Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 1, С. 36–41

УДК **517.983:517.968.25**

О ЧАСТИЧНО КОМПАКТНЫХ ПО МЕРЕ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ В L_2

В. Б. Коротков

Александру Ефимовичу Гутману
в связи с его 50-летием

В статье вводятся частично компактные по мере неограниченные линейные операторы и устанавливается характеристическое свойство предельных спектров операторов, сопряженных к плотно определенным в $L_2(\mu)$ неограниченным частично компактным по мере линейным операторам. Приводятся приложения этого результата к линейным функциональным уравнениям 1-го и 2-го рода с неограниченными операторами.

Ключевые слова: замкнутый оператор, компактный по мере оператор, предельный спектр, линейное функциональное уравнение 1-го или 2-го рода, линейное интегральное уравнение 1-го или 2-го рода.

Пусть (X, μ) — пространство с σ-конечной положительной мерой μ. *Атомом меры* μ называется множество положительной меры из X, не представимое в виде объединения двух непересекающихся множеств с положительными мерами. Будем говорить, что мера μ не является чисто атомической, если в X есть множество положительной меры, не содержащее атомов меры μ. Через $L_2(\mu) := L_2(X, \mu)$ обозначим пространство всех классов μ-эквивалентных μ-измеримых функций на X с суммируемым квадратом. Через $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ будем обозначать норму и скалярное произведение в $L_2(\mu)$.

Пусть H, H_1 — гильбертовы пространства. Оператор $F : D_F \subset H \to H_1$ называется *замкнутым*, если из $f_n \in D_F$, $f_n \to u$, $Ff_n \to v$ следует $u \in D_F$ и $Fu = v$. Оператор T^*, сопряженный к плотно определенному замкнутому линейному оператору $T : D_T \subset H \to H_1$, плотно определен и замкнут, при этом $T^{**} = T$ [1, гл. III, § 5].

Пусть $T : D_T \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu_1) := L_2(X_1, \mu_1)$ — линейный оператор, $\|\cdot\|_1$ — норма в $L_2(\mu_1)$. Назовем T компактным по мере, если из $f_n \in D_T$, $\|f_n\| \leqslant 1$, $\|Tf_n\|_1 \leqslant 1$, $n = 1, 2, \dots$, вытекает, что $\{Tf_n\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся по мере μ_1 на каждом множестве конечной меры. Если $D_T = L_2(\mu)$ и T — ограниченный оператор, то это определение совпадает с известным определением из [2]. Линейный оператор $T : D_T \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ назовем *частично компактным по мере*, если найдется множество $e \subset X$, $\mu e > 0$, такое, что $P_e T$ компактен по мере; здесь $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_2(\mu)$, χ_e — характеристическая функция множества e.

Будем говорить, что нуль принадлежит предельному спектру $\sigma_c(M)$ оператора $M : D_M \subset H \to H$, если в D_M существует ортонормированная последовательность $\{h_n\}$ такая, что $Mh_n \to 0$.

Теорема 1. *Пусть мера μ σ-конечна, не является чисто атомической и множество e, $0 < \mu e < \infty$, не имеет атомов меры μ, $T : D_T \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ — плотно определенный линейный оператор, $P_e T$ компактен по мере и замкнут. Тогда $0 \in \sigma_c(T^*)$.*

