Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 3, С. 56–64

УДК **517.51**

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЙВЛЕТ-РЯДОВ ЧЕБЫШЕВА ВТОРОГО РОДА

М. С. Султанахмедов

В работе вводятся вейвлеты и масштабирующие функции, основанные на полиномах Чебышева второго рода, доказывается их ортогональность. На их основе построен ортонормированный базис в пространстве функций, интегрируемых с квадратом. Исследованы аппроксимативные свойства частичных сумм соответствующих вейвлет-рядов.

Ключевые слова: полиномиальные вейвлеты, полиномы Чебышева второго рода, ортогональность, формула Кристоффеля — Дарбу, аппроксимация функций, вейвлет-ряды.

1. Введение

В последние годы интенсивное развитие получила теория вейвлетов, основанных на тригонометрических функциях и алгебраических полиномах. Так, в [1] впервые введены в рассмотрение вейвлеты на основе тригонометрических полиномов. Позднее, в [2] вместо тригонометрических были использованы алгебраические полиномы, доказана ортогональность в смысле чебышевского веса первого рода между вейвлетами и соответствующими масштабирующими функциями. В [3] и [4] разработана обобщенная теория конструирования полиномиальных вейвлетов. В дальнейшем техника разложения функций в ряды по полиномиальным вейвлетам получила развитие в работах многих авторов (см., например, [5–7]). В недавней работе [8] представлен новый, отличный от описанных ранее, способ построения ортогональных вейвлетов с использованием полиномов Чебышева первого рода.

В данной статье конструируются вейвлеты на основе полиномов Чебышева второго рода и их нулей. Используя свойства самих полиномов Чебышева, такие как ортогональность и формула Кристоффеля — Дарбу, доказана ортогональность вейвлетов и соответствующих масштабирующих функций. На их основе построена система функций, образующая ортонормированный базис в пространстве функций, интегрируемых с квадратом, получено неравенство Лебега для нее.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства полиномов Чебышева второго рода, которые мы соберем в следующем разделе (см., например, [9]).

2. Некоторые сведения о полиномах Чебышева второго рода

Через $L_{2,w}([-1;1])$, где $w(x)=\sqrt{1-x^2}$, обозначим евклидово пространство интегрируемых функций $f(x)$ таких, что $\int_{-1}^{1} f^2(x)\,w(x)\,dx<\infty$. Скалярное произведение в нем определим с помощью равенства

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)\,dx. \tag{1}$$

Хорошо известно, что полиномы Чебышева второго рода

$$U_n(x)=\frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},\quad n=0,1,2,\ldots,$$

образуют ортогональный базис в $L_{2,w}([-1;1])$, а именно

$$\langle U_n,U_m\rangle=\frac{\pi}{2}\,\delta_{nm}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & n=m;\\ 0, & n\neq m,\end{cases} \tag{2}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера. Для полиномов $U_k(x)$, $k=0,1,\ldots$, имеет место формула Кристоффеля — Дарбу

$$K_n(x,y)=\sum_{m=0}^{n} U_m(x)\,U_m(y)=\frac{1}{2}\left[\frac{U_{n+1}(x)U_n(y)-U_{n+1}(y)U_n(x)}{x-y}\right]. \tag{3}$$

Узлы

$$\xi_k^{(n)}=\cos\theta_k^{(n)}=\cos\frac{\pi(k+1)}{n+1},\quad k=0,\ldots,n-1,$$

являются нулями полинома $U_n(x)$, т. е. $U_n\big(\xi_k^{(n)}\big)=0$, $k=0,\ldots,n-1$.

3. Вспомогательные утверждения

В данном разделе установим некоторые утверждения, которые будут использованы при доказательстве основных результатов.

