Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 1, С. 10–20

УДК **517.9**

ПАРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ, ВОЗМУЩЕННЫЕ ОПЕРАТОРАМИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО СДВИГА[1]

О. Г. Авсянкин, А. М. Ковальчук

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, рассматривается оператор B, представляющий собой сумму двух слагаемых. Первое слагаемое — это парный многомерный интегральный оператор, ядра которого однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно группы вращений пространства $\mathbb{R}^n$, а второе слагаемое — сходящийся по операторной норме ряд, составленный из многомерных операторов мультипликативного сдвига с комплексными коэффициентами. На ядра и коэффициенты оператора B накладываются некоторые дополнительные условия, обеспечивающие его ограниченность в пространстве суммируемых функций. Основная цель работы заключается в исследовании обратимости оператора B. Для решения этой задачи применяется специальный метод, позволяющий осуществить редукцию многомерного парного оператора к бесконечной последовательности одномерных парных операторов B_m, где $m \in \mathbb{Z}_+$. Показано, что оператор B обратим в том и только в том случае, когда обратимы все операторы B_m, где m пробегает все значения от нуля до некоторого конечного числа m_0. В свою очередь, операторы B_m сводятся к интегрально-разностным операторам свертки, теория которых хорошо известна. Все это позволило для рассматриваемого оператора B определить символ, который представляет собой пару функций $(\beta_1(m,\xi), \beta_2(m,\xi))$, заданных на множестве $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$. Если символ является невырожденным, то естественным образом определяются вещественное число ν и целые числа $\varkappa_m$, где $m \in \mathbb{Z}_+$, называемые индексами. Основной результат работы — критерий обратимости в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ многомерного парного оператора B. Согласно этому критерию, оператор B обратим тогда и только тогда, когда его символ является невырожденным, а все его индексы равны нулю.

DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11392.

Ключевые слова: парный оператор, интегральный оператор, однородное ядро, мультипликативный сдвиг, обратимость, сферические гармоники.

Введение

В настоящее время имеется немало работ, посвященных многомерным интегральным операторам, ядра которых однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно группы вращений $SO(n)$. Для таких операторов получены критерии обратимости и нётеровости, описаны порождаемые этими операторами банаховы алгебры, найдены условия применимости проекционного метода (см., например, [1–4] и цитированные в них источники). В работе [5] была построена и исследована C^*-алгебра, полученная присоединением к C^*-алгебре операторов с однородными ядрами всех операторов мультипликативного сдвига. Это направление получило развитие в статьях [6, 7], где рассматривались интегральные операторы с однородными ядрами, возмущенные операторами одностороннего мультипликативного сдвига.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00094-А.

Данная работа продолжает исследования, начатые в [5–7]. В ней рассматриваются парные операторы вида $A_1P + A_2Q$, где

$$(A_j\varphi)(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_{j\ell}\varphi(x/\delta_{j\ell}) + \int_{\mathbb{R}^n} k_j(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad j = 1,2,$$

а P и Q — операторы умножения на характеристические функции внутренней и внешней частей единичного шара соответственно. При этом предполагается, что функция $k_j(x,y)$ однородна степени $(-n)$ и инвариантна относительно всех вращений (точная постановка задачи будет дана ниже). Для оператора $A_1P{+}A_2Q$ в работе построен символ, в терминах которого получен критерий обратимости этого оператора.

Ниже использованы следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство;

$$x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n; \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}; \quad x' = x/|x|;$$
$$x\cdot y = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n; \quad S_{n-1} = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n:\ |x| = 1\bigr\};$$

$\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел; $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$; $Y_{m\mu}(\sigma)$ — сферические гармоники порядка m; $d_n(m)$ — размерность пространства сферических гармоник порядка m:

$$d_n(m) = (n+2m-2)\frac{(n+m-3)!}{m!(n-2)!};$$

$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\xi t}\,dt$ — преобразование Фурье функции f.