$\lhd$ Определим оператор $i_e : L_2(\mu) \to L_2(e) := L_2(e, \mu)$ равенством $i_e h(s) = h(s)$ для всех $h \in L_2(\mu)$ и всех $s \in e$ и рассмотрим замкнутый оператор $\tau = i_e T : D_T \subset L_2(\mu) \to L_2(e)$. Пользуясь полярным разложением замкнутого оператора [1, гл. VI, § 3], представим τ^* в виде $\tau^* = VS$, где $S = (\tau^{**}\tau^*)^{\frac{1}{2}}$ — самосопряженный оператор в $L_2(e)$, $V : L_2(e) \to L_2(\mu)$ — частично изометрический оператор. Имеем $\tau^{**} = SV^*$. Отсюда $S = \tau^{**}V = \tau V = i_e TV$. Оператор $i_e T$ компактен по мере. Значит, S компактен по мере. Покажем, что $0 \in \sigma_c(S)$. Предположим противное. Тогда размерность подпространства $\ker S$ конечна, здесь $\ker S = \{g : g \in L_2(e), Sg = 0\}$, и можно считать, что $\ker S = \{0\}$ (в противном случае достаточно перейти к оператору $S + P$, где P — ортопроектор на $\ker S$). Из $\ker S = \{0\}$ и $0 \notin \sigma_c(S)$ следует, что существует обратный оператор $S^{-1} : L_2(e) \to D_S \subset L_2(e)$ и этот оператор ограничен. Возьмем любую ортонормированную равномерно ограниченную последовательность $\{\varphi_n\} \subset L_2(e)$. В качестве $\{\varphi_n\}$ можно выбрать систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{n,e}\}$, определенных на e [3] (см. также [4, с. 11–12]). Нетрудно проверить, что $\{\varphi_n\}$ не содержит подпоследовательностей, сходящихся по мере на e. Рассмотрим функции $f_n = S^{-1}\varphi_n$. Имеем $\|f_n\| \leqslant \|S^{-1}\|\|\varphi_n\| = \|S^{-1}\|$, $\|Sf_n\| = \|\varphi_n\| = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Из компактности по мере оператора S вытекает, что последовательность $\{\varphi_n\} = \{Sf_n\}$ компактна по мере, что, как отмечалось выше, невозможно. Значит, $0 \in \sigma_c(S)$. Тогда существует ортонормированная система $\{h_n\} \subset L_2(e)$ такая, что $Sh_n \to 0$. Положив $\widetilde{h_n} = \chi_e h_n$, получим $T^*\widetilde{h_n} = T^* P_e h_n = \tau^* h_n = VSh_n \to 0$. Таким образом, $0 \in \sigma_c(T^*)$. $\rhd$

Пусть $L_0(\mu) := L_0(X, \mu)$ — пространство всех классов μ-эквивалаентных μ-измеримых μ-почти всюду конечных функций на X и $L_0(X \times X, \mu \times \mu)$ — аналогичное пространство. Оператор $K : D_K \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ называется *интегральным*, если существует функция $K \in L_0(X \times X, \mu \times \mu)$ такая, что для всех $f \in D_K$

$$Kf(s) = \int\limits_X K(s,t) f(t)\, d\mu(t) \tag{1}$$

для почти всех $s \in X$. Интервал в (1) понимается в лебеговом смысле. Функция $K(s,t)$ называется *ядром интегрального оператора* K. Будем говорить, что ядро $K(s,t)$ порождает интегральный оператор K по формуле (1).

Из теоремы 1 и в [4, теоремы I.6.2] вытекает следующая

Теорема 2. *Пусть $K : D_K \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ — плотно определенный интегральный оператор, мера μ σ-конечна и не является чисто атомической. Если K продолжается до линейного интегрального оператора $\widetilde{K} : L_2(\mu) \to L_0(\mu)$, то $0 \in \sigma_c(K^*)$.*

Важным примером интегрального оператора, продолжаемого на все $L_2(\mu)$ (со значениями в $L_0(\mu)$), может служить интегральный оператор с ядром $K(s,t)$, удовлетворяющим условию Карлемана

$$\int\limits_X |K(s,t)|^2\, d\mu(t) < \infty$$

для почти всех $s \in X$.

Не каждый плотно определенный замыкаемый интегральный оператор в $L_2(\mu)$ продолжается на все $L_2(\mu)$ со значениями в $L_0(\mu)$ с сохранением интегральности. Соответствующий пример построен в [5].

В [6] показано, что необходимым и достаточным условием продолжимости интегрального оператора $T : D_T \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ с ядром $K(s,t)$ до интегрального оператора из $L_2(\mu)$ в $L_0(\mu)$ является существование положительной функции $a \in L_0(\mu)$ такой, что

$$\int_X |K(s,t)|a(s)\,d\mu(s) \in L_2(\mu).$$

Приведем приложение теоремы 1 к линейным функциональным уравнениям 1-го и 2-го родов с неограниченными операторами. Рассмотрим уравнение

$$\alpha x(s) - \lambda Tx(s) = f(s), \tag{2}$$

где $f \in L_2(\mu)$, α и λ — числовые параметры, $T : D_T \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ — плотно определенный частично компактный по мере линейный оператор, решение x ищется в D_T.

Ниже доказывается теорема о редукции уравнения (2) к более простому эквивалентному интегральному уравнению, к которому применимы различные точные или приближенные методы решения. В формулировке этой теоремы нам понадобятся следующие определения.

