Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 3, С. 70–82

УДК **517.982, 517.983**

ОДНОСТОРОННИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ В ГРАНД-ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

С. М. Умархаджиев

Посвящается 80-летию со дня рождения профессора А. Б. Шабата

Получены достаточные и необходимые условия на ядро и грандизатор для ограниченности односторонних интегральных операторов с однородными ядрами в гранд-пространствах Лебега на $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}^n$, а также получены двусторонние оценки гранд-норм таких операторов. Кроме того, в случае радиального ядра получены двусторонние оценки для норм многомерных операторов в терминах сферических средних и показано, что этот результат сильнее, чем неравенства для норм операторов с нерадиальным ядром.

Ключевые слова: односторонний интегральный оператор, оператор с однородными ядрами, гранд-пространство Лебега, двусторонние оценки, сферические средние.

1. Введение

Мы рассматриваем многомерные интегральные операторы

$$K^-f(x) := \int\limits_{|y|\leqslant|x|} \mathscr{K}^-(x,y)f(y)\,dy, \quad K^+f(x) := \int\limits_{|y|>|x|} \mathscr{K}^+(x,y)f(y)\,dy, \quad x\in\mathbb{R}^n,\ n\geqslant 2,$$

с ядрами $\mathscr{K}^-(x,y)$ и $\mathscr{K}^+(x,y)$ однородными степени $-n$, а при $n=1$ — их версии для полуоси:

$$K^-f(x) := \int\limits_0^x \mathscr{K}^-(x,y)f(y)\,dy, \quad K^+f(x) := \int\limits_x^\infty \mathscr{K}^+(x,y)f(y)\,dy, \quad x\in\mathbb{R}_+,$$

в гранд-пространствах $L^{p)}_a(\mathbb{R}^n)$ и $L^{p)}_a(\mathbb{R}_+)$ соответственно.

Гранд-пространства Лебега $L^{p)}(\Omega)$, $1<p<\infty$, по ограниченному множеству $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ввели T. Iwaniec и C. Sbordone [6] в связи с приложениями в дифференциальных уравнениях. Операторы гармонического анализа интенсивно исследовались в таких пространствах и они продолжают привлекать внимание исследователей в связи с различными их приложениями. Некоторые из этих результатов отражены в книгах [8] и [9].

В статьях [3, 11, 12] предложен подход, позволяющий ввести гранд-пространства Лебега $L^{p)}_a(\Omega)$, $1<p<\infty$, на множествах $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ не обязательно конечной меры. Этот подход основан на введении в норму гранд-пространства малой степени неотрицательной функции $a(x)$ (см. (1)). Эту функцию, определяющую гранд-пространство $L^{p)}_a(\Omega)$, называем *грандизатором.* Такие гранд-пространства $L^{p)}_a(\Omega)$ и действия в них некоторых операторов гармонического анализа исследовались в работах [2, 4, 5, 15]. Предложенные в этих работах подходы позволили рассматривать в гранд-пространствах такие операторы, как потенциал Рисса, операторы Харди и др. В работе [13] были найдены условия на грандизатор $a(x)$, обеспечивающие справедливость теоремы Соболева для потенциала Рисса в гранд-пространствах $L^{p)}_a(\mathbb{R}^n)$, и исследовано их взаимодействие с гиперсингулярными интегралами (см. [10] относительно гиперсингулярных интегралов).

Интерес к интегральным операторам с однородными ядрами связан с тем, что класс таких операторов содержит огромное количество разнообразных классических операторов, возникающих в приложениях, например, операторы Харди, оператор Гильберта, весовые потенциалы Рисса, мажоранты коммутантов сингулярных операторов Кальдерона — Зигмунда со степенными весами и многие другие.

В данной статье получены достаточные условия на грандизатор a, обеспечивающие ограниченность односторонних интегралных операторов одномерных с однородными ядрами степени -1 и многомерных с радиальными однородными ядрами степени $-n$ в гранд-пространствах Лебега, а также получены оценки сверху их норм. Основные результаты содержатся в теореме 3.1 в одномерном случае, в теореме 4.4 в случае радиального грандизатора и в теореме 4.5 в случае нерадиального грандизатора.

Обозначения. $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$; S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат, $|S^{n-1}|$ — ее площадь; $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$; $B(x_0, r)$ — шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x_0; $p' = \frac{p}{p-1}$.

2. Предварительные сведения

2.1. Гранд-пространства Лебега. Обозначим $L^p(\Omega, w) := \left\{f : \|f\|_{L^p(\Omega,w)} < \infty\right\}$, где

$$\|f\|_{L^p(\Omega,w)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В случае $w \equiv 1$ будем писать $L^p(\Omega, w) = L^p(\Omega)$.

Следуя работе [3], определяем гранд-пространства Лебега на множествах Ω произвольной (не обязательно конечной) меры равенством

$$L^{p)}_a(\Omega) := \left\{f : \|f\|_{L^{p)}_a(\Omega)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, a^{\frac{\varepsilon}{p}})} < \infty\right\}, \quad 1 < p < \infty, \tag{1}$$

где $a(x)$ — произвольная измеримая неотрицательная функция на Ω, которую мы называем *грандизатором.* Выбор грандизатора для определения гранд-пространства может диктоваться задачами для исследования таких пространств. В работах [3, 11, 12] предполагалось, что $a \in L^1(\Omega)$, что гарантирует вложение $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p)}_a(\Omega)$. В данной статье мы имеем дело с $\Omega = \mathbb{R}_+$ или $\Omega = \mathbb{R}^n$ и при рассмотрении операторов с однородными ядрами мы находим удобным не обязательно предполагать интегрируемость грандизатора в начале координат и на бесконечности, но всегда предполагаем его локальную интегрируемость вне начала координат:

$$a(x) \in L^1(B_{\delta N}) \;\text{ для любых }\; 0 < \delta < N < \infty,$$

где $B_{\delta N} = \{x : \delta < |x| < N\}$, с заменой слоя $B_{\delta N}$ на интервал (δ, N) в одномерном случае.