1. Предварительные сведения

В пространстве $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, рассмотрим интегрально-разностный оператор свертки

$$(V\psi)(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_\ell\psi(t-\tau_\ell) + \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\psi(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

в предположении, что $h \in L_1(\mathbb{R})$, $\tau_\ell \in \mathbb{R}$, $\alpha_\ell \in \mathbb{C}$ и $\sum_{\ell=1}^{\infty}|\alpha_\ell| < \infty$. Обозначим через P_+ (P_-) оператор умножения на характеристическую функцию положительной (отрицательной) полуоси. Введем парный оператор

$$C = V_1P_+ + V_2P_-, \tag{2}$$

где V_1 и V_2 — операторы вида (1). Теория парных операторов вида (2) хорошо известна (см. [8, гл. 7]). Символом оператора C называют пару функций $(v_1(\xi), v_2(\xi))$, где

$$v_j(\xi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_{j\ell}\exp(i\tau_{j\ell}\xi) + \widehat{h}_j(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(Функция $v_j(\xi)$ является символом оператора V_j.) Если

$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}} |v_j(\xi)| > 0, \quad j = 1,2, \tag{3}$$

то отношение $v_1(\xi)/v_2(\xi)$ можно представить в виде

$$\frac{v_1(\xi)}{v_2(\xi)} = \alpha(\xi) + \widehat{h}(\xi),$$

где $\alpha(\xi)$ — невырожденная почти периодическая функция, разлагающаяся в абсолютно сходящийся ряд Фурье, и $h \in L_1(\mathbb{R})$ [8, с. 217–218]. Определим индексы $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\varkappa \in \mathbb{Z}$ равенствами

$$\gamma = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2b}\Delta\big[\arg\alpha(\xi)\big]\Big|_{-b}^{b}, \quad \varkappa = \frac{1}{2\pi}\Delta\Big[\arg\Big(1+\alpha^{-1}(\xi)\widehat{h}(\xi)\Big)\Big]\Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Предложение 1 [8, с. 251]**.** *Для того чтобы оператор C вида* (2) *был обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (3) *и равнялись нулю индексы γ и $\varkappa$.*

2. Постановка задачи и основной результат

2.1. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где функция $k(x,y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (здесь и далее предполагается, что $n \geqslant 2$) и удовлетворяет следующим условиям:

1°. однородность степени $(-n)$, т. е.

$$k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n}k(x,y) \quad (\forall\,\alpha > 0);$$

2°. инвариантность относительно группы вращений $SO(n)$, т. е.

$$k(\omega(x), \omega(y)) = k(x,y) \quad (\forall\,\omega \in SO(n));$$

3°. суммируемость, т. е.

$$\kappa := \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(e_1,y)||y|^{-n/p}\,dy < \infty, \quad e_1 = (1,0,\ldots,0).$$

Известно (см. [1, с. 70]), что оператор K ограничен в $L_p(\mathbb{R}^n)$, причем $\|K\| \leqslant \kappa$. Далее, для каждого $\delta > 0$ определим оператор мультипликативного сдвига U_δ формулой $(U_\delta\varphi)(x) = \delta^{-n/p}\varphi(x/\delta)$, и рассмотрим оператор

$$A = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell U_{\delta_\ell} + K, \tag{5}$$

где K — оператор вида (4), $a_\ell \in \mathbb{C}$ и $\sum_{\ell=1}^{\infty}|a_\ell| < \infty$. Так как $\|U_{\delta_\ell}\| = 1$, то оператор A ограничен в $L_p(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим парный оператор

$$B = A_1P + A_2Q, \tag{6}$$

где A_1 и A_2 — операторы вида (5), а P и Q — операторы умножения на характеристические функции внутренней и внешней частей единичного шара соответственно. Наша цель — получить необходимые и достаточные условия обратимости оператора B.

2.2. Для того чтобы получить критерий обратимости оператора B вида (6), рассмотрим в $L_p(\mathbb{R}^n)$ уравнение, порожденное этим оператором:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{1\ell}\delta_{1\ell}^{-n/p}(P\varphi)(x/\delta_{1\ell}) + \int\limits_{|y|<1} k_1(x,y)\varphi(y)\,dy + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{2\ell}\delta_{2\ell}^{-n/p}(Q\varphi)(x/\delta_{2\ell}) + \int\limits_{|y|>1} k_2(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x). \quad (7)$$

Так как функция $k_j(x,y)$ удовлетворяет условию 2°, то существует такая функция $k_{0j}(r,\rho,t)$, что $k_j(x,y) = k_{0j}(|x|,|y|,x'\cdot y')$ [9, с. 36]. Учитывая это, перейдем в уравнении (7) к сферическим координатам $x = r\sigma$, $y = \rho\theta$. Затем умножим обе части уравнения на $r^{(n-1)/p}$ и после преобразований получим уравнение

