Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 3, С. 31–34

УДК **512.5**

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СЕТЬ, АССОЦИИРОВАННАЯ С ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГРУППОЙ

Р. Ю. Дряева, В. А. Койбаев[1]

Для элементарной сети Ω, ассоциированной с элементарной сетевой группой $E(\sigma)$ (определенной для элементарной сети σ) доказывается, что она является наименьшей дополняемой элементарной сетью, содержащей элементарную сеть σ. Устанавливается связь между элементарной сетью Ω и производной сетью ω (определенной для элементарной сети σ).

Ключевые слова: ковер, элементарный ковер, сеть, элементарная сеть, элементарная группа, трансвекция.

Пусть R — произвольное коммутативное кольцо с единицей, n — натуральное число, $n \geqslant 3$. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца R называется *сетью* [1] над кольцом R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Для сети принята также терминология «ковер» [2]. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется *элементарной сетью* (*элементарный ковер* [3, 4, вопрос 15.46]). Для элементарной сети в [5] введено понятие производной элементарной сети.

Пусть e — единичная матрица порядка n, e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули. Если $\alpha \in R$, то через $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ обозначается элементарная трансвекция. Положим, далее, $t_{ij}(A) = \{t_{ij}(\alpha) : \alpha \in A\}$.

Для элементарной сети σ через $E(\sigma)$ обозначается элементарная сетевая группа:

$$E(\sigma) = \big\langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \big\rangle.$$

Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, называется *дополняемой*, если для некоторых аддитивных подгрупп σ_{ii} кольца R таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, является (полной) сетью. Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является *дополняемой* (см., например, [1]) тогда и только тогда, когда $\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ для любых $i \neq j$.

В [6] определены замкнутые (допустимые) сети. Для элементарной сети σ рассмотрим элементарную сеть $\bar\sigma = (\bar\sigma_{ij})$, индуцированную трансвекциями из элементарной группы $E(\sigma)$. Точнее, посмотрим, какие элементарные трансвекции появились (содержатся) в $E(\sigma)$. А именно, для любых $i \neq j$ положим

$$\bar\sigma_{ij} = \big\{\alpha \in R : t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)\big\}.$$

Очевидно, что $\bar\sigma_{ij}$ — аддитивные группы и в силу известного коммутаторного соотношения (для попарно различных i, r, j)

$$[t_{ir}(\alpha), t_{rj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta)$$

мы имеем $\bar\sigma_{ir}\bar\sigma_{rj} \subseteq \bar\sigma_{ij}$, а потому таблица $\bar\sigma = (\bar\sigma_{ij})_{i\neq j}$ является элементарной сетью.

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России и темы НИР ЮМИ ВНЦ РАН (рег. номер НИОКР 115033020013).

Определение. Элементарную сеть $\bar{\sigma}$ мы называем *замыканием сети* σ. Если $\sigma = \bar{\sigma}$, то сеть σ мы называем *замкнутой* (или *допустимой*).

Предложение 1. *Всякая дополняемая элементарная сеть является замкнутой.*

$\lhd$ Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — дополняемая элементарная сеть (и мы дополнили ее диагональю до (полной) сети). В этом случае в силу сетевого соотношения $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ (выполненное для всех $1 \leqslant i, r, j \leqslant n$) множество матриц

$$M(\sigma) = \{a = (a_{ij}) : \ a_{ij} \in \sigma_{ij}, \ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$$

является кольцом, следовательно, $e+M(\sigma)$ — полугруппа, в частности, $E(\sigma) \subseteq (e+M(\sigma))$, а потому никаких новых элементарных трансвекций в $E(\sigma)$ быть не может: если $\alpha \in \overline{\sigma}_{ij}$, т. е. $t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)$, то $t_{ij}(\alpha) \in (e + M(\sigma)) \Rightarrow \alpha e_{ij} \in M(\sigma) \Rightarrow \alpha \in \sigma_{ij} \Rightarrow \sigma = \overline{\sigma}$. $\rhd$

С другой стороны в [6] приводятся примеры замкнутых сетей, которые не являются дополняемыми. Интерес к дополняемым сетям состоит в том, что по таким сетям строятся сетевые группы [1].

