Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 4, С. 75–79

УДК **517.98**

О ФАКТОРИЗАЦИИ $(\mathbb{B}, p)$-СУММИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Б. Б. Тасоев

Для полной булевой алгебры $\mathbb{B}$ и числа $1 \leqslant p \in \mathbb{R}$ вводится класс $(\mathbb{B}, p)$-суммирующих операторов из банаховой решетки в $\mathbb{B}$-циклическое банахово пространство. Устанавливается теорема о факторизации для этого класса.

Ключевые слова: банахова решетка, $\mathbb{B}$-циклическое банахово пространство, $(\mathbb{B}, p)$-суммирующий оператор, факторизация, $(\mathbb{B}, p)$-супераддитивная норма.

В работе [1] были введены $\mathbb{B}$-суммирующие операторы, действующие из банаховой решетки в $\mathbb{B}$-циклическое банахово пространство, где $\mathbb{B}$— полная булева алгебра проекторов, и доказана теорема об факторизации таких операторов. Цель данной работы — ввести класс $(\mathbb{B}, p)$-суммирующих операторов, где $1 \leqslant p \in \mathbb{R}$ и установить аналогичный результат о факторизации. Необходимые сведения имеются в книгах [2, 3].

Всюду далее X и Y — векторные пространства, E и F — банаховы решетки, $L(X, Y)$ — множество всех линейных операторов из X в Y, $1 \leqslant p < \infty$. При $X = Y$ будем писать $L(X)$ вместо $L(X, X)$. Под *булевой алгеброй проекторов* в векторном пространстве X понимается множество $\mathscr{B}$ коммутирующих линейных идемпотентных операторов, действующих в X, в котором роль нуля и единицы играют соответственно нулевое и тождественное отображения, а булевы операции имеют вид:

$$\pi \wedge \rho := \pi \circ \rho = \rho \circ \pi, \quad \pi \vee \rho := \pi + \rho - \pi \circ \rho, \quad \pi^{\perp} := I_X - \pi \quad (\pi, \rho \in \mathscr{B}).$$

Если булева алгебра $\mathbb{B}$ изоморфна $\mathscr{B}$, то будет также писать $\mathbb{B} \subset L(X)$.

Определение 1. Пусть X — нормированное пространство, $U_X := \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$. Предположим, что в $L(X)$ имеется полная булева алгебра проекторов единичной нормы $\mathbb{B}$. Нормированное пространство X называется $\mathbb{B}$-*циклическим*, если для произвольного разбиения единицы $(\pi_\xi) \subset \mathbb{B}$ и любого семейства $(x_\xi) \subset U_X$ существует и при том единственный $x \in U_X$, для которого выполняется $\pi_\xi x_\xi = \pi_\xi x$ при всех ξ, см. [2, §7.3.3].

Подпространство X_0 $\mathbb{B}$-циклического банахова пространства X называется $\mathbb{B}$-*плотным*, если для любого $x \in X$ и $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ существуют $x_\varepsilon \in X$, разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathbb{B}$ и семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в X_0 такие, что $\|x - x_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$ и $\pi_\xi x_\varepsilon = \pi_\xi x_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. Пусть X, Y — банаховы пространства, $\mathbb{B} \subset L(X)$ и $\mathbb{B} \subset L(Y)$. Оператор $T \in L(X, Y)$ называется $\mathbb{B}$-*линейным*, если $\pi(Tx) = T(\pi x)$ для всех $\pi \in \mathbb{B}$ и $x \in X$.

© 2015 Тасоев Б. Б.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-91339_ННИО-а.