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{1\ell}\delta_{1\ell}^{-1/p}(\widetilde{P}\Phi)\left(\frac{r}{\delta_{1\ell}}\,\sigma\right) + \int\limits_0^1\int\limits_{S_{n-1}} \frac{1}{r}\,D_1\left(\frac{\rho}{r},\sigma\cdot\theta\right)\Phi(\rho\theta)\,d\rho\,d\theta + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{2\ell}\delta_{2\ell}^{-1/p}(\widetilde{Q}\Phi)\left(\frac{r}{\delta_{2\ell}}\,\sigma\right) + \int\limits_1^{\infty}\int\limits_{S_{n-1}} \frac{1}{r}\,D_2\left(\frac{\rho}{r},\sigma\cdot\theta\right)\Phi(\rho\theta)\,d\rho\,d\theta = F(r\sigma), \quad (8)$$

где

$$\Phi(r\sigma) = \varphi(r\sigma)r^{(n-1)/p}, \quad F(r\sigma) = f(r\sigma)r^{(n-1)/p},$$
$$D_j(\rho,t) = k_{0j}(1,\rho,t)\rho^{(n-1)/p'}, \quad j = 1,2, \quad (9)$$

$\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ — аналоги проекторов P и Q в пространстве $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n) = \{\Phi(r\sigma) : \Phi(r\sigma)r^{-(n-1)/p} \in L_p(\mathbb{R}^n)\}$. Умножая обе части уравнения (8) на сферические гармоники $Y_{m\mu}(\sigma)$, интегрируя по единичной сфере и применяя формулу Функа — Гекке [9, с. 43], получим бесконечную диагональную систему одномерных уравнений

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{1\ell}\delta_{1\ell}^{-1/p}(\mathbf{P}\Phi_{m\mu})\left(\frac{r}{\delta_{1\ell}}\right) + \int\limits_0^1 \frac{1}{r}\,D_{1m}\left(\frac{\rho}{r}\right)\Phi_{m\mu}(\rho)\,d\rho + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{2\ell}\delta_{2\ell}^{-1/p}(\mathbf{Q}\Phi_{m\mu})\left(\frac{r}{\delta_{2\ell}}\right) + \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{r}\,D_{2m}\left(\frac{\rho}{r}\right)\Phi_{m\mu}(\rho)\,d\rho = F_{m\mu}(r), \quad (10)$$

где $r \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = 1,2,\ldots,d_n(m)$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ — операторы умножения на характеристические функции интервалов $(0,1)$ и $(1,\infty)$ соответственно,

$$\Phi_{m\mu}(r) = \int\limits_{S_{n-1}} \Phi(r\sigma)Y_{m\mu}(\sigma)\,d\sigma, \quad F_{m\mu}(r) = \int\limits_{S_{n-1}} F(r\sigma)Y_{m\mu}(\sigma)\,d\sigma,$$

$$D_{jm}(\rho) = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left((n-1)/2\right)}\int\limits_{-1}^{1} D_j(\rho,t)P_m(t)(1-t^2)^{(n-3)/2}dt. \quad (11)$$

Здесь $P_m(t)$ — многочлены Лежандра (см., например, [9, с. 41]).

В пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$ рассмотрим операторы

$$(R_j g)(r) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{j\ell}\delta_{j\ell}^{-1/p} g\left(\frac{r}{\delta_{j\ell}}\right), \quad r \in \mathbb{R}_+, \tag{12}$$

$$(K_{jm} g)(r) = \int_0^{\infty} \frac{1}{r} D_{jm}\left(\frac{\rho}{r}\right) g(\rho)\, d\rho, \quad r \in \mathbb{R}_+, \tag{13}$$

где $j = 1, 2$, $m \in \mathbb{Z}_+$, и положим $A_{jm} = R_j + K_{jm}$. Тогда оператор B_m ($m \in \mathbb{Z}_+$), формирующий левую часть уравнения (10), имеет вид

$$B_m = A_{1m}\mathbf{P} + A_{2m}\mathbf{Q}. \tag{14}$$

2.3. Определим изоморфизм $W_p\colon L_p(\mathbb{R}_+) \to L_p(\mathbb{R})$ формулой

$$(W_p g)(t) = e^{-t/p} g(e^{-t}).$$

Нетрудно проверить, что оператор $V_{jm} = W_p A_{jm} W_p^{-1}$ ($j = 1, 2$, $m \in \mathbb{Z}_+$) задается в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ формулой

$$(V_{jm}\psi)(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{j\ell}\psi(t + \ln\delta_{j\ell}) + \int_{-\infty}^{\infty} h_{jm}(t-s)\psi(s)\, ds, \tag{15}$$