Определенное таким образом гранд-пространство зависит, вообще говоря, от выбора грандизатора, хотя разный выбор грандизаторов может привести к одному и тому же гранд-пространству (см. [14]).

При $a \in L^1(\Omega)$ имеет место цепочка вложений

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p)}_a(\Omega) \hookrightarrow L^{p-\varepsilon_1}(\Omega, a^{\frac{\varepsilon_1}{p}}) \hookrightarrow L^{p-\varepsilon_2}(\Omega, a^{\frac{\varepsilon_2}{p}}), \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < p-1. \tag{2}$$

Замечание 2.1. При обычно используемом определении гранд-пространства Лебега на ограниченных множествах с $a(x) \equiv 1$ всегда справедливо вложение $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p)}_a(\Omega)$, т. е. в этом смысле гранд-пространство является расширением классического пространства Лебега. Согласно (2), аналогичное вложение на множествах бесконечной меры гарантируется условием $a \in L^1(\Omega)$. Это условие часто предполагается при рассмотрении гранд-пространств на неограниченных множествах (см., например, [3, 13]), хотя гранд-пространства на таких множествах могут рассматриваться и без этого условия.

Пусть $a(x)$ — положительная всюду конечная на полуоси $\mathbb{R}_+$ функция. Функцию

$$a_*(t) = \sup_{x>0} \frac{a(xt)}{a(x)} \tag{3}$$

называют *растяжением функции* a (см. [1, с. 75]). Отметим следующие свойства растяжений:

(a_0) Если функция $x^\gamma a(x)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, не возрастает на $\mathbb{R}_+$, то $a_*(t) \leqslant \frac{1}{t^\gamma}$ для $t > 1$.

(b_0) Если функция $x^\gamma a(x)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, не убывает на $\mathbb{R}_+$, то $a_*(t) \leqslant \frac{1}{t^\gamma}$ для $t < 1$.

Пример 2.1. Для функции $a(x) = x^{-\lambda}(1+x)^{\lambda-\gamma}$, $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}_+$, имеем

$$a_*(t) = t^{-\lambda} \sup_{x>0} \left(\frac{1+tx}{1+x}\right)^{\lambda-\gamma} = \begin{cases} t^{-\max\{\lambda,\gamma\}}, & 0 < t \leqslant 1, \\ t^{-\min\{\lambda,\gamma\}}, & t > 1. \end{cases}$$

2.2. Об операторах с однородными ядрами. Будем рассматривать одномерные операторы K в предположении однородности ядра $\mathscr{K}(x,y)$ степени -1 и многомерные операторы K в следующих предположениях на ядро $\mathscr{K}(x,y)$:

(a_1) $\mathscr{K}(x,y)$ однородно степени $-n$;

(b_1) $\mathscr{K}(x,y)$ инвариантно относительно вращений $\mathscr{K}(\omega(x),\omega(y)) \equiv \mathscr{K}(x,y)$, где ω — произвольное вращение в $\mathbb{R}^n$.

В книге [7, с. 69] доказано, что интегралы

$$\int\limits_{R^n} |\mathscr{K}(\sigma,y)|\,|y|^{-\frac{n}{p}}\,dy, \quad \sigma \in S^{n-1},$$

$$\int\limits_{R^n} |\mathscr{K}(y,\theta)|\,|y|^{-\frac{n}{p'}}\,dy, \qquad \theta \in S^{n-1},\ 0 < p \leqslant \infty,$$

при условиях (a_1) и (b_1) не зависят от $\sigma \in S^{n-1}$ и $\theta \in S^{n-1}$ соответственно и

$$\int\limits_{R^n} |\mathscr{K}(\sigma,y)|\,|y|^{-\frac{n}{p}}\,dy = \int\limits_{R^n} |\mathscr{K}(y,\theta)|\,|y|^{-\frac{n}{p'}}\,dy, \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Легко видеть, что в рассматриваем случае

$$\int\limits_{|y|\geqslant|x|} \left|\mathscr{K}^-(\sigma,y)\right| |y|^{-\frac{n}{p}}\,dy = \int\limits_{|y|\leqslant|x|^{-1}} \left|\mathscr{K}^-(y,\theta)\right| |y|^{-\frac{n}{p'}}\,dy. \tag{4}$$

Мы будем пользоваться обозначениями

$$\varkappa^- := \int\limits_1^\infty \left|\mathscr{K}^-(1,y)\right| y^{-\frac{1}{p}}\,dy, \quad \varkappa^+ := \int\limits_0^1 \left|\mathscr{K}^+(y,1)\right| y^{-\frac{1}{p'}}\,dy, \quad n=1.$$

Для удобства изложения материла статьи в случае радиальных ядер:

$$\mathscr{K}^-(x,y)=k^-(|x|,|y|), \quad \mathscr{K}^+(x,y)=k^+(|x|,|y|),$$

и в одномерном случае введем две функции

$$\kappa_n^-(\alpha) := \int\limits_0^1 |k^-(t,1)| t^{n-1-\frac{\alpha}{p'}}\,dt, \quad \kappa_n^+(\alpha) := \int\limits_1^\infty |k^+(t,1)| t^{n-1-\frac{\alpha}{p'}}\,dt, \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Отметим, что $\kappa_1^-(1)=\varkappa^-$ и $\kappa_1^+(1)=\varkappa^+$.