Символом $\mathrm{Prt}_\sigma := \mathrm{Prt}_\sigma(\mathbb{B})$ обозначим множество всех счетных разбиений единицы в $\mathbb{B}$. Пусть E — банахова решетка, Y — $\mathbb{B}$-циклическое банахово пространство. Для произвольного линейного оператора $T \in L(E,Y)$ положим по определению

$$\sigma_p(T) := \sup\left\{ \inf_{(\pi_k)\in\mathrm{Prt}_\sigma} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=1}^n \|\pi_k T x_i\|^p\right)^{1/p} : \, x_1,\dots,x_n \in E, \, \Big\|\sum_{i=1}^n |x_i|\Big\| \leqslant 1, \, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Определение 2. Оператор $T \in L(E,Y)$ называется $(\mathbb{B},p)$-*суммирующим*, если $\sigma_p(T) < \infty$. Таким образом, T является $(\mathbb{B},p)$-суммирующим тогда и только тогда, когда существует константа $C > 0$ такая, что для любого конечного набора $x_1,\dots,x_n \in E$ найдется счетное разбиение единицы $(\pi_k) \in \mathrm{Prt}_\sigma(\mathbb{B})$, для которых выполняется соотношение

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=1}^n \|\pi_k T x_i\|^p\right)^{1/p} \leqslant C\Big\|\sum_{i=1}^n |x_i|\Big\|.$$

Как видно, если $p = 1$, то приходим к определению $\mathbb{B}$-суммирующего оператора, введенному в [1, определение 7.1], см. также [4, определение 5.13.1].

Определение 3. Пусть E — банахова решетка, $\mathbb{B}$ — некоторая полная булева алгебра проекторов в $L(E)$ единичной нормы, $1 \leqslant p < \infty$. Норма $\|\cdot\|$ в E называется $(\mathbb{B},p)$-*супераддитивной*, если выполняется соотношение

$$\inf_{(\pi_k)\in\mathrm{Prt}_\sigma} \sup_{k\in\mathbb{N}} \big(\|\pi_k x\|^p + \|\pi_k y\|^p\big)^{1/p} \leqslant \|x+y\|$$

для всех $x, y \in E$, $|x| \wedge |y| = 0$. Если $\mathbb{B} = \{0, I_E\}$, то говорят о p-*супераддитивной* норме, т. е. в этом случае $(\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p} \leqslant \|x+y\|$ для всех $x, y \in E$, $|x|\wedge|y| = 0$, см. [3, p. 138].

Можно показать, что норма в банаховой решетке E будет $(\mathbb{B},p)$-супераддитивной тогда и только тогда, когда для любых $x_1,\dots,x_n \in E_+$ выполняется

$$\inf_{(\pi_k)\in\mathrm{Prt}_\sigma} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=1}^n \|\pi_k x_i\|^p\right)^{1/p} \leqslant \|x_1 + \ldots + x_n\|.$$

Все уже готово, чтобы сформулировать основной результат настоящей заметки, но прежде рассмотрим два примера банаховых решеток с $(\mathbb{B},p)$-супераддитивной нормой.

Пример 1. Пусть E — банахова решетка с p-супераддитивной нормой, (Ω,Σ,μ) — пространство с мерой. Рассмотрим $L^\infty(E)$ — пространство измеримых по Бохнеру вектор-функций f со значениями в E, у которых поточечная норма $\boldsymbol{|} f \boldsymbol{|} : t \mapsto \|f(t)\|$ $(t \in \Omega)$ принадлежит $L^\infty(\mu)$. Введем норму в $L^\infty(E)$ по формуле $\|f\| := \|\boldsymbol{|} f \boldsymbol{|}\|_\infty$, где $\|\cdot\|_\infty$ — норма в $L^\infty(\mu)$. Обозначим через $\mathbb{B}$ булеву алгебру всех характеристических функций измеримых множеств. Тогда $L^\infty(E)$ будет $\mathbb{B}$-циклической банаховой решеткой. Норма в $L^\infty(E)$ будет $(\mathbb{B},p)$-супераддитивной тогда и только тогда, когда норма в E p-супераддитивна.