где

$$h_{jm}(t) = D_{jm}(e^t)e^{t/p'} \in L_1(\mathbb{R}). \tag{16}$$

Тогда оператор

$$C_m = W_p B_m W_p^{-1} \tag{17}$$

определяется в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ равенством

$$C_m = V_{1m}P_+ + V_{2m}P_-, \tag{18}$$

где V_{1m} и V_{2m} — операторы вида (15). Таким образом, оператор C_m является парным интегрально-разностным оператором свертки (см. § 1). Символом этого оператора является пара функций $(c_{1m}(\xi), c_{2m}(\xi))$ вида

$$c_{jm}(\xi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{j\ell}\exp(-i\xi\ln\delta_{j\ell}) + \widehat{h}_{jm}(\xi) = \alpha_j(\xi) + \widehat{h}_{jm}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

где

$$\alpha_j(\xi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{j\ell}\delta_{j\ell}^{-i\xi}. \tag{19}$$

Выразим функцию $\widehat{h}_{jm}(\xi)$ через ядро $k_j(x,y)$ оператора K_j вида (4). Учитывая (16), имеем

$$\widehat{h}_{jm}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{jm}(t)e^{i\xi t}\, dt = \int_0^{\infty} D_{jm}(\rho)\rho^{-1/p+i\xi}\, d\rho.$$

Далее, последовательно применяя равенство (11), формулу Каталана (см., например, [9, с. 20]) и равенство (9), получим

$$\widehat{h}_{jm}(\xi) = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left((n-1)/2\right)} \int\limits_0^\infty \rho^{-1/p+i\xi}\,d\rho \int\limits_{-1}^1 D_j(\rho,t)P_m(t)(1-t^2)^{(n-3)/2}\,dt$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_{S_{n-1}} D_j(\rho, e_1\cdot\theta)P_m(e_1\cdot\theta)\rho^{-1/p+i\xi}\,d\rho\,d\theta = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k_j(e_1,y)P_m(e_1\cdot y')|y|^{-n/p+i\xi}\,dy,$$

где $P_m(t)$ — многочлены Лежандра.

Учитывая сказанное, назовем ***символом*** оператора B вида (6) пару функций $(\beta_1(m,\xi),\beta_2(m,\xi))$, заданных на множестве $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}$ равенствами

$$\beta_j(m,\xi) = \alpha_j(\xi) + \sigma_j(m,\xi),$$

где функция $\alpha_j(\xi)$ определяется формулой (19) и

$$\sigma_j(m,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k_j(e_1,y)P_m(e_1\cdot y')|y|^{-n/p+i\xi}\,dy, \quad j=1,2.$$

Заметим, что при любом фиксированном значении $m\in\mathbb{Z}_+$ справедливо равенство

$$\beta_j(m,\xi) = c_{jm}(\xi), \quad \xi\in\mathbb{R}. \tag{20}$$

Символ оператора B назовем ***невырожденным***, если

$$\inf_{\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}} |\beta_j(m,\xi)| > 0, \quad j=1,2. \tag{21}$$

В этом случае почти периодические функции $\alpha_j(\xi)$ также будут невырожденными (см. [8, с. 218]), т. е. будет выполнено условие

$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}} |\alpha_j(\xi)| > 0, \quad j=1,2. \tag{22}$$

2.4. Пусть символ оператора B является невырожденным. Тогда

$$\frac{\beta_1(m,\xi)}{\beta_2(m,\xi)} = \alpha(\xi) + \widehat{h}_m(\xi),$$

где $\alpha(\xi)=\alpha_1(\xi)/\alpha_2(\xi)$, а h_m — некоторая функция из $L_1(\mathbb{R})$. Подчеркнем, что почти периодическая функция $\alpha(\xi)$ не зависит от m. Это позволяет определить индексы $\nu\in\mathbb{R}$ и $\varkappa_m\in\mathbb{Z}$ следующим образом:

$$\nu = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2b}\Delta\big[\arg\alpha(\xi)\big]\Big|_{-b}^{b}, \quad \varkappa_m = \frac{1}{2\pi}\Delta\Big[\arg\Big(1+\alpha^{-1}(\xi)\widehat{h}_m(\xi)\Big)\Big]\Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (22) *и* $\nu=0$. *Тогда найдется такое число* $m_0\in\mathbb{Z}_+$, *что для любого* $m>m_0$ *оператор* B_m *вида* (14) *обратим.*