3. Одномерный случай

Обозначим

$$c^-(a) := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \int\limits_1^\infty \left|\mathscr{K}^-(x,1)\right| x^{-\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} a_*(x)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}\,dx,$$

$$c^+(a) := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \int\limits_0^1 \left|\mathscr{K}^+(x,1)\right| x^{-\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} a_*(x)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}\,dx.$$

Теорема 3.1. *Пусть $1<p<\infty$, функции $\mathscr{K}^-(x,y)$ и $\mathscr{K}^+(x,y)$ однородны степени -1 и a — грандизатор на $\mathbb{R}_+$.*

I. *Если выполнены условия $c^-(a)<\infty$ и $c^+(a)<\infty$, то операторы K^- и K^+ соответственно ограничены в гранд-пространстве Лебега $L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)$, при этом*

$$\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \leqslant c^-(a), \quad \|K^+\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \leqslant c^+(a). \tag{5}$$

II. *Если $x^\gamma a(x)$ не возрастает на $\mathbb{R}_+$ для некоторого $\gamma\in\mathbb{R}$ такого, что $\kappa_1^-(\min\{1,\gamma\})<\infty$, то $\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \kappa_1^-(\min\{1,\gamma\})$. Если $x^\lambda a(x)$ не убывает на $\mathbb{R}_+$ для некоторого $\lambda\in\mathbb{R}$ такого, что $\kappa_1^+(\max\{1,\lambda\})<\infty$, то $\|K^+\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \kappa_1^+(\max\{1,\lambda\})$.*

III. *Пусть $a\in L^1(\mathbb{R}_+)$. Если $\mathscr{K}^-(x,y)\geqslant 0$ в случае оператора K^- и $\mathscr{K}^+(x,y)\geqslant 0$ в случае оператора K^+, то условия $\varkappa^-<\infty$ и $\varkappa^+<\infty$ необходимы для ограниченности операторов K^- и K^+ соответственно в гранд-пространстве $L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)$ и при этом*

$$\varkappa^- \leqslant \|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}, \quad \varkappa^+ \leqslant \|K^+\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}. \tag{6}$$

IV. *В случае грандизатора* $a(x) = x^{-\lambda}(1+x)^{\lambda-\gamma}$, $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, *условия* $\kappa_1^-(\min\{1,\lambda,\gamma\}) < \infty$ *и* $\kappa_1^+(\max\{1,\lambda,\gamma\}) < \infty$ *достаточны, при* $\mathscr{K}^-(x,y) \geqslant 0$ *и* $\mathscr{K}^+(x,y) \geqslant 0$ *условия* $\kappa_1^-(\max\{1,\lambda\}) < \infty$ *и* $\kappa_1^+(\min\{1,\gamma\}) < \infty$ *необходимы для ограниченности операторов* K^- *и* K^+ *соответственно в гранд-пространстве* $L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)$ *и при этом справедливы оценки*

$$\kappa_1^-(\max\{1,\lambda\}) \leqslant \|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \kappa_1^-(\min\{1,\lambda,\gamma\}), \tag{7}$$

$$\kappa_1^+(\min\{1,\gamma\}) \leqslant \|K^+\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \kappa_1^+(\max\{1,\lambda,\gamma\}). \tag{8}$$

В частности, при $\lambda = \gamma = 1$, $\mathscr{K}^-(x,y) \geqslant 0$ *и* $\mathscr{K}^+(x,y) \geqslant 0$ *операторы* K^- *и* K^+ *ограничены в гранд-пространстве* $L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)$ *тогда и только тогда, когда* $\varkappa^- < \infty$ *и* $\varkappa^+ < \infty$ *соответственно, при этом* $\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} = \varkappa^-$ *и* $\|K^+\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} = \varkappa^+$.

$\lhd$ I. Докажем первое неравенство в (5), второе доказывается аналогично. Так как $K^-f(x) = \int_0^1 \mathscr{K}^-(1,t)f(xt)\,dt$, то силу неравенства Минковского в $L^{p-\varepsilon}$ получим

$$\begin{aligned}
\|K^-f\|_{L^{p-\varepsilon}(\mathbb{R}_+, a^{\frac{\varepsilon}{p}})} &\leqslant \int_0^1 |\mathscr{K}^-(1,t)| \left\{ \int_0^\infty |f(ty)|^{p-\varepsilon} a(y)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, dy \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}} dt \\
&= \int_0^1 |\mathscr{K}^-(1,t)| t^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \left\{ \int_0^\infty |f(x)|^{p-\varepsilon} a\left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{\varepsilon}{p}} dx \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}} dt \\
&= \int_0^1 |\mathscr{K}^-(1,t)| t^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \left\{ \int_0^\infty |f(x)|^{p-\varepsilon} a(x)^{\frac{\varepsilon}{p}} \left[\frac{a\left(\frac{x}{t}\right)}{a(x)}\right]^{\frac{\varepsilon}{p}} dx \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}} dt \\
&\leqslant \int_0^1 |\mathscr{K}^-(1,t)| t^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} a_*\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} dt \left\{ \int_0^\infty |f(x)|^{p-\varepsilon} a(x)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, dx \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

После инверсии в первом интеграле можно получить доказываемое неравенство.

II. Докажем оценку для $\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}$. В силу свойства растяжения (a_0) имеем $a_*(t) \leqslant t^{-\gamma}$ при $t \geqslant 1$. Поэтому

$$\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \max_{0 \leqslant \varepsilon \leqslant p-1} \int_1^\infty \left|\mathscr{K}^-(t,1)\right| t^{-\frac{1}{(p-\varepsilon)'} - \frac{\varepsilon\gamma}{p(p-\varepsilon)}}\, dt,$$

после чего требуемая оценка получается прямым вычислением интеграла и нахождением максимума.

Оценка для $\|K^+\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}$ получается аналогично.

