Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 4, С. 35–42

УДК 517.983.2
DOI 10.23671/VNC.2018.4.23385

$L_P - L_Q$-ОЦЕНКИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ЯДРАМИ

М. Н. Гуров[1], **В. А. Ногин**[2]

[1] ЧОУ «Лицей классического элитарного образования»,
Россия, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Пушкинская, 166 А;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: MGurov@inbox.ru, nogin@math.rsu.ru

Аннотация. Получены $L_p - L_q$-оценки для обобщенных потенциалов Рисса с осциллирующими ядрами и характеристиками широкого класса, включающего произведение однородной функции, бесконечно дифференцируемой в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, и функции класса $C^{m,\gamma}(\dot{R}^1_+)$. Описаны выпуклые множества $(1/p, 1/q)$-плоскости, для точек которых упомянутые операторы ограничены из L_p в L_q, и указаны области, где эти операторы не ограничены. В некоторых случаях доказана точность полученных оценок. В частности, получены необходимые и достаточные условия ограниченности исследуемых операторов в L_p. В настоящее время имеется ряд работ по $L_p - L_q$-оценкам для операторов свертки с осциллирующими ядрами, в частности, для операторов Бохнера — Рисса и акустических потенциалов, возникающих в различных задачах анализа и математической физики. В этих работах рассматриваются ядра, содержащие только радиальную характеристику $b(r)$, которая стабилизируется на бесконечности как гёльдеровская функция. Благодаря этому свойству получение оценок для указанных операторов сводилось к случаю оператора с характеристикой $b(r) \equiv 1$. Подобное сведение в принципе невозможно, когда ядро потенциала Рисса содержит однородную характеристику $a(t')$. Поэтому в работе развивается новый метод, основанный на получении специальных представлений для символов рассматриваемых операторов с последующим применением техники Фурье-мультипликаторов, вырождающихся или имеющих особенности на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: потенциал Рисса, осциллирующее ядро, $L_p - L_q$-оценки, $\mathscr{L}$-характеристика.

Mathematical Subject Classification (2000): 46E35, 26A33.

Образец цитирования: *Гуров М. Н., Ногин В. А.* $L_p - L_q$-оценки для операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 4.—С. 35–42. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23385.

Введение

В работе получены $L_p - L_q$-оценки для операторов типа потенциала

$$(R^\alpha \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{a(t')b(|t|)\, e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}} \varphi(x-t)\, dt, \tag{1}$$

где $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$, $a(t')$ $(t' = t/|t|)$ — однородная нулевой степени функция, бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, удовлетворяющая условию $a(t') \not\equiv 0$, $t' \in S^{n-1}$.

Предполагается также, что радиальная функция $b(r)$ принадлежит классу $C^{m,\gamma}(\dot{R}^1_+)$ гёльдеровских функций (см. § 2).

В работе описаны выпуклые множества $(1/p, 1/q)$-плоскости, для точек которых оператор R^α ограничен из L_p в L_q, и указаны области, где этот оператор не ограничен (см. теорему 1.1). В некоторых случаях доказана точность полученных оценок (см. замечание 1.1). В частности, получены необходимые и достаточное условия ограниченности оператора (1) в L_p.

В настоящее время имеется ряд работ по $L_p - L_q$-оценкам для операторов свертки с осциллирующими ядрами, в частности, для операторов Бохнера — Рисса и акустических потенциалов, возникающих в различных задачах анализа и математической физики (см. книги [1] и [2], а также работы [3–6, 7–9]). Во всех упомянутых работах, кроме [3] и [7], рассматривались ядра, содержащие только радиальную характеристику $b(r)$, которая стабилизируется на бесконечности как гёльдеровская функция. Благодаря этому свойству получение оценок для указанных операторов сводилось к случаю оператора с характеристикой $b(r) \equiv 1$. Подобное сведение в принципе невозможно, когда ядро оператора (1) содержит однородную характеристику $a(t')$.

В работе [3] были получены оценки для потенциала (1) в случае $b(|t|) \equiv 1$ и $(n-1)/2 < \operatorname{Re}\alpha < n$. Однако, использованный в ней метод, основанный на представлении оператора R^α_a через оператор Бохнера — Рисса и некоторый оператор, близкий к акустическому потенциалу, не работает при $\operatorname{Re}\alpha \leqslant (n-1)/2$.