Пусть α, β — подгруппы аддитивной группы кольца R. Для элементарной сети τ второго порядка

$$\tau = \begin{pmatrix} * & \alpha \\ \beta & * \end{pmatrix}$$

положим $\gamma = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha\beta)^k$. Рассмотрим элементарную группу $E(\tau) = \langle t_{21}(\beta), t_{12}(\alpha)\rangle$. Можно показать, что если $a \in E(\tau)$, $a = \begin{pmatrix} 1+a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1+a_{22} \end{pmatrix}$, то $a_{11}, a_{22} \in \gamma$, $a_{12} \in \alpha + \alpha\gamma$, $a_{21} \in \beta + \beta\gamma$. Последнее замечание индуцирует следующее построение.

Для любых $i \neq j$ положим

$$\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty}(\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m.$$

Для произвольных $i \neq j$ положим $\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij}$.

Предложение 2 [5, предложение 5]. *Таблица* $\Omega = (\Omega_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, *является дополняемой элементарной сетью.*

С другой стороны в [5] для элементарной сети определяется производная элементарная сеть. А именно, Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом R порядка n. Рассмотрим набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца R, определенных для любых $i \neq j$ следующим образом:

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sigma_{ik}\sigma_{kj},$$

где, очевидно (так как σ — элементарная сеть), суммирование берется по всем k, отличным от i и j. Ясно, что $\omega_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$, следовательно, для любой тройки попарно различных чисел i, r, j, мы имеем

$$\omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}.$$

Таким образом, набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij}, $i \neq j$, кольца R является элементарной сетью, которую мы называем производной элементарной сетью.

Предложение 3. *Для любой тройки попарно различных индексов i, r, j справедливы включения*

$$\Omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \quad \Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \quad \omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}.$$

◁ Заметим, что второе и третье включения вытекают из первого и того, что $\omega_{rj} \subseteq \Omega_{rj}$, $\omega_{ir} \subseteq \Omega_{ir}$. Поэтому докажем первое.

Пусть i, r, j — попарно различные натуральные числа. Заметим вначале, что

$$\sigma_{ir}(\sigma_{jr}\sigma_{rj})^s \subseteq \sigma_{ir}, \quad \sigma_{rj}(\sigma_{ir}\sigma_{ri})^k \subseteq \sigma_{rj}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&(\sigma_{ir} + \sigma_{ir}(\sigma_{ir}\sigma_{ri})^k)(\sigma_{rj} + \sigma_{rj}(\sigma_{jr}\sigma_{rj})^s) \\
&= \sigma_{ir}\sigma_{rj} + \sigma_{ir}\sigma_{rj}(\sigma_{jr}\sigma_{rj})^s + (\sigma_{ir}\sigma_{rj})(\sigma_{ir}\sigma_{ri})^k(\sigma_{jr}\sigma_{rj})^s + (\sigma_{ir}\sigma_{rj})(\sigma_{ir}\sigma_{ri})^k \\
&= \sigma_{ir}\sigma_{rj} + [\sigma_{ir}(\sigma_{rj}\sigma_{jr})^s]\sigma_{rj} + [\sigma_{ir}(\sigma_{rj}\sigma_{jr})^s][(\sigma_{ri}\sigma_{ir})^k\sigma_{rj}] + \sigma_{ir}[(\sigma_{ri}\sigma_{ir})^k\sigma_{rj}] \\
&\subseteq \sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \omega_{ij}. \ \triangleright
\end{aligned}$$

Как нетрудно видеть, элементарную сеть $\Omega = (\Omega_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, можно дополнить до сети кольцами

$$\Omega_{ii} = \sum_{k \neq i} \Omega_{ik}\Omega_{ki},$$

где суммирование берется по $k = 1, 2, \ldots, n$, $k \neq i$. Заметим, что

$$\Omega_{ii} = \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{n} \gamma_{ik}.$$

Так, например, $\Omega_{11} = \gamma_{12} + \gamma_{13} + \ldots + \gamma_{1n}$.

Определение. Сеть $\Omega = (\Omega_{ij})$ мы называем *сетью*, ассоциированной с элементарной группой $E(\sigma)$ для элементарной сети σ.

Ясно, что $\sigma \subseteq \Omega$.