III. Докажем оценку снизу нормы оператора K^-. Возьмем минимизирующее семейство функций в виде

$$f_\delta(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{p}+\delta}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Так как $f_\delta \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и $a \in L^1(\mathbb{R}_+)$, то $f_\delta \in L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)$ в силу (2). Из ограниченности оператора K^- в гранд-пространстве $L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)$ следует, что он определен на функции f_δ.

При $x < 1$ имеем

$$K^- f_\delta(x) = \int_0^1 \mathscr{K}^-(1,t) f_\delta(xt)\, dt \geqslant \kappa_p(\delta) f_\delta(x),$$

где $\kappa_p(\delta) = \int_0^1 \mathscr{K}^-(1,t) f_\delta(t)\, dt$. Следовательно,

$$\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \geqslant \frac{\|K^- f_\delta\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}}{\|f_\delta\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}} \geqslant \kappa_p(\delta).$$

Остается перейти к пределу при $\delta \to 0$ под знаком интеграла, определяющего $\kappa_p(\delta)$, что обосновывается теоремой Леви.

Оценка нормы оператора K^+ доказывается аналогично.

IV. Правые оценки в (7) и в (8) получается из (5) непосредственными вычислениями с учетом того, что в этом случае справедливо равенство (см. пример 2.1)

$$a_*(x) = \begin{cases} t^{-\max\{\lambda,\gamma\}}, & 0 < t \leqslant 1, \\ t^{-\min\{\lambda,\gamma\}}, & t > 1. \end{cases}$$

Получим оценку снизу нормы $\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}$. Возьмем минимизирующее семейство функций в виде

$$f_\delta(x) = \begin{cases} x^{-\nu+\delta}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

где $\delta > 0$, $\nu = 1 - \frac{\max\{1,\lambda\}}{p'}$. Имеем

$$\|f_\delta\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left\{ \int_0^1 \frac{dx}{x^{\nu p + \frac{\varepsilon}{p}(\lambda - \nu p) - \delta(p-\varepsilon)}} \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

Отсюда простыми рассуждениями получаем, что $f_\delta \in L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)$. Оценим $K^- f_\delta$ поточечно снизу. Имеем при $0 < x \leqslant 1$

$$\begin{aligned} K^- f_\delta(x) &= \int_0^1 \mathscr{K}^-(1,t) f_\delta(xt)\, dt = x^{-\nu+\delta} \int_0^{\frac{1}{x}} \mathscr{K}^-(1,t) t^{-\nu+\delta}\, dt \\ &= f_\delta(x) \int_0^{\frac{1}{x}} \mathscr{K}^-(1,t) t^{-\nu+\delta}\, dt \geqslant f_\delta(x) \int_0^1 \mathscr{K}^-(1,t) t^{-\nu+\delta}\, dt. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \geqslant \frac{\|K^- f_\delta\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}}{\|f_\delta\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}} \geqslant \int_0^1 \mathscr{K}^-(1,t) t^{-\nu+\delta}\, dt.$$

Чтобы получить оценку снизу для $\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}$ остается перейти к пределу при $\delta \to 0$. Предельный переход под знаком интеграла возможен в силу теоремы Леви.

Оценка снизу для $\|K^+\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}$ получается аналогично посредством функции

$$f_\delta(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leqslant 1, \\ x^{-\mu-\delta}, & x > 1, \end{cases}$$

где $\delta > 0$, $\mu = 1 - \frac{\min\{1,\gamma\}}{p'}$. $\rhd$

4. Многомерный случай

4.1. Случай радиального ядра. Оценки через сферические средние. В этом пункте мы рассмотрим случай радильных ядер $k^-(|x|,|y|)$ и $k^+(|x|,|y|)$. В этом случае мы получим утверждение более сильное, чем просто ограниченность операторов K^- и K^+ в гранд-пространстве. Именно, мы получим оценки для норм $\|K^- f\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)}$ и $\|K^+ f\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)}$ через сферические средние

$$F(\rho) := \frac{1}{|S^{n-1}|} \int\limits_{S^{n-1}} f(\rho\sigma)\, d\sigma$$

функции f (см. теорему 4.1).

Мы будем пользоваться также сферическим средним грандизатора a:

$$A(\rho) := \frac{1}{|S^{n-1}|} \int\limits_{S^{n-1}} a(\rho\sigma)\, d\sigma, \quad \rho \in \mathbb{R}_+.$$

Многомерные оператор K^- и K^+ сводятся к одномерным операторам $\bar{K}^-$ и $\bar{K}^+$ с ядрами $\bar{k}^-$ и $\bar{k}^+$ по формулам

$$K^- f(x) = \bar{K}^- F(|x|), \quad K^+ f(x) = \bar{K}^+ F(|x|), \tag{9}$$

где $\bar{k}^-(\rho, r) = |S^{n-1}|\rho^{n-1} k^-(\rho, r)$ и $\bar{k}^+(\rho, r) = |S^{n-1}|\rho^{n-1} k^+(\rho, r)$, что позволит воспользоваться результатами для одномерного случая на основании доказываемой ниже леммы 4.1. Отметим следующие следствия из неравенства Йесена:

$$\int\limits_{S_{n-1}} a(\rho\sigma)^\lambda\, d\sigma \leqslant |S^{n-1}| A(\rho)^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1, \tag{10}$$

$$|F(\rho)|^q \leqslant \frac{1}{|S^{n-1}|} \int\limits_{S_{n-1}} |f(\rho\sigma)|^q\, d\sigma, \quad q \geqslant 1. \tag{11}$$

Лемма 4.1. *Справедливы неравенства*

$$\left\|K^- f\right\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \left\|\tilde{K}^- \tilde{F}\right\|_{L_{\tilde{A}}^{p)}(\mathbb{R}_+)}, \quad \left\|K^+ f\right\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \left\|\tilde{K}^+ \tilde{F}\right\|_{L_{\tilde{A}}^{p)}(\mathbb{R}_+)}, \tag{12}$$