В работе [7] развивается новый метод, основанный на получении специальных представлений для символа оператора (1) (в случае $b(|t|) \equiv 1$) с последующим применением техники Фурье-мультипликаторов, вырождающихся или имеющих особенности на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$. Этот метод позволяет получить $L_p - L_q$-оценки для потенциала (1) в случае $b(|t|) \equiv 1$ при любых значениях α, удовлетворяющих условию $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$.

1. Формулировка основного результата

В работе использованы следующие обозначения: $(A, B, \dots, K)$ — открытый многоугольник в $\mathbb{R}^2$ с вершинами в точках $A, B, \dots, K$; $[A, B, \dots, K]$ — его замыкание.

Через $\mathscr{L}(A)$ обозначим $\mathscr{L}$-характеристику оператора A, т. е. множество всех точек $(1/p, 1/q)$-плоскости $(1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty)$ таких, что оператор A ограничен из L_p в L_q.

Пусть $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$. Введем в рассмотрение следующие точки $(1/p, 1/q)$-плоскости:

$$A = \left(1, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad A' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, 0\right),$$

$$C = \left(\frac{3}{2} - \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1}, \frac{3}{2} - \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1}\right), \quad C' = \left(\frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1} - \frac{1}{2}, \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1} - \frac{1}{2}\right),$$

$$E = (1, 0), \quad F = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$G = \left(1 - \frac{(n - \operatorname{Re}\alpha)(n-1)}{n(n+3)}, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad G' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, \frac{(n - \operatorname{Re}\alpha)(n-1)}{n(n+3)}\right),$$

$$H = \left(1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad H' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right),$$

$$O = (1, 1), \quad O' = (0, 0),$$

$$K = \left(\frac{2(\operatorname{Re}\alpha + 1)}{n+1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad K' = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{2(\operatorname{Re}\alpha + 1)}{n+1}\right),$$

$$B = \left(1 - \frac{(n-1)(n-\operatorname{Re}\alpha)}{n(n+1)}, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad B' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, \frac{(n-1)(n-\operatorname{Re}\alpha)}{n(n+1)}\right).$$

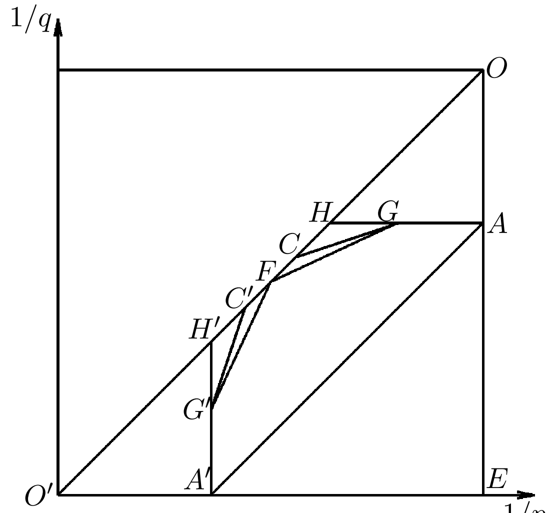

Рис. 1.

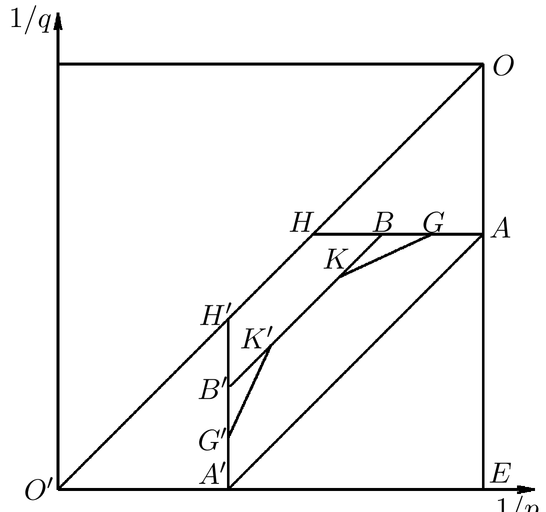

Рис. 2.