Пример 2. Пусть Q — экстремальный компакт, E — банахово решетка. Обозначим символом $C_\infty(Q,E)$ множество классов эквивалентности непрерывных вектор-функций, действующих из котощих множеств $\mathrm{dom}(u) \subset Q$ в E. Напомним, что множество в топологическом пространстве называют *котощим*, если его дополнение является тощим. Множество $C_\infty(Q,E)$ можно естественным образом снабдить структурой модуля над кольцом $C_\infty(Q)$. Более того, непрерывное продолжение поточечной нормы $t \mapsto \|f(t)\|$ $(t \in \mathrm{dom}(f),\ f \in C_\infty(Q,E))$ определяет разложимую норму $\boldsymbol{|}\cdot\boldsymbol{|}$ на $C_\infty(Q,E)$ со значениями в $C_\infty(Q)$. Введем пространство $C_\#(Q,E) := \{f \in C_\infty(Q,E) : \boldsymbol{|} f \boldsymbol{|} \in C(Q)\}$ и ному в нем $\|f\| := \|\lvert f\rvert\|_\infty$. Обозначим через $\mathbb{B}$ булеву алгебру всех характеристических функций открыто-замкнутых подмножеств множества Q. Тогда $C_\#(Q,E)$ будет $\mathbb{B}$-циклической банаховой решеткой. Норма в $C_\#(Q,E)$ будет $(\mathbb{B},p)$-супераддитивной тогда и только тогда, когда норма в E p-супераддитивна.

Теперь приведем формулировку и доказательство нашей факторизационной теоремы.

Теорема. *Пусть E — банахова решетка, Y — $\mathbb{B}$-циклическое банахово пространство. Оператор $T \in L(E,Y)$ является $(\mathbb{B},p)$-суммирующим тогда и только тогда, когда существуют главный идеал $\mathbb{B}_0$ в $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}_0$-циклическая банахова решетка F с $(\mathbb{B}_0,p)$-супераддитивной нормой, решеточный гомоморфизм $Q : E \to F$ с $\mathbb{B}_0$-плотным образом в F и $\mathbb{B}_0$-линейный оператор $S \in L(F,Y)$ такие, что*

$$T = SQ, \quad \|S\| \leqslant \|1\|, \quad \|Q\| \leqslant \sigma_p(T).$$

$\lhd$ *Достаточность.* Так как всякое разбиение единицы в $\mathbb{B}_0$ может быть дополнено до разбиения единицы в $\mathbb{B}$, то в определении 2 достаточно ограничиться разбиениями единицы в $\mathbb{B}_0$. Пусть (π_k) — произвольное разбиение единицы в $\mathbb{B}_0$, $x_1,\dots,x_n \in E$. Тогда в силу $\mathbb{B}_0$-линейности S и $(\mathbb{B}_0,p)$-супераддитивности нормы в F выполняются соотношения

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\bigg(\sum_{i=1}^n \|\pi_k T x_i\|^p\bigg)^{1/p} = \sup_{k\in\mathbb{N}}\bigg(\sum_{i=1}^n \|S(\pi_k Q x_i)\|^p\bigg)^{1/p} \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}}\bigg(\sum_{i=1}^n \|\pi_k |Qx_i|\|^p\bigg)^{1/p}$$
$$\leqslant \bigg\|\sum_{i=1}^n |Qx_i|\bigg\| = \bigg\|Q\bigg(\sum_{i=1}^n |x_i|\bigg)\bigg\| \leqslant \sigma_p(T)\bigg\|\sum_{i=1}^n |x_i|\bigg\|.$$

Следовательно, оператор T является $(\mathbb{B},p)$-суммирующим.

Необходимость. Ввиду [2, теорема 7.3.3(1)] отождествим $(Y,\|\cdot\|)$ с bo-полным пространством $(Y,\lvert\cdot\rvert,\Lambda)$, нормирующая решетка которого Λ служит порядково полным AM-пространством с единицей $\mathbf{1}$, причем $\|y\| = \|\lvert y\rvert\|_\infty$ $(y \in Y)$, где $\|\cdot\|_\infty$ — равномерная норма в Λ. Более того, множество всех порядковых проекторов в Λ изоморфно полной булевой алгебре $\mathbb{B}$. В дальнейшем мы будем отождествлять эти булевы алгебры. Определим оператор $\rho : X \to \Lambda_+$, полагая

$$\rho(x) := \sup\bigg\{\bigg(\sum_{i=1}^n \lvert Tx_i\rvert^p\bigg)^{1/p} : x_1,\dots,x_n \in E,\ \sum_{i=1}^n |x_i| \leqslant |x|,\ n \in \mathbb{N}\bigg\} \quad (x \in E).$$