где

$$\tilde{K}^- F(\rho) = \int\limits_0^\infty \tilde{k}^-(\rho, r) F(r)\, dr, \quad \tilde{K}^+ F(\rho) = \int\limits_0^\infty \tilde{k}^+(\rho, r) F(r)\, dr,$$

$$\tilde{F}(\rho) = \left|S^{n-1}\right|^{\frac{1}{p}} \rho^{\frac{n-1}{p}} F(\rho), \quad \tilde{A}(\rho) = \left|S^{n-1}\right| \rho^{n-1} A(\rho),$$

$$\tilde{k}^-(\rho,r) = \left|S^{n-1}\right| \left(\rho^{\frac{1}{p}} r^{\frac{1}{p'}}\right)^{n-1} k^-(\rho,r), \quad \tilde{k}^+(\rho,r) = \left|S^{n-1}\right| \left(\rho^{\frac{1}{p}} r^{\frac{1}{p'}}\right)^{n-1} k^+(\rho,r).$$

$\lhd$ Согласно (9) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|K^- f(x)\right|^{p-\varepsilon} a(x)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, dx = \int\limits_0^\infty \rho^{n-1} \left|\bar{K}^- F(\rho)\right|^{p-\varepsilon} \int\limits_{S^{n-1}} a(\rho\xi)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, d\xi d\rho.$$

Тогда в силу (10)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|K^- f(x)\right|^{p-\varepsilon} a(x)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, dx \leqslant \left|S^{n-1}\right| \int\limits_0^\infty \rho^{n-1} \left|\bar{K}^- F(\rho)\right|^{p-\varepsilon} A(\rho)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, d\rho.$$

Отсюда прямыми преобразованиями приходим к первому неравенству в (12). Второе неравенство доказывается аналогично. $\rhd$

Лемма 4.2. *Для радиальной функции f справедливо соотношение*

$$\|f\|_{L^{p)}_a(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L^{p)}_{\mathscr{A}}(\mathbb{R}^n)},$$

где $\mathscr{A}(x) := \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S_{n-1}} a(|x|\sigma)\, d\sigma$.

$\lhd$ Для доказательства достаточно в левой части применить неравенство (10), перейдя к полярным координатам. $\rhd$

Следующая лемма доказывается аналогично с помощью неравенства (11).

Лемма 4.3. *Пусть $\mathscr{A}(x) = A(|x|)$. Тогда*

$$\|\mathscr{F}\|_{L^{p)}_{\mathscr{A}}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L^{p)}_{\mathscr{A}}(\mathbb{R}^n)}, \tag{13}$$

где $\mathscr{F}(x) := \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(|x|\sigma)\, d\sigma$.

В следующей теореме мы рассматриваем неравенства вида

$$\|K^- f\|_{L^{p)}_a(\mathbb{R}^n)} \leqslant C^- \|\mathscr{F}\|_{L^{p)}_{\mathscr{A}}(\mathbb{R}^n)}, \quad \|K^+ f\|_{L^{p)}_a(\mathbb{R}^n)} \leqslant C^+ \|\mathscr{F}\|_{L^{p)}_{\mathscr{A}}(\mathbb{R}^n)}, \tag{14}$$

где $\mathscr{F}(x) = F(|x|)$, a — произвольный грандизатор на $\mathbb{R}^n$, сферическая средняя которого равна функции $\mathscr{A}(x) = A(|x|)$, а также даем оценки снизу и сверху для наилучших констант C_*^- и C_*^+ в (14).

Обозначим

$$d^-(A) := \left|S^{n-1}\right| \sup_{0<\varepsilon<p-1} \int\limits_1^\infty \left|k^-(t,1)\right| t^{\frac{n}{p-\varepsilon}-1} A_*(t)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}\, dt,$$

$$d^+(A) := \left|S^{n-1}\right| \sup_{0<\varepsilon<p-1} \int\limits_0^1 \left|k^+(t,1)\right| t^{\frac{n}{p-\varepsilon}-1} A_*(t)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}\, dt,$$

$$\varkappa_n^- := \int\limits_1^\infty \left|k^-(1,y)\right| y^{\frac{n}{p'}-1}\, dy, \quad \varkappa_n^+ := \int\limits_0^1 \left|k^+(y,1)\right| y^{\frac{n}{p}-1}\, dy.$$

Теорема 4.1. *Пусть $1 < p < \infty$, $A(|x|)$ — грандизатор на $\mathbb{R}^n$, функции $k^-(|x|,|y|)$ и $k^+(|x|,|y|)$ однородны степени $-n$.*

I. *Если $d^-(A) < \infty$, $d^+(A) < \infty$, то неравенства (14) выполняются с $C^- = d^-(A)$ и $C^+ = d^+(A)$ соответственно.*

II. *Если $t^\gamma A(t)$ не возрастает на $\mathbb{R}_+$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$ такого, что $\kappa_n^-(\min\{n,\gamma\}) < \infty$, то $C^- \leqslant |S^{n-1}|\kappa_n^-(\min\{n,\gamma\})$. Если $t^\lambda A(t)$ не убывает на $\mathbb{R}_+$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ такого, что $\kappa_n^+(\max\{n,\lambda\}) < \infty$, то $C^+ \leqslant |S^{n-1}|\kappa_n^+(\max\{n,\lambda\})$.*

III. *Если $\mathscr{A} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $k^-(|x|,|y|) \geqslant 0$, $k^+(|x|,|y|) \geqslant 0$, то условия $\varkappa_n^- < \infty$, $\varkappa_n^+ < \infty$ необходимы для ограниченности операторов K^- и K^- соответственно в гранд-пространстве $L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)$. При этом для наилучших констант в неравенствах (14) справедливы оценки*

$$\big|S^{n-1}\big|\varkappa_n^- \leqslant C_*^-, \quad \big|S^{n-1}\big|\varkappa_n^+ \leqslant C_*^+. \tag{15}$$