Лемма 3.1. *Для любых $\xi_k^{(n)}$ и $m\leqslant n$ справедливо равенство*

$$U_{n+m}\big(\xi_k^{(n)}\big)=-U_{n-m}\big(\xi_k^{(n)}\big).$$

$\triangleleft$ Воспользовавшись формулой произведения синуса и косинуса, упростим выражение

$$2\sin\big((n+1)\theta_k^{(n)}\big)\cdot\cos m\theta_k^{(n)}=\sin\big((n+1+m)\,\theta_k^{(n)}\big)+\sin\big((n+1-m)\theta_k^{(n)}\big).$$

Разделив обе части на $\sin\theta_k^{(n)}$, получим

$$U_n\big(\xi_k^{(n)}\big)\cdot\cos m\theta_k^{(n)}=U_{n+m}\big(\xi_k^{(n)}\big)+U_{n-m}\big(\xi_k^{(n)}\big),$$

откуда, с учетом того, что $U_n\big(\xi_k^{(n)}\big)=0$, приходим к требуемому равенству. $\triangleright$

Следствие 3.1. *Если $m \leqslant n$, то имеет место равенство*

$$U_{n+m}\big(\xi_k^{(n)}\big)U_{n+m}\big(\xi_l^{(n)}\big) = U_{n-m}\big(\xi_k^{(n)}\big)U_{n-m}\big(\xi_l^{(n)}\big).$$

Из следствия 3.1 непосредственно вытекает

Лемма 3.2. *Для любых двух нулей $\xi_k^{(n)}$ и $\xi_l^{(n)}$ полинома $U_n(x)$ справедливо*

$$\sum_{i=n+1}^{2n} U_i\big(\xi_k^{(n)}\big)U_i\big(\xi_l^{(n)}\big) = \sum_{j=0}^{n-1} U_j\big(\xi_k^{(n)}\big)U_j\big(\xi_l^{(n)}\big).$$

Лемма 3.3. *Для любых $\xi_k^{(n)}$ и $\xi_l^{(n)}$ имеет место равенство*

$$K_n\big(\xi_k^{(n)},\xi_l^{(n)}\big) = \sum_{m=0}^{n} U_i\big(\xi_k^{(n)}\big)U_i\big(\xi_l^{(n)}\big) = \frac{n+1}{2\sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+1}}\,\delta_{kl}.$$

$\lhd$ Пусть сначала $k \neq l$. Тогда

$$K_n\big(\xi_k^{(n)},\xi_l^{(n)}\big) = \sum_{m=0}^{n} U_i\big(\xi_k^{(n)}\big)U_i\big(\xi_l^{(n)}\big) = \frac{1}{2}\left[\frac{U_{n+1}\big(\xi_k^{(n)}\big)0 - U_{n+1}\big(\xi_l^{(n)}\big)0}{\xi_k^{(n)} - \xi_l^{(n)}}\right] = 0. \tag{4}$$

Если же $k = l$, то

$$\begin{gathered}K_n\big(\xi_k^{(n)},\xi_k^{(n)}\big) = \sum_{m=0}^{n} U_i^2\big(\xi_k^{(n)}\big) = \sum_{m=0}^{n} U_i^2\big(\cos\theta_k^{(n)}\big) = \sum_{j=0}^{n}\frac{\sin^2\big((j+1)\theta_k^{(n)}\big)}{\sin^2\theta_k^{(n)}} \\ = \frac{1}{2\sin^2\theta_k^{(n)}}\sum_{j=0}^{n}\Big[1-\cos\big((j+1)2\theta_k^{(n)}\big)\Big] = \frac{1}{2\sin^2\theta_k^{(n)}}\left[n+1-\sum_{j=1}^{n+1}\cos\big(j2\theta_k^{(n)}\big)\right].\end{gathered} \tag{5}$$

Далее,

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n+1}\cos\big(j2\theta_k^{(n)}\big) = 1 + \sum_{j=1}^{n}\cos\big(j2\theta_k^{(n)}\big) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)2\theta_k^{(n)}\Big)}{2\sin\theta_k^{(n)}} \\ = \frac{1}{2} + \frac{\sin\Big(2\pi(k+1) - \frac{\pi(k+1)}{n+1}\Big)}{2\sin\frac{\pi(k+1)}{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi(k+1)}{n+1}}{\sin\frac{\pi(k+1)}{n+1}} = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Из (5) и (6) имеем

$$K_n\big(\xi_k^{(n)},\xi_k^{(n)}\big) = \frac{n+1}{2\sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+1}}. \tag{7}$$

Утверждение леммы вытекает из (4) и (7). $\rhd$

Лемма 3.4. *Для любых $0 \leqslant k, l \leqslant n$ справедливо равенство*

$$K_n\big(\xi_k^{(n+1)},\xi_l^{(n+1)}\big) = \frac{n+2}{2\sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+2}}\,\delta_{kl}.$$