Нам понадобятся также следующие множества на $(1/p, 1/q)$-плоскости (см. рис. 1 и 2 для случаев $0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n-1}{2}$ и $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ соответственно):

$$\mathscr{L}_1(\alpha, n) = \begin{cases} [A', H', H, A, E] \setminus ([A', H'] \cup [A, H]), & 0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n(n-1)}{2(n+1)}, \\ (A', G', C', C, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (C', C), & \frac{n(n-1)}{2(n+1)} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n-1}{2}, \\ (A', G', F, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup \{F\}, & \operatorname{Re}\alpha = \frac{n-1}{2},\ \operatorname{Im}\alpha \neq 0, \\ (A', G', F, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E), & \alpha = \frac{n-1}{2}, \\ (A', G', K', K, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup [K', K], & \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n}{2}, \\ (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E), & \frac{n}{2} \leqslant \operatorname{Re}\alpha < n,\ \operatorname{Im}\alpha \neq 0, \\ (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (B', B), & \frac{n}{2} \leqslant \alpha < n, \end{cases}$$

$$\mathscr{L}_2(\alpha, n) = [O, A, A', O'] \setminus (\{A'\} \cup \{A\}).$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$.

I. *Справедливо вложение*

$$\mathscr{L}(R^\alpha) \supset \mathscr{L}_1(\alpha, n) \cap \mathscr{L}_2(\alpha, n). \tag{2}$$

II. *Множество* $\mathscr{L}(R^\alpha)$ *не содержит точек лежащих:*

1) *на отрезке* $[A, H]$ *и выше него, если* $a(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in S^{n-1}$;

2) *на отрезке* $[A', H']$ *и левее него при том же условии на характеристику* $a(\sigma)$, *что и в п.* 1);

3) *на отрезке* $[O', O]$, *если* $\alpha = (n-1)/2$;

4) *ниже прямой* $A'A$, *а также точки* A' *и* A.

Замечание 1.1. При $0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n(n-1)}{2(n+1)}$ и $n/2 \leqslant \alpha < n$ полученные оценки являются точными. А именно,

$$\mathscr{L}(R^\alpha) = [A', H', H, A] \setminus ([A', H'] \cup [A, H]), \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n(n-1)}{2(n+1)},$$

$$\mathscr{L}(R^\alpha) = (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (B', B), \quad n/2 \leqslant \alpha < n.$$

В частности, для таких α получено необходимое и достаточное условие ограниченности оператора (1) в L_p. Именно, этот оператор ограничен в L_p тогда и только тогда, когда $n/(n - \operatorname{Re}\alpha) < p < n/\operatorname{Re}\alpha$.

2. Вспомогательные сведения и утверждения

Следуя [1], будем говорить, что функция $f(r)$ принадлежит классу $C^{m;\gamma}(\dot{R}^1_+)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, и $0 \leqslant \gamma \leqslant m$, если выполнены следующие условия:

i) функция $f(r) \in C^m(R^1_+ \setminus \{0\})$;

ii) функция $f^*(r) = f(\frac{1}{r})$ имеет в точке $r = 0$ производные до m-го порядка включительно;

iii) в точке $r = 0$ функция $f(r)$ имеет непрерывные производные до порядка $[\gamma]$ включительно, и справедлива оценка

$$|f^{(p)}(r)| \leqslant r^{\gamma - p},$$

при $r \to 0$, $p = [\gamma] + 1, \dots, m$.

В случае $\gamma = m$ имеем $C^{m;m}(\dot{R}^1_+) = C^m(\dot{R}^1_+)$.

Лемма 2.1 [1]. *Пусть* $f(r) \in C^{m,\gamma}(\dot{R}^1_+)$, $m \geqslant 1$. *Тогда справедливо разложение*

$$f(r) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{(1+r^2)^{k/2}} + f_m(r),$$

где

$$a_k = \frac{1}{k!} f_*^{(k)}(0) = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{(1+r^2)^{3/2}}{r} \frac{d}{dr} \right)^k f(r)\big|_{r=\infty}, \tag{3}$$

$$f_m(r) = \frac{1}{(m-1)!(1+r^2)^{m/2}} \int\limits_0^1 (1-u)^{m-1} f_*^{(m)} \left(\frac{u}{\sqrt{1+r^2}} \right) du. \tag{4}$$

Здесь $f_*(t) = f\left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right)$.