IV. *При $a(x) = |x|^{-\lambda}(1+|x|)^{\lambda-\gamma}$, $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, и неотрицательных ядер наилучшие константы в (14) удовлетворяют неравенствам*

$$\big|S^{n-1}\big|\kappa_n^-\left(\max\{n,\lambda\}\right) \leqslant C_*^- \leqslant \big|S^{n-1}\big|\kappa_n^-(\min\{n,\lambda,\gamma\}), \tag{16}$$

$$\big|S^{n-1}\big|\kappa_n^+(\min\{n,\gamma\}) \leqslant C_*^+ \leqslant \big|S^{n-1}\big|\kappa_n^+(\max\{n,\lambda,\gamma\}). \tag{17}$$

В частности, при $\lambda = \gamma = n$ имеют место равенства

$$C_*^- = \big|S^{n-1}\big|\varkappa_n^-, \quad C_*^+ = \big|S^{n-1}\big|\varkappa_n^+.$$

$\lhd$ Доказательство теоремы подготовлено леммой 4.1. Применяя теорему 3.1 в правых частях неравенств (12), после ряда простых преобразований получаем утверждение теоремы в достаточной части.

Для получения оценок норм снизу в пунктах III и IV неравенства (12) неприменимы. Но мы воспользуемся тем, что на радиальных функциях неравенства (10) и (11), а следовательно, и неравенства (12), превращаются в равенства.

Получим первую оценку из (15). Рассмотрим минимизующую функцию

$$f_\delta(x) = \begin{cases} |x|^{-\frac{n}{p}+\delta}, & 0 < |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

где $\delta > 0$. Очевидно $f_\delta \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, в силу включения $\mathscr{A} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f_\delta \in L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$. Ввиду радиальности f_δ имеем

$$\|K^- f_\delta\|_{L_A^{p)}(\mathbb{R}^n)} = \big\|\tilde{K}^- \tilde{F}_\delta\big\|_{L_{\tilde{A}}^{p)}(\mathbb{R}_+)},$$

где $\tilde{A}(\rho) = |S^{n-1}|\rho^{n-1}A(\rho)$, $\tilde{F}_\delta(\rho) = \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} f_\delta(\rho\sigma)\,d\sigma = |S^{n-1}|^{\frac{1}{p}}\rho^{\frac{n-1}{p}} f_\delta(\rho)$.

Воспользовавшись первым из неравенств (6), после несложных преобразований получим

$$\big\|K^- f_\delta\big\|_{L_A^{p)}(\mathbb{R}^n)} \geqslant \varkappa_n^- \big\|\tilde{F}_\delta\big\|_{L_{\tilde{A}}^{p)}(\mathbb{R}_+)} = |S^{n-1}|\varkappa_n^- \|f_\delta\|_{L_A^{p)}(\mathbb{R}_n)}.$$

Тем самым первое из неравенств (15) доказано. Второе получается аналогично посредством функции

$$f_\delta(x) = \begin{cases} 0, & 0 < |x| \leqslant 1, \\ |x|^{-\frac{n}{p}-\delta}, & |x| > 1, \end{cases}$$

где $\delta > 0$.

Доказательство неравенств (16) и (17) аналогично доказательству неравенств (7) и (8). $\rhd$

4.2. Общий случай. Обозначим

$$\kappa_p^- := \int\limits_{|x|\leqslant 1} \mathscr{K}^-(e_1, x)\,\frac{1}{|x|^{\frac{n}{p}}}\,dx,$$

$$\ell^-(a) := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \int\limits_{|x|\geqslant 1} \left|\mathscr{K}^-(x, e_1)\right| \frac{[a_*(|x|)]^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}}{|x|^{\frac{n}{(p-\varepsilon)'}}}\,dx.$$

Заметим, что $\ell^-(a) \leqslant \int_{|x|\geqslant 1} |\mathscr{K}^-(x, e_1)| \max\left\{[a_*(|x|)]^{\frac{1}{p'}}, \frac{1}{|x|^{\frac{n}{p'}}}\right\} dx$, что получается вычислением $\sup_{0<\varepsilon<p-1} \frac{[a_*(|x|)]^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}}{|x|^{\frac{n}{(p-\varepsilon)'}}}$.

Теорема 4.2. *Пусть $1 < p < \infty$, $a = a(|x|)$, ядро $\mathscr{K}^-(x, y)$ однородно степени $-n$ и инвариантно относительно вращений. Если $\ell^-(a) < \infty$, то оператор K^- ограничен в гранд-пространстве $L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$ и*

$$\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \ell^-(a). \tag{18}$$

Если $\mathscr{K}^-(x, y) \geqslant 0$ и $a \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то условие $\kappa_p^- < \infty$ необходимо для такой ограниченности и

$$\kappa_p^- \leqslant \|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)}. \tag{19}$$

$\lhd$ Оценим $\|K^- f\|_{L^{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n, a^{\frac{\varepsilon}{p}})}$ сверху. Для этого представим $K^- f(x)$ в виде

$$K^- f(x) = \int\limits_{|y|\leqslant|x|} |y|^{-\frac{n}{qq'}} \mathscr{K}^-(x, y)^{\frac{1}{q'}} \left(\frac{a(|x|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}{a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}\right)^{\frac{1}{qq'}} |y|^{\frac{n}{qq'}} \mathscr{K}^-(x, y)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}{a(|x|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}\right)^{\frac{1}{qq'}} f(y)\,dy.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$|K^- f(x)| \leqslant \{\Delta\}^{\frac{1}{q'}} \left\{ \int\limits_{|y|\leqslant|x|} |y|^{\frac{n}{q'}} |\mathscr{K}^-(x, y)| \left(\frac{a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}{a(|x|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}\right)^{\frac{1}{q'}} |f(y)|^q\,dy \right\}^{\frac{1}{q}},$$

