,dt = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\,dt, \quad t_i = \cos\frac{2i+1}{2n+2}\pi, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Ясно, что условия (14) эквивалентны системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ полинома (13):

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_k = f_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

$$a_{ik} = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} Q_{k-1}(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} dt \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} h(t,\tau) R_{k-1}(\tau)\,d\tau, \quad f_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\,dt.$$

Докажем теорему, устанавливающую сходимость описанного метода подобластей в пространстве Y_q, и оценки погрешности.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

а) *с. и. у.* (1) *однозначно разрешимо в пространстве X_ρ при любой правой части f из Y_q;*

б) *функции $f(t) \in W^r H_\alpha$, $h(t,\tau) \in W^r H_\alpha$ (по переменной t равномерно относительно τ), $0 < \alpha \leqslant 1$, $r \geqslant 0$.*

Тогда, начиная с некоторого $n \in \mathbb{N}$, система уравнений (15) *имеет единственное решение, и приближенные решения $x_n^*(t)$ сходятся к точному $x^*(t)$ со скоростью*

$$\|x_n^* - x^*\|_{X_\rho} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-\frac{1}{2}}}\right), \quad 0 < \alpha \leqslant 1,\ r \geqslant 0.$$

$\lhd$ Обозначим через $\mathbf{H}_n$ — множество всех алгебраических многочленов степени не выше n. Пусть $X_n = \mathbf{H}_n \subset X_\rho$, $Y_n = \mathbf{H}_n \subset Y_q$. Система уравнений (15) эквивалентна операторному уравнению

$$K_n x_n = \Pi_n K x_n = \Pi_n f \quad (x_n \in X_n,\ \Pi_n f \in Y_n). \tag{16}$$

Из известного соотношения [4]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{R_k(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = Q_k(t), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

следует, что $\Pi_n S\varphi_n = S\varphi_n$. Тогда уравнение (16) примет вид

$$K_n x_n \equiv S x_n + \Pi_n V x_n = \Pi_n f \quad (x_n \in X_n,\ \Pi_n f \in Y_n). \tag{17}$$

Из уравнений (4) и (17) для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\|Kx_n - K_nx_n\|_{Y_q} = \|Vx_n - \Pi_nVx_n\|_{Y_q}$$
$$= \left\| \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \rho(\tau)h(t,\tau)x_n(\tau)\,d\tau - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \rho(\tau)\Pi_n(h(t,\tau))x_n(\tau)\,d\tau \right\|_{Y_q}$$
$$\leqslant \|h - \Pi_nh\|_{Y_q,C}\|x_n\|_C \leqslant \|h - \Pi_nh\|_{Y_q,C}\|x_n\|_{X_\rho},$$

здесь оператор Π_n применен к функции $h(t,\tau)$ по переменной t. В силу леммы 3 и условий теоремы имеем

$$\varepsilon_n = \|K - K_n\|_{X_n \to Y_q} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-\frac{1}{2}}}\right) \to 0, \quad n \to \infty;$$

$$\delta_n = \|f - \Pi_nf\|_{Y_q} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-\frac{1}{2}}}\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Из последних двух оценок и [8, глава I, теорема 7] следует сходимость метода подобластей и равномерная оценка погрешности приближенных решений

$$\|x_n^* - x^*\|_C \leqslant \|x_n^* - x^*\|_{X_\rho} = O(\varepsilon_n + \delta_n) = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-\frac{1}{2}}}\right), \quad 0 < \alpha \leqslant 1,\ r \geqslant 0. \ \triangleright$$

Литература

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.—М.: Наука, 1977.—638 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1968.—512 с.
3. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения.—М.: Наука, 1978.—206 с.
4. *Габдулхаев Б. Г.* Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.—Казань: Изд-во КГУ, 1994.—288 с.
5. *Лифанов И. К.* Особые интегральные уравнения и методы их численного решения. Учебное пособие по курсу лекций.—М.: Макс-Пресс, 2006.—68 с.
6. *Ермолаева Л. Б.* Аппроксимативные свойства полиномиальных операторов и решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений методом подобластей: Дисс. ... к.ф.-м.н.—Казань, 1987.—154 с.
7. *Хайруллина Л. Э.* Равномерная сходимость приближенных решений сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши: Дисс. ... к.ф.-м.н.—Казань, 2011.—103 с.
8. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.—Казань: Изд-во КГУ, 1980.—232 с.

Статья поступила 7 марта 2013 г.

Хайруллина Лилия Эмитовна
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
старший преподаватель кафедры информационных систем
РОССИЯ, 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18,
E-mail: `liliya-v1@yandex.ru`

Хабибуллина Гузель Забировна
Казанский (Приволжский) федеральный университет
старший преподаватель кафедры теории и методики обучения физике и информатике
РОССИЯ, 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18
E-mail: `hgz1980@rambler.ru`

SUBDOMAINS METHOD FOR SOLUTION OF A SINGULAR FIRST KIND INTEGRAL EQUATION WITH CAUCHY KERNEL

Hajrullina L. E., Habibullina G. Z.

The method of subdomains solution of a singular integral equation of the first kind with Cauchy kernel is investigated. A pair of weight spaces, which are the narrowing of the space of continuous functions are introduced. The correctness of the equations on this pair of spaces is proved. Sufficient conditions for the convergence of the method of subdomains in the uniform metric are established.

Key words: singular integral equations, Cauchy kernel, method of subdomains.