$\lhd$ Представим оператор B_m в виде

$$B_m = R_1\mathbf{P} + R_2\mathbf{Q} + K_{1m}\mathbf{P} + K_{2m}\mathbf{Q},$$

где R_j и K_{jm} задаются формулами (12) и (13) соответственно. Рассмотрим оператор $\mathscr{R}_1 P_+ + \mathscr{R}_2 P_- = W_p(R_1\mathbf{P} + R_2\mathbf{Q})W_p^{-1}$, где

$$(\mathscr{R}_j\psi)(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{j\ell}\psi(t + \ln\delta_{j\ell}), \quad j = 1, 2.$$

Символом этого оператора является пара функций $(\alpha_1(\xi), \alpha_2(\xi))$. В силу предложения 1 оператор $\mathscr{R}_1 P_+ + \mathscr{R}_2 P_-$ обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R})$. Тогда оператор $R_1\mathbf{P} + R_2\mathbf{Q}$ обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$.

Известно (см. [6, с. 10]), что $\lim_{m\to\infty}\|K_{jm}\| = 0$. Значит найдется такое $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, что для всех $m > m_0$ справедливо неравенство

$$\|K_{1m}\mathbf{P} + K_{2m}\mathbf{Q}\| < \left\|(R_1\mathbf{P} + R_2\mathbf{Q})^{-1}\right\|^{-1}.$$

Тогда оператор B_m, где $m > m_0$, обратим. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (22) *и* $\nu = 0$, *а* m_0 *— число, определенное в лемме* 1. *Оператор* B *вида* (6) *обратим в пространстве* $L_p(\mathbb{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда обратимы в* $L_p(\mathbb{R}_+)$ *все операторы* B_m, $m = 0, 1, \ldots, m_0$.

$\lhd$ В пространстве $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n) = \{\Phi(r\sigma) : \Phi(r\sigma)\, r^{-(n-1)/p} \in L_p(\mathbb{R}^n)\}$ рассмотрим оператор $\widetilde{B}$, определяемый левой частью уравнения (8). Запишем его в виде

$$\widetilde{B} = (\widetilde{R}_1 + \widetilde{K}_1)\widetilde{P} + (\widetilde{R}_2 + \widetilde{K}_2)\widetilde{Q},$$

где операторы $\widetilde{K}_j$ и $\widetilde{R}_j$ задаются формулами

$$(\widetilde{K}_j\Phi)(r\sigma) = \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} \frac{1}{r} D_j\left(\frac{\rho}{r}, \sigma\cdot\theta\right)\Phi(\rho\theta)\,d\rho\,d\theta,$$

$$(\widetilde{R}_j\Phi)(r\sigma) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{j\ell}\delta_{j\ell}^{-1/p}\Phi\left(\frac{r}{\delta_{j\ell}}\,\sigma\right),$$

а $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ — операторы умножения на характеристические функции внутренней и внешней частей единичного шара соответственно.

Очевидно, что оператор B обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда оператор $\widetilde{B}$ обратим в пространстве $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n)$.

Определим в $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n)$ проектор P_N равенством

$$(P_N\Phi)(r\sigma) = \sum_{m=0}^{N}\sum_{\mu=1}^{d_n(m)} \Phi_{m\mu}(r)Y_{m\mu}(\sigma),$$

и обозначим через Q_N дополнительный проектор. Заметим, что проекторы P_N и $\widetilde{P}$ коммутируют между собой. Далее, с помощью формулы Функа — Гекке непосредственно проверяется, что $P_N\widetilde{K}_jQ_N = 0$ и $Q_N\widetilde{K}_jP_N = 0$. Кроме того, очевидны равенства $P_N\widetilde{R}_jQ_N = 0$ и $Q_N\widetilde{R}_jP_N = 0$. Положим

$$\widetilde{T} = \widetilde{R}_1\widetilde{P} + \widetilde{R}_2\widetilde{Q}.$$

Тогда $\widetilde{B} = \widetilde{T} + \widetilde{K}_1\widetilde{P} + \widetilde{K}_2\widetilde{Q}$. В силу вышесказанного справедливы равенства

$$P_N\widetilde{T}Q_N = 0, \quad Q_N\widetilde{T}P_N = 0, \quad P_N\widetilde{B}Q_N = 0, \quad Q_N\widetilde{B}P_N = 0.$$

Учитывая это, запишем матричное равенство

$$\begin{pmatrix} P_N & Q_N \\ Q_N & P_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{B} & 0 \\ 0 & \widetilde{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_N & Q_N \\ Q_N & P_N \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \widetilde{T} + P_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P} + \widetilde{K}_2\widetilde{Q})P_N & 0 \\ 0 & \widetilde{T} + Q_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P} + \widetilde{K}_2\widetilde{Q})Q_N \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Докажем, что оператор $\widetilde{T}$ обратим в пространстве $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n)$. В п. 2.2 было показано, что уравнение (8), порожденное оператором $\widetilde{B}$, сводится к бесконечной диагональной системе (10). В частности, уравнение $(\widetilde{T}\Phi)(r\sigma) = F(r\sigma)$ сводится к системе