Определение 1. Пусть (Y,ν) — пространство с σ-конечной положительной мерой ν, $L_2(\nu) := L_2(Y,\nu)$, $|||\cdot|||$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — норма и скалярное произведение в $L_2(\nu)$. Оператор $J : L_2(\nu) \to L_2(\nu)$ называется *ядерным*, если

$$Jh = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, g_n\rangle h_n, \quad h \in L_2(\nu), \tag{3}$$

где $\{g_n\}$, $\{h_n\} \subset L_2(\nu)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |||g_n||| \cdot |||h_n||| < \infty. \tag{4}$$

Ядерной нормой оператора J называется число

$$\|J\|_1 = \inf \sum_{n=1}^{\infty} |||g_n||| \cdot |||h_n|||,$$

где инфимум берется по всевозможным $\{g_n\}$, $\{h_n\}$, удовлетворяющим (4) и участвующим в (3). Ясно, что $\|J\| \leqslant \|J\|_1$, где $\|J\|$ — операторная норма J.

Ядерный оператор является интегральным, его ядро $J(\xi,\eta)$ принадлежит пространству $L_2(Y\times Y,\, \nu\times\nu)$ и имеет вид

$$J(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(\xi)\,\overline{g_n(\eta)}, \tag{5}$$

где ряд в (5) сходится к $J(\xi,\eta)$ в силу (4) абсолютно по норме $L_2(Y\times Y, \nu\times\nu)$ и абсолютно $(\nu\times\nu)$-почти всюду в $Y \times Y$.

Определение 2. Пусть $\{\varphi_n\} \subset L_2(\nu)$, $\{e_n\}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств из Y с конечными положительными мерами. Функцию

$$H(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\xi)}{\sqrt{\nu e_n}}\,\overline{\varphi_n(\eta)}$$

назовем *квазивырожденным карлемановским ядром*.

Теорема 3. *Пусть меры μ, ν не являются чисто атомическими и σ-конечны, $L_2(\mu)$, $L_2(\nu)$ — сепарабельные пространства, оператор T в уравнении (2) удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и замыкаем. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить не зависящий от α, λ и f унитарный оператор $U : L_2(\mu) \to L_2(\nu)$, приводящий уравнение (2) заменой $y = Ux$, $g = Uf$ к эквивалентному интегральному уравнению*

$$\alpha y(\xi) - \lambda \int\limits_Y \big[N(\xi,\eta) + C(\xi,\eta)\big] y(\eta)\, d\nu(\eta) = g(\xi), \tag{6}$$

где $C(\xi,\eta)$ — квазивырожденное карлемановское ядро, функция $N(\xi,\eta)$ порождает ядерный оператор в $L_2(\nu)$ с ядерной нормой меньшей, чем ε.

$\lhd$ Представим с помощью полярного разложения [1] замкнутый оператор T^* в виде $T^* = WL$, где L — самосопряженный неотрицательный оператор в $L_2(\mu)$, W — частично изометрический оператор в $L_2(\mu)$. По теореме 1 $0 \in \sigma_c(T^*)$. Отсюда и из $L = W^*T^*$ следует, что $0 \in \sigma_c(L)$.

Пусть $\{E_\lambda\}$ — спектральное семейство неотрицательного самосопряженного оператора L, $H_0 = \ker L$, $H_n = (E_{1/n} - E_{1/n+1})L_2(\mu)$, $G_n = (E_{n+1} - E_n)L_2(\mu)$. Удалив из совокупности подпространств H_0, H_n, G_n, $n = 1, 2, \ldots$, совпадающие с $\{0\}$ (если таковые имеются), получим семейство принадлежащих D_L попарно ортогональных подпространств, ортогональная сумма которых равна $L_2(\mu)$. Построим из элементов этих подпространств ортонормированный базис $\{u_n\}$ пространства $L_2(\mu)$. Базис $\{u_n\}$ принадлежит $D_L = D_{T^*}$ и содержит в силу $0 \in \sigma_c(L)$ последовательность $\{z_n\}$, которую L отображает в сходящуюся к 0 последовательность. Имеем $T^*z_n = WLz_n \to 0$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем подпоследовательность $\{v_n\} \subset \{z_n\}$ так, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^*v_n\| < \varepsilon$. Положим $\{w_n\} = \{u_n\} \setminus \{v_{2n}\}$ и определим унитарный оператор $U : L_2(\mu) \to L_2(\nu)$ равенствами

$$Uw_n = \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\nu e_n}}, \quad Uv_{2n} = e_n^{\perp}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\{e_n^{\perp}\}$ — ортонормированный базис ортогонального дополнения к замкнутой линейной оболочке ортонормированной последовательности $\{\chi_{e_n}/\sqrt{\nu e_n}\}$. Здесь $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из Y с конечными положительными мерами. Обозначив через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение в $L_2(\nu)$ и разлагая элементы $UTU^{-1}h$ в ряд по ортонормированному базису $\{e_n^{\perp}, \chi_{e_n}/\sqrt{\nu e_n}\}$ пространства $L_2(\nu)$, получим $UTU^{-1} = N + C$, где оператор N определяется равенством

$$Nh = \sum_{n=1}^{\infty} \langle UTU^{-1}h, e_n^{\perp} \rangle e_n^{\perp} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, UT^*v_{2n} \rangle e_n^{\perp},$$