Супремум в указанной формуле существует, так как ввиду [5, лемма 5.1] и $(\mathbb{B},p)$-суммируемости оператора T выполняется условие $\Big(\sum_{i=1}^n \lvert Tx_i\rvert^p\Big)^{1/p} \leqslant \sigma_p(T)\|x\|\mathbf{1}$ для всех $x_1,\dots,x_n \in E$, $\sum_{i=1}^n |x_i| \leqslant |x|$. Покажем, что $\rho : X \to \Lambda$ является полунормой. Ясно, что $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$ для всех $x \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Пусть $z_1,\dots,z_n,x,y \in E$ такие, что $\sum_{i=1}^n |z_i| \leqslant |x+y|$. В силу [3, Proposition 1.1.3] найдутся u_i, v_i $(i = 1,\dots,n)$ из E_+ такие, что $|z_i| = u_i + v_i$ $(i = 1,\dots,n)$, $\sum_{i=1}^n u_i \leqslant |x|$, $\sum_{i=1}^n v_i \leqslant |y|$. Из неравенства Минковского следует справедливость соотношений

$$\rho(x)+\rho(y) \geqslant \bigg(\sum_{i=1}^n \lvert Tu_i\rvert^p\bigg)^{1/p} + \bigg(\sum_{i=1}^n \lvert Tv_i\rvert^p\bigg)^{1/p} \geqslant \bigg(\sum_{i=1}^n (\lvert Tu_i\rvert + \lvert Tv_i\rvert)^p\bigg)^{1/p}$$
$$\geqslant \bigg(\sum_{i=1}^n (\lvert Tu_i + Tv_i\rvert)^p\bigg)^{1/p} = \bigg(\sum_{i=1}^n \lvert Tz_i\rvert^p\bigg)^{1/p}.$$

Переходя к супремуму по всем $z_1, \dots, z_n \in E$, $\sum_{i=1}^n |z_i| \leqslant |x+y|$, получим $\rho(x)+\rho(y) \geqslant \rho(x+y)$. Ясно, что из соотношения $|x| \leqslant |y|$ следует $\rho(x) \leqslant \rho(y)$. Поэтому множество $\rho^{-1}(0) := \{x \in E : \rho(x) = 0\}$ является равномерно замкнутым порядковым идеалом в E. Обозначим фактор-решетку $E/\rho^{-1}(0)$ через F_0 и пусть $Q : E \to F_0$ — канонический фактор-гомоморфизм. Определим норму на F_0 по формуле $\|Qx\| := \|\rho(x)\|_\infty$ $(x \in E)$. Тогда (F_0, ρ, Λ) — решеточно нормированная решетка. Из определения ρ и [5, лемма 5.1] следует справедливость соотношений

$$\left|Tx\right| \leqslant \rho(x) \leqslant \sigma_p(T)\|x\|\mathbf{1} \quad (x \in E).$$