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{1\ell}\delta_{1\ell}^{-1/p}(\mathbf{P}\Phi_{m\mu})\left(\frac{r}{\delta_{1\ell}}\right) + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{2\ell}\delta_{2\ell}^{-1/p}(\mathbf{Q}\Phi_{m\mu})\left(\frac{r}{\delta_{2\ell}}\right) = F_{m\mu}(r), \tag{24}$$

где $r \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = 1, 2, \ldots, d_n(m)$. Левая часть каждого уравнения системы (24) порождается не зависящим от m оператором $\mathbf{T} = R_1\mathbf{P} + R_2\mathbf{Q}$, где R_j определяются равенством (12). Очевидно, что оператор $\widetilde{T}$ обратим в $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда оператор $\mathbf{T}$ обратим в $L_p(\mathbb{R}_+)$. Заметим, что символом оператора $\mathbf{T}$ является пара функций $(\alpha_1(\xi), \alpha_2(\xi))$ вида (19).

Поскольку выполнено условие (22) и $\nu = 0$, то в силу предложения 1 парный разностный оператор $W_p\mathbf{T}W_p^{-1}$ обратим в $L_p(\mathbb{R})$, а значит оператор $\mathbf{T}$ обратим в $L_p(\mathbb{R}_+)$. Следовательно, оператор $\widetilde{T}$ обратим в $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n)$.

Так как оператор $\widetilde{T}$ обратим, то из матричного равенства (23) следует, что оператор $\widetilde{B}$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы операторы $\widetilde{T} + P_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P} + \widetilde{K}_2\widetilde{Q})P_N$ и $\widetilde{T} + Q_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P} + \widetilde{K}_2\widetilde{Q})Q_N$. Покажем, что последний оператор обратим при достаточно большом значении N.

В [1, с. 80–81] показано, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $h_{jN}(\rho, t)$ вида

$$h_{jN}(\rho, t) = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} \sum_{m=0}^{N} d_n(m)h_{jm}(\rho)P_m(t), \quad j = 1, 2,$$

где $P_m(t)$ — многочлены Лежандра, такая, что оператор $\widetilde{H}_{jN}$ вида

$$(\widetilde{H}_{jN}\Phi)(r\sigma) = \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} \frac{1}{r} h_{jN}\left(\frac{\rho}{r}, \sigma\cdot\theta\right) \Phi(\rho\theta)\, d\rho\, d\theta$$

удовлетворяет неравенству

$$\big\|\widetilde{K}_j - \widetilde{H}_{jN}\big\|_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n))} < \varepsilon. \tag{25}$$

При этом всегда можно считать, что $N > m_0$. Непосредственно устанавливается равенство $Q_N\widetilde{H}_{jN}Q_N = 0$, из которого следует, что

$$\widetilde{T} + Q_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P} + \widetilde{K}_2\widetilde{Q})Q_N = \widetilde{T} + Q_N\big((\widetilde{K}_1 - \widetilde{H}_{1N})\widetilde{P} + (\widetilde{K}_2 - \widetilde{H}_{2N})\widetilde{Q}\big)Q_N.$$

Так как оператор $\widetilde{T}$ обратим, то в силу (25) можно добиться выполнения неравенства

$$\big\|Q_N\big((\widetilde{K}_1-\widetilde{H}_{1N})\widetilde{P}+(\widetilde{K}_2-\widetilde{H}_{2N})\widetilde{Q}\big)Q_N\big\|_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n))}<\|\widetilde{T}^{-1}\|^{-1}_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n))},$$

из которого вытекает обратимость оператора $\widetilde{T}+Q_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})Q_N$.