Кроме того, справедлива оценка

$$|f_m(r)| \leqslant c(1+r^2)^{-\frac{m}{2}}, \tag{5}$$

для некоторого $c > 0$.

Далее, рассмотрим потенциал

$$(R_a^\alpha \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{a(t')e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}} \varphi(x-t)\, dt,$$

где $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$, $a(t')$, $t' = t/|t|$, — однородная нулевой степени функция, бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, удовлетворяющая условию $a(t') \not\equiv 0$, $t' \in S^{n-1}$.

В работе доказана следующая

Теорема 2.1 [7]. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$.

I. *Справедливо вложение*

$$\mathscr{L}(R_a^\alpha) \supset \mathscr{L}_1(\alpha, n) \cap \mathscr{L}_2(\alpha, n).$$

II. *Множество* $\mathscr{L}(R_a^\alpha)$ *не содержит точек, лежащих:*

1) *на отрезке* $[A, H]$ *и выше него, если* $a(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in S^{n-1}$;

2) *на отрезке* $[A', H']$ *и левее него при том же условии на характеристику* $a(\sigma)$, *что и в п.* 1);

3) *на отрезке* $[O', O]$, *если* $\alpha = (n-1)/2$;

4) *ниже прямой* $A'A$, *а также точки* A' *и* A.

3. Доказательство основного результата

Имеем

$$(R^\alpha \varphi)(x) = \left(\int\limits_{|t|<1} + \int\limits_{|t|>1} \right) \frac{b(|t|)a(t')e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}} \varphi(x-t)\, dt \equiv (M^{\alpha,0}\varphi)(x) + (M^{\alpha,\infty}\varphi)(x).$$

Отметим, что ядро $m^{\alpha,0}(t)$ оператора $M^{\alpha,0}$ принадлежит L_1. Следовательно, оператор $M^{\alpha,0}$ ограничен в L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

С другой стороны, для оператора $M^{\alpha,0}$ справедлива теорема Соболева. Отсюда следует, что

$$\mathscr{L}(M^{\alpha,0}) \supset [O', O, A, A'] \setminus (\{A'\} \cup \{A\}). \tag{6}$$

Рассуждая так же, как и в статье [6], заключаем, что $\mathscr{L}(M^{\alpha,0})$ не содержит точек множества $[A', A, E] \setminus (A', A)$.

Рассмотрим оператор $M^{\alpha,\infty}$. В силу леммы 2.1 имеем

$$b(r) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{(1+r^2)^{k/2}} + b_m(r),$$

где коэффициенты a_k и функция $b_m(r)$ определяются равенствами (3) и (4) соответственно.

Разложив функцию $(1+r^2)^{-k/2}$ по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, будем иметь

$$b(r)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{a_k}{r^k}\left(1+\sum_{s=1}^{l-1}\binom{-\frac{k}{2}}{s}\frac{1}{r^{2s}}+R_l\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)+b_m(r), \tag{7}$$

где $r>1$, $m\geqslant 1$, $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$,

$$R_l\left(\frac{1}{r^2}\right)=\frac{1}{r^{2l}\ (l-1)!}\int\limits_0^1(1-u)^{l-1}((1+\frac{u}{r^2})^{-k/2})^{(l)}\,du,$$

здесь $l=\left[\frac{\alpha}{2}\right]+1$.

С учетом (7) получаем

$$\begin{aligned}(M^{\alpha,\infty}\varphi)(x)&=a_0(R_a^{\alpha})(x)+\sum_{k=1}^{m-1}a_k(R_a^{\alpha-k})(x)\\&+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{s=1}^{l-1}\binom{-\frac{k}{2}}{s}a_k(R_a^{\alpha-k-2s})(x)+\sum_{k=0}^{m-1}a_k(T_a^{\alpha-k}\varphi)(x)+(S_a^{\alpha}\varphi)(x).\end{aligned}$$

Здесь

$$(T_a^{\alpha-k}\varphi)(x)=\int\limits_{|t|>1}\frac{a(t')R_l(1/|t|^2)e^{i|t|}}{|t|^{n-(\alpha-k)}}\varphi(x-t)\,dt,$$

$$(S_a^{\alpha}\varphi)(x)=\int\limits_{|t|>1}\frac{a(t')b_m(|t|)e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}}\varphi(x-t)\,dt.$$