$\lhd$ Преобразуем формулу Кристоффеля — Дарбу к следующему виду

$$\begin{gathered}K_n\big(\xi_k^{(n+1)},\xi_l^{(n+1)}\big) = \sum_{m=0}^{n} U_i\big(\xi_k^{(n+1)}\big)U_i\big(\xi_l^{(n+1)}\big) \\ = \sum_{m=0}^{n+1} U_i\big(\xi_k^{(n+1)}\big)U_i\big(\xi_l^{(n+1)}\big) - U_{n+1}\big(\xi_k^{(n+1)}\big)U_{n+1}\big(\xi_l^{(n+1)}\big).\end{gathered}$$

Отсюда, воспользовавшись тем, что $U_{n+1}\big(\xi_k^{(n+1)}\big)U_{n+1}\big(\xi_l^{(n+1)}\big) = 0$, находим

$$K_n\big(\xi_k^{(n+1)}, \xi_l^{(n+1)}\big) = K_{n+1}\big(\xi_k^{(n+1)}, \xi_l^{(n+1)}\big).$$

Применяя теперь лемму 3.3, приходим к требуемому утверждению. $\rhd$

4. Конструирование масштабирующих и вейвлет-функций

Определение 4.1. *Масштабирующей функцией Чебышева второго рода* назовем полином вида

$$\phi_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^{n} U_j(x)\, U_j\big(\xi_k^{(n+1)}\big),$$

где $n = 1, 2, \ldots$ и $k = 0, 1, \ldots, n$.

Теорема 4.1. *Система масштабирующих функций $\{\phi_{n,k}(x)\}_{k=0}^{n}$ является ортогональной в $L_{2,w}([-1;1])$. При этом имеет место равенство*

$$\langle \phi_{n,k}, \phi_{n,l}\rangle = \frac{\pi(n+2)}{4\sin^2 \frac{\pi(k+1)}{n+2}}\, \delta_{kl}.$$

$\lhd$ Воспользовавшись свойством ортогональности (2), имеем

$$\langle \phi_{n,k}, \phi_{n,l}\rangle = \int_{-1}^{1} \left[\sum_{i=0}^{n} U_i(x)\, U_i\big(\xi_k^{(n+1)}\big)\right] \left[\sum_{j=0}^{n} U_j(x)\, U_j\big(\xi_l^{(n+1)}\big)\right] w(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} w(x) \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} U_i(x)\, U_i\big(\xi_k^{(n+1)}\big)\, U_j(x)\, U_j\big(\xi_l^{(n+1)}\big)\, dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} U_i\big(\xi_k^{(n+1)}\big) U_j\big(\xi_l^{(n+1)}\big) \int_{-1}^{1} U_i(x) U_j(x) w(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \sum_{j=0}^{n} U_j\big(\xi_k^{(n+1)}\big) U_j\big(\xi_l^{(n+1)}\big).$$

Отсюда, применяя лемму 3.4, приходим к требуемому равенству. $\rhd$

Определение 4.2. Назовем *вейвлет-функцией Чебышева второго рода* полином

$$\psi_{n,k}(x) = \sum_{j=n+1}^{2n} U_j(x) U_j\big(\xi_k^{(n)}\big)$$

для любых $n = 1, 2, \ldots$ и $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Теорема 4.2. *Система вейвлет-функций $\{\psi_{n,k}(x)\}_{k=0}^{n-1}$ является ортогональной в $L_{2,w}([-1;1])$. При этом имеет место равенство*

$$\langle \psi_{n,k}, \psi_{n,l}\rangle = \frac{\pi(n+1)}{4\sin^2 \frac{\pi(k+1)}{n+1}}\, \delta_{kl}.$$

$\lhd$ Используя рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при доказательстве теоремы 4.1, легко заметить, что

$$\langle \psi_{n,k}, \psi_{n,l}\rangle = \frac{\pi}{2} \sum_{i=n+1}^{2n} U_i\big(\xi_k^{(n)}\big) U_i\big(\xi_l^{(n)}\big).$$

Обратимся теперь к лемме 3.2, тогда правую часть последнего равенства можно переписать следующим образом:

$$\langle \psi_{n,k}, \psi_{n,l} \rangle = \frac{\pi}{2} \sum_{j=0}^{n-1} U_j\big(\xi_k^{(n)}\big)\, U_j\big(\xi_l^{(n)}\big).$$