Следовательно, оператор $S_0 : F_0 \to Y$, действующий по формуле $S_0(Qx) := Tx$ $(x \in E)$ корректно определен и $\|S_0\| \leqslant 1$, $\|Q\| \leqslant \sigma_p(T)$. Возьмем bo-пополнение решеточно нормированной решетки (F_0, ρ, Λ) и обозначим его через $F = (F, \rho, \Lambda)$. Тогда F является банаховой решеткой, где норма определяется по формуле $\|x\| := \|\rho(x)\|_\infty$ $(x \in F)$. Пусть τ обозначает порядковый проектор в Λ на полосу $\rho(E)^{\perp\perp}$. Существует изоморфизм h из главного идеала $\mathbb{B}_0 := \{\pi \in \mathbb{B} : \pi \leqslant \tau\}$ в булеву алгебру порядковых проекторов в F такой, что $\pi(\rho x) = \rho(h(\pi)x)$ для всех $x \in F$. Следовательно, F является $\mathbb{B}_0$-циклической банаховой решеткой. Из определения bo-пополнения следует, что $F_0 = Q(X)$ — это $\mathbb{B}_0$-плотное подпространство в F. Проверим $(\mathbb{B}_0, p)$-супераддитивность нормы в F. Из определения ρ следует, что $(\rho(x)^p + \rho(y)^p)^{1/p} \leqslant \rho(x+y)$ для всех $x, y \in F_0$, $x \perp y$. Отсюда в силу леммы [5, лемма 5.1] для произвольных дизъюнктных $x, y \in F$ справедливы соотношения

$$\inf_{(\pi_k) \in \mathrm{Prt}_\sigma(\mathbb{B}_0)} \sup_{k \in \mathbb{N}} (\|\pi_k x\|^p + \|\pi_k y\|^p)^{1/p} = \inf_{(\pi_k) \in \mathrm{Prt}_\sigma(\mathbb{B}_0)} \sup_{k \in \mathbb{N}} (\|\pi_k \rho(x)\|_\infty^p + \|\pi_k \rho(y)\|_\infty^p)^{1/p}$$
$$= \|(\rho(x)^p + \rho(y)^p)^{1/p}\|_\infty \leqslant \|\rho(x+y)\|_\infty = \|x+y\|.$$

В силу [2, теорема 2.2.11] $F = rd(F_0)$. Всякий элемент из $d(F_0)$ имеет вид $\sum_\xi \pi_\xi x_\xi$, где $(\pi_\xi) \subset \mathbb{B}_0$ — разбиение единицы в $\mathbb{B}_0$, а семейство $(x_\xi) \subset F_0$ ограничено по решеточной норме ρ. Ввиду того, что $\left|S_0(x)\right| \leqslant \rho(x)$ для всех $x \in F_0$, положим $S\big(\sum_\xi \pi_\xi x_\xi\big) := \sum_\xi \pi_\xi S_0(x_\xi)$. Переходя к более мелкому разбиению, можно показать, что определение оператора S не зависит от разбиения (π_ξ) и семейства $(x_\xi) \subset F$. Далее продолжим оператор S с $d(F_0)$ на $F = rd(F_0)$ по br-непрерывности и обозначим его снова через S. Тогда $\|S\| \leqslant 1$, S является $\mathbb{B}_0$-линейным оператором и $T = SQ$. $\rhd$

Замечание. При $p = 1$ установленный результат превращается в эквивалентность (1) $\Longleftrightarrow$ (3) из [1, теорема 7.6], причем в [1] используется булевозначный анализ.

Литература

1. *Kusraev A. G.* Boolean Valued Analysis Approach to Injective Banach Lattices.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2011.—28 p.—(Preprint № 1).
2. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
3. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer, 1991.—395 p.
4. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—iv+400 p.—(Trends in Science: The South of Russia. Math. Monogr. Issue 6).
5. *Kusraev A. G.* Boolean Valued Analysis Approach to Injective Banach Lattices II.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2012.—16 c.—(Preprint № 1).

Статья поступила 30 ноябрь 2015 г.

Тасоев Батрадз Ботазович
Южный математический институт ВНЦ РАН,
научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `tasoevbatradz@yandex.ru`

FACTORIZATION OF CONE $(\mathbb{B}, p)$-SUMMING OPERATORS

Tasoev B. B.

For a complete Boolean algebra $\mathbb{B}$ and a real $p \geqslant 1$ we introduce the class of cone $(\mathbb{B}, p)$-summing operators and prove a factorization result for this class.

Key words: Banach lattice, $\mathbb{B}$-cyclic Banach space, cone $(\mathbb{B}, p)$-summing operators, factorization, $(\mathbb{B}, p)$-superadditive norm.