Таким образом, оператор $\widetilde{B}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\widetilde{T}+P_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})P_N$. Обратимость последнего, в силу равенства

$$\widetilde{T}+P_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})P_N=P_N\widetilde{B}P_N+Q_N\widetilde{T}Q_N,$$

равносильна обратимости оператора $P_N\widetilde{B}\big|_{\operatorname{Im}P_N}$ [1, с. 6]. Ясно, что уравнение, порождаемое оператором $P_N\widetilde{B}\big|_{\operatorname{Im}P_N}$ сводится к конечной системе вида (10), где $m=0,1,\dots,N$. Таким образом, необходимым и достаточным условием обратимости оператора $\widetilde{B}$ является обратимость в $L_p(\mathbb{R}_+)$ всех операторов B_m, где $m=0,1,\dots,N$. Учитывая лемму 1, получаем, что оператор B обратим тогда и только тогда, когда обратимы все операторы B_m, где $m=0,1,\dots,m_0$. $\rhd$

Замечание 1. Отметим, что использование в записях «неопределенного» числа m_0 весьма неудобно. Поэтому ниже мы пишем, что $m\in\mathbb{Z}_+$.

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы оператор B вида* (6) *был обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись три условия:* 1) *неравенство* (21); 2) $\nu=0$; 3) $\varkappa_m=0$ *для всех $m\in\mathbb{Z}_+$.*

$\lhd$ *Необходимость.* Очевидно, что обратимость оператора B в $L_p(\mathbb{R}^n)$ влечет обратимость в $L_p(\mathbb{R}_+)$ всех операторов B_m, где $m\in\mathbb{Z}_+$. Тогда из равенства (17) вытекает обратимость в $L_p(\mathbb{R})$ всех операторов C_m, $m\in\mathbb{Z}_+$. Используя теперь равенство (20) и предложение 1, убеждаемся в справедливости условий теоремы.

Достаточность. Если выполнены условия теоремы, то, последовательно применяя равенство (20), предложение 1 и равенство (17), получаем, что все операторы B_m, $m\in\mathbb{Z}_+$, обратимы в $L_p(\mathbb{R}_+)$. Кроме того, из (21) следует выполнение неравенства (22). Тогда в силу леммы 2 оператор B обратим в $L_p(\mathbb{R}^n)$. $\rhd$

Из этой теоремы легко получается критерий обратимости оператора A вида (5). Так как $A=AP+AQ$, то $\beta_1(m,\xi)=\beta_2(m,\xi):=a(m,\xi)$, где

$$a(m,\xi)=\sum_{\ell=1}^{\infty}a_\ell\delta_\ell^{-i\xi}+\int\limits_{\mathbb{R}^n}k(e_1,y)P_m(e_1\cdot y')|y|^{-n/p+i\xi}\,dy.$$

Так как $\beta_1(m,\xi)/\beta_2(m,\xi)\equiv 1$, то $\nu=0$ и $\varkappa_m=0$ для всех $m\in\mathbb{Z}_+$. Тогда из теоремы 1 вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Для того чтобы оператор A вида* (5) *был обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, необходимо и достаточно, чтобы его символ $a(m,\xi)$ удовлетворял условию*

$$\inf_{\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}}|a(m,\xi)|>0.$$

Литература

1. *Karapetiants N., Samko S.* Equations with Involutive Operators.—Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 2001.—427 p.
2. *Авсянкин О. Г., Карапетянц Н. К.* О псевдоспектрах многомерных интегральных операторов с однородными степени $-n$ ядрами // Сиб. мат. журн.—2003.—Т. 44, № 6.—С. 1199–1216.
3. *Авсянкин О. Г., Перетятькин Ф. Г.* Об ограниченности и компактности многомерных интегральных операторов с однородными ядрами // Изв. вузов. Математика.—2013.—№ 11.—С. 64–68.
4. *Авсянкин О. Г.* Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами и коэффициентами, осциллирующими на бесконечности // Диф. уравнения.—2015.—Т. 51, № 9.—С. 1174–1181.
5. *Авсянкин О. Г.* О C^*-алгебре, порожденной многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и операторами мультипликативного сдвига // Докл. РАН.—2008.—Т. 419, № 6.—С. 727–728.
6. *Авсянкин О. Г.* О многомерных интегральных операторах с однородными ядрами, возмущенных операторами одностороннего мультипликативного сдвига // Владикавк. мат. журн.—2013.—Т. 15, № 1.—С. 5–13. DOI: 10.23671/VNC.2013.1.10501.
7. *Авсянкин О. Г.* Проекционный метод для интегральных операторов с однородными ядрами, возмущенных односторонними мультипликативными сдвигами // Изв. вузов. Математика.—2015.—№ 2.—С. 10–17.
8. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.—М.: Наука, 1971.—352 с.
9. *Самко С. Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения.—Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1984.—208 с.

Статья поступила 15 июня 2017 г.