Чтобы убедиться в справедливости теоремы, остается воспользоваться леммой 3.4. $\triangleright$

Теорема 4.3. *При каждом фиксированном n функции $\phi_{n,k}(x)$ и $\psi_{n,l}(x)$ ортогональны в $L_{2,w}([-1;1])$, т. е. $\langle \phi_{n,k}, \psi_{n,l} \rangle = 0$.*

$\triangleleft$ Для скалярного произведения имеем

$$\langle \phi_{n,k}, \psi_{n,l} \rangle = \int_{-1}^{1} \Big[\sum_{i=0}^{n} U_i(x) U_i\big(\xi_k^{(n+1)}\big) \Big] \Big[\sum_{j=n+1}^{2n} U_j(x) U_j\big(\xi_l^{(n)}\big) \Big] w(x)\, dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=n+1}^{2n} U_i\big(\xi_k^{(n+1)}\big) U_j\big(\xi_l^{(n)}\big) \int_{-1}^{1} U_i(x) U_j(x) w(x)\, dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=n+1}^{2n} \delta_{ij} U_i\big(\xi_k^{(n+1)}\big) U_j\big(\xi_l^{(n)}\big) = 0. \triangleright$$

Очевидным следствием теоремы 4.3 является следующее утверждение

Следствие 4.1. *Для любых $n = 1, 2, \dots$ и $k = 0, 1, \dots, n-1$, вейвлет $\psi_{n,k}(x)$ ортогонален к $\phi_{1,0}(x)$ и $\phi_{1,1}(x)$, т. е. $\langle \phi_{0,1}, \psi_{n,l} \rangle = 0$ и $\langle \phi_{1,1}, \psi_{n,l} \rangle = 0$.*

5. Вейвлет-ряд Чебышева второго рода

Положим

$$\widehat{\phi}_{m,k}(x) = \frac{\phi_{2^m,k}(x)}{\sqrt{\langle \phi_{2^m,k}, \phi_{2^m,k} \rangle}} = \phi_{2^m,k}(x) \frac{2\left|\sin \frac{\pi(k+1)}{2^m+2}\right|}{\sqrt{\pi(2^m+2)}},$$

$$\widehat{\psi}_{m,k}(x) = \frac{\psi_{2^m,k}(x)}{\sqrt{\langle \psi_{2^m,k}, \psi_{2^m,k} \rangle}} = \psi_{2^m,k}(x) \frac{2\left|\sin \frac{\pi(k+1)}{2^m+1}\right|}{\sqrt{\pi(2^m+1)}}$$

и введем обозначения

$$\Phi_0 = \Big\{ \widehat{\phi}_{0,0}(x), \widehat{\phi}_{0,1}(x) \Big\}, \quad \Psi_1 = \Big\{ \widehat{\psi}_{0,0}(x) \Big\}, \quad \Psi_2 = \Big\{ \widehat{\psi}_{1,0}(x), \widehat{\psi}_{1,1}(x) \Big\}, \dots,$$

$$\Psi_m = \Big\{ \widehat{\psi}_{m-1,0}(x), \widehat{\psi}_{m-1,1}(x), \dots, \widehat{\psi}_{m-1,2^{m-1}-1}(x) \Big\},$$

$$\Psi_{m+1} = \Big\{ \widehat{\psi}_{m,0}(x), \widehat{\psi}_{m,1}(x), \dots, \widehat{\psi}_{m,2^m-1}(x) \Big\}, \dots,$$

$$\mathscr{P}_m = \Big\{ \Phi_0, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m \Big\} = \Big\{ \widehat{\phi}_{0,0}(x), \widehat{\phi}_{0,1}(x), \widehat{\psi}_{0,0}(x), \widehat{\psi}_{1,0}(x), \widehat{\psi}_{1,1}(x), \dots,$$
$$\widehat{\psi}_{m-1,0}(x), \widehat{\psi}_{m-1,1}(x), \dots, \widehat{\psi}_{m-1,2^{m-1}-1}(x) \Big\}.$$

Как отмечено выше (следствие 4.1), масштабирующие функции из Φ_0 ортогональны ко всем вейвлетам $\{\widehat{\psi}_{n,k}(x),\ k = 0, 1, \dots, n-1\}_{n=1}^{\infty}$. С другой стороны, справедлива следующая