Заметим, что для операторов R^{α} и $R^{\alpha-k-2s}$ $(0\leqslant k\leqslant m-1,\ 1\leqslant s\leqslant l-1)$ справедлива теорема 2.1. Из указанной теоремы вытекают вложения

$$\mathscr{L}(R_a^{\alpha})\supset\mathscr{L}_1(\alpha,n)\cap\mathscr{L}_2(\alpha,n); \tag{8}$$

$$\mathscr{L}(R_a^{\alpha-k-2s})\supset\mathscr{L}_1(\alpha,n)\cap\mathscr{L}_2(\alpha,n). \tag{9}$$

Кроме того, из утверждений п. II теоремы 2.1 вытекает, что множество $\mathscr{L}(R_a^{\alpha})$ не содержит точек, лежащих:

1) на отрезке $[A,H]$ и выше него, если $a(\sigma)\neq 0$, $\sigma\in S^{n-1}$;

2) на отрезке $[A',H']$ и левее него при том же условии на характеристику $a(\sigma)$, что и в п. 1);

3) на отрезке $[O',O]$, если $\alpha=(n-1)/2$;

4) ниже прямой $A'A$, а также точки A' и A.

Поскольку ядра операторов $T_a^{\alpha-k}$, $0\leqslant k\leqslant m-1$, принадлежат L_1, то, с одной стороны, операторы $T_a^{\alpha-k}$ ограничены в $L_p, 1\leqslant p<\infty$, а с другой — в L_∞.

Интерполируя, получаем

$$\mathscr{L}(T_a^{\alpha-k})=[O',O,E],\quad 0\leqslant k\leqslant m-1. \tag{10}$$

Далее, с учетом (5) имеем

$$\mathscr{L}(S_a^{\alpha})=[O',O,E]. \tag{11}$$

Из условий (6), (8)–(11) вытекает утверждение теоремы 1.1.

Литература

1. *Samko S. G.* Hypersingular Integrals and Their Applications.—London: Taylor and Frances. Internat. Series «Analytical Methods and Special Functions», 2002.—Vol. 5.—376 p.
2. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-variable Method, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.—Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.—355 p.
3. *Betilgiriev M. A., Karasev D. N., Nogin V. A.* $L_p - L_q$-estimates for some potential type operators with oscillating kernels // Fract. Calc. Appl. Anal.—2004.—Vol. 7, №2.—P. 213–241.
4. *Börjeson L.* Estimates for the Bochner–Riesz operator with negative index // Indiana Univ. Math. J.—1986.—Vol. 35, №2.—P. 225–233.
5. *Karapetyants A. N., Karasev D. N., Nogin V. A.* $L_p - L_q$-estimates for some fractional acoustic potentials and some related operators // Fract. Calc. Appl. Anal.—2005.—Vol. 7, №1.—P. 155–172.
6. *Karasev D. N., Nogin V. A.* On the boundness of some potential–type operators with oscillating kernels // Math. Nachr.—2005.—Vol. 278, № 5.—P. 554–574. DOI: 10.1002/mana.200310258.
7. *Гуров М. Н., Ногин В. А.* $L_p - L_q$-оценки для обобщенных потенциалов Рисса с осциллирующими ядрами // Владикавк. мат. журн.—2017.—Т. 19, № 1.—С. 3–10. DOI: 10.23671/VNC.2017.2.6503.
8. *Карапетянц А. Н., Карасев Д. Н., Ногин В. А.* Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Изв. НАН Армении.—2003.—Т. 38, № 2—С. 37–62.
9. *Карасев Д. Н.* $L_p - L_q$-оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Диф. уравнения.—2003.—Т. 39, № 3.—С. 418–420.

Статья поступила 17 марта 2018 г.