где $\Delta = \int_{|y|\leqslant|x|} |y|^{-\frac{n}{q}} |\mathscr{K}^-(x, y)| \left(\frac{a(|x|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}{a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}} dy$. Заменив q в выражении для Δ на $p - \varepsilon$ и сделав замену подобия $y \to |x|y$, получим

$$\Delta = |x|^{-\frac{n}{p-\varepsilon}} \int\limits_{|y|\leqslant 1} |y|^{-\frac{n}{p-\varepsilon}} \left|\mathscr{K}^-\left(\frac{x}{|x|}, y\right)\right| \left(\frac{a(|y|)}{a(|x||y|)}\right)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} dy.$$

В последнем интеграле сделаем замену вращения $y = \omega(z)$, при котором $\omega(e_1) = \frac{x}{|x|}$, где $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, и воспользуемся неравенством

$$\sup_{t<1} \frac{a(t)}{a(xt)} \leqslant a_*\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0,$$

и инвариантностью функции $\mathscr{K}$ относительно вращений:

$$\Delta \leqslant |x|^{-\frac{n}{p-\varepsilon}} \int\limits_{|y|\leqslant 1} |y|^{-\frac{n}{p-\varepsilon}} \left|\mathscr{K}^{-}(e_1, y)\right| \left[a_*\left(\frac{1}{|y|}\right)\right]^{-\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} dy.$$

Сделав в интеграле преобразование инверсии, получим $\Delta \leqslant |x|^{-\frac{n}{p-\varepsilon}} \ell_\varepsilon^{-}(a)$, где

$$\ell_\varepsilon^{-}(a) := \int\limits_{|x|\geqslant 1} \left|\mathscr{K}^{-}(x, e_1)\right| \frac{\left[a_*(|x|)\right]^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}}{|x|^{\frac{n}{(p-\varepsilon)'}}} dx.$$

Таким образом, получаем

$$\left|K^{-}f(x)\right| \leqslant \frac{\left[\ell_\varepsilon^{-}(a)\right]^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}}}{|x|^{\frac{n}{(p-\varepsilon)(p-\varepsilon)'}}} \left\{ \int\limits_{|y|\leqslant|x|} |y|^{\frac{n}{(p-\varepsilon)'}} |\mathscr{K}^{-}(x,y)| \left(\frac{a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}{a(|x|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} |f(y)|^{p-\varepsilon} dy \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

Далее, имеем

$$\|K^{-}f\|_{L^{p-\varepsilon}\left(\mathbb{R}^n, a^{\frac{\varepsilon}{p}}\right)} \leqslant \left[\ell_\varepsilon^{-}(a)\right]^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p-\varepsilon} |y|^{\frac{n}{(p-\varepsilon)'}} \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{|y|\leqslant|x|} |x|^{-\frac{n}{(p-\varepsilon)'}} |\mathscr{K}^{-}(x,y)| \left(\frac{a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}{a(|x|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} a(|x|)^{\frac{\varepsilon}{p}} dx dy \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \left[\ell_\varepsilon^{-}(a)\right]^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p-\varepsilon} |y|^{\frac{n}{(p-\varepsilon)'}} a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)'}} \int\limits_{|y|\leqslant|x|} |x|^{-\frac{n}{(p-\varepsilon)'}} |\mathscr{K}^{-}(x,y)| a(|x|)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} dx\, dy \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

После замены $x \to |y|x$ и вращения во внутреннем интеграле, получим

$$\|K^{-}f\|_{L^{p-\varepsilon}\left(\mathbb{R}^n, a^{\frac{\varepsilon}{p}}\right)} \leqslant \left[\ell_\varepsilon^{-}(a)\right]^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p-\varepsilon} a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)'}} dy \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{|x|\geqslant 1} |x|^{-\frac{n}{(p-\varepsilon)'}} |\mathscr{K}^{-}(x, e_1)| a(|x||y|)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} dx \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \left[\ell_\varepsilon^{-}(a)\right]^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p-\varepsilon} a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p}} dy \times \int\limits_{|x|\geqslant 1} |x|^{-\frac{n}{(p-\varepsilon)'}} |\mathscr{K}^{-}(x, e_1)| \left(\frac{a(|x||y|)}{a(|y|)}\right)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} dx \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leqslant \left[\ell_\varepsilon^{-}(a)\right]^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}\left(\mathbb{R}^n, a^{\frac{\varepsilon}{p}}\right)} \times \left\{ \int_{|x|\geqslant 1} |x|^{-\frac{n}{(p-\varepsilon)'}} |\mathscr{K}^{-}(x, e_1)| \left[a_*(|x|)\right]^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} dx \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \left[\ell_\varepsilon^{-}(a)\right]^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \left[\ell_\varepsilon^{-}(a)\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}\left(\mathbb{R}^n, a^{\frac{\varepsilon}{p}}\right)} = \ell_\varepsilon^{-}(a) \|f\|_{L^{p-\varepsilon}\left(\mathbb{R}^n, a^{\frac{\varepsilon}{p}}\right)}.$$

Отсюда с учетом (1), приходим к (18).