Теорема 5.4. *Если $m \neq s$, то вейвлеты $\widehat{\psi}_{m,k}(x) \in \Psi_m$ и $\widehat{\psi}_{s,l}(x) \in \Psi_s$ ортогональны в $L_{2,w}([-1;1])$.*

$\lhd$ С учетом того факта, что $\{2^m+1, 2^m+2, \dots, 2^{m+1}\} \bigcap \{2^s+1, 2^s+2, \dots, 2^{s+1}\} = \varnothing$ в случае $m \neq s$, имеем

$$\langle \widehat{\psi}_{m,k}(x), \widehat{\psi}_{s,l}(x) \rangle = \int\limits_{-1}^{1} \Bigg[\sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} U_i(x) U_i\big(\xi_k^{(2^m)}\big) \Bigg] \Bigg[\sum_{j=2^s+1}^{2^{s+1}} U_j(x) U_j\big(\xi_l^{(2^s)}\big) \Bigg] w(x)\, dx$$

$$= \sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} \sum_{j=2^s+1}^{2^{s+1}} U_i\big(\xi_k^{(2^m)}\big) U_i\big(\xi_l^{(2^s)}\big) \int\limits_{-1}^{1} U_i(x) U_j(x) w(x)\, dx$$

$$= \sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} \sum_{j=2^s+1}^{2^{s+1}} \delta_{ij} U_i\big(\xi_k^{(2^m)}\big) U_i\big(\xi_l^{(2^s)}\big) = 0. \ \rhd$$

Далее, пусть $H_{2^m,w}([-1;1])$ — подпространство в $L_{2,w}([-1;1])$, состоящее из алгебраических полиномов степени не выше 2^m. Тогда справедлива следующая

Теорема 5.5. *Система функций $\mathscr{P}_m$ образует ортонормированный базис в $H_{2^m,w}([-1;1])$, т. е. любой полином $P_n(x) \in H_{2^m,w}([-1;1])$ степени $n \leqslant 2^m$ представим в виде линейной комбинации*

$$P_n(x) = a_0 \widehat{\phi}_{0,0}(x) + a_1 \widehat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \widehat{\psi}_{j,k}(x).$$

$\lhd$ По построению видно, что система $\mathscr{P}_m$ состоит из 2^m+1 различных ортонормированных полиномов, каждый из которых имеет степень, не превосходящую 2^m. Следовательно, $\mathscr{P}_m$ представляет собой линейно-независимую систему полиномов из подпространства $H_{2^m,w}([-1;1])$, размерность которого равна 2^m+1, из чего и вытекает справедливость утверждения теоремы 5.5. $\rhd$

Теорема 5.6. *Система функций*

$$\mathscr{P} = \big\{ \Phi_0, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m, \dots \big\} = \Big\{ \widehat{\phi}_{0,0}(x), \widehat{\phi}_{0,1}(x), \widehat{\psi}_{0,0}(x), \widehat{\psi}_{1,0}(x), \widehat{\psi}_{1,1}(x), \dots, \\ \widehat{\psi}_{m-1,0}(x), \widehat{\psi}_{m-1,1}(x), \dots, \widehat{\psi}_{m-1,2^{m-1}-1}(x), \dots \Big\}$$

образует в $L_{2,w}([-1;1])$ ортонормированный базис.

$\lhd$ Поскольку множество всех алгебраических полиномов всюду плотно в $L_{2,w}([-1;1])$, то справедливость утверждения теоремы 5.6 вытекает из теоремы 5.5. $\rhd$

Из теоремы 5.6 следует, что произвольная функция $f(x) \in L_{2,w}([-1;1])$ может быть представлена в виде сходящегося в $L_{2,w}([-1;1])$ ряда

$$f(x) = \widehat{a}_0 \widehat{\phi}_{0,0}(x) + \widehat{a}_1 \widehat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \widehat{b}_{j,k} \widehat{\psi}_{j,k}(x), \tag{8}$$

где

$$\widehat{a}_0 = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\widehat{\phi}_{0,0}(t)w(t)\,dt, \quad \widehat{a}_1 = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\widehat{\phi}_{0,1}(t)w(t)\,dt,$$

$$\widehat{b}_{j,k} = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\widehat{\psi}_{j,k}(t)w(t)\,dt, \quad j = 0, 1, \dots, m;\; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1.$$