оператор C представляется в виде

$$Ch = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle UTU^{-1}h, \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\nu e_n}} \right\rangle \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\nu e_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, UT^*w_n \rangle \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\nu e_n}}.$$

В силу $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^*v_{2n}\| < \varepsilon$ оператор N ядерный и его ядерная норма меньше, чем ε. Так как множества e_n попарно не пересекаются, то C — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром

$$C(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\xi)}{\sqrt{\nu e_n}} \overline{(UT^*w_n)(\eta)}.$$

Сделав в (2) замену $y = Ux$, будем иметь

$$\alpha U^{-1}y - \lambda TU^{-1}y = f.$$

Применим к обеим частям этого уравнения оператор U. Тогда

$$\alpha y - \lambda UTU^{-1}y = Uf = g.$$

Отсюда и из $UTU^{-1} = N + C$ получим уравнение (6). $\rhd$

Если в (6) $\alpha = 0$, то, умножив обе его части на функцию

$$\chi_{e_0} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{\|T^* w_n\| + 1} \chi_{e_n},$$

где $e_0 = Y \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$, придем к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода с ядерным оператором. К такому уравнению применимы теорема Пикара [7, с. 102] и регуляризационные методы решения, например, метод А. Н. Тихонова [8, гл. 4, п. 4.3].

Пусть в (6) $\alpha \neq 0$. Выберем в теореме 3 $\varepsilon < \frac{|\alpha|}{|\lambda|}$. Записав (6) в виде $\alpha(1 - \frac{\lambda}{\alpha}N)y - \lambda Cy = g$ и сделав замену $z = F_\lambda y$, где $F_\lambda = 1 - \frac{\lambda}{\alpha}N$, получим эквивалентное интегральное уравнение 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром

$$K_\lambda(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\xi)}{\sqrt{\nu e_n}} \overline{(F_\lambda^{-1})^* \varphi_n(\eta)},$$

где $\varphi_n = UT^* w_n$. К этому уравнению применимы приближенные методы решения, предложенные в [7, с. 134–139].

Замечания:

1. Результаты статьи справедливы и в случае вещественных пространств $L_2(\mu)$, $L_2(\nu)$.

2. Условия теорем 1, 2, 3 охватывают важный случай, когда X, Y — произвольные измеримые по Лебегу множества евклидовых пространств, а μ, ν — меры Лебега.

Литература

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.—М.: Мир, 1972.—740 с.
2. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.—М.: Наука, 1966.—500 с.
3. *Aronszajn N., Szeptycki P.* On General Integral Transformations // Math. Ann.—1966.—Vol. 163, № 2.—P. 127–154.
4. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1983.—224 с.
5. *Коротков В. Б.* О приведении семейств операторов к интегральному виду // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 5.—С. 1092–1098.
6. *Коротков В. Б., Степанов В. Д.* Критерии порождаемости интегральных операторов измеримыми функциями // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 2.—С. 199–203.
7. *Коротков В. Б.* Некоторые вопросы теории интегральных операторов.—Сиб. отд-ние АН СССР. Ин-т мат-ки, 1988.—148 с.
8. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие.—Киев: Наукова думка, 1986.—544 с.

Статья поступила 15 января 2016 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ведущий научный сотрудник лаб. функционального анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4

ON PARTIALLY MEASURE COMPACT UNBOUNDED LINEAR OPERATORS ON L_2

Korotkov V. B.

In this paper we introduce partially measure compact unbounded linear operators. We find characteristic property of limit spectrums of the adjoints of unbounded densely defined partially measure compact linear operators on $L_2(\mu)$. Some applications of this result to linear functional equations of the first and second kind with partially measure compact unbounded operators are given.

Key words: closed operator, measure compact operator, limit spectrum, linear functional equations of the first and second kind, linear integral equations of the first and second kind.