Для доказательства оценки снизу в (19) возьмем минимизирующее семейство функций в виде $f_\delta(x) = |x|^{-\frac{n}{p}+\delta}(1+|x|)^{-2\delta}$. Так как $f_\delta \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и $a \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то $f_\delta \in L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$ в силу (2). Из ограниченности оператора K^- в гранд-пространстве $L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$ следует, что он определен на функции f_δ. Имеем

$$K^- f_\delta(x) = \int\limits_{|y|\leqslant 1} \mathscr{K}^-(e_1, y) f_\delta(|x|y)\, dy.$$

Легко проверить, что $f_\delta(xy) \geqslant f_\delta(x) f_\delta(y)$. Тогда

$$K^- f_\delta(x) \geqslant \kappa_p^-(\delta) f_\delta(x),$$

где $\kappa_p^-(\delta) = \int_{|y|\leqslant 1} \mathscr{K}^-(e_1, y) f_\delta(y)\, dy$. Следовательно,

$$\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)} \geqslant \frac{\|K^- f_\delta\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)}}{\|f_\delta\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)}} \geqslant \kappa_p^-(\delta).$$

Остается перейти к пределу при $\delta \to 0$ под знаком интеграла, определяющего $\kappa_p^-(\delta)$, что обосновывается теоремой Леви. $\rhd$

Аналогичное утверждение справедливо и для оператора K^+ с заменой κ_p^- и $\ell^-(a)$ на

$$\kappa_p^+ = \int\limits_{|x|\geqslant 1} \mathscr{K}^+(x, e_1) \frac{1}{|x|^{\frac{n}{p'}}}\, dx$$

и

$$\ell^+(a) = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \int\limits_{|x|\leqslant 1} \left|\mathscr{K}^+(e_1, x)\right| |x|^{-\frac{n}{p-\varepsilon}} [a_*(|x|)]^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}\, dx$$

соответственно.

Автор выражает благодарность профессору С. Г. Самко за полезное обсуждение результатов работы и анонимному рецензенту за ценные замечания.

Литература

1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука, 1978.—499 с.
2. *Умархаджиев С. М.* Ограниченность линейных операторов в весовых обобщенных гранд-пространствах Лебега // Вестн. Акад. наук Чеченской респ.—2013.—Т. 19, № 2.—С. 5–9.
3. *Умархаджиев С. М.* Обобщение понятия гранд-пространства Лебега // Изв. вузов. Математика.—2014.—Т. 4.—С. 42–51; пер. на англ.: Generalization of the notion of grand Lebesgue space. Russian Math. (Iz. VUZ).—2014.—Vol. 58, № 4.—P. 35–43.
4. *Умархаджиев С. М.* Ограниченность потенциала Рисса в весовых обобщенных гранд-пространствах Лебега // Владикавк. мат. журн.—2014.—Т. 16, № 2.—С. 62–68.
5. *Умархаджиев С. М.* Плотность пространства Лизоркина в гранд-пространствах Лебега // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 3.—С. 75–83.
6. *Iwaniec T., Sbordone C.* On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // Arch. Rational Mech. Anal.—1992.—Vol. 119.—P. 129–143.
7. *Karapetiants N. K., Samko S. G.* Equations with Involutive Operators.—Boston: Birkhäuser, 2001.
8. *Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., and Samko S.* Integral Operators in Non-standard Function Spaces. Vol. I. Variable Exponent Lebesgue and Amalgam Spaces.—Basel: Birkhauser, 2016.—1–586 p.—(Operator Theory: Advances and Appl. 248).

9. *Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., and Samko S.* Integral Operators in Non-Standard Function Spaces. Vol. II. Variable Exponent Holder, Morrey–Campanato and Grand Spaces.—Basel: Birkhauser, 2016.—587–1009 p.—(Operator Theory: Advances and Appl. 249).
10. *Samko S. G.* Hypersingular Integrals and their Applications. London–N. Y.: Taylor & Francis.—2002.—358+xvii p.—(Ser. Analytical Methods and Special Functions. Vol. 5).
11. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On Iwaniec–Sbordone spaces on sets which may have infinite measure // Azerb. J. Math.—2011.—Vol. 1, № 1.—P. 67–84.
12. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On Iwaniec–Sbordone spaces on sets which may have infinite measure: addendum // Azerb. J. Math.—2011.—Vol. 1, № 2.—P. 143–144.
13. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* Riesz fractional integrals in grand Lebesgue spaces // Fract. Calc. Appl. Anal.—2016.—Vol. 19, № 3.—P. 608–624.
14. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On grand Lebesgue spaces on sets of infinite measure // Math. Nachrichten.—2016.—URL: http://dx.doi.org/10.1002/mana.201600136.
15. *Umarkhadzhiev S. M.* The boundedness of the Riesz potential operator from generalized grand Lebesgue spaces to generalized grand Morrey spaces // Operator Theory, Operator Algebras and Appl.—Basel: Birkhäuser/Springer, 2014.—P. 363–373.

Статья поступила 20 января 2017 г.

Умархаджиев Салаудин Мусаевич
Комплексный научно-исследовательский институт
им. Х. И. Ибрагимова РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 364051, Грозный, Старопромысловское шоссе, 21 а;

Академия наук Чеченской Республики
РОССИЯ, 364024, Грозный, пр-кт им. М. Эсамбаева, 13
заведующий отделом прикладной семиотики
E-mail: umsalaudin@gmail.com

ONE-SIDED INTEGRAL OPERATORS WITH HOMOGENEOUS KERNELS IN GRAND LEBESGUE SPACES

Umarkhadzhiev S. M.

Sufficient conditions and necessary conditions for the kernel and the grandiser are obtained under which one-sided integral operators with homogeneous kernels are bounded in the grand Lebesgue spaces on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^n$. Two-sided estimates for grand norms of these operators are also obtained. In addition, in the case of a radial kernel, we obtain two-sided estimates for the norms of multidimensional operators in terms of spherical means and show that this result is stronger than the inequalities for norms of operators with a nonradial kernel.

Key words: one-sided integral operators, operators with homogeneous kernels, the grand Lebesgue spaces, two-sided estimates, spherical means.