Через $\mathrm{V}_{2^m}(f, x)$ обозначим частичную сумму ряда (8) следующего вида:

$$\mathrm{V}_{2^m}(f, x) = \widehat{a}_0\widehat{\phi}_{0,0}(x) + \widehat{a}_1\widehat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} \widehat{b}_{j,k}\widehat{\psi}_{j,k}(x). \tag{9}$$

6. Аппроксимативные свойства частичных сумм $\mathrm{V}_{2^m}(f, x)$

Как отмечалось выше, система $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ образует в $L_{2,w}([-1;1])$ ортогональный базис, следовательно, любая функция $f(x) \in L_{2,w}([-1;1])$ представима в виде ряда Фурье по ней:

$$f(x) = S_n(f)(x) + R_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k U_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k U_k(x),$$

где $f_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)U_k(t)\,w(t)\,dt$. В частности,

$$f(x) = S_{2^m}(f)(x) + R_{2^m}(f)(x).$$

С другой стороны, поскольку $\mathrm{V}_{2^m}(f, x)$, в силу теоремы 5.5, представляет собой линейный оператор, проектирующий пространство $L_{2,w}([-1;1])$ на $H_{2^m,w}([-1;1])$, причем такой, что $V_{2^m}(U_k, x) = 0$ $(k \geqslant 2^m + 1)$, то

$$\mathrm{V}_{2^m}(f, x) = \mathrm{V}_{2^m}\big(S_{2^m}(f), x\big) + \mathrm{V}_{2^m}\big(R_{2^m}(f), x\big) = S_{2^m}(f)(x).$$

Таким образом, вопрос об аппроксимативных свойствах частичных сумм (9) ряда (8) сводится к аналогичной задаче для частичных сумм $S_{2^m}(f)(x)$ ряда Фурье по полиномам Чебышева второго рода:

$$f(x) - \mathrm{V}_{2^m}(f, x) = f(x) - S_{2^m}(f)(x). \tag{10}$$

Хорошо известно, что отклонение частичной суммы $S_{2^m}(f)(x)$ от функции $f(x)$ может быть оценено с помощью неравенства Лебега

$$|f(x) - S_{2^m}(f)(x)| \leqslant E_{2^m}(f)\left(1 + L_{2^m}(x)\right),$$

где $E_{2^m}(f)$ — погрешность наилучшего равномерного на $[-1, 1]$ приближения функции $f(x)$ алгебраическим полиномом степени не выше 2^m, $L_{2^m}(x)$ — функция Лебега ряда Фурье по полиномам Чебышева второго рода, т. е.

$$L_{2^m}(x) = \int\limits_{-1}^{1} \left|\sum_{k=0}^{2^m} \widehat{U}_k(x)\widehat{U}_k(t)\right| w(t)\,dt.$$

Для класса непрерывных функций $f \in C[-1,1]$ из результатов [10] следует асимптотическая оценка функции Лебега

$$L_{2^m}(x) = \begin{cases} \frac{4\ln 2}{\pi^2} m + O(1), & x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon], \\ O(2^m), & x \in [-1, -1+\varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1], \end{cases}$$

где ε — произвольно малое число, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon < 1$.

Асимптотическое поведение верхней грани отклонения частичных сумм $S_n(f)(x)$ от функций $f(x)$ из класса Липшица $\operatorname{Lip}\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ исследовано в работе [11]. Из полученных там результатов вытекает равенство

$$\sup_{f \in \operatorname{Lip}\alpha} |f(x) - S_{2^m}(f)(x)| = 2^{-\alpha m}\Bigg[2^{\alpha+1}\Big(\sqrt{1-x^2}\Big)^{\alpha}\frac{\ln 2}{\pi}\, m\int_0^{\pi/2} t^{\alpha}\sin t\, dt$$
$$= O\bigg(\frac{\sin 2^m \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + 1\bigg)\Bigg],$$

которое для $0 < \alpha < 1$ выполняется равномерно относительно $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < 1)$, а для $\alpha = 1$ — равномерно на всем сегменте $[-1,1]$.