Теорема. *Сеть Ω является наименьшей (дополняемой) сетью, содержащей элементарную сеть σ.*

◁ Пусть τ — дополняемая сеть и $\sigma \subseteq \tau$. Покажем, что $\Omega \subseteq \tau$. Сначала покажем, что для $i \neq j$, $\Omega_{ij} \subseteq \tau_{ij}$. Напомним, что $(i \neq j)$

$$\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}(\sigma_{ji}\sigma_{ij}) + \sigma_{ij}(\sigma_{ji}\sigma_{ij})^2 + \ldots$$

Имеем $\sigma_{ij} \subseteq \tau_{ij}$, далее, в силу дополняемости сети τ мы имеем $\tau_{ij}\tau_{ji}\tau_{ij} \subseteq \tau_{ij}$, а потому

$$\sigma_{ij}(\sigma_{ji}\sigma_{ij}) \subseteq \tau_{ij}\tau_{ji}\tau_{ij} \subseteq \tau_{ij},$$

из последнего включения мы имеем

$$\sigma_{ij}(\sigma_{ji}\sigma_{ij})^2 \subseteq \tau_{ij}(\sigma_{ji}\sigma_{ij}) \subseteq \tau_{ij}\tau_{ji}\tau_{ij} \subseteq \tau_{ij}.$$

и так далее. Следовательно, для $i \neq j$ мы имеем $\Omega_{ij} \subseteq \tau_{ij}$. Далее, в силу того, что мы стандартным образом (т. е. наименьшей диагональю, определенной через недиагональные элементы сети Ω, которые, как мы уже доказали, не больше соответствующих элементов сети τ) дополнили элементарную сеть Ω диагональю, мы имеем $\Omega_{ii} \subseteq \tau_{ii}$. ▷

Литература

1. *Borevich Z. I.* Subgroups of linear groups rich in transvections // J. of Soviet Math.—1987.—Vol. 37, Issue 2.—P. 928–934.
2. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.—М.: Наука, 1982.—288 с.
3. *Левчук В. М.* Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 5.—С. 504–517.
4. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд-е 17-е.—Новосибирск, 2010.
5. *Койбаев В. А.* Сети, ассоциированные с элементарными сетями // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, вып. 4.—С. 39–43.
6. *Koibaev V. A, Nuzhin Ya. N.* Subgroups of the Chevalley Groups and Lie Rings Definable by a Collection of Additive Subgroups of the Initial Ring // J. Math. Sci.—2014.—Vol. 201, Issue 4.—P. 458–464.

Статья поступила 21 декабря 2015 г.

Дряева Роксана Юрьевна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
аспирант кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Россия, ул. Ватутина, 46
E-mail: `dryaeva-roksana@mail.ru`

Койбаев Владимир Амурханович
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
заведующий кафедрой алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Россия, ул. Ватутина, 46;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела функц. анализа
РОССИЯ, 362025, Россия, ул. Маркуса, 22
E-mail: `koibaev-K1@yandex.ru`

AN ELEMENTARY NET ASSOCIATED WITH THE ELEMENTARY GROUP

Dryaeva R. Y., Koibaev V. A.

Let R be an arbitrary commutative ring with identity, n be a positive integer, $n \geqslant 2$. The set $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, of additive subgroups of the ring R is called a *net* (or *carpet*) over the ring R of order n, if the inclusions $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ hold for all i, r, j. The net without the diagonal, is called an *elementary net*. The elementary net $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, is called *complemented*, if for some additive subgroups σ_{ii} of the ring R the set $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ is a (full) net. The elementary net $\sigma = (\sigma_{ij})$ is complemented if and only if the inclusions $\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ hold for any $i \neq j$. Some examples of not complemented elementary nets are well known. With every net σ can be associated a group $G(\sigma)$ called a *net* group. This groups are important for the investigation of different classes of groups.
It is proved in this work that for every elementary net σ there exists another elementary net Ω associated with the elementary group $E(\sigma)$. It is also proved that an elementary net Ω associated with the elementary group $E(\sigma)$ is the smallest elementary net that contains the elementary net σ.

Key words: carpet, elementary carpet, net, elementary net, net group, elementary group, transvection.