Гуров Михаил Николаевич
ЧОУ «Лицей классического элитарного образования»,
учитель математики
РОССИЯ, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Пушкинская, 166 А
E-mail: MGurov@inbox.ru

Ногин Владимир Александрович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: nogin@math.rsu.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 4, P. 35–42

$L_p - L_q$-ESTIMATES FOR POTENTIAL-TYPE OPERATORS WITH OSCILLATING KERNELS

Gurov, M. N.[1] and Nogin, V. A.[2]

[1] ISC «Lyceum of Classical Elite Education»,
166 A Pushkinskaya str., Rostov-on-don 344006, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus st., Vladikavkaz 362027, Russia
E-mail: MGurov@inbox.ru, nogin@math.rsu.ru

Abstract. We consider a class of multidimensional potential-type operators whose kernels are oscillating at infinity. The characteristics of these operators are from a wide class of functions including the product of a homogeneous function infinitely differentiable in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ and any function from $C^{m,\gamma}(\dot{R}^1_+)$. We describe convex sets in the $(1/p; 1/q)$-plane for which these operators are bounded from L_p into L_q and indicate the domains where they are not bounded. In some cases, the accuracy of the estimates obtained is proved. In particular, necessary and sufficient conditions for the boundedness of the operators under considered in L_p are obtained. Currently, there is a number of papers on $L_p - L_q$-estimates for convolution operators with oscillating kernels, in particular, for the Bochner–Riesz operators and acoustic potentials arising in various problems of analysis and mathematical physics. These papers cover kernels containing only the radial characteristic $b(r)$, which stabilized at infinity as a Hëlder function. Due to this property, the derivation of estimates for the indicated operators was reduced to the case of an operator with the characteristic $b(r) \equiv 1$. Such a reduction is impossible when the Riesz potential kernel contains a homogeneous characteristic $a(t')$. To receive the results we use new method which based on special representation of the symbols multidimensional potential-type operators. To these representations of the symbols we apply the technique of Fourier-multipliers, which degenerate or have singularities on the unit sphere in $\mathbb{R}^n$.

Key words: potential-type operators, oscillating kernel, $L_p - L_q$-estimates, $\mathscr{L}$-characteristics.

Mathematical Subject Classification (2000): 46E35, 26A33.

For citation: *Gurov, M. N. and Nogin, V. A.* $L_p - L_q$-Estimates for Potential-Type Operators with Oscillating Kernels, *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 4, pp. 35–42 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23385.

References

1. *Samko, S. G. Hypersingular Integrals and Their Applications, Internat. Series «Analytical Methods and Special Functions» vol.* 5, London, Taylor and Frances, 2002, 376 p.
2. *Stein, E. M. Harmonic Analysis: Real-Variable Method, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton, Princeton Univ. Press, 1993, 355 p.
3. *Betilgiriev, M. A., Karasev, D. N. and Nogin V. A.* $L_p - L_q$-Estimates for Some Potential Type Operators with Oscillating Kernels, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2004, vol. 7, no. 2, pp. 213–241.
4. *Börjeson, L.* Estimates for the Bochner–Riesz Operator with Negative Index, *Indiana University Mathematics Journal*, 1986, vol. 35, no. 2, pp. 225–233.
5. *Karapetyants, A. N., Karasev, D. N. and Nogin V. A.* $L_p - L_q$-estimates for some fractional acoustic potentials and some related operators, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2005, vol. 7, no. 1, pp. 155–72.
6. *Karasev, D. N. and Nogin, V. A.* On the Boundness of Some Potential-Type Operators with Oscillating Kernels, *Mathematische Nachrichten*, 2005, vol. 278, no. 5, pp. 554–574. DOI: 10.1002/mana.200310258.
7. *Gurov, M. N. and Nogin, V. A.* $L_p - L_q$-estimates for Generalized Riss Potentials with Oscillating Kernels, *Vladikavkaz Math. J.*, 2017, vol. 19, no. 2, pp. 3–10 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2017.2.6503.
8. *Karapetyants, A. N., Karasev, D. N. and Nogin, V. A.* Estimates for Some Potential-Type Operators with Oscillating Kernels, *Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*, 2003, vol. 38, no. 2, pp. 37–62 (in Russian).
9. *Karasev, D. N.* $L_p - L_q$-Estimates for Some Potential Type Operators with Oscillating Kernels, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 3, pp. 453–456. DOI: 10.1023/A:1026094323206.

Received March 17, 2018

Michael N. Gurov
ISC «Lyceum of Classical Elite Education»,
166 A Pushkinskaya str., Rostov-on-don 344006, Russia,
Mathematics Teacher
E-mail: `MGurov@inbox.ru`

Vladimir A. Nogin
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus st., Vladikavkaz 362027, Russia,
Senior Researcher of the Department of Math. Analysis
E-mail: `nogin@math.rsu.ru`