В качестве следствия указанных оценок мы отмечаем для $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$

$$|f(x) - \mathrm{V}_{2^m}(f,x)| \leqslant E_{2^m}(f)\left(\frac{4\ln 2}{\pi^2}\, m + O(1)\right), \quad f \in C[-1,1],$$

$$\sup_{\substack{f \in \operatorname{Lip}\alpha, \\ 0<\alpha<1}} |f(x) - \mathrm{V}_{2^m}(f,x)|$$
$$= 2^{-\alpha m}\left[2^{\alpha+1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{\alpha}\frac{\ln 2}{\pi}\, m\int_0^{\pi/2} t^{\alpha}\sin t\, dt + O\left(\frac{\sin 2^m \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right)\right].$$

Кроме того, для $x \in [-1,1]$ имеем

$$\sup_{f \in \operatorname{Lip} 1} |f(x) - \mathrm{V}_{2^m}(f,x)|$$
$$= 2^{-m}\left[\frac{4\ln 2}{\pi} m\sqrt{1-x^2}\int_0^{\pi/2} t\sin t\, dt + O\left(\frac{\sin 2^m \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right)\right].$$

В то же время следует отметить, что, как показано в [12], для функции $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k^4 \arccos x)}{k^2}$, принадлежащей классу Липшица $\operatorname{Lip}\frac{1}{8}$, предел последовательности частичных сумм $S_n(f)(x)$ на концах отрезка $[-1;1]$ не существует.

Автор благодарит д.ф.-м.н. И. И. Шарапудинова за постановку задачи и ценные советы при ее решении.

Литература

1. *Chui C. K., Mhaskar H. N.* On Trigonometric wavelets // Constructive Approximation.—1993.—Vol. 9.—P. 167–190.
2. *Kilgore T., Prestin J.* Polynomial wavelets on an interval // Constructive Approximation.—1996.—Vol. 12 (1)—P. 1–18.

3. *Davis P. J.* Interpolation and Approximation.—N. Y.: Dover Publ. Inc., 1973.
4. *Fischer B. and Prestin J.* Wavelet based on orthogonal polynomials // Math. Comp.—1997.—Vol. 66.—P. 1593–1618.
5. *Fischer B., Themistoclakis W.* Orthogonal polynomial wavelets // Numerical Algorithms.—2002.—Vol. 30.—P. 37–58.
6. *Capobiancho M. R., Themistoclakis W.* Interpolating polynomial wavelet on $[-1,1]$ // Advanced Comput. Math.—2005.—Vol. 23.—P. 353–374.
7. *Dao-Qing Dai, Wei Lin* Orthonormal polynomial wavelets on the interval // Proc. Amer. Math. Soc.—2005.—Vol. 134 (5).—P. 1383–1390.
8. *Mohd F., Mohd I.* Orthogonal functions based on Chebyshev polynomials // Matematika.—2011.—Vol. 27, № 1.—P. 97–107.
9. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.—М.: Физматлит, 1962.—500 с.
10. *Яхнин Б. М.* О функциях Лебега разложений в ряды по полиномам Якоби для случаев $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ // Успехи мат. наук.—1958.—Т. 13, вып. 6 (84).—С. 207–211.
11. *Яхнин Б. М.* Приближение функций класса Lip_α частными суммами ряда Фурье по многочленам Чебышева 2-го рода // Изв. вузов. Математика.—1963.—№ 1.—С. 172–178.
12. *Бернштейн С. Н.* О многочленах, ортогональных на конечном интервале.—Харьков: Гос. науч.-тех. изд-во Украины, 1937.—128 с.

Статья поступила 13 мая 2015 г.

Султанахмедов Мурад Салихович
Дагестанский научный центр РАН,
научный сотрудник отдела математики и информатики,
РОССИЯ, 367000, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45
E-mail: `sultanakhmedov@gmail.com`

APPROXIMATIVE PROPERTIES OF THE CHEBYSHEV WAVELET SERIES OF THE SECOND KIND

Sultanakhmedov M. S.

The wavelets and scaling functions based on Chebyshev polynomials and their zeros are introduced. The constructed system of functions is proved to be orthogonal. Using this system, an orthonormal basis in the space of square-integrable functions is built. Approximative properties of partial sums of corresponding wavelet series are investigated.

Key words: polynomial wavelets, Chebyshev polynomials of second kind, orthogonality, Christoffel–Darboux formula, function approximation, wavelet series.