Авсянкин Олег Геннадиевич
Южный федеральный университет,
профессор каф. дифференц. и интегральных уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: avsyanki@math.rsu.ru

Ковальчук Алиса Марковна
Южный федеральный университет,
магистр кафедры дифференц. и интегральных уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: alica759@mail.ru

PAIRED INTEGRAL OPERATORS WITH HOMOGENEOUS KERNELS PERTURBATED BY OPERATORS OF MULTIPLICATIVE SHIFT

Avsyankin O. G., Koval'chuk A. M.

In the space $L_p(\mathbb{R}^n)$, where $1 \leqslant p \leqslant \infty$, we consider an operator B, which is the sum of two terms. The first term is a paired multidimensional integral operator, whose kernels are homogeneous of degree $(-n)$ and invariant with respect to the rotation group of $\mathbb{R}^n$-space, and the second term is a series, convergent in the operator norm, composed of multidimensional multiplicative shift operators with complex coefficients. We impose some additional conditions on the kernels and coefficients of the operator B, and these conditions ensure the boundedness of this operator in the space of summable functions. The main aim of the paper is to study the invertibility of the operator B. To solve this problem we use a special method that allows the reduction of the multidimensional paired operator to an infinite sequence of one-dimensional paired operators B_m, where $m \in \mathbb{Z}_+$. It is shown that the operator B is invertible if and only if all the operators B_m are invertible, where m runs through all values from zero to some finite number m_0. In turn, the operators B_m reduce to integral-difference convolution operators whose theory is well known. All this allowed us to determine the symbol of the operator B. This symbol represents the pair of functions $(\beta_1(m,\xi), \beta_2(m,\xi))$, defined on the set $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$. If the symbol is non-degenerate, then we define in a natural way a real number ν and integers $\varkappa_m$, where $m \in \mathbb{Z}_+$. Numbers ν and $\varkappa_m$ are called indices. The main result of the work is the invertibility criterion of the multidimensional paired operator B in the space $L_p(\mathbb{R}^n)$. According to this criterion, the operator B is invertible if and only if its symbol is non-degenerate, and all its indices are zero.

Key words: paired operator, integral operator, homogeneous kernel, multiplicative shift, invertibility, spherical harmonics.

References

1. *Karapetiants N., Samko S. Equations with Involutive Operators*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2001, 427 p.
2. *Avsyankin O. G., Karapetyants N. K.* On the pseudospectra of multidimensional integral operators with homogeneous kernels of degree $(-n)$, *Siberian Math. J.*, 2003 vol. 44, no 6, pp. 935–950. DOI: 10.1023/B:SIMJ.0000007469.86630.6b.
3. *Avsyankin O. G., Peretyat'kin F. G.* Boundedness and compactness of multidimensional integral operators with homogeneous kernels, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, no. 11, pp. 57–60. DOI: 10.3103/S1066369X13110054.
4. *Avsyankin O. G.* Multidimensional integral operators with homogeneous kernels and with coefficients oscillating at infinity, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 9, pp. 1165–1172.
5. *Avsyankin O. G.* On the C^*-algebra generated by multidimensional integral operators with homogeneous kernels and multiplicative translations, *Doklady Mathematics*, 2008, vol. 77, no. 2, pp. 298–299.
6. *Avsyankin O. G.* On multidimensional integral operators with homogeneous kernels, perturbated by one-sided multiplicative shift operators, *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal* [*Vladikavkaz Math. J.*], 2013, vol. 15, no. 1, pp. 5–13 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2013.1.10501.
7. *Avsyankin O. G.* Projection method for integral operators with homogeneous kernels perturbed by one-sided multiplicative shifts, *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, no. 2, pp. 7–13. DOI: 10.3103/S1066369X15020024.
8. *Gohberg I. C., Feldman I. A. Uravneniya v Svertkah i Proekcionnye Metody ikh Resheniya* [*Convolution Equations and Projection Methods of Their Solution*], Moskow, Nauka, 1971, 352 p.
9. *Samko S. G. Gipersingulyarnye Integraly i ikh Prilozheniya* [*Hypersingular Integrals and Their Applications*], Rostov-on-Don: RSU, 1984, 208 p.

Received 15 June, 2017

Avsyankin Oleg Gennadievich
Vorovich Institute of Mathematic, Mechanic and Computer Science,
of the Southern Federal University,
Professor of the Department of Differential and Integral Equations
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don, 344090, Russia
E-mail: `avsyanki@math.rsu.ru`

Koval'chuk Alica Markovna
Vorovich Institute of Mathematic, Mechanic and Computer Science,
of the Southern Federal University,
Student of the Department of Differential and Integral Equations
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don, 344090, Russia
E-mail: `alica759@mail.ru`